



تحلیل اجزای محدود لایه‌ای ورق‌های کامپوزیت با استفاده از المان غشایی نامتقارن و المان خمشی ناسازگار

حسین سنگتراش^۱، حامد قوهانی عرب^{۲*}، محمدرضا سهرابی^۳ و محمدرضا قاسمی^۴

^۱ دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

^۲ استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

^۳ دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

^۴ استاد، مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۱۱/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۱۳

چکیده

در این تحقیق با ترکیب یک المان خمشی و یک المان غشایی، المان چهار گره‌ای جدیدی به منظور تحلیل اجزای محدود لایه‌ای ورق‌های کامپوزیت ارائه شده است. بخش غشایی المان، یک المان جدید چهارضلعی نامتقارن با درجات آزادی اضافی است که در آن از دو میدان جابه‌جایی متفاوت به عنوان تابع معیار و تابع تقریب استفاده شده است. تابع معیار استفاده شده، تابعی جدید از جنس جابه‌جایی است که در آن درجات آزادی اضافی با استفاده از درون‌یابی در طول ضلع المان محاسبه شده است. تابع تقریب المان یک میدان تنش است که از حل تحلیلی تابع تنش ایری محاسبه می‌شود. بخش خمشی المان ارائه شده، یک المان ورق ناسازگار است که در آن جابه‌جایی المان با استفاده از مودهای تغییر شکل مرتبه سوم و میدان پیچشی المان با استفاده از ماتریس ژاکوبین مرتبه اول محاسبه شده است. نتایج عددی بدست آمده از حل مسائل استاندارد عددی نشان می‌دهد؛ المان معرفی شده قادر به تحلیل ورق‌های کامپوزیت با هندسه و شرایط مرزی مختلف است. مقدار حداکثر خطای این المان در حل مسائل عددی بررسی شده، ۱/۵ درصد است.

کلمات کلیدی: ورق‌های کامپوزیت؛ تحلیل عددی؛ اجزای محدود لایه‌ای؛ المان غشایی.

Layered finite element analysis of laminated composite plates by using unsymmetric membrane element and non-conforming bending element

H. Sangtarash¹, H. Ghohani Arab^{2*}, M.R. Sohrabi³, M.R. Ghasemi⁴

¹ Ph.D. Student, Civil Eng., Sistan and Baluchestan Univ., Zahedan, Iran.

² Assist. Prof., Civil Eng., Sistan and Baluchestan Univ., Zahedan, Iran.

³ Assoc. Prof., Civil Eng., Sistan and Baluchestan Univ., Zahedan, Iran.

⁴ Prof., Civil Eng., Sistan and Baluchestan Univ., Zahedan, Iran.

Abstract

This study presents a new quadrilateral element for layered finite element analysis of laminated composite plates which is obtained through assemblage of membrane and plate bending elements. The membrane component is a new unsymmetric quadrilateral element with drilling degrees of freedom, in which two different types of displacement fields are used as the test and trial functions. The test function is a new kind of displacement field with drilling degrees of freedom obtained by using interpolation along the element edges. The trial function is a stress field computed through analytical solutions of Airy stress function. The bending component of proposed element is a non-conforming plate element that its displacement is computed using third-order deformation modes and the rotational field of element is defined by using first-order Jacobean matrix. The results of numerical benchmark problems show that the the proposed element is capable for analysis of laminated composite plates with various geometry and boundary. The maximum error of the proposed element among the considered numerical problems is only 1.5 percent.

Keywords: Laminated Composite Plates; Numerical Analysis; Layered Finite Element Method; Membrane Element.

۱- مقدمه

به دلیل استفاده گسترده از ورق‌های کامپوزیت در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی، یکی از موضوعات تحقیقاتی جذاب برای پژوهشگران، مدل‌سازی، تحلیل و طراحی ورق‌های کامپوزیت است. در این زمینه تا به امروز گام‌های موثری برداشته شده است. به عنوان نمونه می‌توان به بررسی مقاومت کماتش ورق‌های کامپوزیت [۱]، مدل‌سازی عددی و تجربی ورق‌های کامپوزیت تحت بارگذاری انفجاری [۲] و تحلیل اجزای محدود غیرخطی کامپوزیت‌ها [۳] اشاره کرد. نکته قابل توجه در ورق‌های کامپوزیت، خواص مکانیکی ناپیوسته این ورق‌ها در ضخامتشان است. در این ورق‌ها به دلیل وجود خواص مکانیکی متفاوت در جهات و لایه‌های مختلف، رفتار کلی ورق ناهمسانگرد در نظر گرفته می‌شود. از این رو تعیین دقیق پاسخ سازه‌ای ورق کامپوزیت، همواره یکی از چالش‌های اصلی هنگام استفاده از این ورق‌ها است. یکی از روش‌های متداول در تحلیل این نوع ورق‌ها، روش اجزای محدود لایه‌ای است. این روش در زمینه‌های مختلف تحلیلی، مخصوصاً جهت تحلیل استاتیکی ورق‌های کامپوزیت مورد استفاده قرار می‌گیرد. اساس این روش محاسبه ماتریس مواد برای هر لایه از المان و در نهایت محاسبه ماتریس مواد معادل برای کل المان است. به عنوان مثال، پانیدا و کانت [۴] با استفاده از مدل جابه‌جایی مرتبه بالاتر المان نه‌گره‌ای جهت تحلیل اجزای محدود لایه‌ای ورق‌های کامپوزیت ارائه نموده‌اند. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد، المان معرفی شده هزینه محاسباتی زیادی برای رسیدن به دقت مناسب دارد. تایچی و آکرمن [۵]، المان غشایی مثلثی لایه‌ای جهت مدل‌سازی ورق‌های کامپوزیت معرفی کردند و عملکرد آن را با استفاده از نتایج آزمایشگاهی مورد ارزیابی قرار داده‌اند. نتایج بدست آمده بیانگر دقت مناسب المان معرفی شده در تحلیل ورق‌های کامپوزیت است؛ اما بزرگترین محدودیت این المان، عدم توانایی در حل مسائلی با رفتار خمشی است. کانت و خاره [۶] با استفاده از مدل جابه‌جایی مرتبه بالاتر المان نه‌گره‌ای جهت تحلیل اجزای محدود لایه‌ای ورق‌های کامپوزیت ارائه کردند. مزیت اصلی آن نسبت به المان‌های دیگر عدم وجود ضریب تصحیح برش در فرمول‌بندی است. نتایج عددی بدست آمده نشان می‌دهد، المان معرفی شده در مقایسه با سایر المان‌ها از دقت کمتر و هزینه محاسباتی

بیشتری برخوردار است. به منظور تحلیل استاتیکی ورق‌های کامپوزیت، اِسوامیناتان و پاتیل [۷] مدل اجزای محدودی جهت تحلیل لایه‌ای ورق‌های کامپوزیت ارائه کردند. نتایج بدست آمده نشان دهنده عملکرد مطلوب المان در پیش‌بینی رفتار ورق در سطوح صاف و بدون انحنا است. لاتسواری و همکاران [۸]، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر المانی چهار‌گره‌ای جهت تحلیل اجزای محدود لایه‌ای ورق‌های کامپوزیت ارائه کردند. نتایج بدست آمده نشان دهنده، دقت مطلوب المان ارائه شده تنها در ورق‌های کامپوزیت نسبتاً ضخیم بود. در تحقیقی مشابه در سال ۲۰۱۷، کاهیا و توران [۹] المان تیر لایه‌ای با استفاده از تئوری مرتبه بالاتر جهت تحلیل تیرهای کامپوزیت ارائه کردند. با وجود دقت مناسب و هزینه کم محاسباتی این المان، محدود بودن قابلیت المان به تحلیل تیر، مهم‌ترین چالش اصلی این المان است. با دقت در تحقیقات پیشین صورت گرفته، مشاهده می‌شود؛ چالش اصلی در تحلیل ورق‌های کامپوزیت به روش اجزای محدود لایه‌ای، استفاده از المانی با دقت و هزینه محاسباتی مناسب است.

در این تحقیق با استفاده از یک المان غشایی نامتقارن و یک المان خمشی ناسازگار، المانی جهت تحلیل اجزای محدود لایه‌ای ورق‌های کامپوزیت معرفی شده است. المان معرفی شده نسبت به هندسه و شرایط مرزی مسئله حساسیت بسیار کمی دارد؛ همچنین با دقت بهتری نسبت به سایر المان‌های قبلی، جواب مسئله را محاسبه می‌کند. بخش غشایی المان معرفی شده یک المان با فرمول‌بندی روش اجزای محدود نامتقارن با درجات آزادی اضافی است که تابع معیار^۱ آن از جنس جابه‌جایی و تابع تقریب^۲ آن از جنس تنش است. بخش خمشی المان معرفی شده یک المان ناسازگار است که میدان جابه‌جایی آن براساس مودهای مرتبه سوم تغییرشکل المان است. در این تحقیق، دقت المان معرفی شده با استفاده از چند مسئله استاندارد عددی مورد بررسی قرار گرفته است؛ همچنین به منظور ارزیابی عملکرد المان معرفی شده، نتایج بدست آمده با نتایج سایر تحقیقات مورد مقایسه قرار گرفته است.

¹ Test Function

² Trial Function

ماتریس مواد ورق کامپوزیت در حالت تنش مسطحه محاسبه می‌شود. در این حالت ماتریس مواد (Q) ورق کامپوزیت یک ماتریس ۳×۳ است که درایه‌های آن با استفاده از رابطه (۳) محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= q_{11} \cos^4(\theta) + 2(q_{12} + 2G_{12}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + q_{22} \sin^4(\theta) \\ Q_{1,2} &= Q_{2,1} = (q_{11} + q_{22} - 4G_{12}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + q_{12} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \\ Q_{2,2} &= q_{11} \sin^4(\theta) + 2(q_{12} + 2G_{12}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + \cos^4(\theta) q_{22} \\ Q_{1,3} &= Q_{3,1} = (q_{11} - q_{12} - 2G_{12}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) + (q_{12} - q_{22} + 2G_{12}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\ Q_{2,3} &= Q_{3,2} = (q_{11} - q_{12} - 2G_{12}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) + (q_{12} - q_{22} + 2G_{12}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ Q_{3,3} &= (q_{11} + q_{22} - 2q_{12} - 2G_{12}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + G_{12} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \end{aligned} \quad (۳)$$

در رابطه (۳)، زاویه قرار گیری رشته‌ها، G_{12} مدول برشی و ضرایب q_{11} ، q_{12} ، q_{22} و v_{12} توسط رابطه (۴) محاسبه می‌گردند:

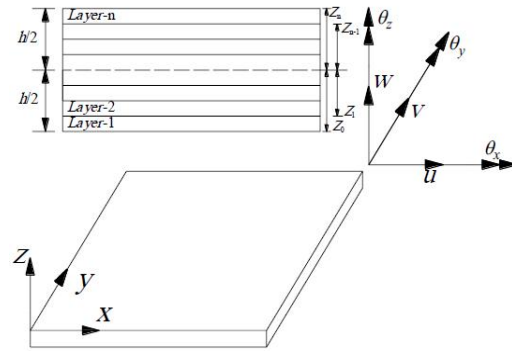
$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{E_1}{-v_{12}v_{21} + 1}, \quad q_{12} = \frac{v_{12}E_2}{-v_{12}v_{21} + 1} \\ q_{22} &= \frac{E_2}{-v_{12}v_{21} + 1}, \quad v_{21} = \frac{v_{12}E_2}{E_1} \end{aligned} \quad (۴)$$

در رابطه (۴)، مقادیر E_1 و E_2 مدول الاستیسیته در دو جهت اصلی و v_{12} ضریب پواسون ورق کامپوزیت می‌باشند. با مشخص شدن ماتریس مواد در حالت تنش مسطحه برای ورق کامپوزیت، مقادیر مربوط به ماتریس سفتی محوری مواد، ماتریس سفتی خمشی-کششی مواد و ماتریس سفتی خمشی مواد مطابق رابطه (۵) [۱۰] محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= \int_{-h/2}^{h/2} Q_{i,j} dz \\ B_{i,j} &= \int_{-h/2}^{h/2} z Q_{i,j} dz \quad i, j = 1, 2, 3 \\ D_{i,j} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 Q_{i,j} dz \end{aligned} \quad (۵)$$

۲- روابط حاکم بر المان لایه‌ای

در روش اجزای محدود لایه‌ای، هر المان از تعدادی لایه با ضخامت و جنس متفاوت تشکیل شده است. در این روش ماتریس سختی کلی المان، از مجموع ماتریس‌های سختی لایه‌های تشکیل دهنده المان محاسبه می‌شود. از آنجایی که ورق کامپوزیت خود از روی هم قرار گرفتن چند ورقه تشکیل شده است، می‌توان هنگام تحلیل به روش اجزای محدود لایه‌ای تعداد لایه‌های المان را برابر با تعداد ورقه‌ها انتخاب کرد. همچنین در صورت بررسی یک ورقه خاص می‌توان تعداد لایه‌های بیشتری در آن ورقه در نظر گرفت. شکل کلی المان لایه‌ای معرفی شده و جزئیات لایه‌های آن در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱- المان معرفی شده و جزئیات لایه‌های آن

برای المان لایه‌ای معرفی شده، مقدار کرنش المان براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با استفاده از رابطه (۱) [۱۰] محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (۱)$$

در رابطه (۱)، $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ کرنش المان غشایی و $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ کرنش المان خمشی است. برای این المان رابطه کلی تنش-کرنش به صورت رابطه (۲) بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p \end{bmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (۲)$$

در رابطه (۲)، \mathbf{A} ماتریس سفتی محوری مواد، \mathbf{B} ماتریس سفتی خمشی-کششی مواد و \mathbf{D} ماتریس سفتی خمشی مواد می‌باشند. مقادیر مربوط به این ماتریس‌ها با استفاده از

۲-۱- معرفی بخش غشایی المان ارائه شده

المان غشایی در نظر گرفته شده، یک المان جدید چهار گره‌ای با درجات آزادی اضافی است که فرمول‌بندی آن براساس روش اجزای محدود نامتقارن پایه‌ریزی شده است. روش اجزای محدود نامتقارن، اولین بار توسط راجندران و لیو [۱۱] معرفی شده است. در این روش که کلیات آن براساس روش پترو-گلرکینگ^۱ است، از دو تابع متفاوت از جنس جابه‌جایی به عنوان تابع معیار و تابع تقریب در روابط حاکم بر المان استفاده شده است. مشکل اصلی این روش، وابستگی المان به دستگاه مختصات و استفاده از توابع درون‌یاب خاصی است که فاقد عملکرد مطلوب می‌باشند. در ادامه با استفاده از دستگاه مختصات محلی برای تابع تقریب [۱۲] و همچنین معرفی تابع تقریب تحلیلی [۱۳]، نمونه اصلاح شده‌ای از روش اجزای محدود نامتقارن معرفی شده است. نتایج بدست آمده از مسائل عددی، نشان دهنده عملکرد مطلوب این روش است. در سال ۲۰۱۸ ویرایش جدیدی از روش اجزای محدود نامتقارن توسط شانگ و آویانگ [۱۴] ارائه گردید که در آن از تابع تقریب تحلیلی از جنس تنش استفاده شده است. در این تحقیق با استفاده از ویرایش جدید روش اجزای محدود نامتقارن، المان جدید چهارگره‌ای ارائه می‌شود که در هر گره ۲ درجه آزادی انتقالی (u, v) و یک درجه آزادی پیچشی اضافه شده (θ_z) وجود دارد. در رابطه (۶) بردار جابه‌جایی المان غشایی نشان داده شده است:

$$\mathbf{q}_m^T = \{u_i, v_i, \theta_{zi}\} \quad (i=1 \sim 4) \quad (6)$$

تابع معیار در نظر گرفته شده در این المان، تابعی جدید از جنس جابه‌جایی است که با استفاده از توابع درونیاب المان‌های چهارگره‌ای ایزوپارامتریک مشابه تحقیق زوواری و همکاران [۱۵] محاسبه می‌شود. با این تفاوت که در پژوهش حاضر، برای نخستین بار درجات آزادی پیچشی برای هر گره با استفاده از روش درونیابی پیشنهاد شده توسط هوانگ و همکاران [۱۶] محاسبه شده است. جزییات تابع معیار در نظر گرفته شده مطابق رابطه (۷) است:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{q}_m = [\bar{\mathbf{N}}_1 \quad \bar{\mathbf{N}}_2 \quad \bar{\mathbf{N}}_3 \quad \bar{\mathbf{N}}_4] \mathbf{q}_m \quad (7)$$

در رابطه (۷) $\bar{\mathbf{N}}_i$ مربوط به هر گره از المان غشایی است که مطابق رابطه (۸) محاسبه می‌شود:

$$\bar{\mathbf{N}}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & -\frac{2}{3}N_i(y-y_i) \\ 0 & N_i & \frac{2}{3}N_i(x-x_i) \end{bmatrix} \quad (8)$$

در رابطه (۸)، (x_i, y_i) مختصات گره i ام، $x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$ ، $y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$ و N_i توابع شکل درون‌یاب برای المان ایزوپارامتریک در مختصات محلی می‌باشند که توسط رابطه (۹) [۱۴] محاسبه می‌شود:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), (i=1 \sim 4) \quad (9)$$

(ξ_i, η_i) مختصات گره‌ها در مختصات محلی المان می‌باشند. براین اساس ماتریس کرنش، مطابق رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{q}_m = [\bar{\mathbf{B}}_1 \quad \bar{\mathbf{B}}_2 \quad \bar{\mathbf{B}}_3 \quad \bar{\mathbf{B}}_4] \mathbf{q}_m \quad (10)$$

که در آن

$$\bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -\frac{2}{3} \frac{\partial N_i}{\partial x} (y - y_i) \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{2}{3} \frac{\partial N_i}{\partial y} (x - x_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{2}{3} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} (x - x_i) - \frac{\partial N_i}{\partial y} (y - y_i) \right) \end{bmatrix} \quad (11)$$

برخلاف تابع معیار، تابع تقریب $(\hat{\mathbf{u}})$ استفاده شده در المان غشایی معرفی شده از جنس تنش است و مطابق رابطه (۱۲) [۱۴] محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{T}} \mathbf{q}_m \quad (12)$$

در رابطه (۱۲) مقدار $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ مطابق رابطه (۱۳) [۱۴] فرض می‌شود:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L} \boldsymbol{\alpha} \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)، $\boldsymbol{\alpha}$ بردار ضرایب نامعین و \mathbf{L} ماتریس تنش است که درایه‌های آن با استفاده از حل تحلیلی تابع تنش ابری در مختصات کارتزین [۱۴] محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sigma_{xi} \\ \dots \\ \sigma_{yi} \\ \dots \\ \tau_{xyi} \end{bmatrix}, (i=1 \sim 7) \quad (14)$$

¹ Petrov-Galerkin Method

در رابطه (۲۱)، \mathbf{R} نیروی جسمی و \mathbf{I} نیروی اعمال شده در سطح هستند. با استفاده از روابط (۱۰)، (۱۶) و (۱۸) رابطه (۲۱) به صورت رابطه (۲۲) قابل بازنویسی است:

$$\int_V \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \int_V \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} dV - \int_\Gamma \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} d\Gamma = (\delta \mathbf{q}_m)^T \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{L} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{q}_m dV - \int_V (\bar{\mathbf{N}}_m)^T \mathbf{R} dV - \int_\Gamma (\bar{\mathbf{N}}_m)^T \mathbf{I} d\Gamma = (\delta \mathbf{q}_m)^T (\mathbf{K}_m \mathbf{q}_m - \mathbf{P}_m) = 0 \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)، \mathbf{K}_m ماتریس سختی المان و \mathbf{P}_m بردار نیرو المان غشایی می‌باشند که توسط رابطه (۲۳) قابل محاسبه‌اند:

$$\mathbf{K}_m = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{L} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{q}_m dV \quad \mathbf{P}_m = \int_V (\bar{\mathbf{N}}_m)^T \mathbf{R} dV + \int_\Gamma (\bar{\mathbf{N}}_m)^T \mathbf{I} d\Gamma \quad (23)$$

۲-۲- معرفی بخش خمشی المان ارائه شده

بخش خمشی المان پوسته‌ای معرفی شده، یک المان ورق ناسازگار با نام MKQ12 است. این المان براساس تئوری ورق‌های نازک کیرشهوف توسط کارکن و رضایی‌پژند [۱۸] معرفی شده است. مهم‌ترین ویژگی این المان، دقت مناسب در حل مسائل خمشی با وجود داشتن فرمول‌بندی ساده است. در این المان مقادیر مربوط به جابه‌جایی با استفاده از مودهای تغییر شکل ورق و پیچش در هر گره با استفاده از ماتریس ژاکوبین مرتبه اول محاسبه شده است. درجات آزادی این المان شامل، یک درجه آزادی انتقالی (w) و دو درجه آزادی پیچشی (θ_x, θ_y) در هر گره است. رابطه (۲۴) بردار جابه‌جایی المان خمشی انتخاب شده را نشان می‌دهد:

$$\mathbf{q}_p^T = \{w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}\} \quad (i=1 \sim 4) \quad (24)$$

جهت محاسبه بردار جابه‌جایی المان خمشی از میدان جابه‌جایی مودهای مرتبه سوم تغییر شکل ورق در مختصات محلی (ξ, η)، مطابق رابطه (۲۵) [۱۸] استفاده شده است:

$$w(\xi, \eta) = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} \quad (25)$$

در رابطه (۲۵)، $\boldsymbol{\beta}$ بردار ضرایب نامعین و \mathbf{P} میدان جابه‌جایی می‌باشند که توسط رابطه (۲۶) [۱۸] محاسبه می‌شود:

در رابطه (۱۴)، هر ستون از ماتریس \mathbf{L} جواب‌های تحلیلی تنش برای مسائل مسطح است ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$). در جدول ۱ جواب‌های تحلیلی تابع تنش ایری (p_i) و مقادیر تنش‌های بدست آمده نشان داده شده است.

با معرفی تابع تقریب، چالش اصلی تعریف ارتباط بین بردار جابه‌جایی المان غشایی \mathbf{q}_m و تابع تقریب است. دلیل این چالش، تفاوت مرتبه ماتریس برای این دو مقدار است. به این منظور از روش شبه‌سازگار^۱ [۱۷] استفاده می‌شود که اساس آن بر پایه روش باقی‌مانده وزنی است.

$$\int_V \mathbf{L}^T (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV = 0 \quad (15)$$

در رابطه (۱۵)، $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ کرنش مربوط به تابع تقریب انتخاب شده است که از رابطه (۱۶) [۱۴] محاسبه می‌شود:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}^{-1} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\alpha} \quad (16)$$

بر این اساس با در نظر گرفتن رابطه (۱۶)، رابطه (۱۵) به صورت رابطه (۱۷) قابل بازنویسی است:

$$\int_V \mathbf{L}^T (\bar{\mathbf{B}} \mathbf{q}_m - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\alpha}) dV = \int_V (\mathbf{L}^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{q}_m - \mathbf{L}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L} \boldsymbol{\alpha}) dV = \int_V (\mathbf{X} \mathbf{q}_m - \mathbf{Z} \boldsymbol{\alpha}) dV = 0 \quad (17)$$

با حل رابطه (۱۷) ارتباط بین بردار ضرایب نامعین و بردار جابه‌جایی المان غشایی مطابق رابطه (۱۸) تعیین می‌شود:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{q}_m \quad (18)$$

در رابطه (۱۸) مقادیر \mathbf{X} و \mathbf{Z} به ترتیب برابرند با:

$$\mathbf{Z} = \int_V \mathbf{L}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L} dV \quad \mathbf{X} = \int_V \mathbf{L}^T \bar{\mathbf{B}} dV \quad (19)$$

با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۱۲) ماتریس $\hat{\mathbf{T}}$ به صورت رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{L} \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{X} \quad (20)$$

با تعریف مقدار تابع تقریب و تابع معیار می‌توان با استفاده از قاعده کار مجازی [۱۴]، ماتریس سختی المان غشایی معرفی شده را محاسبه کرد.

$$\int_V \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\mathbf{u}} dV - \int_V \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} dV - \int_\Gamma \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{I} d\Gamma = 0 \quad (21)$$

¹ Quasi-Conforming Method

جدول ۱- جواب‌های تحلیلی تابع تنش ابری و تنش‌های مربوط به آن‌ها

i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	x^2	xy	y^2	x^3	x^2y	xy^2	y^3
σ_{xi}	0	0	2	0	0	2x	6y
σ_{yi}	2	0	0	6x	2y	0	0
τ_{xyi}	0	-1	0	0	-2x	-2y	0

شدن مقادیر مربوط به بردار تابع درونیاب، براساس تئوری ورق‌های نازک مقدار انحنای ورق از رابطه (۳۰) [۱۸] محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}_p = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

در رابطه (۳۰)، \mathbf{K}_p بردار انحنای ورق است. از آنجایی که برای محاسبه بردار انحنای نیاز به محاسبه مشتق دوم بردار تابع درونیاب در مختصات کلی است، به منظور سهولت رابطه بین مشتق دوم در مختصات محلی و مختصات کارتریز در پیوست ب بیان شده است. در نهایت با استفاده از رابطه (۲۹) و همچنین مقادیر مربوط به توابع درونیاب فرم کلی رابطه مربوط به انحنای ورق مطابق رابطه (۳۱) [۱۸] بدست می‌آید:

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{B}_p \mathbf{q}_p \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)، \mathbf{B}_p ماتریس کرنش برای المان ورق MKQ12 است. با محاسبه ماتریس سختی المان خمشی با استفاده از رابطه (۳۲) [۱۸] محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}_p = \int_A \mathbf{B}_p^T \mathbf{D} \mathbf{B}_p dA \quad (32)$$

۲-۳- محاسبه ماتریس سختی المان لایه‌ای

با محاسبه ماتریس‌های \mathbf{A} ، \mathbf{B} و \mathbf{D} مربوط به ورق کامپوزیت و همچنین مشخص شدن ماتریس سختی هریک از بخش‌های

$$\mathbf{P} = \{1 \ \xi \ \eta \ \xi \eta \ \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \ \frac{1}{2}(\eta^2 - 1) \ \frac{1}{2}\xi(\xi^2 - 1) \ \frac{1}{2}\eta(\eta^2 - 1) \ \frac{1}{4}\xi(3 - \xi^2)(\eta^2 - 1) \ \frac{1}{4}\eta(3 - \eta^2)(\xi^2 - 1) \ \frac{1}{4}\xi\eta(3 - \xi^2)(\eta^2 - 1) \ \frac{1}{4}\xi\eta(3 - \eta^2)(\xi^2 - 1)\} \quad (26)$$

همچنین جهت محاسبه میدان پیچشی المان از رابطه (۲۷) [۱۸] استفاده می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

در رابطه (۲۷)، \mathbf{J} ماتریس ژاکوبین است که مقدار آن با استفاده از توابع شکل المان چهار گره‌ای رابطه (۹) محاسبه می‌شود. با تعیین میدان جابه‌جایی و پیچشی المان، بردار جابه‌جایی برای گره نام مطابق رابطه (۲۸) [۱۸] محاسبه می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_{1,1} & J_{1,2} \\ 0 & J_{2,1} & J_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

همچنین بردار جابه‌جایی برای المان خمشی با استفاده از رابطه (۲۹) [۱۸] نیز قابل محاسبه است:

$$\mathbf{w} = \mathbf{N} \mathbf{q}_p \quad (29)$$

در رابطه (۲۹)، \mathbf{N} بردار توابع درونیاب است. مقدار \mathbf{N} با استفاده از روابط (۲۸) و (۲۵) تعیین می‌شود که جزئیات مربوط به آن در پیوست الف ارائه گردیده است. با مشخص

با انحنای دوطرفه بررسی گردیده است. نتایج بدست آمده با مقادیر مرجع گزارش شده و مطالعات مشابه صورت گرفته، مقایسه شده است. به منظور ارزیابی بهتر در هر مسئله، مقدار خطای المان معرفی شده نسبت به مقدار مرجع با استفاده از رابطه (۳۵) محاسبه شده است:

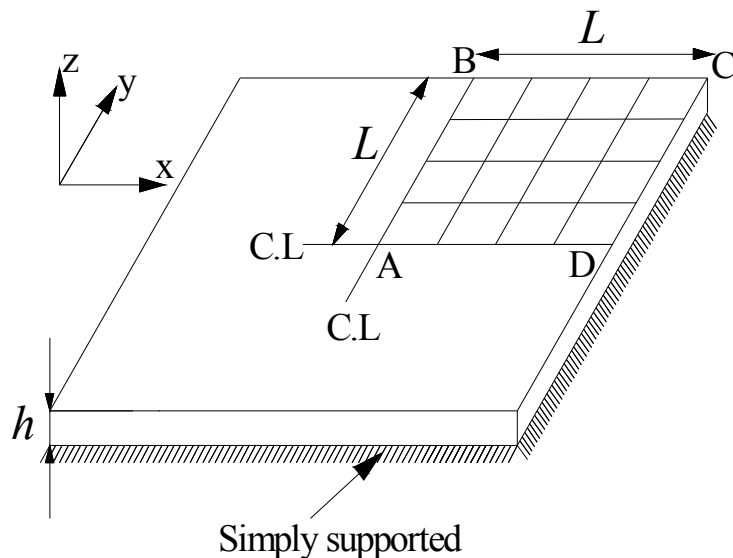
$$(35) \quad 100 \times (\text{مقدار مرجع} / (\text{مقدار مرجع} - \text{حل عددی}))$$

مقدار مرجع برای کلیه مسائل انتخاب شده، با استفاده از روش‌های تحلیلی محاسبه شده است.

۳-۱- ورق کامپوزیت با تکیه‌گاه ساده

در این بخش به منظور ارزیابی میزان دقت المان لایه‌ای ارائه شده در مسایل خمشی، یک ورق کامپوزیت مربع شکل $[90/0/90/0/90/0/90/0]_s$ با شرایط تکیه گاهی ساده تحت بار گسترده P در نظر گرفته شده است [۱۹] و برای آن میزان تغییر شکل قائم در مرکز ورق محاسبه شده است (شکل ۲). به دلیل متقارن بودن مسئله، یک چهارم آن شبکه‌بندی شده است و با در نظر گرفتن شرایط مرزی در محل محورهای تقارن و تکیه‌گاه‌های گیردار مورد تحلیل قرار گرفته است.

$$\begin{aligned} E_1 &= 135000 \text{ MPa} \\ E_2 &= 13000 \text{ MPa} \\ G_{12} &= 6410 \text{ MPa} \\ \nu_{12} &= 0.3 \\ P &= 0.1 \text{ MPa} \\ L &= 50 \times 10^{-3} \text{ m} \\ h &= 2.272 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$



شکل ۲- هندسه و مشخصات مواد ورق کامپوزیت با تکیه‌گاه ساده

خمشی و غشایی المان لایه‌ای، ماتریس سختی المان لایه‌ای با استفاده از رابطه (۳۳) محاسبه می‌شود:

$$(33) \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_{mp} \\ \mathbf{K}_{mp}^T & \mathbf{K}_p \end{bmatrix}$$

در رابطه (۳۳)، \mathbf{K}_m ماتریس سختی جزء غشایی المان لایه‌ای است که برای محاسبه آن ماتریس \mathbf{A} به عنوان ماتریس مواد در نظر گرفته شده است. \mathbf{K}_p ماتریس سختی جزء خمشی المان لایه‌ای است که برای محاسبه آن ماتریس \mathbf{D} به عنوان ماتریس مواد انتخاب شده است. \mathbf{K}_{mp} ماتریس سختی غشایی-خمشی است که مطابق رابطه (۳۴) محاسبه می‌شود:

$$(34) \quad \mathbf{K}_{mp} = \int_A (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{LZ}^{-1} \mathbf{X}) \mathbf{B} \mathbf{B}_p dA$$

۳- ارزیابی المان لایه‌ای معرفی شده

در این قسمت المان لایه‌ای ارائه شده که با استفاده از ترکیب یک المان غشایی نامتقارن و یک المان خمشی ناسازگار معرفی شده است، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در این ارزیابی توانایی المان جهت تحلیل ورق‌های کامپوزیت با هندسه، بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد. جهت ارزیابی المان لایه‌ای معرفی شده، تعدادی مسئله استاندارد عددی شامل: ورق کامپوزیت با تکیه‌گاه ساده، سیلندر پوسته‌ای با تکیه‌گاه گیردار و صفحه پوسته‌ای

گیردار است و تحت فشار داخلی P قرار گرفته است [۲۱]. به دلیل شرایط تقارن حاکم بر مسئله، تنها یک هشتم شکل مورد بررسی قرار گرفته است.

جدول ۲- جابه‌جایی قائم برحسب میلی‌متر در نقطه A برای ورق کامپوزیت با شرایط تکیه‌گاهی ساده

هوانگ و همکاران [۱۹]	المان ارائه شده	شبکه‌بندی
۰/۸۵۱ mm	۰/۹۳۸ mm	۲×۲
۰/۸۸۹ mm	۰/۹۱۱ mm	۴×۴
۰/۸۹۵ mm	۰/۹۰۶ mm	۶×۶

مقدار مرجع: ۰/۹۰۱

جدول ۳- حداکثر مقدار لنگر برحسب نیوتن میلی‌متر در نقطه A برای ورق کامپوزیت با شرایط تکیه‌گاهی ساده

هوانگ و همکاران [۱۹]		المان ارائه شده	
در جهت y	در جهت x	در جهت y	در جهت x
۵۱/۸۶	۶۳/۱۷	۵۰/۵۱	۶۲/۸۰
۵۰/۱۹	۶۱/۲۶	۴۹/۲۶	۶۱/۲۴
۴۹/۶۳	۶۰/۸۷	۴۸/۸۴	۶۰/۸۳

مقدار مرجع: ۴۸/۵۶ و ۶۰/۶۱

نتایج جابه‌جایی قائم در نقطه A برای المان لایه‌ای معرفی شده و سایر مطالعات انجام شده در جدول ۲ نشان داده شده است. مقدار جواب تحلیلی بدست آمده برای جابه‌جایی در مرکز ورق ۰/۹۰۱ میلی‌متر است که توسط جونز [۲۰] گزارش شده است. نتایج بدست آمده با استفاده از شبکه‌بندی‌های مختلف، نشان دهنده دقت مناسب المان لایه‌ای معرفی شده در حل مسئله ورق کامپوزیت با تکیه‌گاه ساده است. مقدار خطای المان معرفی شده در پیش بینی جابه‌جایی در مرکز ورق برابر با ۰/۵۵ درصد است.

به منظور درک بهتر عملکرد المان معرفی شده، مقادیر مربوط به حداکثر لنگر خمشی در مرکز ورق برای دو جهت x و y در جدول ۳ نشان داده شده است. مقادیر تحلیلی گزارش شده برای حداکثر مقدار لنگر در جهت x و y به ترتیب برابر با ۶۰/۶۱ و ۴۸/۵۶ نیوتن میلی‌متر است که توسط جونز [۲۰] گزارش شده است.

با دقت در نتایج ارائه شده در جدول ۳ مشاهده می‌شود، المان معرفی شده، دقت قابل قبولی در محاسبه مقدار لنگر دارد. میزان خطای المان در محاسبه لنگر در مرکز ورق نسبت به جواب مرجع اعلام شده برای جهت x و y به ترتیب ۰/۳۶ و ۰/۵۸ درصد است.

۳-۲- سیلندر پوسته‌ای با تکیه‌گاه گیردار

در شکل ۳ سیلندر پوسته‌ای از جنس ورق کامپوزیت نشان داده شده است که از دو طرف محدود به شرایط تکیه‌گاهی

$$E_1 = 51710.68 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 13789.514 \text{ MPa}$$

$$G_{12} = 8618.447 \text{ MPa}$$

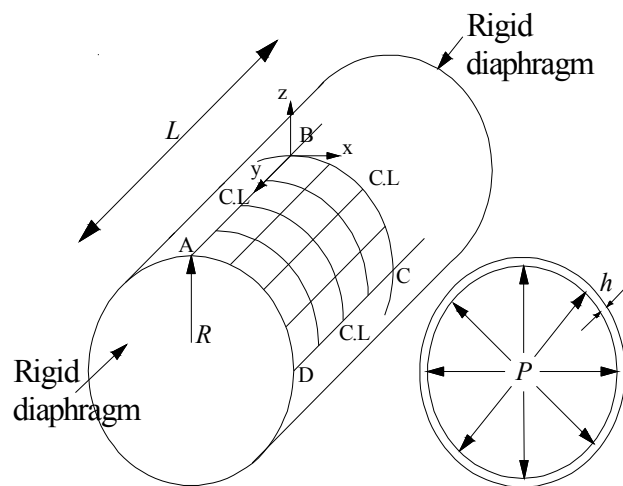
$$\nu_{12} = 0.25$$

$$P = 14.068 \text{ kPa}$$

$$L = 508 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$R = 508 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$h = 5.08 \times 10^{-3} \text{ m}$$



شکل ۳- هندسه و مشخصات مواد سیلندر پوسته‌ای با تکیه‌گاه گیردار

۳-۳- صفحه پوسته‌ای با انحناى دوطرفه

در شکل ۴، هندسه و مشخصات صفحه پوسته‌ای با انحناى دوطرفه نشان داده شده است. این صفحه بخشی از گنبدى کامپوزیتی است که تحت بار گسترده یکنواخت P قرار گرفته است [۱۰].

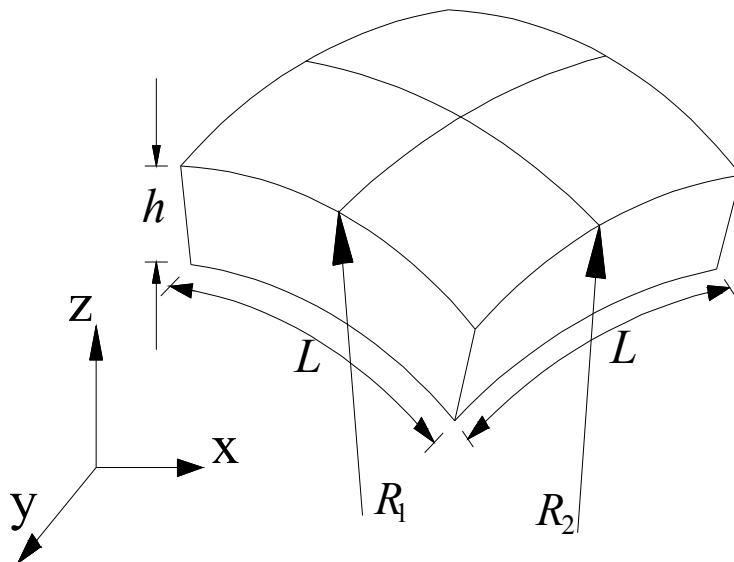
برای مسئله صفحه پوسته‌ای با انحناى دوطرفه، میزان تغییر شکل وسط صفحه با استفاده از المان لایه‌ای معرفی شده محاسبه و به همراه نتایج مربوط به مطالعات گذشته در جدول ۵ نشان داده شده است. نتایج با استفاده از شبکه‌بندى 8×8 محاسبه و به منظور مقایسه بهتر به وسیله رابطه $w \times (E_2 h^3 / PL^4)$ بی‌بعد شده‌اند. مقدار مرجع تحلیلی گزارش شده برای دو نوع کامپوزیت در نظر گرفته شده

مقدار حداکثر تغییر شکل شعاعی (w) برای مسئله سیلندر با در نظر گرفتن دو نوع کامپوزیت متفاوت با استفاده از المان معرفی شده محاسبه و به همراه نتایج مطالعات پیشین در جدول ۴ نشان داده شده است. این مقادیر با استفاده از شبکه‌بندى 8×8 محاسبه و به وسیله رابطه $w \times (E_1 h / PR^2)$ بی‌بعد شده‌اند. مقدار تحلیلی گزارش شده برای دو نوع کامپوزیت با زاویه قرارگیری رشته‌های متفاوت $[(0/90/90/0)_4]_s$ و $[(45/-45/-45/45)_4]_s$ است که توسط هاس و لی [۲۲] گزارش شده‌اند. نتایج بدست آمده، نشان دهنده عملکرد مناسب المان لایه‌ای معرفی شده است. مقدار خطا برای کامپوزیت‌های $[(0/90/90/0)_4]_s$ و $[(45/-45/-45/45)_4]_s$ به ترتیب ۱/۵ و ۱/۲۹ درصد می‌باشند.

جدول ۴- حداکثر تغییر شکل سیلندر پوسته‌ای با تکیه‌گاه گیردار

مقدار مرجع	کانت و مینون [۲۱]	تاقی و گادادی [۲۳]	المان ارائه شده	زاویه قرار گیری رشته‌ها
۱/۹۶	۱/۹۸	۲/۰۸	۱/۹۹	$[(45/-45/-45/45)_4]_s$
۱/۵۵	۱/۵۹	۱/۶۳	۱/۵۷	$[(0/90/90/0)_4]_s$

$E_1 = 172368.93 \text{ MPa}$
 $E_2 = 6894.75 \text{ MPa}$
 $G_{12} = 3447.37 \text{ MPa}$
 $\nu_{12} = 0.25$
 $P = 6.89 \text{ kPa}$
 $L = 812.8 \times 10^{-3} \text{ m}$
 $R_1 = 2438.4 \times 10^{-3} \text{ m}$
 $R_2 = 2438.4 \times 10^{-3} \text{ m}$
 $h = 8.12 \times 10^{-3} \text{ m}$



شکل ۴- هندسه و مشخصات مواد صفحه پوسته‌ای با انحناى دوطرفه

درجات آزادی اضافی پیچشی در آن با استفاده از درون‌یابی روی هر ضلع از المان به آن اضافه شده است. تابع تقریب المان غشایی معرفی شده از جنس تنش است که شامل جواب‌های تحلیلی تابع تنش ایری است. المان خمشی انتخاب شده یک المان ورق ناسازگار است که میدان جابه‌جایی آن براساس مودهای تغییرشکل مرتبه سوم محاسبه شده است. به منظور ارزیابی المان معرفی شده تعدادی مسئله استاندارد عددی انتخاب و عملکرد المان در حل این مسائل با نتایج تحقیقات گذشته و همچنین با جواب‌های مرجع اعلام شده مقایسه شده است. نتایج بدست آمده نشان دهنده دقت مناسب المان لایه‌ای معرفی شده در مقایسه با سایر مطالعات صورت گرفته است؛ همچنین مشخص گردید، عملکرد المان به هندسه و شرایط مرزی مسئله حساسیت ندارد. حداکثر میزان خطای المان معرفی شده در مسائل بررسی شده ۱/۵ درصد است که این مقدار خطا، نشان دهنده عملکرد مناسب المان معرفی شده نسبت به المان‌های ارائه شده در تحقیقات گذشته است.

۵- پیوست

۵-۱- پیوست الف

جزئیات مربوط به تابع درون‌یاب در روابطه (۳۶) و (۳۷) نشان داده شده است:

۵-۲- پیوست ب

رابطه بین مشتق دوم در مختصات محلی و مختصات کارترین مطابق رابطه (۳۸) است که جزئیات آن توسط ردی [۲۵] بیان شده است:

$$\begin{aligned}
 N_{1,1} &= \frac{1}{8}(\xi-1)(\eta-1)\left(\xi^2\eta^2 + \xi^2\eta + \xi\eta^2 - \xi^2 + \xi\eta - \eta^2 - \xi - \eta + 2\right) \\
 N_{2,1} &= \frac{1}{16}(\xi-1)^2(\eta-1)^2\left(J_{1,1}\xi\eta + J_{2,1}\xi\eta + 2J_{1,1}\xi + J_{1,1}\eta + J_{2,1}\xi + 2J_{2,1}\eta + 2J_{1,1} + 2J_{2,1}\right) \\
 N_{3,1} &= \frac{1}{16}(\xi-1)^2(\eta-1)^2\left(J_{1,2}\xi\eta + J_{2,2}\xi\eta + 2J_{1,2}\xi + J_{1,2}\eta + J_{2,2}\xi + 2J_{2,2}\eta + 2J_{1,2} + 2J_{2,2}\right) \\
 N_{4,1} &= \frac{1}{8}(\xi+1)(\eta-1)\left(-\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta + \xi\eta^2 + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 - \xi + \eta - 2\right)
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

$[0/90/0]_s$ و $[0/90/90/0]_s$ به ترتیب برابر با ۰/۶۲۲ و ۰/۶۲۴ [۲۴] است. نتایج بدست آمده بیانگر عملکرد مطلوب المان لایه‌ای معرفی شده در تحلیل ورق‌های کامپوزیت با انحنای دو طرفه است. مقادیر خطا برای دو نوع کامپوزیت $[0/90/0]_s$ و $[0/90/90/0]_s$ به ترتیب برابر با ۰/۳۲ و ۰/۳۱ درصد می‌باشند.

جدول ۵- تغییرشکل مرکز سیلندر پوسته‌ای با تکیه‌گاه

گیردار

مقدار مرجع	تاقی و گادادی [۲۳]	المان ارائه شده	زاویه رشته‌ها
۰/۶۲۲	۰/۶۱۹	۰/۶۲۴	$[0/90/0]_s$
۰/۶۲۴	۰/۶۲۲	۰/۶۲۶	$[0/90/90/0]_s$

۴- نتیجه‌گیری

یکی از الزامات مهندسی استفاده از مصالح نوین در سازه‌ها به منظور افزایش سرعت ساخت، سبک‌سازی و افزایش عمر مفید ساختمان است. اخیراً استفاده از ورق‌های کامپوزیت به عنوان عناصر سازه‌ای توجه بسیاری از مهندسان را به خود جلب نموده است. به همین دلیل تحلیل این ورق‌ها به منظور پیش‌بینی رفتار دقیق آن‌ها یک نیاز اساسی محسوب می‌شود. در این تحقیق با ترکیب المان‌های غشایی و خمشی و استفاده از مفاهیم حاکم بر روش اجزای محدود لایه‌ای، المانی چهارگره‌ای جهت تحلیل عددی ورق‌های کامپوزیت ارائه شده است. المان غشایی در نظر گرفته شده، یک المان غشایی جدید نامتقارن با درجات آزادی اضافی است که توابع معیار و تقریب متفاوتی در فرمول‌بندی آن استفاده شده است. تابع معیار استفاده شده از جنس جابه‌جایی است که

$$\begin{aligned}
 N_{5,1} &= \frac{1}{16}(\xi + 1)^2(\eta - 1)^2(J_{1,1}\xi\eta - J_{2,1}\xi\eta + 2J_{1,1}\xi - J_{1,1}\eta - J_{2,1}\xi + 2J_{2,1}\eta - 2J_{1,1} + 2J_{2,1}) \\
 N_{6,1} &= \frac{1}{16}(\xi + 1)^2(\eta - 1)^2(J_{1,2}\xi\eta - J_{2,2}\xi\eta + 2J_{1,2}\xi - J_{1,2}\eta - J_{2,2}\xi + 2J_{2,2}\eta - 2J_{1,2} + 2J_{2,2}) \\
 N_{7,1} &= \frac{1}{8}(\xi + 1)(\eta + 1)(\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta - \xi\eta^2 - \xi^2 + \xi\eta - \eta^2 + \xi + \eta + 2) \\
 N_{8,1} &= \frac{1}{16}(\xi + 1)^2(\eta + 1)^2(-J_{1,1}\xi\eta - J_{2,1}\xi\eta + 2J_{1,1}\xi + J_{1,1}\eta + J_{2,1}\xi + 2J_{2,1}\eta - 2J_{1,1} - 2J_{2,1}) \\
 N_{9,1} &= \frac{1}{16}(\xi + 1)^2(\eta + 1)^2(J_{1,2}\xi\eta - J_{2,2}\xi\eta + 2J_{1,2}\xi + J_{1,2}\eta + J_{2,2}\xi + 2J_{2,2}\eta - 2J_{1,2} - 2J_{2,2}) \\
 N_{10,1} &= \frac{1}{8}(\xi - 1)(\eta + 1)(-\xi^2\eta^2 + \xi^2\eta - \xi\eta^2 + \xi^2 + \xi\eta + \eta^2 + \xi - \eta - 2) \\
 N_{11,1} &= \frac{1}{16}(\xi - 1)^2(\eta + 1)^2(-J_{1,1}\xi\eta + J_{2,1}\xi\eta + 2J_{1,1}\xi - J_{1,1}\eta - J_{2,1}\xi + 2J_{2,1}\eta + 2J_{1,1} - 2J_{2,1}) \\
 N_{12,1} &= \frac{1}{16}(\xi - 1)^2(\eta + 1)^2(-J_{1,2}\xi\eta + J_{2,2}\xi\eta + 2J_{1,2}\xi - J_{1,2}\eta - J_{2,2}\xi + 2J_{2,2}\eta + 2J_{1,2} - 2J_{2,2}) \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} \end{array} \right]^{-1} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} \end{array} \right) - \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (38)$$

[5] Ten Thije RHW, Akkerman R (2009) A multi-layer triangular membrane finite element for the forming simulation of laminated composites. *Compos Part A-Appl S* 40(6-7): 739-753.

[6] Kant T, Khare RK (1997) A higher-order facet quadrilateral composite shell element. *Int J Numer Meth Eng* 40(24): 4477-4499.

[7] Swaminathan K, Patil SS (2007) Higher order refined computational model with 12 degrees of freedom for the stress analysis of antisymmetric angle-ply plates-analytical solutions. *Compos Struct* 80(4): 595-608.

[8] Latheswary S, Valsarajan KV, Sadasiva Rao YVK (2004) Dynamic response of moderately thick composite plates. *J Sound Vib* 270(1-2): 417-426.

[9] Kahya V, Turan M (2017) Bending of laminated composite beams by a multi-layer finite element based on a higher-order theory. *Acta Phys Pol A* 132(3): 473-475.

۶- مراجع

[1] Jafari-Baghjehghaz M, Farsani ER, Ebrahimnezhad-Khaljiri H (2018) Study of the buckling behavior of fiber-metal laminates fabricated by jute-glass fibers. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(4): 153-164. (In Persian)

[2] Zahedinia M, Hosseini R, Khodarahmi H, Ziashamami M (2018) Experimental and numerical study of deformation of fml plates with the same thickness under explosive loading. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(4): 129-142. (In Persian)

[3] Pachenari MH, Mozaffari A, Shariyat M (2016) Non-Linear finite element low-velocity impact response analysis of a viscoelastic composite plate, employing a layerwise theory. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 6(3): 97-108. (In Persian)

[4] Pandya BN, Kant T (1988) Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model. *Compos Sci Technol* 32(2): 137-155.

- element for analysis of planar problems. *Eur J Mech A-Solid* 60(1): 122-133.
- [18] Karkon M, Rezaiee-Pajand M (2017) A quadrilateral plate bending element based on deformation modes. *Appl Math Model* 41(1): 618-629.
- [19] Huang BZ, Shenoy VB, Atluri SN (1994) A quasi-conforming triangular laminated composite shell element based on a refined first-order theory. *Comput Mech* 13(4): 295-314.
- [20] Jones RM (2014) *Mechanics of composite materials*. CRC press.
- [21] Kant T, Menon MP (1989) Higher-order theories for composite and sandwich cylindrical shells with C0 finite element. *Comput Struct* 33(5): 1191-1204.
- [22] Haas DJ, Lee SW (1987) A nine-node assumed-strain finite element for composite plates and shells. *Comput Struct* 26(3): 445-452.
- [23] Taqi A, Gadade AM (2019) Static response of laminated composite shells subjected to transverse loading. *Mater Today-Proc* 16: 686-693.
- [24] Reddy JN (1984) Exact solutions of moderately thick laminated shells. *J Eng Mech* 110(5): 794-809.
- [25] Reddy JN (2014) *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. OUP Oxford.
- [10] Reddy JN (2003) *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press.
- [11] Rajendran S, Liew KM (2003) A novel unsymmetric 8-node plane element immune to mesh distortion under a quadratic displacement field. *Int J Numer Meth Eng* 58(11): 1713-1748.
- [12] Ooi ET, Rajendran S, Yeo JH (2008) Remedies to rotational frame dependence and interpolation failure of US-QUAD8 element. *Commun Numer Meth En* 24(11): 1203-1217.
- [13] Cen S, Zhou GH, Fu XR (2012) A shape-free 8-node plane element unsymmetric analytical trial function method. *Int J Numer Meth Eng* 91(2): 158-185.
- [14] Shang Y, Ouyang W (2018) 4-node unsymmetric quadrilateral membrane element with drilling DOFs insensitive to severe mesh-distortion. *Int J Numer Meth Eng* 113(10): 1589-1606.
- [15] Zouari W, Hammadi F, Ayad R (2016) Quadrilateral membrane finite elements with rotational DOFs for the analysis of geometrically linear and nonlinear plane problems. *Comput Struct* 173(1): 139-149.
- [16] Huang M, Zhao Z, Shen C (2010) An effective planar triangular element with drilling rotation. *Finite Elem Anal Des* 46(11): 1031-1036.
- [17] Wang C, Zhang X, Hu P (2016) New formulation of quasi-conforming method: a simple membrane