مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۹/ دوره ۱۰/ شماره ۱/ صفحه ۳۱-۵۲

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/jsfm.2020.9012.3046

تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های مستطیلی از جنس ماده مدرج تابعی دوجهته

سهیل هاشمی[۱,*] و علی‌اصغر جعفری[۲]

[۱] کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

[۲] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۱۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۱۲/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۳/۰۷

چکیده

در تحقیق حاضر، ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی دور مفصل از جنس مواد مدرج تابعی دو جهته برای اولین بار به‌صورت کاملا تحلیلی بررسی شده است. برای این منظور به کمک اصل هامیلتون و روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون‌کارمن، معادلات دیفرانسیل جزئی حرکت ورق استخراج شده‌اند. پس از آن با اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی ورق به معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی وابسته به زمان تبدیل گشته‌اند. سپس به منظور محاسبه فرکانس‌های غیرخطی ورق، معادله غیرخطی ورق به‌صورت تحلیلی با استفاده از روش لیندشتد پوانکاره بهبودیافته حل شده است. خواص مواد ورق براساس مدل توزیع توانی در دو راستای طولی و عرضی ورق به‌صورت پیوسته متغیر فرض شده‌اند. درنهایت اثر برخی پارامترهای کلیدی سیستم همچون، دامنه ارتعاش، اندیس ماده مدرج تابعی و نسبت هندسی ورق روی فرکانس غیرخطی ورق به صورت جزئی مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. برای صحه‌گذاری مساله، نتایج این پژوهش با نتایج ادبیات گذشته و همچنین حل عددی مقایسه شده است و تطابق بسیارخوبی مشاهده گشته است.

کلمات کلیدی: ارتعاش غیرخطی؛ ورق مستطیلی؛ مواد مدرج تابعی دوجهته؛ تئوری کلاسیک ورق‌ها؛ روش لیندشتدپوانکاره بهبود یافته.

Nonlinear Free Vibration Analysis of Bi-directional Functionally Graded Rectangular Plates

S. Hashemi[1], A.A. Jafari[2,*]

[1] MSc, Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

[2] Professor, Department of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

Abstract

In the present study, nonlinear free vibration analysis of bi-directional functionally graded simply supported rectangular plates is investigated analytically for the first time. For this purpose, with the aid of Hamilton's principle and von Karman nonlinear strain-displacement relations, the partial differential equations of motion are developed. Afterward, the nonlinear partial differential equations are transformed into the time-dependent nonlinear ordinary differential equations by applying the Galerkin method. The nonlinear equation of motion is then solved analytically by the Modified Lindstedt-Poincare method to determine the the plate nonlinear frequencies. The volume fraction distribution is assumed to be continuously graded in both the length and width directions of the plate. Finally, the effects of some system parameters such as the vibration amplitude, FG indexes and aspect ratio on the nonlinear frequency are discussed in detail. To validate the analysis, the results of this paper are compared with both the published data and numerical method, and good agreements are found.

Keywords: Nonlinear Vibrations; Rectangular Plate; Bi-Directional Functionally Graded Materials; Classical Plates Theory; Modified Lindstedt-Poincare Method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۳۷۷۶۲۹۸۲۷

آدرس پست الکترونیک: S.Hashemi@Kntu.ac.ir

۱- مقدمه

مواد مدرج تابعی (FGM) نوعی کامپوزیت هستند که خواص مکانیکی یا حرارتی آنها از یک سطح تا سطح دیگر به‌صورت تابعی و پیوسته تغییر می‌کند. استفاده از مواد مدرج تابعی در دهه‌های اخیر افزایش چشم‌گیری داشته است. این مواد به دلیل مقاومت حرارتی بالا و دیگر خواصی که دارند، کاربردهای مهندسی زیادی در صنایع مختلفی همچون، صنایع دفاعی و صنایع هوافضایی دارند؛ همچنین از این مواد در ساخت تجهیزاتی همچون، مخازن تحت فشار، پره‌های توربین، مبدل های حرارتی، مواد بیوپزشکی مثل ایمپلنت دندان استفاده می‌شود. با توجه به اهمیت و کاربرد مواد مدرج تابعی برخی محققان مطالعاتی در این زمینه انجام دادند.

یکی از سازه‌های رایج ساخته شده از مواد مدرج تابعی ورق‌ها می‌باشند که کاربردهای زیادی در سازه‌های مهندسی همچون وسایل نقلیه فضایی و غیره دارد. بسیاری از کاربردهای ورق های ساخته شده از مواد مختلف در مهندسی یافت می شود به عنوان مثال: صفحات دایره‌ای بسیار نازک در هارد دیسک‌های رایانه‌ای استفاده می‌شود. صفحات مستطیلی و ذوزنقه‌ای را می‌توان در پوست بال، سطوح دم افقی، فلپ[1]و باله های عمودی هواپیما یافت. صفحات مستطیلی یکسرگیردار در تشدیدکننده‌های نانو برای تشخیص مواد مخدر استفاده می شوند؛ همچنین پانل‌های مستطیل مسطح تا حد زیادی در ساختمان‌های عمرانی استفاده می‌شود؛ لذا بدلیل اهمیت بالایی که دارند، مطالعات زیادی روی دینامیک ورق‌های مدرج تابعی انجام شده است. برخی محققان روی ارتعاش ورق‌های ساخته شده از جنس مواد مدرج تابعی براساس تئوری کلاسیک کار کردند. ژانگ و ژوو[2] [۱]، ارتعاش آزاد، کمانش و خیز ورق نازک از مواد مدرج تابعی را براساس تئوری کلاسیک ورق و سطح خنثی فیزیکی تحلیل کردند. ابریت[3] [۲] فرکانس های طبیعی ورق‌های نازک با تکیه‌گاه ساده و گیردار را با استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها استخراج کرد.

[1] Flap
[2] Zhang and Zhou
[3] Abrate

با توجه به این که در تئوری کلاسیک از تغییر شکل‌های برشی در ضخامت ورق صرف نظر می‌گردد، فرکانس‌های طبیعی با کمی تقریب به‌دست می‌آیند. به منظور حل این مشکل، برخی پژوهشگران با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و یا مرتبه بالاتر به مطالعه ارتعاش خطی ورق ها پرداختند. برای نمونه نجفی زاده و عیالوار [۳]، با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به بررسی ارتعاش آزاد ورق مستطیلی شکل ساخته شده از مواد تابعی پرداختند. خورشیدی و عنصری‌نژاد [۴]، به تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های قطاعی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. خورشیدی و همکاران [۵]، به بررسی تاثیر محیط حرارتی بر ارتعاش آزاد ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی دو بعدی مستقر بر بستر پسترناک براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم پرداختند. حسینی هاشمی و همکاران [۶]، با ارائه یک حل دقیق پاسخ بسته خطی به تحلیل ارتعاش آزاد ورق مستطیلی نسبتاً ضخیم مدرج تابعی با لایه های هوشمند براساس تئوری میندلین[4]پرداختند. ژائو و همکاران[5] [۷]، با استفاده از روش المان آزاد کی‌پی-ریتز[6] به مطالعه ارتعاش آزاد ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول پرداختند. آنها در این تحقیق چهار نوع ماده مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. فرزام و حسنی [۸]، به تحلیل کمانش و خمش میکرو ورق‌های مدرج تابعی پرداختند که تحت بارهای مکانیکی و در محیط حرارتی قرار دارند. آنها از تئوری گرادیان کرنش بهبودیافته استفاده کردند. گوپتا و همکاران[7] [۹]، با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر به استخراج فرکانس‌های طبیعی ورق از مواد مدرج تابعی با شرایط مرزی مختلف پرداختند. خورشیدی و همکاران [۱۰]، ارتعاش آزاد الکترومکانیکی نانو ورق مستطیلی کامپوزیتی با لایه پیزوالکتریک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بهبود یافته مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. خورشیدی و همکاران [۱۱]، ارتعاش نانو ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی

[4] Mindlin
[5] Zhao et al.
[6] Element kp-ritz Method
[7] Gupta et al.

را براساس تئوری تغییر شکل برشی نمایی غیرمحلی مورد تحلیل قرار دارند. خورشیدی و بخششی [۱۲]، ارتعاش آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی در تماس با سیال را مطالعه کردند.

با توجه به این‌که برای طراحی و تحلیل دقیق و قابل اطمینان یک سازه نیاز است تا ارتعاش با دامنه بزرگ مورد بررسی واقع شود؛ چراکه در واقعیت همه پدیده‌ها غیرخطی هستند؛ لذا تحلیل غیرخطی به واقعیت نزدیکتر از تحلیل خطی می‌باشد؛ لذا برخی دیگر از محققان به بررسی ارتعاش غیرخطی ورق‌ها پرداختند. نثیر و قاهری [۱۳]، به مطالعه ارتعاش اجباری غیرخطی ورق‌های نازک دایروی از مواد مدرج تابعی پرداختند. آنها شرایط مرزی را دورگیردار در نظر گرفته و از روش اغتشاشات برای حل معادلات غیرخطی استفاده کردند. وانگ و زو[1] [۱۴]، بر اساس تئوری کلاسیک، به بررسی ارتعاش غیرخطی ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی متخلخل پرداختند. آنها با استفاده از اصل دالامبر معادله غیرخطی جزئی حاکم بر ورق را استخراج و در نهایت پس از تبدیل به معادله دیفرانسیل معمولی به روش گالرکین آن را با روش هارمونیک بالانس حل نمودند. علی امین یزدی [۱۵] با استفاده از تئوری کلاسیک و روابط کرنش جابجایی ون‌کارمن[2] به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی پرداخت. او از روش اغتشاشی هوموتوپی برای استخراج نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به خطی استفاده کرد. لطف آور و همکاران [۱۶]، با استفاده از تئوری کلاسیک و روابط کرنش جابجایی ون‌کارمن به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی کامپوزیتی پرداخت. آنها از دو روش تحلیلی تقریبی برای استخراج نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به خطی استفاده کردند. جی. وو و همکاران[3] [۱۷]، به بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداختند. آنها براساس تئوری کلاسیک ورق‌ها و با استفاده از یک بسط فوریه، اثر خواص مواد، شرایط مرزی و بارهای حرارتی را روی رفتار دینامیکی ورق مورد مطالعه قرار دادند. ملک‌زاده و منجم‌زاده [۱۸]، با به کارگیری تئوری کلاسیک ورق‌ها، به تحلیل پاسخ غیرخطی ورق از مواد مدرج تابعی تحت نیروی درحال حرکت پرداختند. داک و کونگ[4] [۱۹]، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تابع تنش به بررسی ارتعاش غیرخطی ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی پرداختند. آنها فرض کردند، ورق روی بستر الاستیک و تحت بار های مکانیکی، حرارتی و میرایی باشد، سپس پاسخ دینامیکی ورق را با استفاده از روش عددی رانج کوتا استخراج کردند. فانگ و چن[5] [۲۰]، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، ارتعاش غیرخطی ورق مستطیلی از مواد مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. آنها نقص ورق و همچنین وجود تنش اولیه در ورق را لحاظ نموده و با استفاده از روش گالرکین و و روش عددی رانج کوتا به حل معادلات پرداختند.

برای طراحی برخی سازه‌ها همچون سیستم‌های پیشران، مواد مدرج تابعی یک‌جهته نمی‌تواند آنچنان تاثیرگذار باشد و اجزاء سیستم به مواد پیشرفته‌تری نیاز پیدا می‌کنند که خواص آنها در دو یا چندجهت به‌صورت پیوسته متغیر باشند؛ بنابراین، مواد مدرج تابعی دوجهته معرفی گشتند تا این خلاء مهندسی را پرکنند؛ درنتیجه، تحقیقات و مطالعات زیادی روی تحلیل استاتیک و دینامیک سازه‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوجهته انجام شده است که در ادامه به برخی از آنها پرداخته شده است.

برخی مطالعات روی تحلیل ارتعاش آزاد و اجباری تیرهای مدرج تابعی دوجهته انجام شده است [۲۶-۲۱]. بعضی محققان تحلیل ارتعاش پوسته‌های مدرج تابعی دوجهته را مورد بررسی قرار دادند [۲۸،۲۷].

تعداد مقالات منتشرشده در زمینه تحلیل ارتعاشات ورق های مدرج تابعی دوجهته همچنان محدود است. لیو و همکاران[6] [۲۹]، از توابع نوربس برای مدلسازی و تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش ورق‌های مدرج تابعی دوجهته استفاده کردند. لیو و همکاران [۳۰]، با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریک، تحلیل ارتعاش آزاد و همچنین خمش ورق مدرج تابعی دوجهته با ضخامت متغیر را مورد مطالعه قراردادند. فرزام و حسنی [۳۱]، ارتعاش آزاد، کمانش و خمش میکرو ورق‌های مدرج تابعی دوجهته را با استفاده از

[1] Wang and Zu
[2] Von Karman
[3] Woo et al.
[4] Duc and Cong
[5] Fung and Chen
[6] Lieu et al.

تحلیل ایزومتریک[1] بررسی کردند. کومار و لال[2] [۳۲]، فرکانس‌های طبیعی ورق‌های حلقوی مدرج تابعی دوجهته قرارگرفته روی بسترالاستیک را با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل محاسبه نمودند. شرعیات و علیپور [۳۳]، با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل، یک راه‌حل نیمه‌تحلیلی به‌منظور بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های دایروی مدرج تابعی دوجهته قرارگرفته بر بسترالاستیک ارائه دادند. علیپور وشرعیات [۳۴]، با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل، به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های دایروی مدرج تابعی دوجهته قرارگرفته بر بسترالاستیک با ضخامت متغیر پرداختند. عراق و همکاران [۳۵]، ارتعاش آزاد سه‌بعدی پانل های خمیده مدرج‌تابعی دوجهته تقویت شده بافیبر با شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قراردادند. کومار [۳۶] ارتعاش آزاد ورق‌های حلقوی مدرج تابعی دوجهته را با استفاده از روش های چبیشوو و تبدیل دیفرانسیل مورد تحلیل قرار داد. لال و اهلوات[3] [۳۷،۳۸]، با استفاده از دو تئوری کلاسیک و تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، کمانش و ارتعاش آزاد ورق‌های دایروی مدرج تابعی دوجهته را مورد بررسی قرار دادند که تحت نیروی صفحه‌ای هیدرواستاتیک قرار دارند. شرعیات و علیپور [۳۹]، با ارائه روش تبدیل دیفرانسیل، ارتعاش آزاد و دمپینگ ورق‌های مدرج تابعی دوجهته قرارگرفته بر بسترالاستیک با ضخامت متغیر را مورد تحلیل قرار دادند. طاحونه و نائی [۴۰]، دینامیک سه‌بعدی ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی دوجهته قرارگرفته بر بسترالاستیک را براساس تئوری الاستیسیته مرتبه سوم مورد مطالعه قرار دادند. طاحونه و یاس [۴۱]، با ارائه یک حل نیمه‌تحلیلی، ارتعاش سه‌بعدی بخشی از ورق حلقوی مدرج تابعی چندجهته با شرایط مرزی مختلف را مورد تحقیق و تحلیل قرار دادند. یاس و مولودی [۴۲]، با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل ارتعاش سه‌بعدی ورق حلقوی مدرج تابعی چندجهته با پیزوالکتریک و خوبیده بربسترالاستیک را مورد تحلیل قرار دادند.

با توجه به مطالعه مروری که برادبیات گذشته انجام شد، تعداد مقالات مربوط به ارتعاش ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی دوجهته فقط مربوط به تحلیل خطی آن می‌شود و تاکنون تحقیقی روی ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی مدرج تابعی دوجهته انجام نشده‌است. در این تحقیق، ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی مدرج تابعی دوجهته برای اولین بار مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور ابتدا معادلات حرکت ورق با استفاده از روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون‌کارمن و همچنین اصل هامیلتون استخراج شده‌اند. سپس با اعمال روش گالرکین به معادلات جزئی حرکت معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به‌دست می‌آیند. درنهایت، با استفاده از روش لیندشتد[4] پوانکاره[5] بهبود یافته معادله غیرخطی حرکت عرضی ورق به‌صورت کاملا تحلیلی حل می‌گردد. خواص مواد ورق براساس مدل توزیع توانی در دو راستای طولی و عرضی ورق متغیر فرض گردیده‌اند. درنهایت اثر برخی پارامترهای کلیدی سیستم روی فرکانس غیرخطی ورق مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند. برای صحه‌گذاری نتایج مساله، نتایج این پژوهش با نتایج ادبیات گذشته و همچنین حل عددی مقایسه می‌شود.

۲- جنس و هندسه

شکل۱ یک ورق مستطیلی ساخته شده از آلومینا و آلومینیوم با طول a، عرض b و ضخامت h را نشان می‌دهد که از چهارطرف دارای تکیه‌گاه مفصلی است. مبدا دستگاه مختصات کارتزین روی صفحه میانی ورق واقع شده است. خواص مواد (P) ورق مدرج تابعی دوجهته در دو راستای محورهای x و y به صورت پیوسته و براساس قانون توزیع توانی متغیر فرض گردیده است. این خواص به‌صورت زیر بیان می‌گردند [۲۹]:

$$P(x,y) = P_c V_c(x,y) + P_m V_m(x,y) \tag{1}$$

اگر کسرحجمی بخش سرامیک V_c و بخش فلزی V_m باشد، آنگاه جمع هردوی آنها بایستی برابر با یک باشد:

$$V_c + V_m = 1 \tag{2}$$

1 Isogeometric Analysis (IGA)
2 Kumar and Lal
3 Lal and Ahlawat
4 Lindstedt
5 Poincare

براساس قانون توزیع توانی، کسرحجمی ورق مدرج تابعی دوجهته به‌صورت پیوسته در دو جهت x و y به شکل زیر تغییر می‌کند [۲۹]:

$$V_c(x,y)=\left(\frac{x}{a}\right)^{k_x}\left(\frac{y}{b}\right)^{k_y},k_x,k_y\geq 0 \quad (۳)$$

که در رابطه ۳ k_x و k_y به ترتیب اندیس توانی در راستای محور x و y را نشان می‌دهد.

خواص مواد ورق شکل زیر را دارند:

$$E(x,y)=E_m+(E_c-E_m)\left(\frac{x}{a}\right)^{k_x}\left(\frac{y}{b}\right)^{k_y} \quad (۴)$$

$$\rho(x,y)=\rho_m+(\rho_c-\rho_m)\left(\frac{x}{a}\right)^{k_x}\left(\frac{y}{b}\right)^{k_y} \quad (۵)$$

که E و ρ به ترتیب مدول یانگ و چگالی جرمی ورق هستند. خواص مواد استفاده شده در این ورق، در جدول ۱ درج شده است.

۳- معادلات حرکت

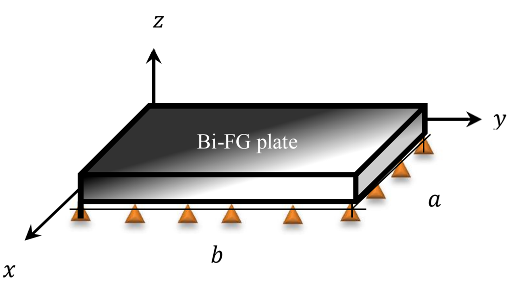
براساس تئوری کلاسیک ورق‌ها، جابجایی هر نقطه از ورق در راستای محورهای x، y و z از روابط زیر تعیین می‌شوند [۴۳]:

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)-z\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (۶)$$

$$v(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)-z\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (۷)$$

$$w(x,y,z,t)=w_0(x,y,t) \quad (۸)$$

که در معادلات ۶-۸ u_0، v_0 و w_0 جابجایی‌های نقطه دلخواه روی صفحه میانی ورق در راستای محورهای x، y و z است.



شکل ۱- هندسه یک ورق مستطیلی ساخته شده از مواد مدرج تابعی

جدول ۱- خواص مواد برای ورق ساخته شده از مواد مدرج تابعی

خواص	سرامیک (Al_2O_3)	فلز (Al)
مدول یانگ	380 GPa	70 **GPa**
چگالی	3800 $\frac{Kg}{m^3}$	2702 $\frac{Kg}{m^3}$

با فرض تغییر شکل‌های نسبتا بزرگ، روابط کرنش جابجایی غیرخطی ون‌کارمن به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (۹)$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (۱۰)$$

$$\gamma_{xy}=\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)-2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y} \quad (۱۱)$$

معادلات حاکم بر ورق براساس تئوری کلاسیک با استفاده از اصل هامیلتون از رابطه (۱۲) استخراج می‌شوند:

$$\int_0^T(\delta U+\delta V-\delta K)\,dt=0 \quad (۱۲)$$

V، U و K به ترتیب معرف انرژی کرنشی، کار نیروهای خارجی و انرژی جنبشی می‌باشند که به‌صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\delta U=\int_{\Omega_0}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dzdxdy \quad (۱۳)$$

$$\delta V=-\int_{\Omega_0}[q\delta w_0]dxdy \quad (۱۴)$$

$$\delta K=\int_{\Omega_0}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\rho(x,y)(\dot{u}\delta\dot{u}+\dot{v}\delta\dot{v}+\dot{w}\delta\dot{w})\,dzdxdy \quad (۱۵)$$

Ω_0 دامنه کلی طولی و عرضی ورق و q نیروی تحریک خارجی بوده که در بررسی ارتعاش آزاد ورق برابر با صفر در نظرگرفته می‌شود. لازم به ذکر است که رابطه ۱۳ درحالتی صحیح است که تنش و کرنش رابطه خطی با هم داشته باشند. باجایگذاری روابط ۱۳ تا ۱۵ در رابطه ۱۲ و

انتگرال‌گیری در راستای ضخامت ورق رابطه (۱۶) استخراج می‌شود:

$$\int_0^T\{\int_{\Omega_0}[N_{xx}\left(\frac{\partial\delta u_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial\delta w_0}{\partial x}\right)$$
$$-M_{xx}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2}+N_{yy}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial\delta w_0}{\partial y}\right)$$
$$-M_{yy}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial y^2}-2M_{xy}\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x\partial y}$$
$$+N_{xy}\left(\frac{\partial\delta u_0}{\partial y}+\frac{\partial\delta v_0}{\partial x}+\frac{\partial\delta w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial\delta w_0}{\partial y}\right)$$
$$-I_0(\dot u_0\delta\dot u_0+\dot v_0\delta\dot v_0+\dot w_0\delta\dot w_0)$$
$$+I_1\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\delta\dot u_0+\frac{\partial w_0}{\partial y}\delta\dot v_0+\frac{\partial\delta w_0}{\partial x}\dot u_0+\frac{\partial\delta w_0}{\partial y}\delta\dot v_0\right)$$
$$-I_2\left(\frac{\partial\delta w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial\delta w_0}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)]dxdy\}dt=0$$

(۱۶- الف)

پس از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء از معادله ۱۶الف:

$$\int_0^T\{\int_{\Omega_0}[-\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}\delta u_0-\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\delta w_0$$
$$-\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}\delta w_0-\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}\delta v_0$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\delta w_0-\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}\delta w_0$$
$$-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}\delta w_0-\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\delta u_0-\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\delta v_0$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\delta w_0-\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\delta w_0$$
$$+I_0(\ddot u_0\delta u_0+\ddot v_0\delta v_0+\ddot w_0\delta w_0)$$
$$+I_1\left(\frac{\partial\ddot u_0}{\partial x}\delta w_0-\frac{\partial\ddot w_0}{\partial x}\delta u_0+\frac{\partial\ddot v_0}{\partial y}\delta w_0\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\ddot w_0}{\partial y}\delta v_0\right)]dxdy\}dt=0 \qquad (۱۶- ب)$$

که M,N و I به ترتیب نیروهای منتجه داخل صفحه، ممان های منتجه و جمله‌های مربوط به اینرسی می‌باشند. این روابط برحسب مولفه‌های تنش در راستای ضخامت ورق به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix}N_{xx}\\N_{yy}\\N_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\tau_{xy}\end{Bmatrix}dz \qquad (۱۷)$$

$$\begin{Bmatrix}M_{xx}\\M_{yy}\\M_{xy}\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\tau_{xy}\end{Bmatrix}zdz \qquad (۱۸)$$

$$\begin{Bmatrix}I_0\\I_1\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}1\\z\end{Bmatrix}\rho(x,y)dz=\begin{Bmatrix}\rho(x,y)h\\0\end{Bmatrix} \qquad (۱۹)$$

براساس تئوری کلاسیک ورق، روابط تنش-کرنش به‌صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۹]:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{11}(x,y)&Q_{12}(x,y)&0\\Q_{12}(x,y)&Q_{22}(x,y)&0\\0&0&Q_{66}(x,y)\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\\varepsilon_{yy}\\\gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

(۲۰)

که ضرایب سفتی Q_{ij} به‌صورت زیر تعریف می‌گردند [۲۹]:

$$Q_{11}(x,y)=Q_{22}(x,y)=\frac{E(x,y)}{1-\nu^2} \qquad (۲۱)$$

$$Q_{12}(x,y)=\frac{\nu E(x,y)}{1-\nu^2} \qquad (۲۲)$$

$$Q_{66}(x,y)=\frac{E(x,y)}{2(1+\nu)} \qquad (۲۳)$$

ضریب پواسان ν در روابط ۲۳-۲۱ ثابت و برابر با ۰/۳ فرض می‌گردد.

با حذف $(\delta u_0,\delta v_0,\delta w_0)$ از معادله ۱۶ب و سپس با برابر قرار دادن ضرایب $(\delta u_0,\delta v_0,\delta w_0)$ با صفر به‌صورت جداگانه (با استفاده از قانون حساب تغییرات)، شکل کلی معادلات حرکت ورق مدرج تابعی دوجهته در شکل تئوری کلاسیک به‌صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \qquad (۲۴)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \qquad (۲۵)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$
$$+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+N_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۲۶)$$

با توجه به نازک بودن ورق، می‌توان از تاثیر اینرسی‌های داخل صفحه صرف‌نظر نمود [۴۴].

به منظور ساده‌سازی روابط، پارامترهای بدون بعد زیر تعریف می‌گردند:

$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w})=\frac{(u_0,v_0,w_0)}{h}\,,(\bar{U},\bar{V},\bar{W})=\frac{(U,V,W)}{h}$$

$$(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right),\qquad (r,s)=\left(\frac{a}{h},\frac{a}{b}\right),\qquad \bar{E}=\frac{E}{E_m}$$

$$\bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_m}\qquad \tau=\frac{t}{h}\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}} \tag{۲۷}$$

باجایگذاری رابطه ۲۰ در روابط ۱۷ تا ۱۹ و جایگذاری نتایج در معادلات ۲۴ تا ۲۶، معادلات حرکت بدون بعد ورق برحسب مولفه‌های جابجایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{s^2\nu\bar{E}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{s^2\bar{E}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}}{2r^3(\nu+1)}+\frac{s\nu\bar{E}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}}{r^2(1-\nu^2)}$$
$$+\frac{s\bar{E}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}}{2r^2(\nu+1)}+\frac{s^2\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}})^2}{2r^3(1-\nu^2)}+\frac{s^2\bar{E}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}}{2r^3(\nu+1)}$$
$$+\frac{s^2\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}}{2r^3(\nu+1)}+\frac{\bar{E}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}})^2}{2r^3(1-\nu^2)}$$
$$+\frac{s^2\bar{E}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}}{2r^2(\nu+1)}+\frac{s^2\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}}{2r^2(\nu+1)}+\frac{s\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}}{r^2(1-\nu^2)}$$
$$+\frac{s\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}}{2r^2(\nu+1)}+\frac{\bar{E}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}}{r^2(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}}{r^2(1-\nu^2)}=0 \tag{۲۸}$$

$$\frac{s\nu\bar{E}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{s\bar{E}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}}{2r^3(\nu+1)}+\frac{s\nu\bar{E}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}}{r^2(1-\nu^2)}$$
$$+\frac{s\bar{E}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}}{2r^2(\nu+1)}+\frac{s^3\bar{E}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{s^3\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}})^2}{2r^3(1-\nu^2)}$$
$$+\frac{s\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}})^2}{2r^3(1-\nu^2)}+\frac{s\bar{E}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}}{2r^3(\nu+1)}+\frac{s\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}}{2r^3(\nu+1)}$$
$$+\frac{s^2\bar{E}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2}}{r^2(1-\nu^2)}+\frac{s^2\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}}{r^2(1-\nu^2)}+\frac{s\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}}{r^2(1-\nu^2)}$$
$$+\frac{s\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}}{2r^2(\nu+1)}+\frac{\bar{E}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}}{2r^2(\nu+1)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}}{2r^2(\nu+1)}=0 \tag{۲۹}$$

$$\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}})^3s^4}{2r^4(1-\nu^2)}-\frac{\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial\bar{y}^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}s^4}{12r^4(1-\nu^2)}-\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{y}^3}s^4}{6r^4(1-\nu^2)}$$
$$+\frac{3(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}})^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}\bar{E}s^4}{2r^4(1-\nu^2)}-\frac{\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{y}^4}\bar{E}s^4}{12r^4(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}s^3}{r^3(1-\nu^2)}$$
$$+\frac{\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\bar{E}s^3}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}\bar{E}s^3}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}})^2s^2}{2r^4(\nu+1)}$$
$$+\frac{\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}})^2s^2}{2r^4(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}s^2}{2r^3(\nu+1)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}})^2\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}s^2}{2r^4(\nu+1)}$$
$$+\frac{\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}})^2\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}s^2}{2r^4(1-\nu^2)}+\frac{\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}s^2}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}s^2}{2r^3(\nu+1)}$$
$$-\frac{\nu\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial\bar{y}^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}s^2}{12r^4(1-\nu^2)}-\frac{\nu\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial\bar{x}^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}s^2}{12r^4(1-\nu^2)}-\frac{\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}s^2}{6r^4(\nu+1)}$$
$$-\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}^2}s^2}{6r^4(\nu+1)}-\frac{\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}^2}s^2}{6r^4(1-\nu^2)}-\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}}s^2}{6r^4(\nu+1)}$$
$$-\frac{\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}}s^2}{6r^4(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\bar{E}s^2}{2r^3(\nu+1)}+\frac{(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}})^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}\bar{E}s^2}{2r^4(\nu+1)}$$
$$+\frac{\nu(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}})^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}\bar{E}s^2}{2r^4(1-\nu^2)}+\frac{(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}})^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}\bar{E}s^2}{2r^4(\nu+1)}$$
$$+\frac{\nu(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}})^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}\bar{E}s^2}{2r^4(1-\nu^2)}+\frac{\nu\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{y}^2}\bar{E}s^2}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\bar{E}s^2}{2r^3(\nu+1)}$$
$$+\frac{\nu\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\bar{E}s^2}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{2\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\bar{E}s^2}{r^4(\nu+1)}$$
$$+\frac{\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\bar{E}s^2}{r^3(\nu+1)}+\frac{2\nu\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\bar{E}s^2}{r^4(1-\nu^2)}$$
$$-\frac{\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}^2}\bar{E}s^2}{6r^4(\nu+1)}-\frac{\nu\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}^2}\bar{E}s^2}{6r^4(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}s}{2r^3(\nu+1)}$$
$$+\frac{\nu\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}s}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}s}{2r^3(\nu+1)}+\frac{\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{y}}\bar{E}s}{2r^3(\nu+1)}$$
$$+\frac{\nu\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}\bar{E}s}{r^3(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\bar{E}s}{2r^3(\nu+1)}+\frac{\nu\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\bar{E}s}{r^3(1-\nu^2)}$$

$$+\frac{\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}\,\partial\bar{y}}\bar{E}s}{r^3(\nu+1)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}})^3}{2r^4(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}}{r^3(1-\nu^2)}$$
$$-\frac{\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial\bar{x}^2}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}}{12r^4(1-\nu^2)}-\frac{\frac{\partial\bar{E}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^3\bar{w}}{\partial\bar{x}^3}}{6r^4(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}}\bar{E}}{r^3(1-\nu^2)}$$
$$+\frac{3(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{x}})^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}\bar{E}}{2r^4(1-\nu^2)}+\frac{\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\bar{x}^2}\bar{E}}{r^3(1-\nu^2)}$$
$$-\frac{\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\bar{x}^4}\bar{E}}{12r^4(1-\nu^2)}=\bar{\rho}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\tau^2} \quad (۳۰)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی دور مفصل روابط زیر برقرار هستند [۴۵]:

$$at\ \ x=0,a \quad v_0=w_0=M_{xx}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_{xx}\,zdz=0 \quad (۳۱)$$

$$at\ \ y=0,b \quad u_0=w_0=M_{yy}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_{yy}\,zdz=0 \quad (۳۲)$$

شرایط مرزی در روابط ۳۱ و ۳۲ با توابع مجاز زیر ارضاء می‌گردند [۴۵]:

$$\overline{u_0}(\bar{x},\bar{y},\tau)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\bar{U}_{pq}(\tau)\cos(q\pi\bar{x})\sin(p\pi\bar{y}) \quad (۳۳)$$

$$\overline{v_0}(\bar{x},\bar{y},\tau)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\bar{V}_{pq}(\tau)\sin(q\pi\bar{x})\cos(p\pi\bar{y}) \quad (۳۴)$$

$$\overline{w_0}(\bar{x},\bar{y},\tau)=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\bar{W}_{pq}(\tau)\sin(q\pi\bar{x})\sin(p\pi\bar{y}) \quad (۳۵)$$

که $\bar{U}$، $\bar{V}$ و $\bar{W}$ به‌ترتیب توابع زمانی مجهول بی‌بعد و همچنین p و q شماره نیم موج می‌باشند.

با در نظر گرفتن فقط یک جمله در معادلات ۳۳ تا ۳۵ ارتعاش در مود اول مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور با قرار دادن $p=q=1$ در معادلات ۳۳ تا ۳۵ و جایگذاری آنها در معادلات ۲۸ تا ۳۰ و سپس اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل معمولی و غیرخطی حرکت به‌صورت زیر استخراج می‌گردند:

$$C_{11}\bar{W}^2+C_{12}\bar{U}+C_{13}\bar{V}=0 \quad (۳۶)$$

$$C_{21}\bar{W}^2+C_{22}\bar{U}+C_{23}\bar{V}=0 \quad (۳۷)$$

$$C_{31}\frac{d^2\bar{W}}{d\tau^2}+C_{32}\bar{W}+C_{33}\bar{U}\bar{W}+C_{34}\bar{V}\bar{W}+C_{35}\bar{W}^3=0 \quad (۳۸)$$

ضرایب C_{ij} در معادلات ۳۸-۳۶ وابسته به هندسه و خواص ورق می‌باشند که در پیوست (الف) آورده شده‌اند. از دو معادله ۳۶ و ۳۷ دو مجهول $\bar{U}$ و $\bar{V}$ را برحسب $\bar{W}$ به‌دست آورده و با جایگذاری درمعادله ۳۸ معادله دیفرانسیل غیرخطی مربوط به حرکت عرضی ورق به‌صورت زیر استخراج می‌شود:

$$\frac{d^2\bar{W}}{d\tau^2}+\alpha\,\bar{W}+\gamma\,\bar{W}^3=0 \quad (۳۹)$$

ضرایب α و γ در پیوست (ب) آورده شده‌اند.

۴- روش تحلیلی

در این پژوهش، از روش لیندشتد پوانکاره بهبودیافته برای حل معادله ۳۹ استفاده می‌شود. وسط ورق تحت شرایط اولیه زیر است:

$$\bar{W}(0)=\frac{W_{max}}{h}=A \qquad \frac{d\bar{W}(0)}{d\tau}=0 \quad (۴۰)$$

که W_{max} و A به ترتیب بیشترین خیز وسط ورق و شکل بدون بعد شرایط اولیه می‌باشند. با توجه به ملزومات روش حل، بایستی یک پارامتر کوچک، مثبت و بدون بعد معرفی گردد؛ بنابراین، معادله ۳۹ به صورت ۴۱ بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d^2\bar{W}}{d\tau^2}+\alpha\,\bar{W}+\epsilon r\gamma\bar{W}^3=0 \quad (۴۱)$$

ϵ پارامتر مذکور است که به‌صورت ۴۲ تعریف می‌شود:

$$\epsilon=\frac{1}{r}=\frac{h}{a} \quad (۴۲)$$

فرکانس خطی ورق مدرج تابعی دوجهته از رابطه زیر استخراج می‌گردد:

$$\alpha=\omega^2=\omega_l^2 \quad (۴۳)$$

براساس [۴۶] و [۴۷]، $\bar{W}(\tau)$ و α می‌تواند به‌صورت یک سری توانی از ϵ نوشته شود:

$$\bar{W}=\bar{W}_0+\epsilon\,\bar{W}_1+\epsilon^2\bar{W}_2+\cdots \quad (۴۴)$$

$$\alpha=\omega_{NL}^2+\epsilon\,c_1+\epsilon^2c_2+\cdots \quad (۴۵)$$

که فرکانس غیرخطی ω_{NL} و ضرایب مجهول c_i در ادامه محاسبه می‌گردند.

باجایگذاری معادله ۴۴ و ۴۵ درمعادله ۴۱ و سپس با صفر برابر قراردادن ضرایب ϵ^0،ϵ^1 وϵ^2 معادلات زیر استخراج می‌شوند:

$$\epsilon^0: \quad \ddot{\bar{W}}_0 + \omega^2 \bar{W}_0 = 0$$

$$\bar{W}_0(0) = A \qquad \frac{d\bar{W}_0}{d\tau}(0) = 0 \tag{۴۶}$$

$$\epsilon^1: \quad \ddot{\bar{W}}_1 + \omega^2 \bar{W}_1 = -c_1 \bar{W}_0 - r\gamma \bar{W}_0^3$$

$$\bar{W}_1(0) = 0 \qquad \frac{d\bar{W}_1}{d\tau}(0) = 0 \tag{۴۷}$$

$$\epsilon^2: \quad \ddot{\bar{W}}_2 + \omega^2 \bar{W}_2 = -c_2 \bar{W}_0 - c_1 \bar{W}_1 - 3r\gamma \bar{W}_1 \bar{W}_0^2$$

$$\bar{W}_2(0) = 0 \qquad \frac{d\bar{W}_2}{d\tau}(0) = 0 \tag{۴۸}$$

نتیجه حل معادله ۴۶ با شرایط اولیه مربوطه به‌صورت زیر است:

$$\bar{W}_0 = A\, cos(\omega\tau) \tag{۴۹}$$

باجایگذاری معادله ۴۹ در معادله ۴۷:

$$\ddot{\bar{W}}_1 + \omega^2 \bar{W}_1 = \left(-c_1 A - \frac{3}{4} r\gamma A^3\right) cos(\omega\tau) - \frac{\gamma A^3}{4}\cos(3\omega\tau) \tag{۵۰}$$

به‌منظور داشتن پاسخ پریودیک برای $\bar{W}_1$ بایستی جمله سکولار در معادله ۵۰ حذف گردد. بنابراین:

$$c_1 = -\frac{3}{4} r\gamma A^2 \tag{۵۱}$$

حل معادله ۵۰ به‌صورت رابطه ۵۲ است:

$$\bar{W}_1 = \frac{\gamma A^3}{32\omega^2}\left(cos(3\omega\tau) - cos(\omega\tau)\right) \tag{۵۲}$$

بطور مشابه، باجایگذاری معادلات ۴۹ و ۵۲ در معادله ۴۸ و صرف نظر از جمله سکولار، ضریب مجهول c_2 به‌دست می‌آید:

$$c_2 = \frac{3\gamma^2 A^4}{128\omega^2} \tag{۵۳}$$

فرکانس طبیعی غیرخطی ورق با استفاده از روابط ۴۵، ۵۱ و ۵۳ استخراج می‌گردد:

$$\omega_{NL} = \sqrt{\frac{A' + B'}{2}} \qquad A' = \left(\alpha + \frac{3}{4}\epsilon r\gamma A^2\right)$$

$$B' = \sqrt{\left(\alpha + \frac{3}{4}\epsilon r\gamma A^2\right)^2 - \frac{3(r\gamma)^2 A^4}{32}\epsilon^2} \tag{۵۴}$$

بعد از حل معادله ۴۸، $\bar{W}_2$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{W}_2 = \left(\frac{c_1\beta A^2}{2\omega^4}\right) + \left(\frac{(r\gamma)^2 A^5}{1024\omega^2}\right) cos(5\omega\tau) + \left(\frac{c_1 r\gamma A^3}{256\omega^2} + \frac{3(r\gamma)^2 A^5}{1024\omega^2}\right) cos(3\omega\tau) + \left(-\frac{c_1 r\gamma A^3}{256\omega^4} - \frac{(r\gamma)^2 A^5}{256\omega^4}\right) cos(\omega\tau) \tag{۵۵}$$

درنهایت، تقریب مرتبه دوم حل معادله غیرخطی ۳۹ به‌صورت زیر است:

$$\bar{W}_{2nd} = \bar{W}_0 + \epsilon\, \bar{W}_1 + \epsilon^2\, \bar{W}_2 \tag{۵۶}$$

۵- نتایج و بحث

۵-۱- اعتبارسنجی نتایج

به عنوان مطالعه مقایسه‌ای، ابتدا با صرف نظر از جمله‌های غیرخطی معادلات حرکت، پارامتر فرکانس نرمالایز شده $\varpi = \omega\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \sqrt{\frac{\rho_c h}{D_c}}$ ورق‌های مربعی ساخته شده از سیلیکون نیترید و فولاد ضدزنگ ($Si_3N_4/SUS304$) به‌دست می‌آیند. نتایج عددی برای مدول الاستیسیته فلز و سرامیک به‌ترتیب ۲۰۱/۰۴ و ۳۴۸/۴۳ گیگاپاسکال، چگالی فلز و سرامیک به‌ترتیب ۸۱۶۶ و ۲۳۷۰ کیلوگرم برمترمکعب و ضریب پواسان فلز و سرامیک به‌ترتیب ۰/۳۲۶۲ و ۰/۲۴ استخراج شده‌اند [۲۹]. جدول ۲ گزارشی از مقایسه نتایج حاضر با نتایج مقاله مرجع [۲۹] را ارائه می‌دهد. در این جدول فقط فرکانس‌های خطی با یکدیگر مقایسه گشته‌اند. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌گردد، نتایج پژوهش حاضر با نتایج مرجع مذکور تطابق بسیارخوبی دارد. همان‌طور که در بخش قبلی ملاحظه گردید، معادله غیرخطی ورق مدرج تابعی دوجهته با روش تحلیلی لیندشتدپوانکاره بهبود یافته حل گردید. به منظور اطمینان از صحت و همگرایی روش حل پیشنهادی، پاسخ زمانی وسط ورق با استفاده از هر دو روش لیندشتدپوانکاره بهبود یافته و همچنین روش عددی رانج کوتا مرتبه چهارم حل و در نمودار ۲ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است که روش عددی رانج‌کوتا در نرم‌افزار متلب کدنویسی و گام زمانی ۰/۰۱ برای حل درنظر گرفته شده است. نتایج عددی برای $A = 1$ ، $\frac{a}{h} = 10$ و $k_x = k_y = 1$ به دست آمده است.

همان‌طور که از این نمودار ملاحظه می‌گردد، روش تحلیلی لیندشتدپوانکاره بهبود یافته و همچنین راه‌حل عددی رانج‌کوتا مرتبه چهارم با یکدیگر تطابق بسیار خوبی دارد و این بدین معناست که راه حل تحلیلی پیشنهادی علاوه بر این که یک ابزار حل ساده برای معادلات غیر خطی است، از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

با توجه به اینکه در مسأله ارتعاشات غیرخطی سایر مودها می‌توانند برهم تأثیر گذار باشند و در مسأله حاضر که تغییرات ماده مدرج تابعی در راستای طول و عرض صفحه است، لذا تأثیر سایر مودها در پاسخ قابل صرف‌نظر به نظر نمی‌رسد؛ بنابراین باتوجه به‌اینکه درمساله حاضر نتایج فقط در مود اول بررسی شده‌اند، برای اطمینان ازاین‌که پاسخ زمانی چند مودی وسط ورق روی پاسخ زمانی تک مودی وسط ورق اثرگذار است یا خیر، پاسخ سه مود اول از روش عددی رانج کوتا مرتبه چهارم بدست آمده و با پاسخ تک مودی در نمودار ۳ مقایسه می‌گردد. لازم به ذکر است که روش عددی رانج‌کوتا در نرم‌افزار متلب کدنویسی و گام زمانی ۰/۰۱ برای حل در نظر گرفته شده است. نتایج عددی برای $k_x=k_y=1$ و $\frac{a}{h}=10\,, A=0/5$ به دست آمده است. همان‌طور که از این نمودار ملاحظه می‌گردد، اثر مودهای بالاتر (حداقل سه مود اول) بر پاسخ تک مودی سیستم تاثیر زیادی ندارد؛ لذا می‌توان با صرف‌نظر از اثر مودهای بالاتر روی پاسخ تک مودی نتایج را در مود اول بررسی کرد.

۵-۱- مطالعه پارامتری

در بخش حاضر، تاثیر برخی از پارامترهای کلیدی سیستم همچون دامنه ارتعاش بدون‌بعد (A)، نسبت ابعاد (a/b)،

جدول ۲- مقایسه پارامتر فرکانس نرمالایز شده $\bar{\omega}=\omega\left(\frac{a}{\pi}\right)^2\sqrt{\frac{\rho_c h}{D_c}}$ ورق‌های مربعی ساخته شده از $Si_3N_4/SUS304$ برای اندیس‌های توانی مختلف (k_x,k_y) زمانی که نسبت طول به ضخامت ورق برابر $a/h=10$ باشد.

k_y	منابع	k_x: ۰	۰/۵	۱	۲	۵	۱۰
۰	نتایج حاضر	۲/۰۰۰۰	۱/۴۰۴۱	۱/۱۹۱۲	۱/۰۱۷۵	۰/۸۸۶۰	۰/۸۴۶۰
	[۲۹]	۱/۹۳۸۳	۱/۳۳۲۶	۱/۱۳۲۱	۰/۹۷۸۷	۰/۸۶۹۴	۰/۸۳۶۹
۰/۵	نتایج حاضر	۱/۴۰۴۱	۱/۱۶۴۷	۱/۰۵۲۶	۰/۹۴۹۱	۰/۸۶۳۵	۰/۸۳۶۶
	[۲۹]	۱/۳۳۲۸	۱/۱۱۱۲	۱/۰۱۰۸	۰/۹۲۱۳	۰/۸۵۰۳	۰/۸۲۸۳
۱	نتایج حاضر	۱/۱۹۱۲	۱/۰۵۲۶	۰/۹۸۱۶	۰/۹۱۲۲	۰/۸۵۱۹	۰/۸۳۲۳
	[۲۹]	۱/۱۳۲۲	۱/۰۱۰۸	۰/۹۴۹۵	۰/۸۹۰۷	۰/۸۴۰۷	۰/۸۲۴۵
۲	نتایج حاضر	۱/۰۱۷۵	۰/۹۴۹۱	۰/۹۱۲۲	۰/۸۷۴۷	۰/۸۴۰۲	۰/۸۲۸۱
	[۲۹]	۰/۹۷۸۶	۰/۹۲۱۲	۰/۸۹۰۶	۰/۸۵۹۴	۰/۸۳۰۷	۰/۸۲۰۷
۵	نتایج حاضر	۰/۸۸۶۰	۰/۸۶۳۵	۰/۸۵۱۹	۰/۸۴۰۲	۰/۸۲۸۷	۰/۸۲۳۹
	[۲۹]	۰/۸۶۹۳	۰/۸۵۰۲	۰/۸۴۰۶	۰/۸۳۰۷	۰/۸۲۰۸	۰/۸۱۶۷
۱۰	نتایج حاضر	۰/۸۴۶۰	۰/۸۳۶۶	۰/۸۳۲۳	۰/۸۲۸۱	۰/۸۲۳۹	۰/۸۲۱۶
	[۲۹]	۰/۸۳۶۸	۰/۸۲۸۳	۰/۸۲۴۴	۰/۸۲۰۶	۰/۸۱۶۷	۰/۸۱۴۸

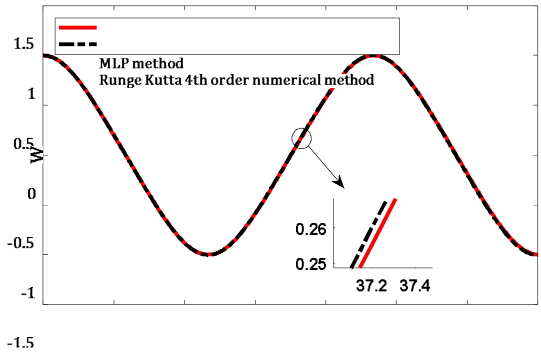
اندیس طولی ماده مدرج (k_x)، اندیس عرضی ماده مدرج (k_y) و نسبت طول به ضخامت ورق (a/h) روی فرکانس‌های غیرخطی (ω_{NL}) در قالب جداول و نمودار مورد بررسی واقع می‌گردد. نتایج این بخش برای ورق از جنس آلومینا و آلومینیوم انجام شده است که خواص آن در جدول ۱ آورده شده است. این نکته قابل ذکر است که در این بخش منظور از نسبت فرکانسی، نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی به فرکانس طبیعی خطی است.

جدول ۳ تاثیر نسبت طول به ضخامت ورق روی فرکانس طبیعی غیرخطی و همچنین فرکانس خطی ورق مربعی مدرج تابعی دوجهته را برای مقادیر مختلف اندیس‌های توانی k_x و k_y زمانی که دامنه ارتعاش بدون‌بعد ۱ نشان می‌دهد.

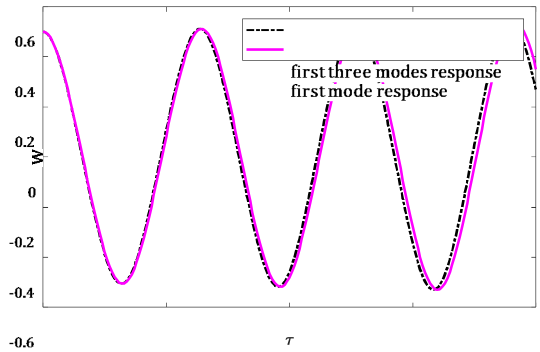
جدول ۴ تاثیر دامنه ارتعاش بدون بعد را روی نسبت فرکانسی ورق مربعی مدرج تابعی دوجهته برای مقادیر مختلف اندیس های توانی k_x و k_y نشان می‌دهد. نتایج عددی برای نسبت اندازه $a/b = 1$ و نسبت طول به ضخامت $a/h = 20$ استخراج شده است. این جدول نشان می‌دهد که افزایش دامنه ارتعاش بدون بعد منجربه افزایش نسبت فرکانس می‌شود. به عبارت دیگر، تفاوت میان فرکانس خطی و غیرخطی به شدت وابسته به دامنه ارتعاش است. توجه شود که فرکانس خطی ورق با صفر قرار دادن دامنه ارتعاش بدون بعد ورق در رابطه ۵۴ حاصل می‌شود.

برای بررسی بیشتر تاثیر اندیس‌های توانی k_x و k_y روی فرکانس‌های غیرخطی ورق، تغییرات نسبت فرکانسی برحسب اندیس‌های طولی و عرضی در نمودارهای ۳ و ۴ نمایش داده شده است.

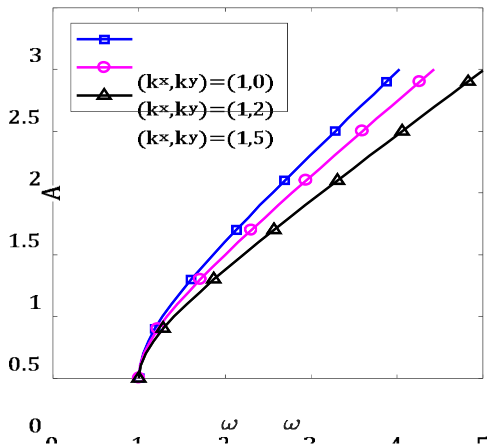
نمودارهای ۴ و ۵ که به نمودارهای پشتواره[1] معروف هستند، تاثیر دامنه ارتعاش بدون‌بعد روی نسبت فرکانس ورق مستطیلی مدرج تابعی دوجهته برای مقادیر مختلف اندیس های توانی k_x و k_y را نشان می‌دهد. نتایج عددی برای نسبت طول به عرض برابر ۲ و نسبت طول به ضخامت برابر ۱۰ استخراج شده است. همان‌طور که ازاین نمودارها واضح است، که اندیس‌های توانی تاثیر چشمگیری روی نسبت فرکانسی دارند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد با کاهش اندیس طولی ماده مدرج (k_x) و همچنین افزایش اندیس عرضی ماده مدرج (k_y) نمودارها از محور عمودی دورتر می‌شوند. به عبارت دیگر، با تغییر اندیس‌ها درجه رفتار غیرخطی ورق تغییر می‌کند.



شکل ۲- مقایسه پاسخ ارتعاشی (رابطه۵۶) ورق مربعی از مواد مدرج تابعی با استفاده از دو روش تحلیلی و عددی



شکل ۳- مقایسه پاسخ زمانی ارتعاشی چندمودی و تک‌مودی ورق مربعی مدرج تابعی دوجهته



شکل ۴- تاثیر تغییرات نسبت فرکانسی روی دامنه ارتعاش برای مقادیر مختلف اندیس توانی عرضی

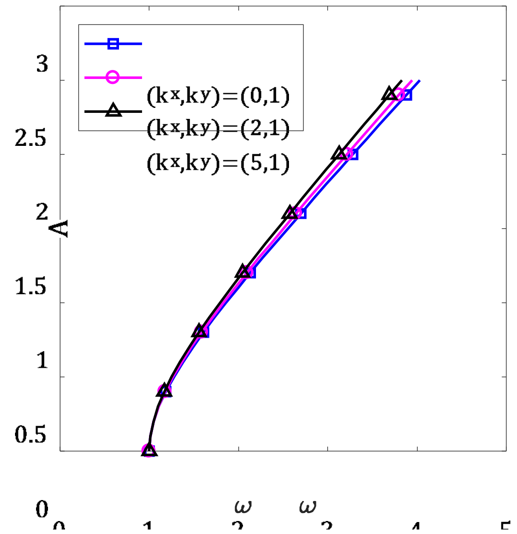
---
[1] Backbone Curve

جدول۳- پارامتر فرکانس غیرخطی (فرکانس خطی) ورق مدرج تابعی دوجهته مربعی ($A = 1$)

$\frac{a}{h}$	k_y	k_x				
		0	1	2	5	10
۵	۰	۰/۷۶۳۵ ۰/۴۶۹۴	۰/۶۳۵۲ ۰/۳۹۰۵	۰/۵۸۱۷ ۰/۳۵۱۲	۰/۵۱۶۲ ۰/۲۹۹۵	۰/۴۷۷۶ ۰/۲۷۲۱
	۱	۰/۶۳۵۲ ۰/۳۹۰۵	۰/۵۳۷۵ ۰/۳۳۰۵	۰/۴۹۹۶ ۰/۳۰۳۳	۰/۴۵۶۵ ۰/۲۷۱۴	۰/۴۳۴۲ ۰/۲۵۶۱
	۲	۰/۵۸۱۷	۰/۴۹۹۶	۰/۴۶۶۴	۰/۴۳۱۰	۰/۴۱۵۵
	۵	۰/۵۱۶۲	۰/۴۵۶۵	۰/۴۳۱۰	۰/۴۰۶۲	۰/۳۹۷۸
	۱۰	۰/۴۷۷۶	۰/۴۳۴۲	۰/۴۱۵۵	۰/۳۹۷۸	۰/۳۹۲۵
۱۰	۰	۰/۱۹۰۹ ۰/۱۱۷۴	۰/۱۵۸۸ ۰/۰۹۷۶	۰/۱۴۵۴ ۰/۰۸۷۸	۰/۱۲۹۱ ۰/۰۷۴۹	۰/۱۱۹۴ ۰/۰۶۸۰
	۱	۰/۱۵۸۸ ۰/۰۹۷۶	۰/۱۳۴۴ ۰/۰۸۲۶	۰/۱۲۴۹ ۰/۰۷۵۸	۰/۱۱۴۱ ۰/۰۶۷۸	۰/۱۰۸۶ ۰/۰۶۴۰
	۲	۰/۱۴۵۴	۰/۱۲۴۹	۰/۱۱۶۶	۰/۱۰۷۷	/۱۰۳۹۰
	۵	۰/۱۲۹۱	۰/۱۱۴۱	۰/۱۰۷۷	۰/۱۰۱۶	۰/۰۹۹۴
	۱۰	۰/۱۱۹۴	۰/۱۰۸۶	۰/۱۰۳۹	۰/۰۹۹۴	۰/۰۹۸۱
۲۰	۰	۰/۰۴۷۷	۰/۰۳۹۷	۰/۰۳۶۴	۰/۰۳۲۳	۰/۰۲۹۸
	۱	۰/۰۳۹۷	۰/۰۳۳۶	۰/۰۳۱۲	۰/۰۲۸۵	۰/۰۲۷۱
	۲	۰/۰۳۶۴	۰/۰۳۱۲	۰/۰۲۹۱	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۶۰
	۵	۰/۰۳۲۳	۰/۰۲۸۵	۰/۰۲۶۹	۰/۰۲۵۴	۰/۰۲۴۹
	۱۰	۰/۰۲۹۸	۰/۰۲۷۱	۰/۰۲۶۰	۰/۰۲۴۹	۰/۰۲۴۵
۵۰	۰	۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۴۸
	۱	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۴۳
	۲	۰/۰۰۵۸	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۴۷	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۱
	۵	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۴۰
	۱۰	۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۳۹
۱۰۰	۰	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۲
	۱	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱
	۲	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰
	۵	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰
	۱۰	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰

جدول۴- نسبت فرکانسی (ω_{NL}/ω_L) ورق مدرج تابعی دوجهته مربعی

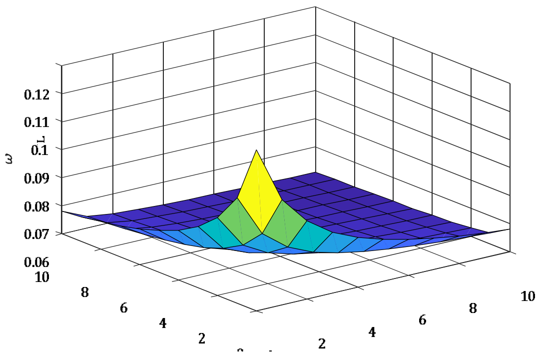
A	k_y	k_x				
		۰	۱	۲	۵	۱۰
۰/۲۵	۰	۱/۰۵۱۳	۱/۰۵۱۳	۱/۰۵۴۳	۱/۰۶۱۳	۱/۰۶۴۵
	۱	۱/۰۵۱۳	۱/۰۵۱۳	۱/۰۵۳۴	۱/۰۵۶۹	۱/۰۵۸۳
	۲	۱/۰۵۴۳	۱/۰۵۳۴	۱/۰۵۲۹	۱/۰۵۳۰	۱/۰۵۳۷
	۵	۱/۰۶۱۳	۱/۰۵۶۹	۱/۰۵۳۰	۱/۰۴۹۶	۱/۰۴۹۸
	۱۰	۱/۰۶۴۵	۱/۰۵۸۳	۱/۰۵۳۷	۱/۰۴۹۸	۱/۰۴۹۶
۱/۷۵	۰	۱/۳۸۹۸	۱/۳۸۹۸	۱/۴۰۹۵	۱/۴۵۴۷	۱/۴۷۵۶
	۱	۱/۳۸۹۸	۱/۳۸۹۸	۱/۴۰۳۴	۱/۴۲۶۷	۱/۴۳۵۵
	۲	۱/۴۰۹۵	۱/۴۰۳۴	۱/۴۰۰۳	۱/۴۰۰۹	۱/۴۰۵۶
	۵	۱/۴۵۴۷	۱/۴۲۶۷	۱/۴۰۰۹	۱/۳۷۸۷	۱/۳۷۹۶
	۱۰	۱/۴۷۵۶	۱/۴۳۵۵	۱/۴۰۵۶	۱/۳۷۹۶	۱/۳۷۸۳
۱/۲۵	۰	۱/۸۸۶۸	۱/۸۸۶۸	۱/۹۲۶۷	۲/۰۱۷۰	۱/۰۵۸۵
	۱	۱/۸۸۶۸	۱/۸۸۶۸	۱/۹۱۴۳	۱/۹۶۱۲	۱/۹۷۸۹
	۲	۱/۹۲۶۷	۱/۹۱۴۳	۱/۹۰۸۱	۱/۹۰۹۳	۱/۹۱۸۸
	۵	۲/۰۱۷۰	۱/۹۶۱۲	۱/۹۰۹۳	۱/۸۶۴۲	۱/۸۶۶۱
	۱۰	۲/۰۵۸۵	۱/۹۷۸۹	۱/۹۱۸۸	۱/۸۶۶۱	۱/۸۶۳۶
۱/۷۵	۰	۲/۴۴۷۷	۲/۴۴۷۷	۲/۵۰۷۷	۲/۶۴۳۰	۲/۷۰۴۳
	۱	۲/۴۴۷۷	۲/۴۴۷۷	۲/۴۸۹۱	۲/۵۵۹۵	۲/۵۸۶۰
	۲	۲/۵۰۷۷	۲/۴۸۹۱	۲/۴۷۹۷	۲/۴۸۱۶	۲/۴۹۵۹
	۵	۲/۶۴۳۰	۲/۵۵۹۵	۲/۴۸۱۶	۲/۴۱۳۶	۲/۴۱۶۵
	۱۰	۲/۷۰۴۸	۲/۵۸۶۰	۲/۴۹۵۹	۲/۴۱۶۵	۲/۴۱۲۶
۲/۲۵	۰	۳/۰۳۷۷	۳/۰۳۷۷	۳/۱۱۷۷	۳/۲۹۷۰	۳/۳۷۸۸
	۱	۳/۰۳۷۷	۳/۰۳۷۷	۳/۰۹۲۹	۳/۱۸۶۴	۳/۲۲۱۵
	۲	۳/۱۱۷۷	۳/۰۹۲۹	۳/۰۸۰۴	۳/۰۸۲۹	۳/۱۰۱۹
	۵	۳/۲۹۷۰	۳/۱۸۶۴	۳/۰۸۲۹	۲/۹۹۲۴	۲/۹۹۶۳
	۱۰	۳/۳۷۸۸	۳/۲۲۱۵	۳/۱۰۱۹	۲/۹۹۶۳	۲/۹۹۱۱



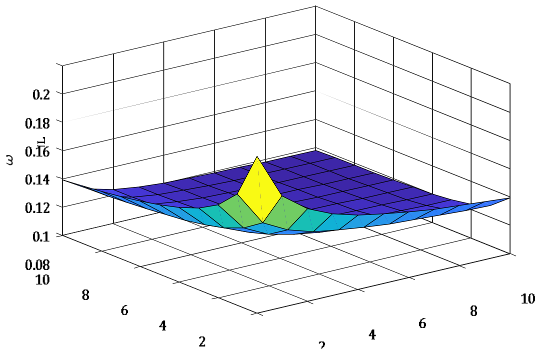
شکل ۵- تاثیرتغییرات نسبت فرکانسی روی دامنه ارتعاش برای مقادیر مختلف اندیس توانی طولی

علاوه بر این، در دامنه های بزرگ منحنی رفتار غیرخطی از نوع فنر سخت (رفتار سخت‌شوندگی) را از خود نشان می‌دهد.

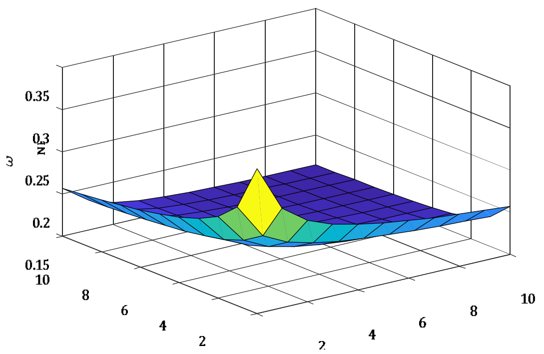
نمودارهای ۶ تا ۸ تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس طولی ماده مدرج (k_x) و اندیس عرضی ماده مدرج (k_y) را برای مقادیر مختلف دامنه ارتعاش بدون‌بعد ورق زمانی که $\frac{a}{h} = 10$ نشان می‌دهد. همان‌طورکه ازاین نمودارها مشخص است، با افزایش اندیس‌های توانی طولی و عرضی فرکانس غیرخطی کاهش می‌یابد. به عنوان مثال، برای مقادیر10 و 0 $= k_y$، زمانی که اندیس توانی طولی k_x از ۰ تا۱۰ افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به‌ترتیب برای $A = 0$، ۴۲/۰۳ درصد و ۱۰/۳۸درصد برای $A = 1$، ۳۷/۴۵ درصد و ۱۷/۸۳ درصد و برای $A = 2$، ۳۵/۷ درصد و ۲۰/۴۱ درصد نسبت به مقدار اولیه خود کاهش می‌یابد. بطور مشابه، برای مقادیر اندیس توانی طولی ۰ و ۱۰، زمانی که اندیس توانی عرضی k_y از ۰ تا ۱۰ افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به‌ترتیب برای $A = 0$، ۴۲/۰۳ درصد و ۱۰/۳۸ درصد برای $A = 1$، ۳۷/۴۵ درصد و ۱۷/۸۳ درصد و برای $A = 2$، ۳۵/۷ درصد و ۲۰/۴۱ درصد کاهش می‌یابد. درحقیقت، مقادیر بالای اندیس های توانی به معنی کاهش فاز سرامیکی ورق بوده که باعث کاهش سختی ورق ودرنتیجه کاهش فرکانس غیرخطی آن می‌شود؛ همچنین از این نمودارها می‌توان این نتیجه را گرفت که مقادیر کوچک اندیس نقش مهم‌تری در فرکانس غیرخطی ورق داشته و برای مقادیر بزرگ اندیس‌های توانی، تغییرات فرکانس غیرخطی به سمت صفر میل می‌کند.



شکل ۶- تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس‌های توانی طولی و عرضی برای A=0



شکل ۷- تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس‌های توانی طولی و عرضی برای A=1

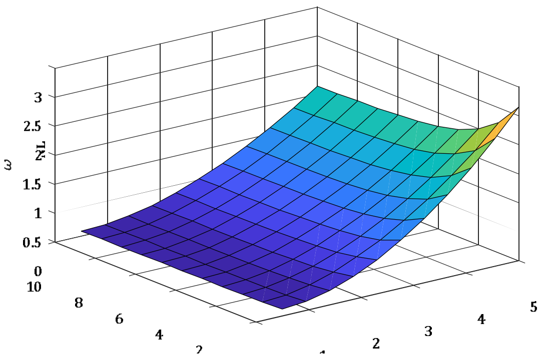


شکل ۸- تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس‌های توانی طولی و عرضی برای A=2

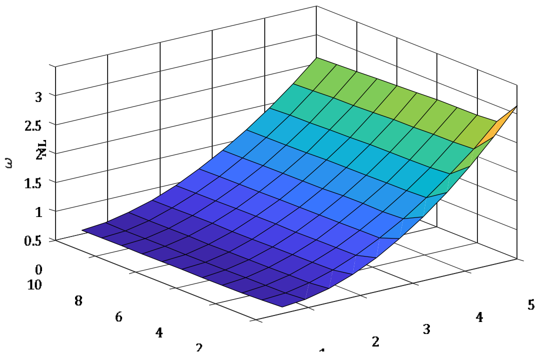
نمودار ۹ تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس طولی ماده مدرج (k_x) و نسبت اندازه (a/b) را برای ورق با شرایط $\frac{a}{h}=10$، $A=1$ و $k_y=1$ نشان می‌دهد. همان‌طور که ازاین نمودار مشاهده می‌گردد، کاهش نسبت اندازه ورق منجربه کاهش فرکانس‌های غیرخطی می‌شود.

به عنوان مثال برای مقادیر نسبت اندازه 3 و $a/b=0/5$ زمانی که اندیس توانی طولی k_x از ۰ تا۱۰ افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب به اندازه ۲۱/۸۳ درصد و ۳۸/۱۱ درصد کاهش می‌یابد.

نمودار ۱۰ تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس عرضی ماده مدرج (k_y) و نسبت اندازه (a/b) را برای ورق با شرایط $\frac{a}{h}=10$، $A=1$ و $k_x=1$ نشان می‌دهد.



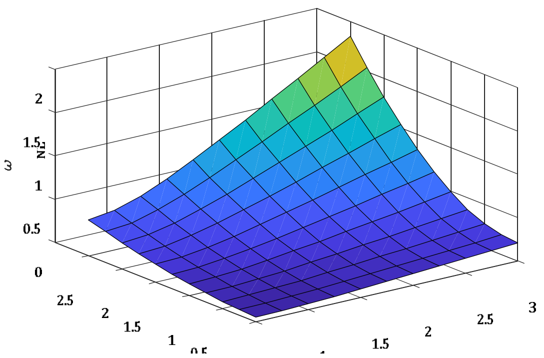
شکل ۹- تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس‌های توانی طولی و نسبت اندازه برای A=1 و $k_y=1$



شکل ۱۰- تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب اندیس‌های توانی عرضی و نسبت اندازه برای A=1 و $k_x=1$

همان‌طور که ازاین نمودار مشاهده می‌گردد، کاهش نسبت اندازه ورق منجربه کاهش فرکانس‌های غیرخطی می‌شود. به عنوان مثال برای مقادیر نسبت اندازه 3 و $a/b=0/5$ زمانی که اندیس توانی عرضی k_y از ۰ تا۱۰ افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب به اندازه ۳۷/۶۵ درصد و ۲۰/۲۱ درصد کاهش می‌یابد.

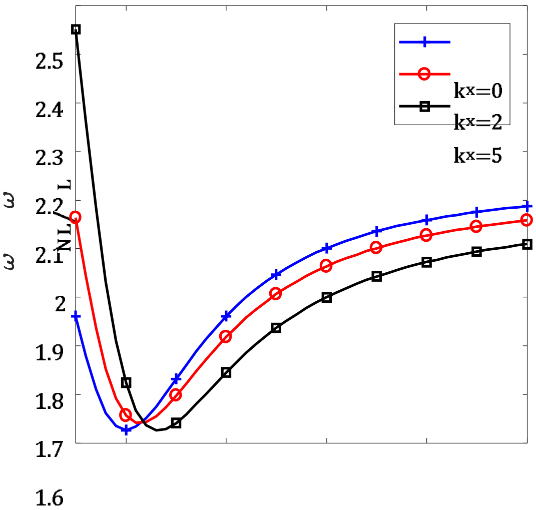
نمودار ۱۱ تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب دامنه ارتعاش بدون‌بعد (A) و نسبت اندازه (a/b) را برای ورق با شرایط $\frac{a}{h}=10$ و $(k_x,k_y)=(1,1)$ نشان می‌دهد. همان‌طور که از این نمودار مشاهده می‌گردد، افزایش نسبت اندازه ورق و همچنین افزایش دامنه ارتعاش بدون‌بعد منجربه افزایش فرکانس‌های غیرخطی می‌شود. به عنوان مثال برای مقادیر نسبت اندازه 3 و $a/b=0/5$ زمانی که دامنه ارتعاش بدون‌بعد A از ۰ تا۲/۵ افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب به اندازه ۳۰۲/۹۶ درصد و ۳۴۲/۷۲ درصد افزایش می‌یابد. بطور مشابه، برای مقادیر دامنه ارتعاش بدون‌بعد A از ۰ تا ۲/۵ زمانی که نسبت اندازه از ۰/۵تا ۳ افزایش می‌یابد، فرکانس غیرخطی به ترتیب به اندازه ۷۰۰ درصد و ۷۷۸/۹۴ درصد افزایش می‌یابد.



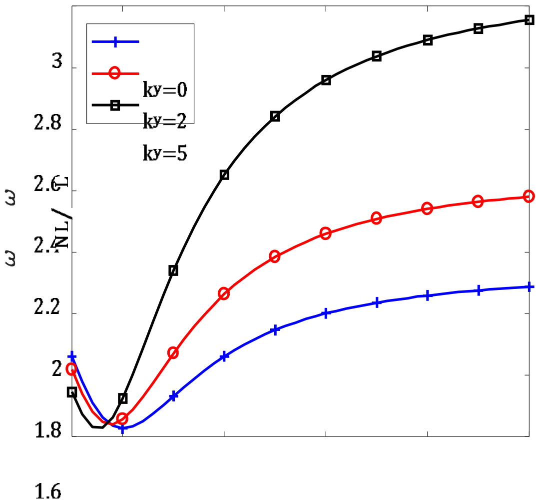
شکل ۱۱- تغییرات فرکانس غیرخطی برحسب دامنه ارتعاش بدون‌بعد و نسبت اندازه برای $(k_x,k_y)=(1,1)$

شکل ۱۲ تغییرات نسبت فرکانس برحسب نسبت اندازه ورق برای مقادیر مختلف اندیس توانی طولی (k_x) را زمانی که $A=1$، $\frac{a}{h}=10$ و $k_y=0$ ارائه می‌دهد. همان‌طور که از این نمودار ملاحظه می‌گردد، برای مقادیر مختلف اندیس توانی طولی ماده مدرج، کاهش سریع نسبت فرکانسی زمانی که $\frac{a}{b}<1/5$ اتفاق می‌افتد؛ درحالی‌که برای مقادیر $1/5<\frac{a}{b}<5$ افزایش نسبت اندازه باعث افزایش نسبت فرکانس می‌شود.

شکل ۱۳ تغییرات نسبت فرکانس برحسب نسبت اندازه ورق برای مقادیر مختلف اندیس توانی عرضی (k_y) را زمانی که $A = 1$، $\frac{a}{h} = 10$ و $k_x = 0$ ارائه می‌دهد. همان‌طور که از این نمودار ۱۲ ملاحظه می‌گردد، برای مقادیر مختلف اندیس توانی طولی ماده مدرج، افزایش نسبت اندازه ورق برای محدوده $\frac{a}{b} < 1$ منجربه کاهش نسبت فرکانس می‌شود؛ درحالی‌که برای مقادیر $1 < \frac{a}{b}$ افزایش نسبت اندازه باعث افزایش نسبت فرکانس می‌شود.



شکل۱۲- تاثیر نسبت اندازه ورق روی نسبت فرکانس برای مقادیر مختلف اندیس توانی طولی زمانی که $k_y = 0$



شکل۱۳- تاثیر نسبت اندازه ورق برروی نسبت فرکانس برای مقادیر مختلف اندیس توانی عرضی زمانی که $k_x = 0$

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق به تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق مستطیلی تشکیل شده از مواد مدرج دوجهته پرداخته شد. با در نظر گرفتن اثر غیرخطی کرنش و براساس تئوری کلاسیک ورق‌ها، معادلات غیرخطی حرکت استخراج شدند. سپس با اعمال روش گالرکین معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به‌دست آمدند. درنهایت معادله غیرخطی ارتعاش عرضی ورق با روش تحلیلی لیندشتد پوانکاره بهبودیافته حل گردید و فرکانس غیرخطی محاسبه شد و اثر برخی پارامترهای کلیدی سیستم روی فرکانس غیرخطی بررسی شد. برای اعتبارسنجی تحقیق حاضر، نتایج این پژوهش با نتایج مقالات منتشر شده قبلی و همچنین حل عددی مقایسه گردید و مشاهده شد که نتایج از دقت بسیارخوبی برخوردار می‌باشند.

مهم ترین نتایج حاصل از این تحقیق به صورت مختصر و موردی عبارت اند از:

۱) فرکانس‌های غیرخطی ورق با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق کاهش می‌یابند.

۲) افزایش دامنه ارتعاش بدون بعد منجر به افزایش نسبت فرکانس می‌شود. به عبارت دیگر، تفاوت میان فرکانس خطی و غیرخطی به شدت وابسته به دامنه ارتعاش است؛ همچنین فرکانس خطی مستقل از دامنه ارتعاش ورق است و تاثیر آن فقط روی فرکانس طبیعی غیرخطی است.

۳) دربررسی نمودارهای پشتواره مشاهده شد که اندیس‌های توانی تاثیر چشم‌گیری روی نسبت فرکانسی دارند. با کاهش اندیس طولی ماده مدرج و افزایش اندیس عرضی ماده مدرج، نمودارها از محور عمودی دورتر می‌شوند. به عبارت دیگر، با تغییر اندیس‌ها درجه رفتار غیرخطی ورق تغییر می‌کند.

۴) در بررسی نمودارهای پشتواره مشاهده شد که در دامنه های بزرگ منحنی رفتار غیرخطی از نوع فنر سخت را از خود نشان می‌دهد.

۵) مقادیر بالای اندیس‌های توانی به معنی کاهش فاز سرامیکی ورق بوده که باعث کاهش سختی ورق و در نتیجه کاهش فرکانس غیرخطی آن می‌شود؛ همچنین مقادیر کوچک اندیس نقش مهم‌تری در

فرکانس غیرخطی ورق داشته و برای مقادیر بزرگ اندیس‌های توانی، تغییرات فرکانس غیرخطی به سمت صفر میل می‌کند.

۶) روش لیندشتدپوانکاره بهبود یافته ابزاری آسان برای حل معادلات غیرخطی است. نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و عددی نشان داد که این روش در تطابق بسیار خوبی با حل عددی است.

۷- مراجع

[1] Zhang DG, Zhou YH (2008) A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. Comp Mat Sci 44(2): 716-720.

[2] Abrate S (2008) Functionally graded plates behave like homogeneous plates. Comp Part B: Eng 39(1): 151–158.

[3] Najafizadeh MM, Ayalvar A (2006) Investigation of free vibrations of gunctionally graded rectangular plate using first-order shear deformation theory. Ir Soci Mech Eng 7(1): 52- 68. (In Persian)

[4] Khorshidi K, Onsorinezhad S (2017) Exact free vibration analysis of sector plates coupled with piezoelectric layers using first-order shear deformation plate theory. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 6(4): 125-138. (In Persian)

[5] Khorshidi K, Bakhsheshi A, Ghadirian H (2017) The study of the effects of thermal environment on free vibration analysis of two dimensional functionally graded rectangular plates on pasternak elastic foundation. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 6(3): 137-147. (In Persian)

[6] Hosseini Hashemi SH, Akhavan H, Fadaee M (2012) Exact closed-form free vibration analysis of moderately thick rectangular functionally graded plates with two bonded piezoelectric layers. Modares Mechanical Engineering 11(3): 57-74. (In Persian)

[7] Zhao X, Lee YY, Liew KM (2009) Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. J Sound Vib 319(3-5): 918-939.

[8] Farzam A, Hassani B (2019) Size-dependent analysis of FG microplates with temperature-dependent material properties using modified strain gradient theory and isogeometric approach. Comp Part B: Eng.

[9] Gupta A, Talha M, Singh BN (2016) Vibration characteristics of functionally graded material plate with various boundary constraints using higher order shear deformation theory. Comp Part B: Eng 94(1): 64-74.

[10] Khorshidi K, Siahpush A, Fallah A (2017) Electro-Mechanical free vibrations analysis of composite rectangular piezoelectric nanoplate using modified shear deformation theories. J Sci Tech Comp 4(1): 151-160. (In Persian)

[11] Khorshidi K, Asgari T, Fallah A (2015) Free vibrations analysis of functionally graded rectangular nano-plates based on nonlocal exponential shear deformation theory. Mech Ad Comp Struct 4(2): 79-93.

[12] Khorshidi K, Bakhsheshy A (2015) Free vibration analysis of a functionally graded rectangular plate in contact with a bounded fluid. Acta Mech 266(10): 3401-3423.

[13] Ghaheri A, Nosier A (2015) Nonlinear forced vibrations of thin circular functionally graded plates. J Sci Tech Comp 1(2): 1- 10. (In Persian)

[14] Wang YQ, Zu JW (2017) Large-amplitude vibration of sigmoid functionally graded thin plates with porosities," Thin-Walled Struct 119(1): 911-924.

[15] Yazdi AA (2013) Homotopy perturbation method for nonlinear vibration analysis of functionally graded plate. J Vib Acoust 135(2): 12-21.

[16] Lotfavar A, Rafiei Pour H, Hamze Shalamdari S, Mohammadi T (2015) Nonlinear vibration analysis of laminated composite plates using approximate and analytical methods. Ir soc Mech Eng 1(17): 16-39. (In Persian)

[17] Woo J, Meguid SA, Ong LS (2006) Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. J Sound Vib 289(3): 595-611.

[18] Malekzadeh P, Monajjemzadeh SM (2015) Nonlinear response of functionally graded plates under moving load. Thin-Walled Struct 96(1): 120-129.

[19] Duc ND, Cong PH (2015) Nonlinear vibration of thick FGM plates on elastic foundation subjected to thermal and mechanical loads using the first-order shear deformation plate theory. Cogent Eng 2(1): 1045222.

[20] Fung CP, Chen CS (2006) Imperfection sensitivity in the nonlinear vibration of functionally graded plates. Eur J Mech A/Solids 25(3): 425-461.

[21] Şimşek M (2015) Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions. Comp Struct 133: 968-978.

[22] Tang Y, Ding Q (2019) Nonlinear vibration analysis of a bi-directional functionally graded beam under hygro-thermal loads. Comp Struct 111076.

[23] Fariborz J, Batra RC (2019) Free vibration of bi-directional functionally graded material circular beams using shear deformation theory employing

[35] Aragh BS, Hedayati H, Farahani EB, Hedayati M (2011) A novel 2-D six-parameter power-law distribution for free vibration and vibrational displacements of two-dimensional functionally graded fiber-reinforced curved panels. Eur J Mech A/Solids 30(6): 865-883.

[36] Kumar Y (2015) Free vibration of two-directional functionally graded annular plates using Chebyshev collocation technique and differential quadrature method. Int J Struct Stab Dy 15(06): 450086.

[37] Lal R, Ahlawat N (2017) Buckling and vibrations of two-directional functionally graded circular plates subjected to hydrostatic in-plane force. J Vib Con 23(13): 2111-2127.

[38] Lal R, Ahlawat N (2019) Buckling and vibrations of two-directional FGM Mindlin circular plates under hydrostatic peripheral loading. Mech Ad Mat Struct 26(3): 199-214.

[39] Shariyat M, Alipour MM (2013) A power series solution for vibration and complex modal stress analyses of variable thickness viscoelastic two-directional FGM circular plates on elastic foundations. App Math Modelling 37(5): 3063-3076.

[40] Tahouneh V, Naei MH (2014) A novel 2-D six-parameter power-law distribution for three-dimensional dynamic analysis of thick multi-directional functionally graded rectangular plates resting on a two-parameter elastic foundation. Mecca 49(1): 91-109.

[41] Tahouneh V, Yas, MH (2013) Semianalytical solution for three-dimensional vibration analysis of thick multidirectional functionally graded annular sector plates under various boundary conditions. J Eng Mech 140(1): 31-46.

[42] Yas MH, Moloudi N (2015) Three-dimensional free vibration analysis of multi-directional functionally graded piezoelectric annular plates on elastic foundations via state space based differential quadrature method. App Math Mech 36(4): 439-464.

[43] Reddy JN (2006) Theory and analysis of elastic plates and shell. CRC press.

[44] Chia CY (1980) Nonlinear analysis of plates. McGraw-Hill International Book Company.

[45] Reddy JN (2004) Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. CRC press.

[46] Nayfeh AH, Mook DT (1995) Nonlinear oscillation. John Wiley & Sons, Inc.

[47] He JH (2002) Modified Lindstedt–Poincare methods for some strongly non-linear oscillations: Part I: expansion of a constant. Int J Non Mech 37: 309-314.

logarithmic function of radius. Comp Struct 210: 217-230.

[24] Rajasekaran S, Khaniki HB (2019) Bi-directional functionally graded thin-walled non-prismatic Euler beams of generic open/closed cross section Part I: Theoretical formulations. Thin-Walled Struct 141: 627-645.

[25] Tang Y, Lv X, Yang T (2019) Bi-directional functionally graded beams: asymmetric modes and nonlinear free vibration. Comp Part B: Eng. 156: 319-331.

[26] Rajasekaran S, Khaniki HB (2019) Size-dependent forced vibration of non-uniform bi-directional functionally graded beams embedded in variable elastic environment carrying a moving harmonic mass. App Math Modelling 72: 129-154.

[27] Chen M, Jin G, Ma X, Zhang Y, Ye T, Liu Z (2018) Vibration analysis for sector cylindrical shells with bi-directional functionally graded materials and elastically restrained edges. Comp Part B: Eng 153: 346-363.

[28] Chen M, Jin G, Ma X, Zhang Y, Ye T, Liu Z (2018) Vibration analysis for sector cylindrical shells with bi-directional functionally graded materials and elastically restrained edges. Comp Part B: Eng 153: 346-363.

[29] Lieu QX, Lee D, Kang J, Lee J (2019) NURBS-based modeling and analysis for free vibration and buckling problems of in-plane bi-directional functionally graded plates. Mech Ad Mat Struct 26(12): 1064-1080.

[30] Lieu QX, Lee S, Kang J, Lee J (2018) Bending and free vibration analyses of in-plane bi-directional functionally graded plates with variable thickness using isogeometric analysis. Comp Struct 192: 434-451.

[31] Farzam A, Hassani B (2019) Isogeometric analysis of in-plane functionally graded porous microplates using modified couple stress theory. Aerosp Sci Technol 91: 508-524.

[32] Kumar Y, Lal R (2013) Prediction of frequencies of free axisymmetric vibration of two-directional functionally graded annular plates on Winkler foundation. Eur J Mech A/Solids 42: 219-228.

[33] Shariyat M, Alipour MM (2011) Differential transform vibration and modal stress analyses of circular plates made of two-directional functionally graded materials resting on elastic foundations. Arch App Mech 81(9): 1289-1306.

[34] Alipour MM, Shariyat M, Shaban M (2010) A semi-analytical solution for free vibration of variable thickness two-directional-functionally graded plates on elastic foundations. Int J Mech Mat Design 6(4): 293-304.

۸- پیوست

۸-۱- پیوست الف

$$C_{11}=-\frac{1}{8r^3(v^2-1)}\pi^2\int_0^1\int_0^1\cos(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})(2\pi\sin(2\pi\bar{x})\bar{e}(\bar{x},\bar{y})((s^2+1)\cos(2\pi\bar{y})+s^2v-1)+s^2(-(v-1))\sin(2\pi\bar{x})\sin(2\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}+4\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}(s^2v\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})+\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})))\,d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{12}=\int_0^1\int_0^1(-\frac{\pi^2s^2\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^2(v+1)}+\frac{\pi s^2\cos^2(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{2r^2(v+1)}-\frac{\pi^2\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^2(1-v^2)}-\frac{\pi\sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{r^2(1-v^2)})\,d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{13}=\int_0^1\int_0^1(-\frac{\pi^2sv\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^2(1-v^2)}-\frac{\pi sv\sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{r^2(1-v^2)}-\frac{\pi^2s\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^2(v+1)}+\frac{\pi s\cos^2(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{2r^2(v+1)})\,d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{21}=\frac{1}{8r^3(v^2-1)}\pi^2s\int_0^1\int_0^1\sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{y})(-2\pi\sin(2\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})((s^2+1)\cos(2\pi\bar{x})-s^2+v)-4\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}(s^2\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})+v\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y}))+(v-1)\sin(2\pi\bar{x})\sin(2\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}})\,d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{22}=\int_0^1\int_0^1(-\frac{\pi^2sv\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^2(1-v^2)}-\frac{\pi sv\sin^2(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{r^2(1-v^2)}-\frac{\pi^2s\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^2(v+1)}+\frac{\pi s\sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{2r^2(v+1)})\,d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{23}=\int_0^1\int_0^1\left(-\frac{\pi^2 s^2\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^2(1-v^2)}-\frac{\pi s^2\sin^2(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{r^2(1-v^2)}\right.$$

$$\left.-\frac{\pi^2\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^2(v+1)}+\frac{\pi\sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{2r^2(v+1)}\right)d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{31}=-\int_0^1\int_0^1\sin^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\bar{\rho}(\bar{x},\bar{y})\,d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{32}=\int_0^1\int_0^1\left(-\frac{\pi^2 s^2\sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial^2\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}\,\partial\bar{y}}}{6r^4(v+1)}-\frac{\pi^4 s^4\sin^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{12r^4(1-v^2)}\right.$$

$$+\frac{\pi^2 s^4\sin^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\frac{\partial^2\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}^2}}{12r^4(1-v^2)}+\frac{\pi^3 s^4\sin^2(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{6r^4(1-v^2)}$$

$$-\frac{\pi^4 s^2 v\sin^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{6r^4(1-v^2)}+\frac{\pi^2 s^2 v\sin^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\frac{\partial^2\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}^2}}{12r^4(1-v^2)}$$

$$+\frac{\pi^2 s^2 v\sin^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\frac{\partial^2\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}^2}}{12r^4(1-v^2)}+\frac{\pi^3 s^2 v\sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{6r^4(1-v^2)}$$

$$+\frac{\pi^3 s^2 v\sin^2(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{6r^4(1-v^2)}-\frac{\pi^4 s^2\sin^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{6r^4(v+1)}$$

$$+\frac{\pi^3 s^2\sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{6r^4(v+1)}+\frac{\pi^3 s^2\sin^2(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{6r^4(v+1)}$$

$$-\frac{\pi^4\sin^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{12r^4(1-v^2)}+\frac{\pi^2\sin^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\frac{\partial^2\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}^2}}{12r^4(1-v^2)}$$

$$\left.+\frac{\pi^3\sin(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{6r^4(1-v^2)}\right)d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{33}=\int_0^1\int_0^1\Big(\frac{\pi^3 s^2 v\sin^3(\pi\bar{x})\sin^3(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^3(1-v^2)}-\frac{\pi^3 s^2 v\sin^3(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^3(1-v^2)}$$

$$-\frac{\pi^2 s^2 v\sin^3(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{r^3(1-v^2)}-\frac{\pi^3 s^2\sin^3(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^3(v+1)}$$

$$-\frac{\pi^3 s^2\sin(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^3(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^3(v+1)}+\frac{\pi^3 s^2\sin(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^3(v+1)}$$

$$+\frac{\pi^2 s^2\sin^2(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{2r^3(v+1)}$$

$$+\frac{\pi^2 s^2\sin(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{2r^3(v+1)}+\frac{\pi^3\sin^3(\pi\bar{x})\sin^3(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^3(1-v^2)}$$

$$-\frac{\pi^3\sin(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^3(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^3(1-v^2)}-\frac{\pi^2\sin^2(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin^3(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{r^3(1-v^2)}\Big)\,d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{34}=\frac{1}{8r^3(v^2-1)}\pi^2 s\int_0^1\int_0^1\sin(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})(-2\pi\bar{E}(\bar{x},\bar{y})(s^2\cos(2\pi(\bar{x}+\bar{y}))+(s^2+1)\cos(2\pi(\bar{x}-\bar{y}))$$

$$-2s^2\cos(2\pi\bar{y})+(1-3v)\cos(2\pi\bar{x})-v\cos(2\pi\bar{y})+\cos(2\pi(\bar{x}+\bar{y}))+\cos(2\pi\bar{y}))$$

$$+\sin(2\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}((-2s^2+v-1)\cos(2\pi\bar{x})+2s^2+v-1)+\sin(2\pi\bar{x})(-((v$$

$$+1)\cos(2\pi\bar{y})-3v+1))\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}})\,d\bar{y}\,d\bar{x}$$

$$C_{35}=\int_0^1\int_0^1\Big(-\frac{3\pi^4s^4\sin^4(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^4(1-v^2)}+\frac{\pi^3s^4\sin^4(\pi\bar{x})\sin(\pi\bar{y})\cos^3(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{2r^4(1-v^2)}$$
$$+\frac{2\pi^4s^2v\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^4(1-v^2)}$$
$$-\frac{\pi^4s^2v\sin^4(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^4(1-v^2)}-\frac{\pi^4s^2v\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^4(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^4(1-v^2)}$$
$$+\frac{\pi^3s^2v\sin^3(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{2r^4(1-v^2)}$$
$$+\frac{\pi^3s^2v\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^3(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{2r^4(1-v^2)}$$
$$+\frac{2\pi^4s^2\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{r^4(v+1)}$$
$$-\frac{\pi^4s^2\sin^4(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^4(v+1)}-\frac{\pi^4s^2\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^4(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^4(v+1)}$$
$$+\frac{\pi^3s^2\sin^3(\pi\bar{x})\cos(\pi\bar{x})\sin^2(\pi\bar{y})\cos^2(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{2r^4(v+1)}$$
$$+\frac{\pi^3s^2\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^3(\pi\bar{y})\cos(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{y}}}{2r^4(v+1)}-\frac{3\pi^4\sin^2(\pi\bar{x})\cos^2(\pi\bar{x})\sin^4(\pi\bar{y})\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{2r^4(1-v^2)}$$
$$+\frac{\pi^3\sin(\pi\bar{x})\cos^3(\pi\bar{x})\sin^4(\pi\bar{y})\frac{\partial\bar{E}(\bar{x},\bar{y})}{\partial\bar{x}}}{2r^4(1-v^2)}\Big)\,d\bar{y}\,d\bar{x}$$

۸-۱- پیوست (ب)

$$\alpha=\frac{(-C_{37}C_{42}C_{51}+C_{36}C_{43}C_{51}+C_{37}C_{41}C_{52}-C_{32}C_{43}C_{52}-C_{36}C_{41}C_{53}+C_{32}C_{42}C_{53})}{C_{31}(-C_{43}C_{52}+C_{42}C_{53})}$$

$$\gamma=\frac{(C_{13}C_{21}C_{33}+C_{11}C_{23}C_{33}+C_{12}C_{21}C_{34}-C_{11}C_{22}C_{34}+C_{13}C_{22}C_{35}-C_{12}C_{23}C_{35})}{(C_{13}C_{22}-C_{12}C_{23})C_{31}}$$