



## بررسی ارتعاش محوری میله با تکیه‌گاه ویسکو الاستیک

روح‌الله زنگانه<sup>۱\*</sup> و احمد احمدی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شاهرود

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شاهرود

### چکیده

اخیرا استفاده از مواد ویسکو الاستیک در بخش‌های مختلف مهندسی به دلیل خصوصیات فیزیکی و مکانیکی آنها افزایش پیدا کرده است. رفتار این مواد در استهلاک انرژی و میرایی نیروهای زیاد و حدی باعث ایجاد علاقه در مهندسين جهت مطالعه و بررسی کاربرد این مواد گردیده است. در این مطالعه ارتعاش محوری میله‌ای با مصالح الاستیک و همچنین ویسکو الاستیک با وجود تکیه‌گاه مرزی و میانی ساخته شده از مواد ویسکو الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. خصوصیات مکانیکی مواد ویسکو الاستیک توسط مدل کلوین - ویت تعمیم یافته توصیف شده است. معادلات حاکم با روش اجزای محدود در حوزه زمان حل شدند و نتایج عددی به صورت تاریخچه جابه‌جایی در چندین مقطع و تاریخچه تنش در میله و تکیه‌گاه‌ها، تهیه و مقایسه‌ای جامع بین حالت‌های مذکور صورت گرفت و نشان داده شد که استفاده از تکیه‌گاه ویسکو الاستیک در میرایی و کاهش جابه‌جایی و ارتعاش میله بسیار موثر و کارآمد می‌باشد و می‌تواند موجب کاهش تنش و تغییرات آن با گذشت زمان در میله و تکیه‌گاه‌ها گردد.

**کلمات کلیدی:** ارتعاش محوری؛ تکیه‌گاه ویسکو الاستیک؛ روش اجزای محدود؛ مدل کلوین-ویت تعمیم یافته.

## Axial vibration of a rod with viscoelastic support

R. Zanganeh<sup>1\*</sup> and A. Ahmadi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> MSc. Student, Civil Eng. Dept., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

<sup>2</sup> Assistant Prof., Civil Eng. Dept., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

### Abstract

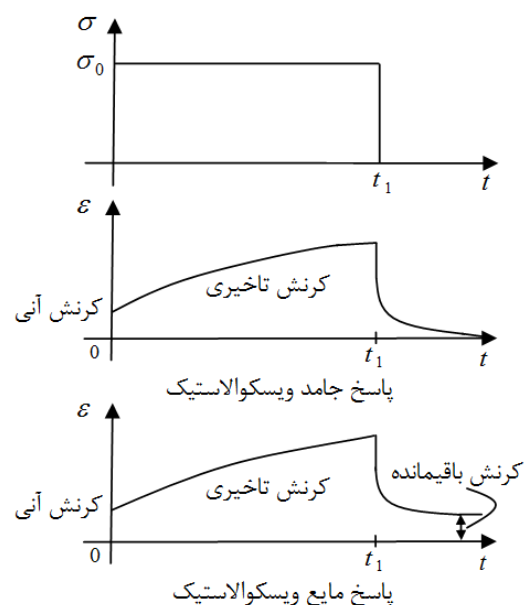
The use of viscoelastic materials have recently been increased in several areas of engineering due to their advantageous physical and mechanical properties. Regarding the latter, the energy dissipation behavior and dampening of extreme forces are of great interest for structural engineers. In this study, axial vibration of an elastic and a viscoelastic rod with the end and middle supports made from viscoelastic materials was investigated. The viscoelastic property was described using the generalized Kelvin-Voigt mechanical model. The governing equations were solved using the finite element method in the time domain. The numerical results were provided in terms of the displacement-time history in several sections and the stress-time history in the rod and its supports and a detailed comparison was made between aforementioned cases. The responses subject to step load excitation revealed that the use of viscoelastic materials as support is very effective and efficient at damping and decreasing the displacement and vibration of the rod. They can also reduce the stress and its rate of changes significantly because of their energy dissipation nature.

**Keywords:** Axial vibration; Viscoelastic support; Finite-element method; Generalized Kelvin-Voigt model.

## ۱- مقدمه

میرایی، یک ویژگی مهم در سازه‌هاست که باعث کاهش پاسخ ارتعاشی و صوتی سازه‌ها می‌شود. برای بالا بردن میرایی در سازه‌ها، همیشه امکان استفاده از میراگر در خود سازه مرتعش نیست لذا روش دیگری که می‌توان برای کنترل ارتعاش به کار برد، استفاده از مصالح میراکننده در تکیه‌گاه‌ها می‌باشد. استهلاک انرژی ارتعاش سازه توسط تکیه‌گاه ویسکوالاستیک یکی از روش‌های کارآمد برای کاهش مقدار نیروهای ضربه‌ای شدید، صداهای حاصله و مشکلات مرتبط با خستگی می‌باشد. سختی تکیه‌گاه نقش مهمی در رفتار سیستم از جهت ایجاد صدا و قابلیت آن در استهلاک انرژی مخصوصاً در فرکانس‌های پایین دارد [۱].

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، در این مواد با اعمال تنش ثابت  $\sigma_0$  تا لحظه  $t_1$  و سپس حذف آن، شاهد رفتاری مشابه با هم مواد الاستیک و هم مایعات ویسکوز خواهیم بود. به گونه‌ای که در لحظه  $t_0$  کرنش آنی که البته در مقایسه با حالت مشابه در مواد جامد الاستیک کمتر است، اتفاق خواهد افتاد و پس از آن نیز شاهد افزایش کرنش به طور پیوسته، مانند مایع ویسکوز خواهیم بود که به آن کرنش تاخیری نیز گفته می‌شود. پس از رهاسازی تنش در لحظه  $t_1$



شکل ۱- تست خزش و پاسخ مکانیکی ماده ویسکوالاستیک

مقداری از کرنش به طور آنی برگشته و مابقی در مواد جامد ویسکوالاستیک به طور کامل حذف خواهد شد در حالی که در مواد مایع ویسکوالاستیک علاوه بر حذف بخشی از کرنش، مقدار دیگری از کرنش در جسم باقی خواهد ماند. برای بدست آوردن معادلات حاکم بر پاسخ مواد ویسکوالاستیک (مانند روابط تنش-کرنش)، رفتار مواد ویسکوالاستیک با مدل‌های مکانیکی همچون مدل جامع کلونین - ویت قیاس زده می‌شود [۲].

در روابط ساختاری (تنش-کرنش) ارایه شده جهت توصیف مواد ویسکوالاستیک به منظور اجتناب از مشتقات مراتب بالایی از تنش و کرنش نسبت به زمان در مدل‌های مکانیکی مرسوم مواد ویسکوالاستیک (ماکسول، کلونین- ویت تعمیم یافته)، از روابطی بر حسب انتگرال کانولوشن استفاده شده است.

در زمینه حل عددی مواد ویسکوالاستیک در حوزه زمان که بر پایه معادلات حاکم دیفرانسیلی- انتگرالی می‌باشد چندین کار از جمله، بسط سری درישله تابع خزش (کرنش پیوسته) توسط چازال و موتو<sup>۱</sup> [۳]، ارائه الگوریتمی کارآمد برای تقریب مشتقات زمانی و محاسبه انتگرال کانولوشن جهت ساده سازی محاسبات توسط میخایلینکو و همکاران<sup>۲</sup> [۴]، انجام شده است. همچنین توسط کرامت و احمدی<sup>۳</sup> [۵] جهت محاسبه انتگرال کانولوشن ناشی از رفتار ویسکو-الاستیک، تقریب عددی کارآمد بر اساس مقادیری از گام زمانی فعلی و قبلی به منظور پیاده سازی آسان روش اجزای محدود در حوزه زمان ارائه شده است. این تقریب عددی در روش اجزای محدود، تنها، ترم‌های اضافی‌ای در ماتریس جرم (یا سختی) و بردار نیرو نسبت به مواد الاستیک ایجاد می‌نماید.

در زمینه ارتعاش در مواد ویسکوالاستیک می‌توان به آنالیز اجزای محدود مسائل دینامیکی گذرای ویسکوالاستیک در حوزه زمان توسط سیم و لی<sup>۴</sup> [۶] اشاره نمود. ارتعاش محوری در این مواد در حوزه فرکانس نیز قابل فرمولبندی و

<sup>1</sup> Chazal and Moutou

<sup>2</sup> Mikhailenko

<sup>3</sup> Keramat and Ahmadi

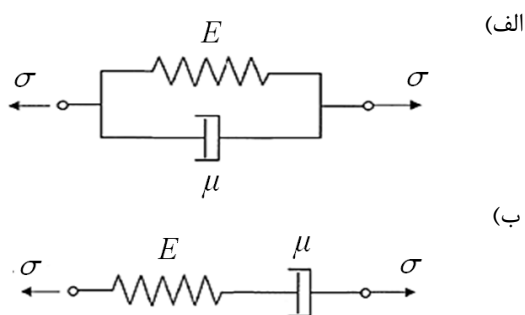
<sup>4</sup> Sim and Lee

ثابت در انتهای میله الاستیک و همچنین ویسکوالاستیک می‌باشد. معادلات به روش اجزای محدود در حوزه زمان حل می‌شوند. در حل عددی از تقریب عددی مناسب به کار رفته در مقاله کرامت و احمدی [۵] برای ترم‌های اضافی ایجاد شده در فرمولبندی اجزای محدود ناشی از رفتار مواد ویسکو-الاستیکی که با مدل مکانیکی کلوین-ویت تعمیم یافته قیاس شده‌اند، استفاده می‌شود.

## ۲- مواد و روش‌ها

### ۲-۱- روابط ساختاری مواد ویسکوالاستیک

پاسخ مواد ویسکوالاستیک خطی هم شامل جنبه‌هایی از پاسخ مکانیکی مواد جامد الاستیک و هم مایعات ویسکوز می‌باشد. این رفتار را می‌توان در شکل ۱ که در آن آزمایشی با بارگذاری به صورت تنش ثابت  $\sigma_0$  در یک ماده ویسکوالاستیک است (تست خزش) مشاهده نمود. رفتار الاستیک مصالح توسط فنر خطی و رفتار ویسکوز توسط میراگر مدل می‌شود. در فنر خطی رابطه نیرو- تغییرشکل به صورت  $F = ku$  می‌باشد. که در آن  $F$  نیرو و  $u$  جابه‌جایی و  $K$  ثابت فنر است. در میراگر ویسکوز رابطه نیرو- تغییرشکل به صورت  $F = c\dot{u}$  است که در آن  $F$  نیرو،  $c$  ویسکوزیته میراگر و  $\dot{u}$  مشتق جابه‌جایی نسبت به زمان می‌باشد. بنابراین می‌توان با ترکیبی مناسب از فنرها و میراگرها به مدلسازی رفتار مواد ویسکوالاستیک پرداخت. دو ترکیب ساده آنها به مدل‌های کلوین-ویت (شکل ۲- الف) و مکسول (شکل ۲- ب) معروف می‌باشند، اما این دو مدل به خوبی نمی‌توانند رفتار واقعی



شکل ۲- الف- مدل کلوین-ویت. ب- مدل مکسول

حل می‌باشد که در این حوزه ترم‌های انتگرال اغلب توسط پارامترهای مختلط نشان داده می‌شوند [۷ و ۸].

در زمینه حل عددی و تحلیلی انتشار موج طولی در محیط الاستیک و ویسکوالاستیک چندین تحقیق وجود دارد که از بین آنها می‌توان حل دقیق ارائه شده توسط ما<sup>۱</sup> [۹] و حل عددی توسط لئونو<sup>۲</sup> [۱۰]، کرامت و احمدی [۵] را برجسته نمود.

در زمینه بررسی تاثیر تکیه‌گاه ویسکوالاستیک در حوزه زمان به ویژه در میله ویسکوالاستیک بسیار به ندرت کار شده است. اما تاثیر تکیه‌گاه ویسکوالاستیک در حوزه فرکانس به همراه پارامترهای مختلط توسط چندین محقق مورد بررسی قرار گرفته است. از جمله می‌توان به بررسی اثرات تکیه‌گاه ویسکوالاستیک بر تابش صدای گذرا از صفحه مستطیلی با استفاده از روش انرژی کرنش مودال (MSE) توسط فان و کیم<sup>۳</sup> [۱۱]، بررسی ارتعاش ناشی از نیرو در تیری با تکیه‌گاه ویسکوالاستیک با تحلیل حالت مختلط نرمال توسط فان و همکاران [۱۲]، بررسی پایداری دینامیکی تیر الاستیک با تکیه‌گاه ویسکوالاستیک توسط ماجورانا و پومارو<sup>۴</sup> [۱۳]، اشاره نمود. قابل توجه است در سه مقاله اخیر، تکیه‌گاه توسط یک فنر خطی و یک فنر پیچشی مدل شده است. همچنین می‌توان به بررسی تاثیر خصوصیات تکیه‌گاه ویسکوالاستیک بر انتشار موج سازه‌ای در حوزه فرکانس و ارائه روشهایی جهت تنظیم بهینه سختی تکیه‌گاه توسط پارک<sup>۵</sup> [۱]، تعیین پاسخ حالت پایدار تیر الاستیک طره با وجود تکیه‌گاه ویسکو-الاستیک در پی، ناشی از تحریک سینوسی پی با استفاده از اصل حرکت نسبی توسط تورگات<sup>۶</sup> [۱۴] و تحلیل تیر چند لایه با شیشه که در دو طرف بر تکیه‌گاه ویسکوالاستیک قرار دارد، با استفاده از روش اجزای محدود توسط کوتاوا و دایا<sup>۷</sup> [۱۵]، اشاره کرد.

هدف از این مطالعه بررسی تاثیر تکیه‌گاه ویسکوالاستیک مرزی و میانی بر ارتعاش محوری ناشی از اعمال نیروی پله‌ای

<sup>1</sup> Ma

<sup>2</sup> Leonov

<sup>3</sup> Fan and Kim

<sup>4</sup> Majorana and Pomaro

<sup>5</sup> Park

<sup>6</sup> Turgut

<sup>7</sup> Koutsawa and Daya

عبارت سوم در معادله (۲) در صورتی بدست می‌آید که فرض شود تنش قبل از  $t=0$ ، صفر است. علامت " \*d " عملگر استیلیس کانولوشن می‌باشد که جهت ساده نویسی معادله (۲) به کار گرفته شده است. در معادله فوق تابع خزش تطابقی  $J(t)$ . مطابق با مدل تعمیم یافته کلونین - ویت به صورت معادله (۳) بدست خواهد آمد [۱۶]:

$$J(t) = J_0 + \sum_{k=1}^{N_{KV}} J_k \left( 1 - e^{-t/\tau_k} \right) \quad (3)$$

که در آن  $J_0 = 1/E_0$  نشان دهنده پاسخ آنی مصالح ویسکو-الاستیک،  $J_k = 1/E_k$  نشان دهنده خزش تطابقی فنر مربوط به المان  $k$  ام کلونین- ویت،  $E_k$  مدول الاستیسیته فنر  $k$  ام و  $\tau_k$  زمان تاخیر خزش میراگر  $k$  ام می‌باشد. در اینجا  $\tau_k = \mu_k / E_k$  که در آن  $\mu_k$  ویسکوزیته میراگر  $k$  ام است. همچنین می‌توان رابطه تنش و کرنش را به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t \varepsilon(t-s) \frac{dG}{ds}(s) ds \\ &= \varepsilon(t)G(0) + \int_0^t \varepsilon(t-s) \frac{dG}{ds}(s) ds \\ &= (\varepsilon * dG)(t) \end{aligned} \quad (4)$$

که در معادله فوق  $G(t)$ ، تابع رهاسازی تنش مربوط به مدل تعمیم یافته کلونین- ویت می‌باشد و برابر است با [۲]:

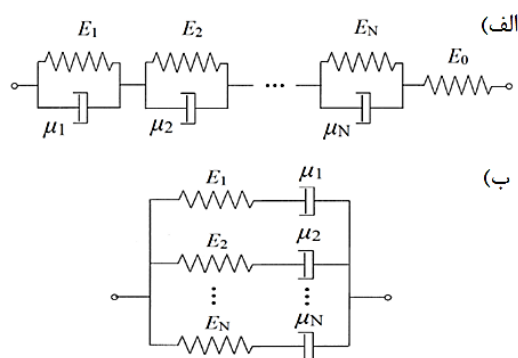
$$G(t) = G_\infty + \sum_{k=1}^{N_{KV}} G_k e^{-t/\hat{\tau}_k} \quad (5)$$

در تابع فوق می‌توان تحقیق نمود که  $G_\infty = G(\infty)$ . این رابطه تنش نهایی تحت کرنش پله‌ای را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که نمی‌توان به راحتی برای  $G_k$ ،  $G_\infty$  و  $\hat{\tau}_k$  (زمان تاخیر رهاسازی)، رابطه‌ای بر حسب  $E_k$ ،  $E_0$  و  $\mu_k$  شبیه آنچه که برای تابع خزش گفته شد، بیان نمود. البته می‌توان نشان داد که رابطه (۶) بین تابع خزش و رهاسازی برقرار است.

$$G(t) * dJ(t) = 1 \quad (6)$$

لذا می‌توان مقادیر مورد نظر تابع رهاسازی تنش را با داشتن مقادیر تابع خزش تطابقی و یا برعکس بدست آورد.

مواد ویسکوالاستیک را مدل نمایند، لذا باید ترکیب بهتری از آنها مانند مدل تعمیم یافته کلونین - ویت (شکل ۳- الف) که شامل  $N$  المان کلونین - ویت و یک فنر که به صورت سری به یکدیگر متصل شده‌اند، یا مدل تعمیم یافته مکسول (شکل ۳- ب) که شامل  $N$  المان مکسول به صورت موازی است را مورد استفاده قرار داد.



شکل ۳- الف-مدل جامع کلونین-ویت، ب-مدل جامع مکسول

روابط ساختاری تنش و کرنش برای مدل کلونین- ویت تعمیم یافته به صورت زیر می‌باشد [۲]:

$$p_0 \sigma + \sum_{k=1}^{N_{KV}} p_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = q_0 \varepsilon + \sum_{k=1}^{N_{KV}} q_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k} \quad (1)$$

که در آن ضرایب  $p$  و  $q$  تابعی بر حسب مدول الاستیسیته و ویسکوزیته هر المان که در شکل (۳- الف) نشان داده شده است می‌باشند،  $\sigma$  و  $\varepsilon$  به ترتیب نشان دهنده تنش و کرنش هستند. بنابراین رابطه بنیادی حاکم در مواد ویسکوالاستیک خطی شامل مشتقات مراتب بالایی از تنش و کرنش می‌باشد. با گرفتن تبدیل لاپلاس و معکوس آن از معادله (۱) [۲و۵]، یا با استفاده از اصل روی هم گذاری بولتزمن [۱۶]، می‌توان رابطه تنش و کرنش را به شکل زیر استخراج نمود:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^t \sigma(t-s) \frac{dJ}{ds}(s) ds = \\ &= \sigma(t)J(0) + \int_0^t \sigma(t-s) \frac{dJ}{ds}(s) ds \\ &= (\sigma * dJ)(t) \end{aligned} \quad (2)$$

۲-۲- معادلات حاکم

معادله ارتعاش محوری در یک میله به طول  $L$  و سطح مقطع  $A$  که در مرز  $x=L$  در معرض نیروی محوری دلخواه  $F(t)$  قرار دارد، اگر از جنس مصالح الاستیک باشد به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (۷)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیسیته و  $\rho$  جرم مخصوص می‌باشد. چنانچه میله از جنس مصالح ویسکوالاستیک باشد هم می‌توان معادله ارتعاش محوری را بر حسب تابع خزش تطابقی و هم بر حسب تابع رهاسازی تنش نوشت. در صورت داشتن هر یک از معادلات می‌توان با استفاده از رابطه (۶) و خاصیت شرکت‌پذیری عملگر استیلیس کانولوشن، معادله ارتعاش محوری را بر حسب تابع دیگر بدست آورد. معادله ارتعاش محوری بر حسب تابع رهاسازی تنش به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} * dG = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (۸)$$

که در آن  $u$  جابه‌جایی و  $\rho$  جرم مخصوص می‌باشد. همچنین معادله ارتعاش محوری بر حسب تابع خزش به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} * dJ \quad (۹)$$

شرایط اولیه نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0 \quad (۱۰)$$

جهت بررسی شرایط تکیه‌گاهی در مرز سمت چپ میله ( $x=0$ ) می‌توان حالت‌های مختلفی در نظر گرفت. اگر تکیه‌گاه گیردار و ثابت باشد، در این صورت در این مرز  $u(0,t)=0$  خواهد بود و انرژی در تکیه‌گاه مستهلک نخواهد شد. اگر تکیه‌گاه با استفاده از فنر خطی مدل شود، در این صورت در این مرز رابطه  $\sigma = E\varepsilon$  برقرار خواهد بود که به دلیل کاهش سختی و ایجاد جابه‌جایی در تکیه‌گاه نسبت به حالت گیردار، تنش‌ها در تکیه‌گاه کمتر خواهد شد، اما همچنان موجب استهلاک انرژی و میرایی در نوسانات نشده و تنها جابه‌جاییها افزایش پیدا خواهد کرد. بنابراین برای استهلاک انرژی و

میرایی نوسانات و کاهش جابه‌جایی‌ها باید از میراگر نیز استفاده شود. در این صورت استفاده از مواد ویسکوالاستیک در تکیه‌گاه که توسط ترکیباتی از فنرها و میراگرها، مانند مدل‌های شکل ۲ و ۳. مدل‌سازی می‌شوند، می‌تواند مفید باشد. اگر از مدل جامع کلونین- ویت (شکل ۳- الف) که به نحوی مناسب رفتار مواد ویسکوالاستیک جامد را مدل می‌سازد در مرز  $x=0$  استفاده شود، شکل ۴- الف، شرط مرزی سمت چپ با در نظر گرفتن تئوری کرنش‌های کوچک به صورت زیر خواهد بود:

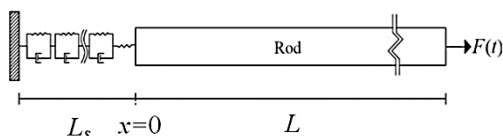
$$\sigma(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) * dG^S(t) \quad (۱۱)$$

$$= \varepsilon(x,t) * dG^S(t), \quad x=0$$

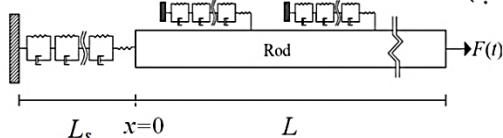
که در آن  $G^S(t)$  بیانگر تابع رهاسازی تنش مصالح ویسکوالاستیک تکیه‌گاه و علامت "d" عملگر استیلیس کانولوشن تعریف شده در معادله (۲) می‌باشد.

چنانچه از تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک در طول میله استفاده شود، شکل ۴- ب، در محل قرارگیری تکیه‌گاه‌ها (در  $x$  مورد نظر)، شرط مرزی‌ای مشابه معادله (۱۱) اعمال می‌شود.

(الف)



(ب)



شکل ۴- میله به همراه نیروی محوری  $F(t)$  و تکیه‌گاه‌های مرزی و میانی ویسکوالاستیک

شرط مرزی سمت راست میله ویسکوالاستیک که در آن نیروی دلخواه  $F(t)$  اعمال می‌شود به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) * dG^R(t) \quad (۱۲)$$

$$= \frac{F(t)}{A}, \quad x=L$$

$$C_1 = \left( G^R(0) - \sum_{k=1}^{N_{KV}} b_{1k}^R \right)$$

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{K}_e C_2$$

$$C_2 = \sum_{k=1}^{N_{KV}} [b_{2k}^R \hat{\mathbf{u}}(t - \Delta t) + e^{-\Delta t / \hat{\tau}_k^R} \mathbf{I}_{1k}(t - \Delta t)]$$

$$\mathbf{I}_{1k}(t) = \frac{G_k^R}{\hat{\tau}_k^R} \int_0^t \hat{\mathbf{u}}(t-s) e^{-s / \hat{\tau}_k^R} ds$$

که  $\hat{\mathbf{u}}$  بردار جابه‌جایی گرهی است. برای توابع تقریب خطی، ماتریس  $\mathbf{M}_e$  و  $\mathbf{K}_e$  برای المان نمونه  $e$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_e = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

برای معادله ارتعاش محوری میله الاستیک، معادله (۷)، معادله (۱۶) با وجود  $C_1 = E$  و  $\mathbf{f}_r = 0$  صادق خواهد بود، که  $E$  مدول الاستیسیته میله الاستیک می‌باشد.

آخرین عبارت در سمت راست معادله (۱۶) بیانگر شرایط مرزی المان است. اگر توابع تقریب خطی را به کار برده و معادلات حاصل برای تمام المانها سرهمبندی شوند، ترم آخر در معادلات حاصل، ساده شده و به جز در گره‌هایی که دارای نیروی خارجی یا شرایط مرزی هستند، در مابقی معادلات گرهها، این ترم برابر صفر خواهد بود. بنابراین در مرز ابتدا که تکیه‌گاه ویسکوالاستیک قرار دارد، باید رابطه  $\sigma(0, t)$ ، معادله (۱۱)، و در گره مرزی انتها که نیروی خارجی  $F(t)$  اعمال می‌شود، رابطه  $\sigma(L, t)$ ، معادله (۱۲)، اعمال شود.

در صورتی که از تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک در طول میله استفاده شود، شکل ۴-ب، شرط مرزی خارجی‌ای مشابه رابطه (۱۱)، منتها با مشخصات مصالح تکیه‌گاه‌های میانی، در ترم آخر معادلات گره‌هایی که تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک قرار دارد، اعمال می‌شود.

معادله (۱۱) را با استفاده از تعریف عملگر استیلیس کانونولوشن و تعریف کرنش به صورت زیر می‌توان نوشت:

که در آن  $G^R(t)$  و  $A$  به ترتیب بیانگر تابع رهاسازی مصالح ویسکوالاستیک میله و سطح مقطع آن می‌باشند.

در شرط مرزی سمت راست، معادله (۱۲)، اگر میله از جنس مصالح الاستیک باشد به جای " $dG^R(t)$ "،  $E$  که مدول الاستیسیته میله الاستیک است، قرار خواهد گرفت.

### ۲-۳- روش حل اجزای محدود

برای تقریب ترم انتگرال کانونولوشن موجود در معادلات (۸)، (۹)، (۱۱) و (۱۲) که پس از بسط عملگر استیلیس کانونولوشن ظاهر می‌شود، می‌توان از تقریب عددی مناسب موجود در مقاله کرامت و همکاران [۱۷]، استفاده نمود:

$$I_k(t) = \frac{G_k}{\hat{\tau}_k} \int_0^t h(t-s) e^{-s / \hat{\tau}_k} ds \quad (13)$$

$$\approx h(t)b_{1k} + h(t - \Delta t)b_{2k} + e^{-\Delta t / \hat{\tau}_k} I_k(t - \Delta t)$$

که در آن  $h(t)$  یک تابع دلخواه حقیقی است و ثابت‌های  $b_{1k}$  و  $b_{2k}$  به صورت زیر می‌باشند:

$$b_{1k} = G_k - \frac{G_k \hat{\tau}_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\Delta t / \hat{\tau}_k} \right) \quad (14)$$

$$b_{2k} = -G_k e^{-\Delta t / \hat{\tau}_k} + \frac{G_k \hat{\tau}_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\Delta t / \hat{\tau}_k} \right) \quad (15)$$

جهت اعمال شرایط مرزی بر حسب تنش، روابط (۱۱) و (۱۲)، معادله ارتعاش محوری میله ویسکوالاستیک بر حسب تابع رهاسازی، معادله (۸)، مورد استفاده قرار گرفته و حل می‌شود. با توجه به تقریب انتگرال کانونولوشن و بسط معادله (۸)، با استفاده از روش گالرکین و ضرب تابع تقریب  $\Psi$  در آن معادله، فرم ضعیف تشکیل داده می‌شود و سپس با انتگرال-گیری در ناحیه یک المان با مرزهای  $x_a$  و  $x_b$  و با استفاده از توابع تقریب خطی، معادله اجزای محدود المان به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}} + (C_1) \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_r + [\Psi^T \sigma]_{x_a}^{x_b} \quad (16)$$

مصالح برابر با  $\rho=1200 \text{ kg/m}^3$  در نظر گرفته شده است. همچنین مشخصات مصالح ویسکوالاستیک (پلیمری) فرضی میله و تکیه‌گاه‌ها در جدول ۱ آورده شده است. برای مصالح ویسکوالاستیک میله و تکیه‌گاه مرزی،  $G_{\infty} = 10^9 \text{ Pa}$  و برای تکیه‌گاه‌های میانی در صورتی که در طول میله الاستیک استفاده شود،  $G_{\infty} = 3 \times 10^6 \text{ Pa}$  و در صورتی که در طول میله ویسکوالاستیک استفاده شود،  $G_{\infty} = 6 \times 10^7 \text{ Pa}$  نظر گرفته شده است. همچنین طول تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک برابر  $L_s = 0.1 \text{ m}$  و طول تکیه‌گاه‌های میانی ویسکوالاستیک برابر  $L_s = 0.2 \text{ m}$  می‌باشند.

جدول ۱- مشخصات مصالح ویسکوالاستیک بکار رفته در میله و تکیه‌گاه‌ها.

$G_k$ (Pa)	$\hat{t}_k$ (s)	$k$	مشخصه‌های تابع رها سازی تنش
$1 \times 10^9$	$0.001$	۱	میله ویسکوالاستیک
$7 \times 10^9$	$0.01$	۲	
$1 \times 10^9$	$0.05$	۳	
$1 \times 10^9$	$0.001$	۱	تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک
$7 \times 10^9$	$0.01$	۲	
$1 \times 10^9$	$0.05$	۳	
$3 \times 10^6$	$0.001$	۱	تکیه‌گاه‌های میانی ویسکوالاستیک بکار رفته در طول میله الاستیک
$21 \times 10^6$	$0.01$	۲	
$3 \times 10^6$	$0.05$	۳	
$6 \times 10^7$	$0.001$	۱	تکیه‌گاه‌های میانی ویسکوالاستیک بکار رفته در طول میله ویسکوالاستیک
$42 \times 10^7$	$0.01$	۲	
$6 \times 10^7$	$0.05$	۳	

می‌توان نتایج ارتعاش محوری میله‌ی الاستیک با تکیه‌گاه گیردار (رنگ آبی)، تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک (رنگ قرمز) و حالتی که علاوه بر تکیه‌گاه ویسکوالاستیک مرزی دو تکیه‌گاه ویسکوالاستیک در طول میله وجود دارد (رنگ مشکی) را در دو گره، گره انتهایی واقع در  $x=L=4 \text{ m}$  در شکل ۵ و گره میانی واقع در  $x=1.95 \text{ m}$  در شکل ۶ مشاهده نمود. همانطوری که در شکل ۵ و ۶ مشاهده می‌شود، با استفاده از تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک، ارتعاشات با گذشت

$$\begin{aligned} \sigma(0, t) &= \varepsilon(0, t) * dG^S(t) \\ &= \frac{u(0, t)}{L_s} G^S(0) \\ &\quad + \int_0^t \frac{u(0, t-s)}{L_s} \frac{dG^S}{ds}(s) ds \end{aligned} \quad (19)$$

حال اگر معادله (۱۹)، با استفاده از تقریب عددی به کار رفته در معادله (۱۳) نوشته و مرتب شود خواهیم داشت:

$$\sigma(0, t) = C_3 u(0, t) + C_4 \quad (20)$$

$$C_3 = \frac{1}{L_s} \left( G^S(0) - \sum_{k=1}^{N_{kv}} b_{1k}^S \right)$$

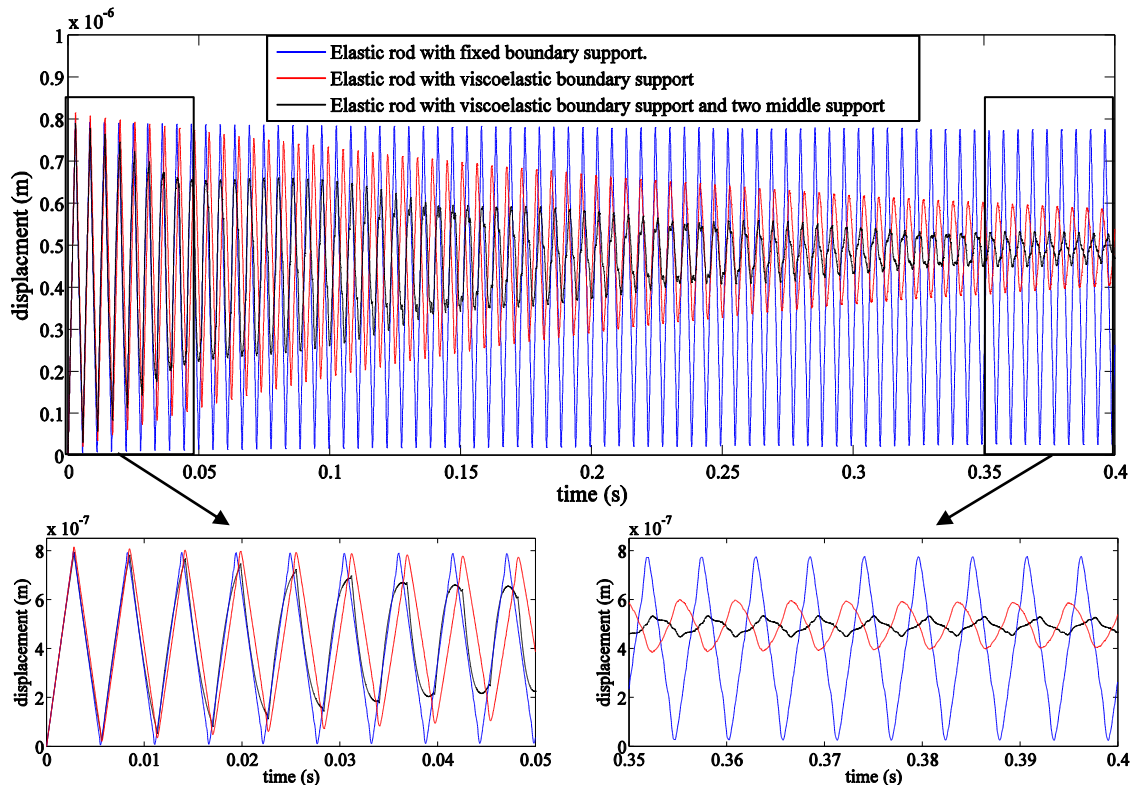
$$C_4 = - \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left[ \frac{1}{L_s} b_{2k}^S u(0, t - \Delta t) + e^{-\Delta t / \hat{t}_k^S} I_{2k}(t - \Delta t) \right]$$

$$I_{2k}(t) = \frac{1}{L_s} \frac{G_k^S}{\hat{t}_k^S} \int_0^t u(0, t-s) e^{-s/\hat{t}_k^S} ds$$

پس از سرهمبندی معادله (۱۶) برای تمام المانها و اعمال شرایط مرزی و مقادیر اولیه، از الگوریتم نیومارک- $\beta$  با  $\beta = 1/4$  (شتاب میانگین)، برای حل معادلات در حوزه زمان استفاده می‌شود [۱۸].

### ۳- نتایج و بحث

فرمول ارائه شده برای ارتعاش محوری میله می‌تواند برای هر نیروی دلخواه، در مرز انتهایی سمت راست مورد استفاده قرار گیرد. در این مطالعه نتایج برای نیروی پله‌ای  $F_0=10 \text{ N}$  مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین نتایج برای دو حالت تکیه‌گاه ویسکوالاستیک ارائه می‌شود. حالت اول تنها در مرز انتهایی سمت چپ، تکیه‌گاه ویسکوالاستیک وجود خواهد داشت و حالت دوم علاوه بر انتهایی سمت چپ، در طول میله دو تکیه‌گاه ویسکوالاستیک در  $x=1.3 \text{ m}$  و  $x=2.6 \text{ m}$  قرار دارد. مدول الاستیسیته میله الاستیک  $E=10^{10} \text{ Pa}$ ، طول میله  $L=4 \text{ m}$ ، سطح مقطع میله برابر  $A=0.01 \text{ m}^2$  و چگالی



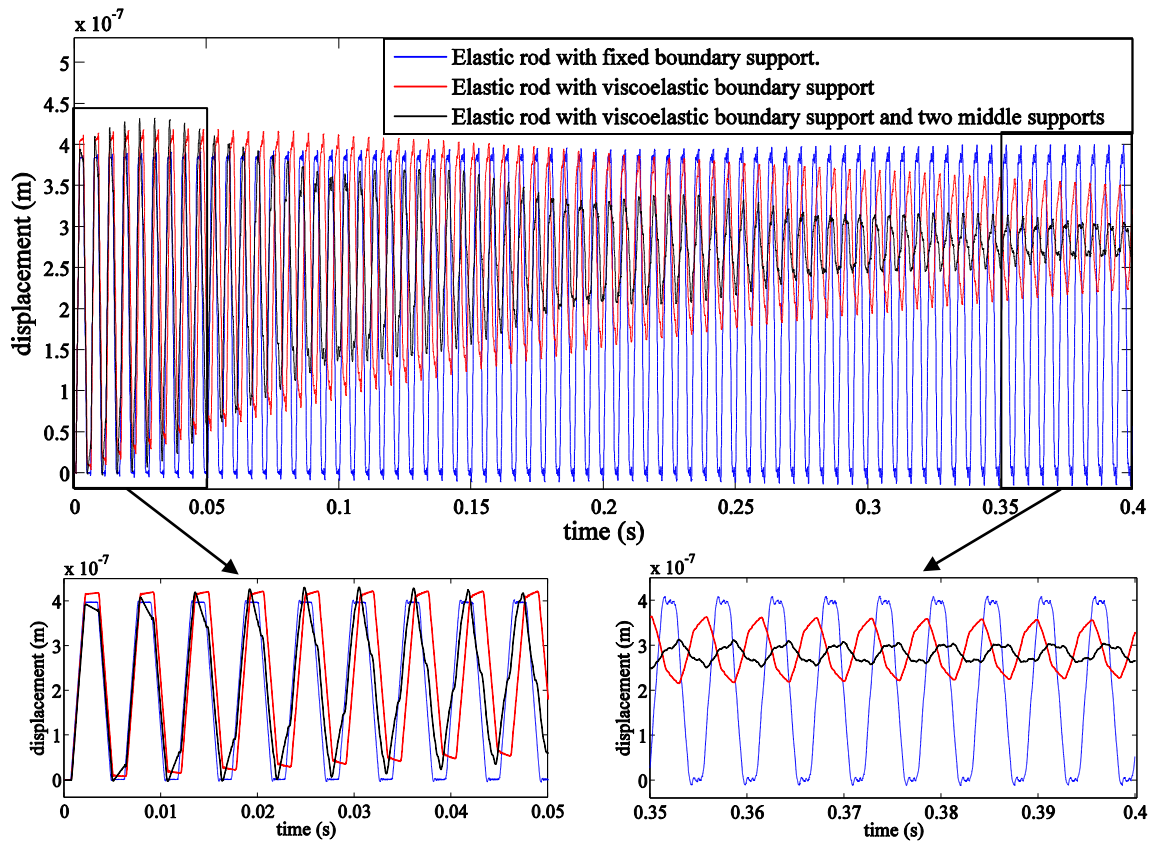
شکل ۵- تاریخچه جابه‌جایی محوری میله الاستیک با شرایط مختلف تکیه‌گاهی، در گره  $x=4$  m

افزایش جابه‌جایی‌ها به صورت فزاینده و غیر قابل کنترل خواهد شد، یا امکان ساخت مصالح با  $\hat{t}_k$  های کمتر وجود ندارد، لذا در چنین شرایطی می‌توان از تکیه‌گاه‌های میانی ویسکوالاستیک با خواص مناسب استفاده نمود. همانطور که در نتایج رسم شده به رنگ مشکی شکل ۵ و ۶ مشاهده می‌شود، استفاده از دو تکیه‌گاه میانی با سختی کمتر ( $L_s$  بیشتر و  $G_k$  های کمتر) نسبت به تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک (جدول ۱ را مشاهده نمایید)، باعث افزایش سرعت و میزان میرایی ارتعاشات و کاهش بیشتر جابه‌جایی‌ها شده است. تپه-ای شدن ارتعاشات نیز به دلیل مشخصه‌های ماده ویسکوالاستیک بکار رفته در تکیه‌گاه‌های میانی و متفاوت بودن آنها با تکیه‌گاه مرزی می‌باشد.

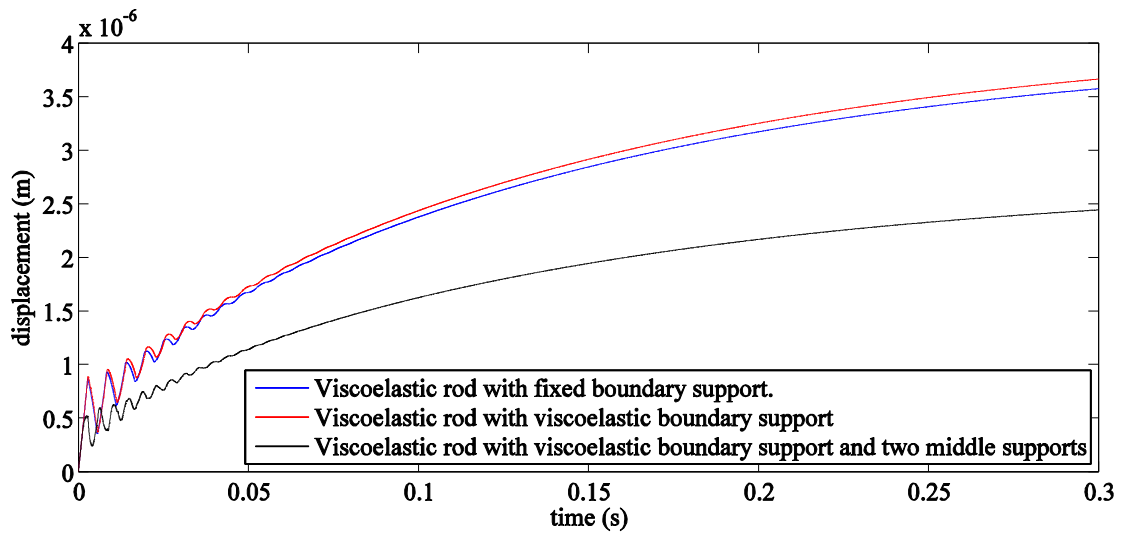
در شکل‌های ۷ و ۸ نتایج مربوط به ارتعاش محوری میله ویسکوالاستیک، با وجود تکیه‌گاه گیردار در مرز سمت چپ (رنگ آبی)، با وجود تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک (رنگ قرمز)، و حالتی که علاوه بر تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک،

زمان میرا شده و حداکثر جابه‌جایی‌ها رو به کاهش می‌باشد (رنگ قرمز). در این حالت در زمان‌های اولیه به دلیل تغییر شرایط تکیه‌گاه مرزی، افزایش اندکی در حداکثر جابه‌جایی‌ها نسبت به حالت گیردار مشاهده می‌شود که به دلیل خاصیت فنری و خزشی مواد ویسکوالاستیک است. این رفتار در گره میانی (شکل ۶ رنگ قرمز) نسبت به گره انتهایی (شکل ۵ رنگ قرمز)، به دلیل نزدیکتر بودن این گره به مواد ویسکو-الاستیک تکیه‌گاه، بیشتر مشاهده می‌شود. چنانچه نیاز به افزایش سرعت و میزان میرایی و یا کاهش بیشتر حداکثر جابه‌جایی‌ها باشد، بایستی خصوصیات مواد ویسکوالاستیک به کار رفته در تکیه‌گاه را تغییر داد، مانند افزایش  $L_s$  و یا کاهش  $G_k$  ها که موجب کاهش سختی و یا کاهش  $\hat{t}_k$  ها که افزایش میراکنندگی را به دنبال خواهد داشت. اما همواره ایجاد این تغییرات در خصوصیات مواد ویسکوالاستیک تکیه‌گاه مرزی، امکان پذیر نمی‌باشد. به عنوان مثال نمی‌توان سختی تکیه‌گاه مرزی را خیلی کاهش داد چرا که باعث

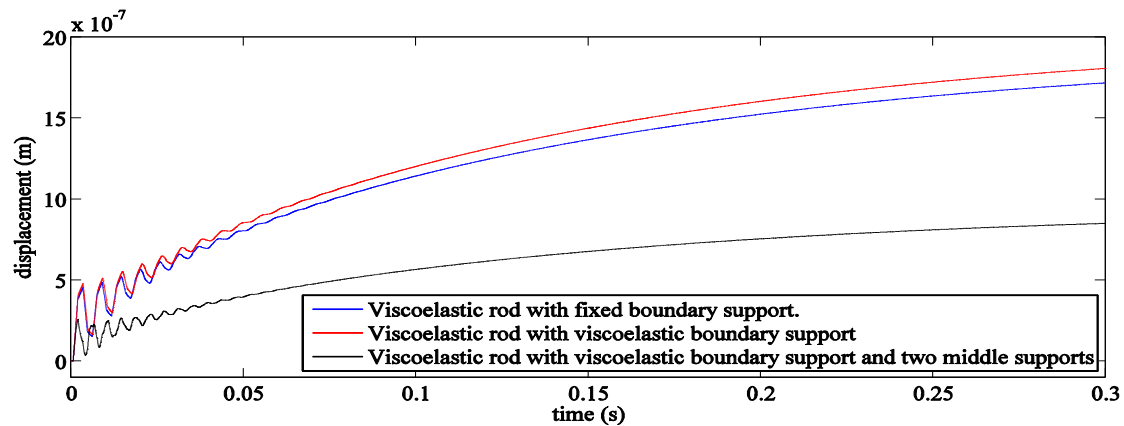




شکل ۶- تاریخچه جابه‌جایی محوری میله الاستیک با شرایط مختلف تکیه‌گاهی، در گره  $x=1.95$  m



شکل ۷- تاریخچه جابه‌جایی محوری میله ویسکوالاستیک با شرایط مختلف تکیه‌گاهی در گره  $x=4$  m

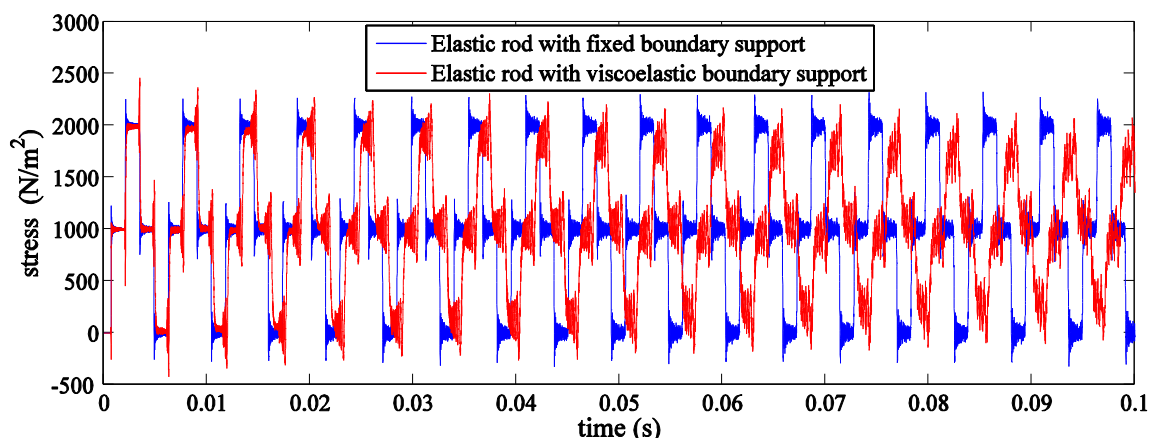


شکل ۸- تاریخچه جابه‌جایی محوری میله ویسکوالاستیک با شرایط مختلف تکیه‌گاهی در گره  $x=1.95$  m

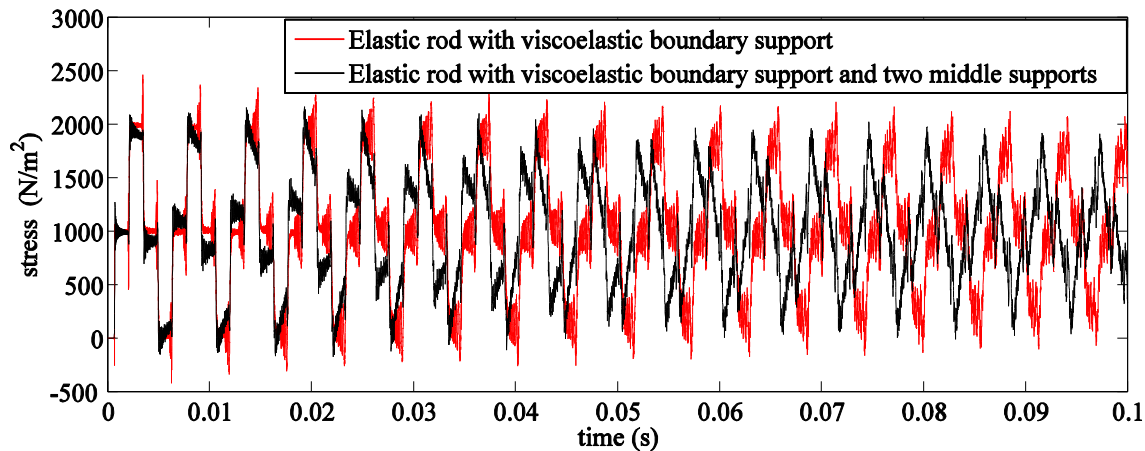
ویسکوالاستیک میله، بیشتر می‌شود (رنگ مشکی). جهت کاهش افزایش صعودی جابه‌جایی در میله که با گذشت زمان اتفاق می‌افتد و ناشی از رفتار خزشی مصالح ویسکوالاستیک میله می‌باشد، از تکیه‌گاه میانی با  $G_k$  بیشتر نسبت به تکیه‌گاه‌های میانی بکار رفته در میله الاستیک استفاده شده است (جدول ارا ببینید).

علاوه بر تغییرات گفته شده، تغییرات در تنش ایجاد شده در میله و تکیه‌گاه‌ها نیز می‌تواند از اهمیت بالایی برخوردار باشد، چراکه تنش معیاری جهت طراحی و بررسی پدیده خستگی است و می‌تواند در این امر کمک شایانی نماید. لذا در شکل‌های ۹ و ۱۰ چگونگی تغییرات تنش در میانه میله الاستیک مرتعش، با شرایط مختلف تکیه‌گاهی بررسی و با هم

دو تکیه‌گاه ویسکوالاستیک میانی در طول میله قرار دارد (رنگ مشکی)، در گره‌های قبلی نشان داده شده است. همانطور که از نتایج موجود در شکل ۷ و ۸ برای ارتعاش با تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک مشاهده می‌شود (رنگ قرمز)، این تغییر، تاثیر چندانی بر میرایی ارتعاش ندارد چرا که تاثیر میرایی تکیه‌گاه در مقابل میرایی خود میله که از جنس ویسکوالاستیک است بسیار ناچیز می‌باشد و تنها به دلیل کاهش سختی تکیه‌گاه از حالت گیردار به ویسکو-الاستیک، افزایش در جابه‌جایی‌ها مشاهده می‌شود. اما اگر از تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک با خواص مناسب در طول میله استفاده شود، حداکثر جابه‌جایی‌ها کاهش پیدا خواهد نمود و میرایی ارتعاش هر چند اندک در مقابل خاصیت میرایی مواد



شکل ۹- تاریخچه تنش در میانه میله الاستیک مرتعش در حالت میله با تکیه‌گاه مرزی گیردار (رنگ آبی) و حالت میله با تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک (رنگ قرمز).



شکل ۱۰- تاریخچه تنش در میانه میله الاستیک مرتعش در حالت میله با تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک (رنگ قرمز) و حالت میله با تکیه‌گاه مرزی و دو تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک (رنگ مشکی).

(جدول ۱ را مشاهده نمایید). همچنین قابل ذکر است با اینکه مشخصات مواد ویسکوالاستیک به کار رفته در تکیه‌گاه‌های میانی یکسان است، ولی تنش در تکیه‌گاه میانی واقع در  $x=2.6$  m (رنگ مشکی در شکل ۱۱) بیشتر از تنش در تکیه‌گاه میانی دیگر (رنگ قرمز در شکل ۱۱) می‌باشد، که علت آن نزدیکتر بودن این تکیه‌گاه به سر آزاد میله و بیشتر بودن جابه‌جایی ایجاد شده در این تکیه‌گاه نسبت به تکیه‌گاه میانی دیگر می‌باشد.

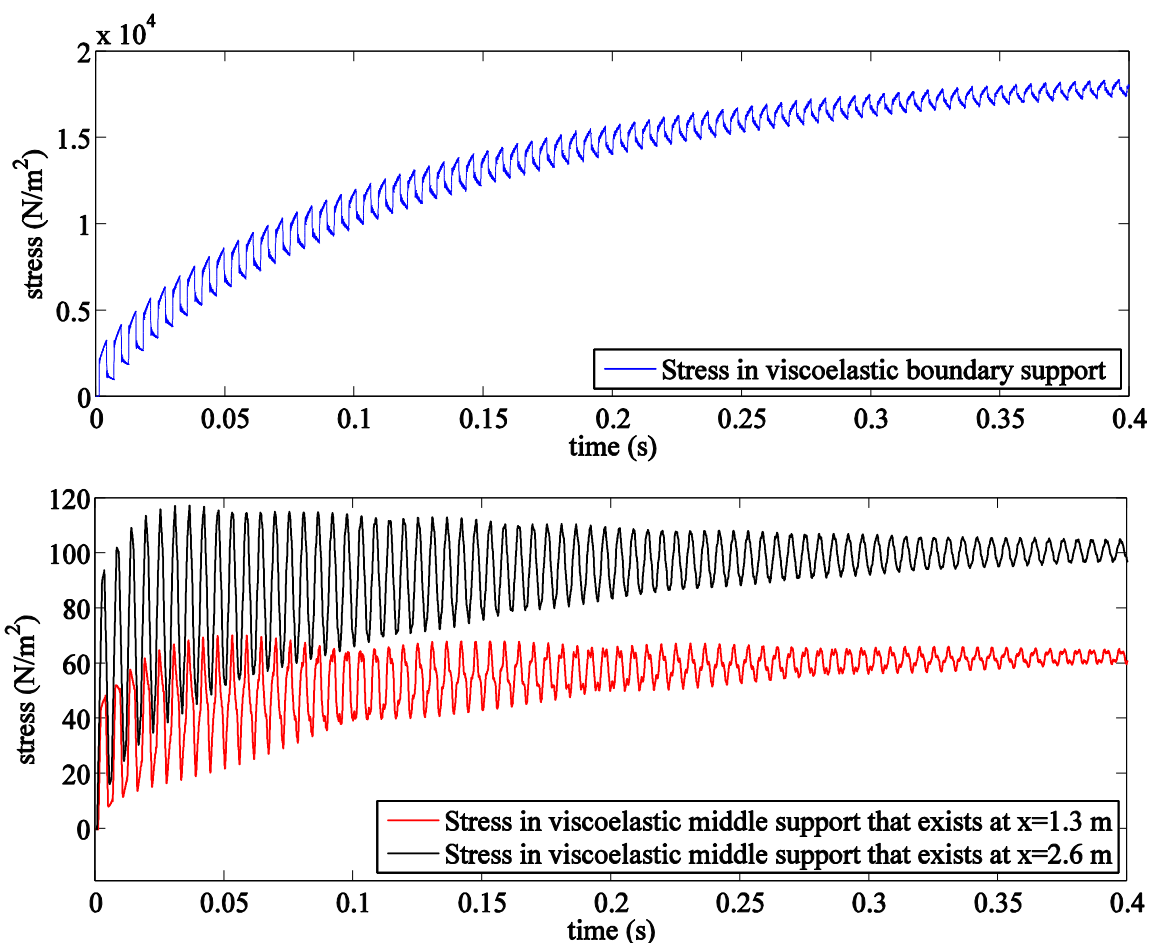
#### ۴- نتیجه گیری

در این تحقیق تاثیر تکیه‌گاه ویسکوالاستیک بر ارتعاش محوری میله الاستیک و ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور از تقریب عددی مناسب، برای انتگرال کانولوشن ایجاد شده در معادلات به دلیل رفتار ویسکو-الاستیک مصالح که با مدل جامع کلوین-ویت قیاس شده‌اند استفاده شد. سپس معادلات با استفاده از روش اجزای محدود و در حوزه زمان حل شدند. در نهایت نتایج تاریخچه جابه‌جایی در دو مقطع در شرایط مختلف تکیه‌گاهی و تاریخچه تنش در میله و تکیه‌گاه‌ها به صورت نمودارهایی جهت مقایسه اثرات به کارگیری تکیه‌گاه ویسکوالاستیک رسم گردید. رفتار تاخیری مواد ویسکوالاستیک و ناحیه پلیمری با مشاهده تغییرشکل‌های باقی مانده در میله و تغییر در فرکانس و دامنه ارتعاشات آشکار می‌شود و باید دقت داشت

مقایسه گردید. در شکل ۹ این تغییرات تنش، بین دو حالت ارتعاش میله الاستیک با تکیه‌گاه مرزی گیردار (رنگ آبی) و حالت ارتعاش میله با تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک (رنگ قرمز) نشان داده شده است. در شکل ۱۰ تغییرات تنش بین حالت ارتعاش میله با تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک (رنگ قرمز) و حالت ارتعاش میله با وجود تکیه‌گاه مرزی و دو تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک (رنگ مشکی) مقایسه گردیده است.

همانطور که در این اشکال مشاهده می‌شود، استفاده از تکیه‌گاه‌های مرزی و میانی ویسکوالاستیک می‌تواند در کاهش حداکثر تنش‌ها و نوسانات تنش با گذشت زمان موثر باشد و عملکرد میله را در برابر پدیده خستگی بهبود بخشد. در هنگام ارتعاش محوری میله، در تکیه‌گاه‌های به کار رفته تنش‌هایی به وجود خواهد آمد. این تنش‌ها و میزان تغییرات آن نیز حائز اهمیت می‌باشد. لذا مقایسه‌ای بین تغییرات تنش در تکیه‌گاه‌های مرزی و میانی ویسکوالاستیک میله مرتعش الاستیک که هم دارای تکیه‌گاه مرزی و هم دو تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک است انجام شد که نتایج در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

علت تفاوت زیاد مقدار تنش در تکیه‌گاه مرزی ویسکو-الاستیک با تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک در اختلاف سختی در این تکیه‌گاه‌هاست. در تکیه‌گاه مرزی، سختی خیلی بیشتر ( $G_k$  های بیشتر و  $L_s$  کمتر) از تکیه‌گاه‌های میانی می‌باشد



شکل ۱۱- تاریخچه تنش در تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک (رنگ آبی)، تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک واقع در  $x=1.3\text{ m}$  (رنگ قرمز) و تکیه‌گاه میانی ویسکوالاستیک واقع در  $x=2.6\text{ m}$  (رنگ مشکی).

مقایسه با تاثیر خواص پلیمری خود میله بر میرایی نوسانات ندارد، اما بکارگیری تکیه‌گاه ویسکوالاستیک با مشخصات مناسب در طول میله می‌تواند کمک شایانی به کاهش حداکثر جابه‌جایی‌ها و جلوگیری از افزایش صعودی جابه‌جایی با گذشت زمان در میله، که ناشی از رفتار خزشی مواد ویسکوالاستیک میله تحت نیروی ثابت اعمال شده می‌باشد، نماید.

همچنین بکارگیری تکیه‌گاه‌های ویسکوالاستیک باعث کاهش مقدار و تغییرات تنش در میله و تکیه‌گاه‌ها با گذشت زمان شده و می‌تواند عملکرد مصالح را در برابر پدیده خستگی بهبود بخشد.

که میزان این تغییرات به مشخصات مصالح ویسکوالاستیک مورد استفاده در میله و تکیه‌گاه‌ها بستگی دارد.

در میله الاستیک، استفاده از تکیه‌گاه مرزی ویسکو-الاستیک به جای تکیه‌گاه گیردار در انتهای سمت چپ، می‌تواند باعث میرایی نوسانات و کاهش جابه‌جایی‌ها با گذشت زمان شود، و اگر چنانچه در طول میله علاوه بر مرز سمت چپ، از تکیه‌گاه ویسکوالاستیک با مشخصات مناسب استفاده گردد می‌توان میرایی ارتعاشات را به میزان قابل توجهی افزایش و جابه‌جایی‌ها را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش داد.

زمانی که در ارتعاش میله ویسکوالاستیک از تکیه‌گاه مرزی ویسکوالاستیک استفاده می‌شود، تاثیر چندانی در

## مراجع

- [10] Leonov AI (1988) Propagation of nonlinear waves along a viscoelastic bar. *Rheol Acta* 27(4): 335–350.
- [11] Fan ZJ, Kim KJ (1996) Investigation of effects of viscoelastic boundary supports on transient sound radiated from a rectangular plate by modal strain energy method. *KSME Int J* 11(5): 530–536.
- [12] Fan ZJ, Lee JH, Kang KH, Kim KJ (1997) The forced vibration of a beam with viscoelastic boundary supports. *J Sound Vib* 210(5): 673–682.
- [13] Majorana CE, Pomaro B (2011) Dynamic stability of an elastic beam with visco-elastic translational and rotational support. *Eng Computation*, 28(2): 114–129.
- [14] Turgut K (2005) Determination of the steady-state response of viscoelastically supported cantilever beam under sinusoidal base excitation. *J Sound Vib* 281(3): 1145–1156.
- [15] Koutsawa Y, Daya EM (2007) Static and free vibration analysis of laminated glass beam on viscoelastic supports. *Int J Solids and Struct* 44(25): 8735–8750.
- [16] Brinson HF, Brinson LC (2008) *Polymer engineering science and viscoelasticity: an introduction*. Springer, Berlin.
- [17] Keramat A, Tijsseling AS, Hou Q, Ahmadi A, (2012) Fluid–structure interaction with pipe-wall viscoelasticity during water hammer. *J fluid struct* 28: 434–455.
- [18] Reddy JN (1993) *An introduction to the finite element method*. 2nd edn. McGraw-Hill, New York.
- [1] Prak J (2007) Influence of support viscoelastic properties on the structural wave propagation. *J Mech Sci Technol* 21(12): 2117–2124.
- [2] Wineman AS, Rajagopal KR (2000) *Mechanical response of polymers: an introduction*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Chazal CF, Moutou PR (2009) An incremental constitutive law for ageing viscoelastic materials: a three-dimensional approach. *C R Mecanique* 337 (1): 30–33.
- [4] Mikhailenko BG, Mikhailov AA, Reshetova GV (2003) Numerical viscoelastic modeling by the spectral laguerre method. *Geophys Prospect* 51(1): 37–48.
- [5] Keramat A, Ahmadi A (2012) Axial wave propagation in viscoelastic bars using a new finite-element-based method. *J Eng Math* 77(4): 105–117.
- [6] Sim W, Lee S (2005) Finite element analysis of transient dynamic viscoelastic problems in time domain. *J Mech Sci Technol* 19(1): 61–71.
- [7] Fenander A (1996) Modal synthesis when modeling damping by use of fractional derivatives. *Am Inst Aeronaut Astronaut J* 34(5): 1051–1054.
- [8] See H (2001) Advances in measuring linear viscoelastic properties using novel deformation geometries and Fourier transform technique. *Rheol J* 13(2): 67–81.
- [9] Ma H (2008) Exact solutions of axial vibration problems of elastic bars. *Int J Numer Methods Eng* 75(2): 241–252.