



# مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

## تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های نیم کره کامپوزیتی دارای برش در راس

علیرضا شاطرزاده<sup>۱\*</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود

### چکیده

در این مقاله بدلیل تقارن سازه مورد بررسی از یک روش اجزاء محدود نیمه تحلیلی برای بررسی ارتعاش آزاد پوسته های نیم کره کامپوزیتی دارای برش در راس استفاده شده است. یکی از ویژگیهای استفاده از این روش کاهش قابل ملاحظه حجم محاسبات می باشد و هرچه کلاهیک کروی به کره کامل نزدیکتر باشد به دلیل حجم تر شدن محاسبات این ویژگی اهمیت بیشتری می یابد. وجود برش در راس پوسته کروی باعث کاهش سفتی و اینرسی پوسته کروی شده و در نتیجه بر فرکانسهای طبیعی تاثیر می گذارد. تاثیر میزان زاویه برش در راس، زاویه الیاف و شرایط مرزی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. برای بدست آوردن روابط کرنش از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) استفاده شده است و نتایج حاصل با سایر مراجع مورد راستی آزمایی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** روش اجزاء محدود نیمه تحلیلی، پوسته کروی، برش در راس، فرکانس طبیعی، زاویه الیاف.

## Free vibration analysis of composite hemispherical shells with cut-out

A. Shaterzadeh<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Assistant Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

### Abstract

The free vibration of composite spherical shell cap with a cutout is investigated. The analysis is carried out using the semi-analytical finite element method based on a first-order shear deformation theory. A three noded isoparametric element with five degrees of freedom at each node is considered. Results are presented for axisymmetric free vibration of composite spherical shell cap with a cutout. The effects of degree of fibers, radius to thickness ratio, boundary conditions and cutout size on the fundamental frequency of composite spherical shell cap are studied.

**Keywords:** Semi-analytical finite element method; Spherical shells; Cut out at apex; Natural frequency; Fiber angle.

## ۱- مقدمه

تحلیل پوسته‌های دورانی از جمله پوسته‌های استوانه‌ای و کروی بنابر کاربردشان در زمینه‌های مختلف مهندسی و صنایع پیشرفته از موضوعات مورد علاقه محققان می‌باشد. در طبقه‌بندی سازه‌ها، پوسته‌های کروی نازک با داشتن کاربردهای بسیار مهم در زمینه‌های مهندسی، از اهمیت بسزایی برخوردارند. همچنین مواد کامپوزیتی بدلیل مزایای سازه‌ای که در ذات خود دارند بسیار پر کاربرد می‌باشند. بنابراین مدل‌سازی ریاضی این قبیل سازه‌ها موضوعی مهم و پراهمیت می‌باشد.

مواد کامپوزیتی تقویت شده با الیاف خصوصا به شکل پوسته بطور فزاینده‌ای در صنایع هوایی و دیگر صنایعی که نیاز به استحکام و سفتی بالا همراه با چگالی پایین می‌باشد بکار می‌روند. پوسته‌های کروی در بسیاری از سازه‌ها از قبیل موشک‌ها، کلاهک‌های رادار و زیر دریایی‌ها کاربرد فراوانی دارند. بنابراین بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های کروی کامپوزیتی مساله مهمی است که باید بدان پرداخته شود.

وجود برش در راس پوسته کروی باعث کاهش سفتی و اینرسی پوسته کروی شده و در نتیجه بر فرکانسهای طبیعی تاثیر می‌گذارد. استفاده از روشهای حل دقیق برای حل مدل‌های ریاضی بسیار ارزشمند هستند اما پیچیدگیهای مسایل مهندسی کاربرد این روشها را محدود می‌نماید.

روش‌های حل دقیق اگرچه پاسخ‌های بسیار قابل قبولی ارائه می‌نمایند اما قابل تعمیم برای همه مسایل نبوده و کاربرد این نوع روشها محدود است. در مقابل روش‌های حل عددی، عموما جوابهایی با تقریب مناسب و خطای قابل قبول ارائه می‌نمایند و ضمن تنوع، این روشها گستره کاربرد بسیار فراوانی دارند. امروزه استفاده از روش‌های حل عددی در اکثر تحلیل‌های پیچیده مهندسی رایج می‌باشد.

در استفاده از روش‌های عددی به دلیل پیچیدگی‌های موجود در مدل‌سازی پوسته‌ها و حجم بالای محاسبات کاربرد روش‌هایی که با استفاده از تقارن مساله بدون از دست دادن دقت باعث کاهش چشمگیر حجم محاسبات می‌شوند بسیار مورد توجه می‌باشد.

در این کار بدلیل تقارن سازه مورد بررسی از یک روش اجزاء محدود نیمه تحلیلی<sup>۱</sup> استفاده شده است و همانطور که اشاره شد یکی از ویژگیهای استفاده از این روش کاهش قابل ملاحظه حجم محاسبات می‌باشد که هرچه کلاهد کروی به کره کامل نزدیکتر باشد به دلیل حجم تر شدن محاسبات این ویژگی اهمیت بیشتری می‌یابد.

با توجه به اهمیت موضوع مورد بحث و درک این نکته که در خصوص تحلیل ارتعاش آزاد کلاهک‌های نیم کره دارای برش مطالعات گسترده‌ای وجود ندارد، در این مقاله با استفاده از تقارن هندسی، از یک روش اجزاء محدود نیمه تحلیلی برای بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های نیم کره کامپوزیتی دارای برش در راس استفاده شده است. همچنین به بررسی تاثیر میزان زاویه برش در راس، زاویه الیاف و شرایط مرزی پرداخته شده است.

نیوردسون<sup>۲</sup> [۱] به کمک یک معادله دیفرانسیل تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های کروی الاستیک نازک را انجام داده است. راماکریشنان<sup>۳</sup> و دیگران [۲] ارتعاش آزاد پوسته‌های کروی را با معادلات الاستیسیته سه بعدی بررسی نموده‌اند. هاپمن<sup>۴</sup> و دیگران [۳] گزارشاتی در خصوص مطالعات تئوری و تجربی خود در زمینه ارتعاش آزاد پوسته‌های کروی منتشر نموده‌اند. راس<sup>۵</sup> [۴] به بررسی فرکانسهای طبیعی و مد شیپهای ارتعاش متقارن پوسته‌های کروی پرداخته است. ناواراتنا<sup>۶</sup> [۵] نتایجی را در خصوص فرکانس طبیعی پوسته‌های کروی منتشر نموده است. لام<sup>۷</sup> و همکاران [۶] به مطالعه بر روی پوسته‌های استوانه‌ای مرکب ضخیم چند لایه با زوایای متقارن به کمک یک روش تحلیلی پرداخته‌اند. آرچر<sup>۸</sup> [۷] تاثیر حالات تنش یکنواخت بر فرکانس طبیعی پوسته‌های کروی را مورد بررسی قرار داده است. گونسالوز<sup>۹</sup> [۸] تاثیر نواقص هندسی اولیه متقارن و تنشهای فشاری غیر خطی بر فرکانسهای طبیعی پوسته‌های کروی گیردار را

<sup>1</sup> Semi-Analytical Finite element Method

<sup>2</sup> Niordson

<sup>3</sup> Ramakrishnan

<sup>4</sup> Hoppmann

<sup>5</sup> Ross

<sup>6</sup> Navaratna

<sup>7</sup> Lam

<sup>8</sup> Archer

<sup>9</sup> Goncalves

شامل و بدون برش در راس را بررسی نموده اند. المان استفاده شده توسط آنها یک المان پوسته هشت گره ای ایزوپارامتریک با نه درجه آزادی در هر گره می باشد.

## ۲- فرمول بندی مساله

در این مقاله با توجه به روابط کرنش-جابجایی برای پوسته های دورانی عمومی، روابط کرنش مربوط به پوسته های کروی بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج شده است. در تحلیل پیشرو فرض بر آنست که پوسته تحت مطالعه نازک بوده و ماده کامپوزیت رفتار الاستیک خطی دارد.

میدان جابجایی بر مبنای تئوری برابر است با [۱۱]:

$$\begin{aligned} u(s, \theta, z) &= u_0(s, \theta) + z\Psi_{0s}(s, \theta) \\ v(s, \theta, z) &= v_0(s, \theta) + z\Psi_{0\theta}(s, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(s, \theta) = w_0(s, \theta)$$

که  $u_0, v_0$  و  $w_0$  بترتیب جابجایی سطح میانی در جهات  $s, \theta$  و  $z$  بوده و  $\Psi_{0s}$  و  $\Psi_{0\theta}$  دورانهای عمود بر سطح میانی در امتداد محورهای  $s, \theta$  می باشند.

بر طبق تئوری الاستیسیته کرنشهای نرمال و برشی به صورت زیر با جابجایی ها مرتبط هستند [۱۷]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{u_i}{(g_i)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{1}{2g_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} \frac{u_k}{(g_k)^{\frac{1}{2}}}, \\ i &= 1, 2, 3 \\ \gamma_{ij} &= \frac{1}{(g_i g_j)^{\frac{1}{2}}} \left( g_i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \frac{u_i}{(g_i)^{\frac{1}{2}}} \right) + g_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left( \frac{u_j}{(g_j)^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \\ i, j &= 1, 2, 3, i \neq j \end{aligned} \quad (2)$$

$\alpha_i$  و  $u_i$  بترتیب مولفه های انحناء سطح و بردار جابجایی می باشند. همچنین  $g_i$  پارامترهای ضریب هندسی می باشد. برای پوسته های دورانی داریم:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s, \quad \alpha_2 = \theta, \quad \alpha_3 = z \\ u_1 &= u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1 &= A_1^2 \left( 1 + \frac{z}{R_1} \right)^2, \\ g_2 &= A_2^2 \left( 1 + \frac{z}{R_2} \right)^2, \quad g_3 = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

مطالعه نموده است. گانسن<sup>۱</sup> و همکاران [۹] تحلیل کماتش حرارتی و ارتعاش آزاد پوسته های نیم کره ایزوتروپیک تحت تغییرات دمایی محور متقارن را با روش اجزاء محدود نیمه تحلیلی ارائه نموده اند. لام و همکاران [۱۰] به بررسی اثر شرایط مرزیه زاویه الیاف بر روی فرکانس طبیعی پوسته های استوانه ای ارتوتروپیک پرداخته اند. تئوری مورد استفاده آنها تئوری لاو<sup>۲</sup> می باشد و از روش ریتز<sup>۳</sup> برای بدست آوردن نتایج حاصل از تحلیل استفاده کرده اند و دریافتند که هم شرایط مرزی و هم زاویه الیاف تأثیر بسزایی در فرکانس طبیعی پوسته دارد.

لی<sup>۴</sup> و همکاران [۱۱] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم سندرز مدل اجزای محدودی را برای بررسی ارتعاشات پنل های کروی کامپوزیتی تورقی<sup>۵</sup> دارای برش در راس ارائه داده اند. محمد<sup>۶</sup> و همکاران [۱۲] به بررسی ارتعاشات پوسته های دو انحناء کم عمق<sup>۷</sup> نازک با بیست و یک شرط مرزی دلخواه پرداخته اند و برای حل معادلات مربوطه از روش ریتز استفاده کرده اند. راتو<sup>۸</sup> و همکاران [۱۳] تحلیل اجزاء محدود پوسته های ساخته شده از مواد تابعی<sup>۹</sup> تحت بارگذاری های مختلف از جمله مکانیکی و حرارتی و همچنین ارتعاش آزاد آنها را بررسی نموده اند. یگانو<sup>۱۰</sup> و همکاران [۱۴] فرمولبندی منسجمی را بر اساس حساب تغییرات برای تحلیل ارتعاشی پوسته های دورانی کامپوزیتی با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی ارائه نموده اند. حسینی<sup>۱۱</sup> و همکاران [۱۵] روش حل دقیق جدیدی را برای بررسی ارتعاش آزاد پنلهای کروی نسبتا ضخیم ارائه نموده اند. برای روابط کرنش-جابجایی از تئوریهای سندرز و دائل<sup>۱۲</sup> استفاده نموده اند. سای رام<sup>۱۳</sup> و همکاران [۱۶] ارتعاشات آزاد کلاهکهای کروی کامپوزیتی

<sup>1</sup> Ganesan

<sup>2</sup> Love Theory

<sup>3</sup> Ritz Method

<sup>4</sup> Lee

<sup>5</sup> Delamination

<sup>6</sup> Mohamad

<sup>7</sup> Doubly Curved Shallow Shells

<sup>8</sup> Rao

<sup>9</sup> Functionally Graded Materials

<sup>10</sup> Yegao

<sup>11</sup> Hosseini

<sup>12</sup> Sanders and Donnell shell theories

<sup>13</sup> Sai Ram

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{r} \cos\varphi + \frac{w_0}{r} \sin\varphi \\ \gamma_{s\theta}^0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial s} - \frac{v_0}{r} \cos\varphi \\ \gamma_{\theta z}^0 &= \Psi_{\theta 0} - \frac{v_0}{r} \sin\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \\ \gamma_{sz}^0 &= \Psi_{0s} - \frac{u_0}{R} + \frac{\partial w_0}{\partial s} \\ \kappa_s^1 &= \frac{\partial \Psi_{0s}}{\partial s} \\ \kappa_\theta^1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\Psi_{0s}}{r} \cos\varphi \\ \kappa_{s\theta}^1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{0s}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi_{\theta 0}}{\partial s} - \frac{\Psi_{\theta 0}}{r} \cos\varphi + \\ &\quad \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial v_0}{\partial s} + \frac{1}{rR} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \frac{v_0}{rR} \cos\varphi \end{aligned}$$

### ۳- روش اجزاء محدود نیمه تحلیلی

در روش نیمه تحلیلی میدان جابجایی به جهت محیطی وابسته است. از آنجا که در این تحلیل دامنه جابجایی‌ها کوچک هستند، می‌توان این کمیت‌ها را در جهت دورانی ( $\theta$ ) با سری‌های فوریه مجزا بیان کرد.

$$\begin{aligned} u_0(s, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} u_{0m}(s) \cos(m\theta) \\ v_0(s, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} v_{0m}(s) \sin(m\theta) \\ w_0(s, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_{0m}(s) \cos(m\theta) \\ \Psi_{s0}(s, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{s0m}(s) \cos(m\theta) \\ \Psi_{\theta 0}(s, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{\theta 0m}(s) \sin(m\theta) \end{aligned} \quad (9)$$

$m$  نشان دهنده شماره  $m$  امین مد محیطی می‌باشد. در جهت  $s$  نیز از یک المان سه گرهی ایزوپارامتریک استفاده شده است. شکل ۲ یک پوسته نیم کره با این المان را نشان می‌دهد. هر گره دارای پنج درجه آزادی می‌باشد. توابع شکل مرتبط با این المان بصورت زیر می‌باشند

$$[N_1, N_2, N_3] = \left[ \frac{s^2 - sl}{2l^2}, \frac{l^2 - s^2}{l^2}, \frac{s^2 + sl}{2l^2} \right] \quad (10)$$

همچنین پارامترهای جابجایی مرتبط با این المان به شکل زیر قابل بیان است

$$\{d_e\}^T = \{u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \Psi_{s0i}, \Psi_{\theta 0i}\}, \quad (11)$$

$i = 1, 2, 3$

اندیسهای یک تا سه به شماره گره اشاره دارد.

$w, v, u, R_i, A_i$  بترتیب مولفه‌های بردار جابجایی، پارامترهای لیم ۱ و شعاع‌های انحنا هستند.

از شکل ۱ برای منحنی فضایی در مختصات  $(x_3, \theta)$  مطابق مرجع [۱۸] می‌توان نوشت:

$$(ds)^2 = A_1^2(dx_3)^2 + A_2^2(d\theta)^2 \quad (4)$$

در این مختصات، پارامترهای لیم  $A_1 = (1 + r'^2)^{\frac{1}{2}}$  و  $A_2 = r$  هستند و شعاع‌های انحنا برابرند با

$$R_2 = r(1 + r'^2)^{\frac{1}{2}} \text{ و } R_1 = -\frac{(1+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r''}$$

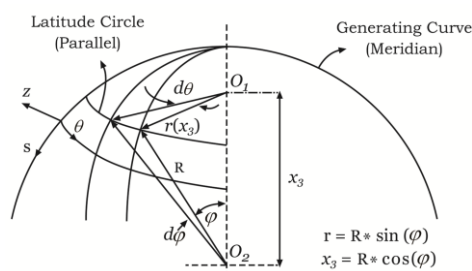
بنابراین

$$(ds)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 (dx_3)^2 + r^2(d\theta)^2 \quad (5)$$

از هندسه شکل ۱ رابطه (۵) به شکل زیر تبدیل می‌شود.

$$(ds)^2 = (1)^2(ds)^2 + r^2(d\theta)^2 \quad (6)$$

پس داریم  $A_2 = r$  و  $A_1 = 1$ .



شکل ۱- هندسه پوسته دورانی [۱۹]

سرانجام از روابط ۱ و ۲ روابط کرنش-جابجایی برای پوسته‌های کروی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss} &= (\varepsilon_{ss}^0 + z\kappa_s^1) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= (\varepsilon_{\theta\theta}^0 + z\kappa_\theta^1) \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{sz} &= \gamma_{sz}^0 \\ \gamma_{s\theta} &= (\gamma_{s\theta}^0 + z\kappa_{s\theta}^1) \end{aligned} \quad (7)$$

$\varepsilon_{ss}^0, \gamma_{\theta z}^0, \varepsilon_{\theta\theta}^0, \gamma_{s\theta}^0$  و بترتیب کرنشهای نرمال و برشی سطح میانی بوده و  $\kappa_s^1, \kappa_\theta^1$  و  $\kappa_{s\theta}^1$  تغییرات انحنا می‌باشند که برای پوسته‌های کروی نازک به شکل زیر می‌باشند [۱۹]:

$$\varepsilon_{ss}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{w_0}{R} \quad (8)$$

<sup>1</sup> Lamé's Parameter

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_V ([\bar{Q}_{ij}] \{\varepsilon\})^T (\{\varepsilon\}) dv \quad (14)$$

در حالت کلی رابطه کرنش-جابجایی به شکل زیر است

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d_e\} \quad (15)$$

ماتریس [B] ماتریس کرنش-جابجایی نام دارد و شامل توابع شکل و مشتقات آن می باشد. بنابراین می توان رابطه انرژی کرنشی را به صورت زیر بازنویسی نمود

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{d_e\}^T [B]^T [D] [B] \{d_e\} dA \quad (16)$$

ماتریس [D] برای یک کامپوزیت لایه ای شامل ضرایب سفتی متفاوتی می باشد. این ضرایب سفتی به صورت زیر محاسبه می شوند.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, \dots) = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2, \dots) dz \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$A_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{5}{4} (\bar{Q}_{ij})_k \left( 1 - 4 \left( \frac{z}{h_k - h_{k-1}} \right)^2 \right) dz$$

$$\alpha, \beta = 4, 5 \quad (17)$$

با بازنویسی رابطه (۱۶) داریم

$$U = \frac{1}{2} \{d_e\}^T [K] \{d_e\} \quad (18)$$

که در رابطه فوق ماتریس سفتی [K] به صورت زیر قابل بیان است

$$[K] = \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (19)$$

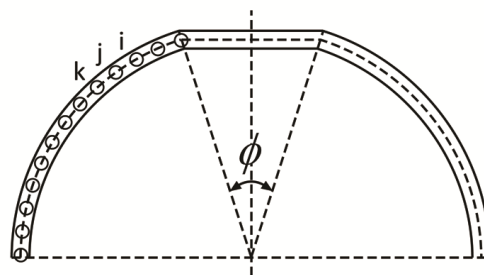
### ۶- بدست آوردن ماتریس جرم

انرژی جنبشی یک پوسته پیوسته بصورت زیر قابل بیان می باشد

$$KE = \frac{\rho}{2} \int_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dv \quad (20)$$

با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۲۰) انرژی جنبشی برای پوسته به صورت زیر خواهد شد

$$KE = \frac{1}{2} \int_A \left( I_1 (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + 2I_2 (\dot{u}_0 \dot{\psi}_s + \dot{v}_0 \dot{\psi}_\theta) + I_3 (\dot{\psi}_s^2 + \dot{\psi}_\theta^2) \right) dA \quad (21)$$



شکل ۲- المان بندی پوسته نیم کره [۹]

### ۴- روابط تنش - کرنش

روابط تنش-کرنش در مختصات پوسته برای k امین لایه از یک ماده کامپوزیتی به صورت زیر می باشد

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{s\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{sz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_{klay} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{s\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{sz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$\bar{Q}_{ij}$  ضرایب الاستیک انتقال یافته k امین لایه بوده و عبارتند از

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} (\cos\gamma)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})(\sin\gamma)^2 (\cos\gamma)^2 + Q_{22} (\sin\gamma)^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})(\sin\gamma)^2 (\cos\gamma)^2 + Q_{12} ((\sin\gamma)^4 + (\cos\gamma)^4) \\ \bar{Q}_{16} &= -\cos\gamma (\sin\gamma)^3 Q_{22} + \sin\gamma (\cos\gamma)^3 Q_{11} - \cos\gamma \sin\gamma ((\cos\gamma)^2 - (\sin\gamma)^2) (Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} (\sin\gamma)^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})(\sin\gamma)^2 (\cos\gamma)^2 + Q_{22} (\cos\gamma)^4 \\ \bar{Q}_{26} &= -\sin\gamma (\cos\gamma)^3 Q_{22} + \cos\gamma (\sin\gamma)^3 Q_{11} + \cos\gamma \sin\gamma ((\cos\gamma)^2 - (\sin\gamma)^2) (Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})(\sin\gamma)^2 (\cos\gamma)^2 + Q_{66} ((\cos\gamma)^2 - (\sin\gamma)^2)^2 \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} (\cos\gamma)^2 + Q_{55} (\sin\gamma)^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos\gamma \sin\gamma \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} (\cos\gamma)^2 + Q_{44} (\sin\gamma)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

$\gamma$  جهتگیری زاویه الیاف نسبت به محور s را نشان می دهد.  $Q_{ij}$  بر اساس مدول الاستیک در مختصات اصلی نوشته می شوند [۱۷].

### ۵- بدست آوردن ماتریس سفتی

انرژی کرنشی یک جسم الاستیک به صورت زیر بیان می شود

مرزی ساده با تعداد المانهای متفاوت نمایش داده شده است.  $\Omega$  فرکانس بی بعد شده می باشد و به صورت زیر تعریف می گردد.

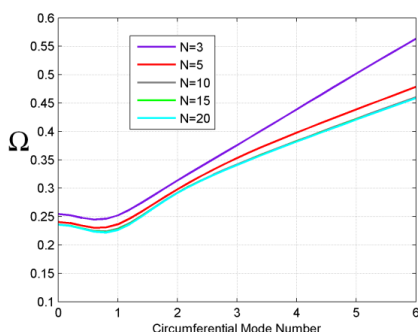
$$\Omega = \omega \cdot R \cdot \left( \frac{\rho}{E_{11}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

ماده انتخابی برای پوسته کامپوزیتی، گرافیت اپوکسی با خصوصیات مندرج در جدول ۱ می باشد.

جدول ۱- خصوصیات گرافیت اپوکسی

HS-Graphite/Epoxy	خواص
$181 \times 10^9$	$E_{11}(Pa)$
$10.34 \times 10^9$	$E_{22}(Pa)$
$7.2 \times 10^9$	$G_{12}(Pa)$
0.28	$\nu_{12}$
1389.23	$\rho(\frac{kg}{m^3})$

همانطور که مشاهده می شود با انتخاب بیش از ۱۵ المان تغییری در نتایج فرکانس طبیعی بی بعد شده بر حسب مد محیطی مشاهده نمی شود و این نمایانگر همگرایی پاسخها می باشد. بنابراین برای بدست آوردن سایر نتایج از ۲۰ المان استفاده شده است.



شکل ۳- بررسی همگرایی فرکانس طبیعی بی بعد پوسته نیمکره با ضخامت ۲ سانتیمتر و زاویه الیاف صفر درجه با شرایط مرزی ساده

برای بررسی صحت نتایج کار حاضر مقایسه ای با نتایج مراجع [۱۶ و ۲۰] صورت گرفته است. در شکل ۴ مطابق مرجع [۱۶] فرکانس طبیعی کلاهک کروی کامپوزیتی دولایه صفرانود با شرایط مرزی ساده و خصوصیات مکانیکی و هندسی برابر با

$$G_{23}/E_2 = 0.2, G_{13}/E_2 = 0.5, E_1/E_2 = 25, \\ G_{12}/E_2 = 0.5, \nu_{12} = 0.25, R/h = 200$$

در رابطه فوق  $I_1$  ممان های اینرسی می باشند که بصورت زیر تعریف می شوند:

$$(I_1, I_2, I_3) = \sum_{k=1}^N \int \rho^k (1, z, z^2) dz \quad (22)$$

که  $N$ ، شماره لایه برای پوسته چند لایه و  $\rho$  چگالی می باشد.

از طرفی می دانیم

$$\{d\} = [N]\{d_e^i\} \quad (23)$$

که  $[N]$  ماتریس توابع شکل،  $\{d_e^i\}$  بردار جابجایی گره ای و  $\{d\}$  بردار جابجایی کل المان می باشد.

رابطه (۲۱) را در فرم ماتریسی بصورت زیر می توان نوشت:

$$KE = \frac{1}{2} \int_A \{d_e\}^T [I] \{d_e\} dA \quad (24)$$

ماتریس  $[I]$ ، ماتریس ممان های اینرسی برای پوسته می باشد. با جایگذاری رابطه (۲۳) در رابطه (۲۴) می توان نوشت:

$$KE = \frac{1}{2} \{d_e\}^T [M] \{d_e\} \quad (25)$$

که در آن

$$[M] = \int_A [N]^T [I] [N] dA \quad (26)$$

$[M]$  ماتریس جرم می باشد.

با داشتن ماتریس جرم و ماتریس سفتی کل پوسته که شرایط مرزی مساله نیز در آنها لحاظ شده است، می توان معادله کلی ارتعاش آزاد پوسته را به صورت زیر نوشت

$$[M^{uu}]\{\ddot{u}\} + [K^{uu}]\{u\} = \{0\} \quad (27)$$

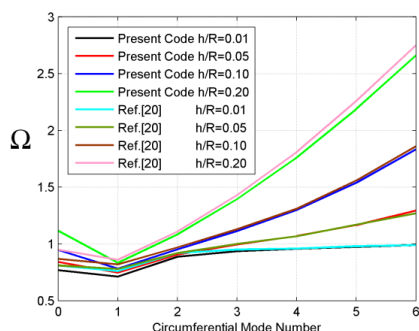
در رابطه فوق  $[M^{uu}]$  و  $[K^{uu}]$  به ترتیب ماتریس جرم کل و ماتریس سفتی کل هستند.  $\{u\}$  و  $\{\ddot{u}\}$  به ترتیب بردار جابجایی و شتاب پوسته می باشند. با استفاده از معادله مشخصه ارتعاشی زیر می توان فرکانسهای طبیعی پوسته را بدست آورد.

$$([K^{uu}] - [M^{uu}]\omega^2)\{d\} = \{0\} \quad (28)$$

مقادیر ویژه رابطه فوق مربع فرکانس طبیعی پوسته را بدست میدهد.

## ۷- نتایج و راستی آزمایی

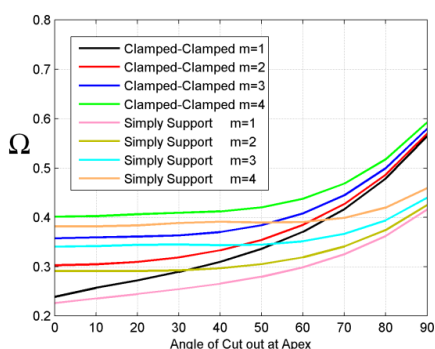
در نخستین گام جهت بررسی همگرایی پاسخها، مطابق شکل ۳ فرکانس طبیعی پوسته کامپوزیتی نیم کره با شرایط



شکل ۵- مقایسه نتایج کار حاضر با مرجع [۲۰] برای پوسته نیم کره ایزوتروپ با شرایط مرزی گیردار

برای بررسی اثر میزان برش در راس پوسته نیم کره، شرایط مرزی و زاویه الیاف بر فرکانس طبیعی در شکل‌های ۶ تا ۱۰ نمودار فرکانس بی بعد شده پوسته نیم کره بر حسب زاویه برش در راس برای چهار مد محیطی اول و شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده و زوایای الیاف متفاوت آورده شده است.

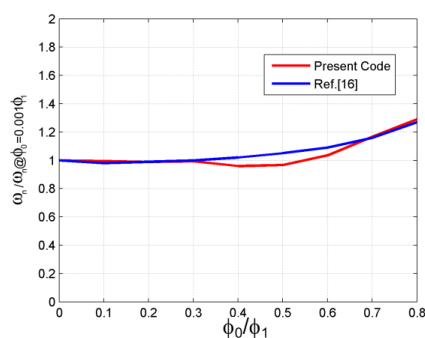
در شکل ۶ نتایج فرکانس طبیعی بی بعد شده برای زاویه الیاف صفر درجه آورده شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش میزان برش در راس پوسته نیم کره فرکانس طبیعی افزایش می یابد و مقدار فرکانس طبیعی در مدهای محیطی مختلف بهم نزدیک می شود. با تغییر شرایط مرزی از گیردار به ساده ضمن حفظ رفتار، فرکانس طبیعی کاهش می یابد.



شکل ۶- فرکانس طبیعی بی بعد پوسته نیم کره با ضخامت ۲ سانتیمتر بر حسب زاویه برش در راس با زاویه الیاف صفر درجه

آورده شده است. در این شکل  $\Phi_0$  زاویه برش و  $\Phi_1$  زاویه کلاهیک کروی نسبت به خط عمود می باشد. نتایج حاصل از کار حاضر با مرجع [۱۶] تطبیق دارد و اختلاف جزئی موجود می تواند به دلیل تفاوت در مرتبه تئوری تغییر شکل برشی بکار رفته باشد ضمن آنکه در این کار از روش اجزاء محدود نیمه تحلیلی استفاده شده است.

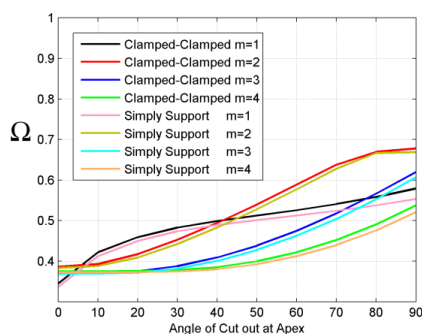
در مرجع [۲۰] فرکانس طبیعی پوسته نیم کره کامل و بدون برش در راس برای ماده ایزوتروپ با نتایج کار حاضر مقایسه شده است. همانطور که در شکل ۵ مشاهده می شود نتایج حاصل از کار حاضر با مرجع [۲۰] تطبیق دارد. برای پوسته های نازک با تغییر شماره مد محیطی فرکانسهای طبیعی تفاوت چندانی نمی کنند اما با افزایش ضخامت پوسته در شماره مدهای محیطی بالاتر فرکانسهای طبیعی افزایش می یابند ضمن آنکه بین نتایج کار حاضر و مرجع [۲۰] کمی اختلاف مشاهده می شود. دلیل این اختلاف اینست که در این مرجع مساله بر مبنای تئوری پوسته ضخیم تحلیل شده است. اما نتایج نشان می دهد که در رنج ضخامت مورد بررسی با دقت مناسبی می توان پوسته را نازک فرض نمود. همچنین در تمام  $h/R$  مورد بررسی حداقل فرکانس طبیعی مربوط به مد محوری اول می باشد. از آنجا که حداقل فرکانس طبیعی در مدهای محیطی ابتدایی اتفاق می افتد، در ادامه پاسخها برای چهار مد محیطی نخست آورده شده است.



شکل ۴- مقایسه نتایج کار حاضر با مرجع [۱۶] برای کلاهیک دو لایه صفر /نود با  $R/h=200$  و زاویه کلاهیک  $\Phi_1 = 10$

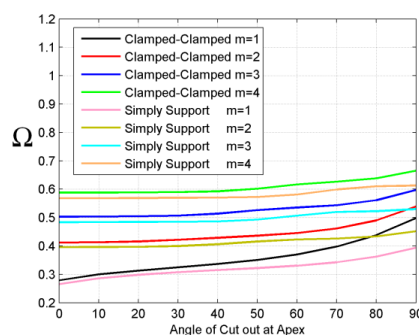
با توجه به شکل ۱۰ انتخاب زاویه ییاف نود درجه بجز مد محیطی نخست، در سایر مدهای محیطی برای پوسته نیم کره با تغییر میزان برش در راس فرکانس طبیعی تغییرات چشمگیری ندارد ضمن آنکه بر خلاف موارد قبل برای زاویه برش در راس ده تا نود درجه مد محیطی نخست بیشترین فرکانس طبیعی را دارد. همچنین تغییر شرایط مرزی اثر بسیار کمی بر فرکانس طبیعی دارد.

بنابراین در بین زوایای ییاف مورد بررسی زاویه ییاف نود درجه رفتار متفاوتی را نشان می‌دهد. در صورت یکسان بودن تمامی شرایط، افزایش زاویه برش در راس فرکانس طبیعی را افزایش می‌دهد پس می‌توان گفت برای شرایط مشابه زاویه برش نود درجه بیشترین فرکانس طبیعی را بدست می‌دهد.



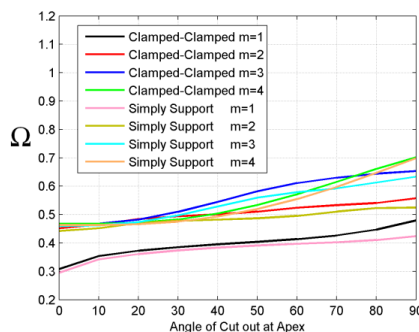
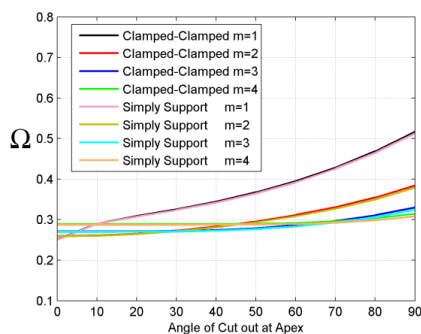
برای زاویه ییاف سی درجه نتایج در شکل ۷ آمده است. در این حالت تغییر زاویه برش در راس تاثیر زیادی بر فرکانس طبیعی ندارد و اثر تغییر شرایط مرزی مشابه حالت قبل است.

با تغییر زاویه ییاف به چهل و پنج درجه مطابق شکل ۸ بجز مد محیطی نخست، در سایر مدهای محیطی برای پوسته نیم کره با برش در راس صفر تا سی درجه فرکانسهای طبیعی بسیار بهم نزدیک می‌باشند و اثر تغییر شرایط مرزی مشابه حالات قبل است.



شکل ۷- فرکانس طبیعی بی بعد پوسته نیم کره با ضخامت ۲ سانتیمتر بر حسب زاویه برش در راس با زاویه ییاف ۳۰ درجه

شکل ۹- فرکانس طبیعی بی بعد پوسته نیم کره با ضخامت ۲ سانتیمتر بر حسب زاویه برش در راس با زاویه ییاف ۶۰ درجه



شکل ۸- فرکانس طبیعی بی بعد پوسته نیم کره با ضخامت ۲ سانتیمتر بر حسب زاویه برش در راس با زاویه ییاف ۴۵ درجه

شکل ۱۰- فرکانس طبیعی بی بعد پوسته نیم کره با ضخامت ۲ سانتیمتر بر حسب زاویه برش در راس با زاویه ییاف ۹۰ درجه با توجه به جدول ۲ می‌توان دریافت که پوسته نیم کره بدون برش با زاویه ییاف صفر درجه و شرایط مرزی ساده

برای زاویه ییاف شصت درجه بر طبق شکل ۹ با تغییر زاویه برش در راس پوسته نیم کره شماره مد محیطی متناظر با حداقل فرکانس طبیعی از یک به چهار تغییر می‌نماید و اثر تغییر شرایط مرزی مشابه حالات قبل است.



جدول ۲- تاثیر زوایای الیاف و زوایای برش در راس بر فرکانس بی بعد شده پوسته نیم کره کامپوزیتی

		Fiber Angle																			
		0				30				45				60				90			
		Angle of Cut-out at Apex																			
m	B.C	0	30	60	90	0	30	60	90	0	30	60	90	0	30	60	90	0	30	60	90
1	CC	.24	.29	.37	.56	.28	.32	.37	.50	.31	.38	.41	.48	.34	.48	.52	.58	.25	.32	.39	.51
	SS	.23	.25	.30	.42	.26	.31	.37	.39	.30	.37	.40	.42	.34	.47	.51	.55	.25	.32	.39	.51
2	CC	.30	.32	.38	.57	.41	.42	.44	.54	.45	.49	.52	.56	.39	.45	.59	.68	.26	.27	.31	.38
	SS	.29	.29	.32	.42	.40	.40	.42	.45	.44	.48	.50	.52	.38	.44	.58	.67	.26	.27	.31	.38
3	CC	.36	.36	.41	.58	.50	.51	.54	.60	.46	.51	.61	.65	.37	.39	.47	.62	.27	.27	.28	.33
	SS	.34	.34	.35	.44	.48	.48	.51	.53	.46	.50	.58	.63	.37	.38	.46	.61	.27	.27	.29	.32
4	CC	.40	.41	.44	.59	.59	.59	.62	.67	.47	.48	.57	.70	.38	.38	.42	.54	.29	.29	.29	.31
	SS	.38	.39	.39	.46	.57	.57	.58	.61	.46	.47	.55	.70	.37	.37	.41	.52	.29	.29	.29	.31

پوسته نیم کره با زاویه برش در راس نود درجه و زاویه الیاف چهل و پنج درجه بیشترین فرکانس طبیعی و پوسته نیم کره بدون برش در راس با زاویه الیاف صفر درجه کمترین فرکانس طبیعی را در بین تمام حالات مورد بررسی دارد.

در پایان می توان نتیجه گرفت که برای یک کاربرد خاص از پوسته های کروی دارای برش یا بدون برش که باید در محدوده فرکانس طبیعی مشخصی باشیم، با انتخاب ترکیبهای مناسبی از زاویه الیاف، زاویه برش در راس و شرایط مرزی می توان به محدوده فرکانس طبیعی مطلوب رسید.

#### تشکر و قدردانی

این تحقیق با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه شهروند به انجام رسیده است.

#### مراجع

- [1] Niordson FI (1984) Free vibration of thin elastic spherical shells. *Int J Sol & Structures* 20: 667–687.
- [2] Ramakrishnan CV, Shah AH (1970) Vibration of aeolotropic spherical shells. *J Acoust Sot Amer* 47: 1366–1374.
- [3] Hoppmann WH, Baronet CN (1963) A study of the vibrations of shallow spherical shells. *Trans ASME, J ApplMech* 30: 326–334.
- [4] Ross EW (1965) Natural frequencies and mode shapes for axisymmetric vibrations of deep spherical shells. *ASME, J ApplMech* 32: 553–561.
- [5] Navaratna DR (1966) Natural vibration of deep spherical shells. *AIAA J* 4: 2056–2058.
- [6] Lam KY, Loy CT (1995) Influence of boundary conditions and fiber orientation on the natural

کمترین فرکانس طبیعی را دارد و پوسته نیم کره با زاویه برش در راس نود درجه و زاویه الیاف چهل و پنج درجه بیشترین فرکانس طبیعی را در بین تمام حالات مورد بررسی دارد.

#### ۸- نتیجه گیری

در این مقاله به کمک یک روش اجزاء محدود نیمه تحلیلی ارتعاش آزاد پوسته های نیم کره کامپوزیتی دارای برش در راس مطالعه شده است. اثر میزان زاویه برش در راس، زاویه الیاف و شرایط مرزی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل با مراجع سازگاری مناسبی را نشان می دهند. برای پوسته های نازک با تغییر شماره مد محیطی فرکانسهای طبیعی تفاوت چندانی نمی کنند اما با افزایش ضخامت پوسته در شماره مدهای محیطی بالاتر فرکانسهای طبیعی افزایش می یابند.

برای تمام زوایای الیاف پوسته بدون برش در راس با شرایط مرزی ساده حداقل فرکانس طبیعی را با شماره مد یک دارد. بنابراین می توان گفت ایجاد برش در راس پوسته باعث افزایش فرکانس طبیعی می گردد. دلیل بدست آمدن این نتیجه آنست تغییر زاویه برش در راس پوسته باعث تغییر در اینرسی و سفتی پوسته می شود.

برای کلیه زوایای الیاف بجز زاویه الیاف نود درجه، شرط مرزی گیردار نسبت به شرط مرزی ساده فرکانس طبیعی بالاتری را بدست می دهد اما برای زاویه الیاف نود درجه تغییر شرایط مرزی اثر محسوسی بر فرکانس طبیعی ندارد. این نتیجه نیز بدلیل مقید تر شدن جابجایی ها در حالت شرط مرزی گیر دار مورد انتظار است اما برای زاویه الیاف نود درجه بنظر میرسد که اثر زاویه الیاف بر سفتی پوسته بر اثر شرایط مرزی غالب است.

- functionally graded (FG) composite shell structures. *Procedia Engineering* 38: 3192–3199.
- [14] YegaoQu, Xinhua Long, Shihao Wu, GuangMeng (2013) A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia. *Composite Structures* 98: 169–191.
- [15] Hosseini-Hashemi SH, Fadaee M (2011) On the free vibration of moderately thick spherical shell panel—A new exact closed-form procedure. *J Sound Vib* 330(17):4352–4367.
- [16] Sai Ram KS, SreedharBabu T (2002) Free vibration of composite spherical shell cap with and without a cutout. *Computers and Structures* 80: 749–1756.
- [17] Kadoli R, Ganesan N (2005) A theoretical analysis of linear thermoelastic buckling of composite hemispherical shells with a cut-out at the apex. *J Composite Structures* 68: 87–101.
- [18] Toorani MH, Lakis AA (2000) General equations of anisotropic plates and shells including transverse shear deformations, rotary inertia and initial curvature effects. *J Sound Vib* 237(4): 561–615.
- [19] Kraus H (1967) *Thin elastic shells*, Chap 1, John Wiley, New York.
- [20] Gautham BP, Ganesan N (1992) Free Vibration Analysis of Thick Spherical Shells. *J Computers & Structures* 45(2): 307–313.
- frequencies of thin orthotropic laminated cylindrical shells. *Compos Struct* 31: 21–30.
- [7] Archer RR (1962) On the influence of uniform stress states on the natural frequencies of spherical shells. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics* 29: 502–505.
- [8] Goncalves PB (1994) Axisymmetric vibrations of imperfect shallow spherical caps under pressure loading. *Journal of Sound and Vibration* 174(2): 249–260.
- [9] Ganesan N, Kadoli R (2004) Studies on linear thermoelastic buckling and free vibration analysis of geometrically perfect hemispherical shells with cut-out. *J Sound & Vibration* 27(7): 855–879.
- [10] Lam KY, Qian Wu (2000) Free vibration of symmetric angle-ply thick laminated composite cylindrical shells. *J Compos: part 31*: 345–354.
- [11] Sang-Youl Lee, Dae-Seouk Chung (2010) Finite element delamination model for vibrating composite spherical shell panels with central cutouts. *Finite Elements in Analysis and Design* 46(3): 247–256.
- [12] Mohamad S Qatu, Ebrahim Asadi (2012) Vibration of doubly curved shallow shells with arbitrary boundaries. *Applied Acoustics* 73(1): 21–27.
- [13] Koteswara D Rao, Blessington PJ, R Tarapada (2012) Finite element modeling and analysis of