



بررسی اثر شرایط مرزی، زاویه رأس و جنس هسته بر ارتعاشات آزاد پوسته کوپل مخروطی - مخروطی ساندویچی

رضا همتی^۱ و مصطفی طالبی توتی^{۲*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۲۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۴/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۰۸

چکیده

در این تحقیق، به کمک روش تفاضل مربعات (DQM) به تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته کوپل مخروطی - مخروطی ساندویچی پرداخته شده است. هندسه پوسته مخروطی بررسی شده در این تحقیق، به صورت ناقص است. هسته ساندویچ پنبه، چهار نوع ماده مختلف پلی‌اترکتون (PEEK)، پلی‌کربنات (PC)، پلی‌پروپیلن جامد (SPP) و فوم پلی‌آمید با چگالی بالا (HDPF) و لایه‌های داخلی و خارجی از جنس آلومینیوم در نظر شده است. مدل‌سازی ریاضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) پوسته انجام و معادلات حرکت به کمک روش همیلتون استخراج شده است. معادلات حرکت حاکم بر ارتعاشات پوسته، معادلات مربوط به شرایط مرزی در دوسر و معادلات مربوط به شرط پیوستگی در محل اتصال دو پوسته، به کمک روش DQ گسسته‌سازی شده و رابطه مسئله مقدار ویژه استخراج و در نتیجه آن، فرکانس طبیعی محاسبه شده است. اثر تغییر طول، ضخامت، زاویه رأس مخروط، جنس هسته و اثر شرایط مرزی مختلف روی فرکانس طبیعی بررسی گردیده است. به منظور اعتبارسنجی، مقایسه‌ای میان نتایج بدست آمده و نتایج موجود در ادبیات تحقیق و همچنین نرم‌افزار آباکوس (Abaqus) صورت گرفته است.

کلمات کلیدی: پوسته کوپل مخروطی-مخروطی؛ ساندویچ پنبه؛ روش تفاضل مربعات؛ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول؛ فرکانس طبیعی.

Effects of Boundary Conditions, Cone Angle and Core Material on Free Vibration of the Joined Sandwich Conical-Conical Shell

R. Hemmati¹, M. Talebitooti^{2,*}

¹ M.Sc. Student, Mech. Eng., Qom Univ. of Tech., Qom, Iran.

² Asst. Prof., Mech. Eng., Qom Univ. of Tech., Qom, Iran.

Abstract

In this paper, free vibration of the joined sandwich conical-conical shell is investigated by using differential quadrature method (DQM). It is assumed that the conical shell is truncated. The core of sandwich conical-conical shell is made from the four different types of materials such as Polyether ether ketone (PEEK), Polycarbonate (PC), Solid polypropylene (SPP) and high density polyimide foam (HDPF), and Aluminum is supposed for material of inner and outer skin layers. The first-order shear deformation shell theory (FSDT) is adopted to formulate the theoretical model and governing equations of motion are derived by Hamilton's principle. The governing equations of motion, the boundary conditions of the two ends of the shell and the continuity conditions at the interface section of shell segments, are discretized by means of the DQM. Then, eigenvalue problem, and, consequently natural frequencies are achieved. The effects of thickness, length of the shell, cone angle, material of the core and boundary conditions on natural frequencies are investigated. To verify the accuracy of this method, comparisons of the present results with results available in the open literature and Abaqus software are performed.

Keywords: Joined Conical-Conical Shell; Sandwich Panel; Differential Quadrature Method; First-Order Shear Deformation Shell Theory; Natural Frequency.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۰۲۵۳۶۶۴۱۶۰۱؛ فکس: ۰۰۲۵۳۶۶۴۱۶۰۴

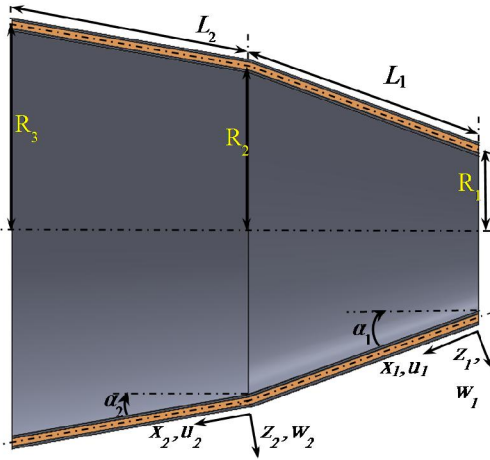
آدرس پست الکترونیک: talebi@qut.ac.ir

۱- مقدمه

هندسی، اضافه نمودن جرم و فنر و بستر الاستیک، مورد بررسی قرار گرفته است. تورنابنه [۱۰] ارتعاشات آزاد پوسته-های مخروطی و استوانه‌ای و ورق حلقوی از جنس مواد تابعی مدرج را بررسی کرده است. در این مقاله از توزیع چهار پارامتری قانون توان برای جنس ماده استفاده شده و بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، رفتار دینامیکی هندسه‌های اشاره شده مورد بررسی قرار گرفته است. مروروف و لپاتین [۱۱]، کمانش پوسته استوانه‌ای ساندویچی با شرط مرزی گیردار تحت فشار خارجی یکنواخت را بررسی کرده‌اند. پوسته مورد بررسی در این تحقیق، دارای هسته ایزوتروپ و پوسته‌های خارجی و داخلی از کامپوزیت‌های لایه‌ای بودند. طالبی و حسینی [۱۲] کمانش پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی نسبتاً جدار ضخیم با استفاده از روش گلرکین و تفاضل مربعات را تحلیل کردند. در بین تحقیقات گسترده‌ای که روی ارتعاشات پوسته-های استوانه‌ای و مخروطی صورت گرفته است، تعداد اندکی از آنها به بررسی ارتعاشات پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی و پوسته کوپل مخروطی-مخروطی پرداخته‌اند. از اولین مطالعات صورت گرفته در این زمینه، می‌توان به تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای-مخروطی به هم چسبیده از جنس ایزوتروپیک توسط ابری و همکاران [۱۳] اشاره کرد. افریم و اسنبرگر [۱۴] ارتعاش آزاد پوسته‌های متقارن محوری متشکل از چندین پوسته استوانه‌ای و مخروطی را با تئوری رایزنر-نقدی و با استفاده از روش ماتریس سختی دینامیکی مورد تحلیل قرار دادند. جنس پوسته در این تحقیق، ایزوتروپ در نظر گرفته شده است. کارستا و کسسیگلو [۱۵] بر اساس روش انتشار امواج برای قسمت استوانه‌ای پوسته و روش سری توانی برای قسمت مخروطی، خصوصیات ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای-مخروطی ایزوتروپ را بررسی کرده‌اند. در این پژوهش، دو تئوری پوسته نازک دائل-مشرتی و فلوگه مورد بررسی قرار گرفته‌اند. کیو و همکاران [۱۶]، ارتعاش آزاد پوسته استوانه-مخروطی به هم چسبیده با شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک را بررسی کرده‌اند. فرضیه‌های پوسته‌نازک رایزنر-نقدی به عنوان فرضیه‌های اساسی در این مطالعه، مورد استفاده قرار گرفته است. باقری و همکاران [۱۷] در مقاله‌ای ارتعاش آزاد پوسته کوپل مخروطی-مخروطی را به

پوسته‌های مخروطی و استوانه‌ای کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف از قبیل، هوافضا، دریا، لوله‌های انتقال، نازل‌ها و صنایع ساختمان دارند. از این رو تحلیل دینامیکی و ارتعاشات این پوسته‌ها، همواره مورد توجه محققین بوده است. در سال‌های اخیر با توسعه صنایع مختلف از جمله هوافضا نیاز به موادی با مقاومت بالا و وزن پایین احساس شده است. ساندویچ پنل‌ها به خاطر وزن کم، استحکام و سفتی خمشی بالا می‌توانند انتخاب خوبی در این صنایع باشند. ساندویچ پنل‌ها دارای یک هسته می‌باشند که از دو طرف به دو لایه محدود شده است. هسته عموماً عایق، نرم و انعطاف پذیر بوده و جنس آن اغلب، پلی‌اترترکتون، پلی‌کربنات، پلی‌استایرن، پشم سنگ و پشم شیشه است. ساندویچ پنل‌ها با هسته انعطاف‌پذیر در صنایع مختلف جهت ساخت بدنه موشک، زیردریایی، قطار و خودرو و دیواره‌های دو جداره کاربرد دارند [۱-۳].

در این راستا، ویلکینز و همکارانش [۴]، ارتعاشات آزاد ساندویچ پنل‌های مخروطی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این تحقیق، جنس پوسته‌ها و هسته ساندویچ پنل ایزوتروپیک و یا اورتوتروپیک فرض شده و همچنین شرایط مرزی مختلف برای پوسته در نظر گرفته شده و معادلات با کمک روش گلرکین حل شده است. ابری و همکاران [۵]، فرکانس طبیعی پوسته‌های مخروطی را برای ضخامت ثابت در نه ترکیب مختلف از شرایط مرزی پوسته محاسبه نموده‌اند. رامش و گنسان [۶]، ارتعاشات پوسته‌های مخروطی را با روش المان محدود تحلیل کردند. پوسته‌های بررسی شده در این تحقیق، از جنس مواد مرکب چند لایه‌ای بوده است. آن‌جی و همکاران [۷] برای اولین بار ارتعاشات آزاد پوسته-های مخروطی کامپوزیتی دوار و تاثیر شرایط مرزی مختلف را به کمک روش تفاضل مربعات تعمیم یافته، مورد بررسی قرار داده‌اند. اثرات نیروی حلقوی اولیه و شتاب کریولیس روی ارتعاشات در این تحقیق، مورد بررسی قرار گرفت. کاتو در مقاله و همچنین در کتاب خود، رفتار دینامیکی پوسته-های کامپوزیتی را مورد تحلیل قرار داده است [۸-۹]. در این مقاله تئوری‌های مختلف از قبیل: نازک، ضخیم، سه بعدی و غیرمحلی، روش‌های حل شامل: حل دقیق، ریتز و المان محدود و اثرهای پیچیده از قبیل: تنش ابتدایی، نقص



شکل ۱- پارامترهای هندسی و سیستم مختصات پوسته مخروطی- مخروطی به هم چسبیده

زیرنویس 0 مختصه‌های صفحه میانی را نشان می‌دهند. φ_θ و φ_x نیز به ترتیب چرخش نرمال حول محورهای x و θ هستند. بالانویس i که می‌تواند اعداد ۱ و ۲ را به خود گیرد، نشان‌دهنده جابه‌جایی‌های مربوط به پوسته اول و دوم است.

بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مؤلفه‌های میدان کرنش و انحناء برای صفحه میانی با روابط (۳) و (۴) به دست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^i \\ \varepsilon_{\theta\theta}^i \\ \gamma_{x\theta}^i \\ \gamma_{xz}^i \\ \gamma_{\theta z}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0^i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0^i}{R \partial \theta} + \frac{u_0^i \cos \varphi}{R} + \frac{w_0^i \sin \varphi}{R} \\ \frac{\partial v_0^i}{\partial x} + \frac{\partial u_0^i}{R \partial \theta} - \frac{v_0^i \cos \varphi}{R} \\ \frac{\partial w_0^i}{\partial x} + \varphi_x^i \\ \frac{\partial w_0^i}{R \partial \theta} - \frac{v_0^i \sin \varphi}{R} + \varphi_\theta^i \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{xx}^i \\ k_{\theta\theta}^i \\ k_{x\theta}^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x^i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_\theta^i}{R \partial \theta} + \frac{\varphi_x^i \cos(\varphi)}{R} \\ \frac{\partial \varphi_x^i}{R \partial \theta} + \frac{\partial \varphi_\theta^i}{\partial x} - \frac{\varphi_\theta^i \cos(\varphi)}{R} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

کمک روش تفاضل مربعات بررسی کردند. پوسته مورد مطالعه در این تحقیق از جنس مواد الاستیک ایزوتروپ همگن بوده است.

مروری بر ادبیات تحقیق نشان می‌دهد که در زمینه ارتعاشات پوسته کوپل استوانه‌ای- مخروطی ساندویچی و پوسته کوپل مخروطی-مخروطی ساندویچی که یکی از سازه‌های پرکاربرد در سازه‌های صنعت هوافضا و دریایی است، مطالعه‌ای صورت نگرفته است. در این تحقیق، ابتدا خصوصیات مکانیکی ساندویچ پنل مدل گردیده و سپس معادلات حرکت پوسته مخروطی به کمک تئوری مرتبه اول برشی و اصل همیلتون استخراج شده است؛ سپس این معادلات برای دو پوسته، به همراه معادلات شرایط مرزی در دو سر و معادلات پیوستگی در محل اتصال دو پوسته به کمک روش تفاضل مربعات گسسته‌سازی شده و با برهم‌گذاری مناسب معادلات، مسئله مقدار ویژه تشکیل و حل گردیده است. صحنه سنجی به کمک مقایسه میان نتایج حاصل با نتایج موجود در ادبیات تحقیق و همچنین نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس صورت گرفته است.

۲- معادلات و روابط

۲-۱- سینماتیک مسئله

پوسته کوپل مخروطی-مخروطی مطابق شکل ۱ با مولدهایی به طول L_1 و L_2 ، شعاع‌های R_1 ، R_2 و R_3 و زاویه‌های رأس α_1 و α_2 در نظر گرفته می‌شود. جابه‌جایی پوسته در سه جهت طولی x ، محیطی θ و عمود بر پوسته z ، به ترتیب با u و v و w نمادگذاری می‌شود.

شعاع مخروط در هر نقطه روی پوسته کوپل با رابطه (۱) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} R(x_1) &= R_1 + x_1 \sin(\alpha_1) \\ R'(x_2) &= R_2 + x_2 \sin(\alpha_2) \end{aligned} \quad (1)$$

میدان جابه‌جایی در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت رابطه (۲) قابل بیان است [۱۸].

$$\begin{aligned} u^i(x^i, \theta, z) &= u_0^i(x^i, \theta, t) + z \varphi_x^i(x^i, \theta, t) \\ v^i(x^i, \theta, z) &= v_0^i(x^i, \theta, t) + z \varphi_\theta^i(x^i, \theta, t) \\ w^i(x^i, \theta, z) &= w_0^i(x^i, \theta, t) \end{aligned} \quad (2)$$

در معادله (۲) u و v و w به ترتیب جابه‌جایی در راستاهای محوری، شعاعی و عمود بر ضخامت هستند.

$$\begin{aligned} \frac{Q_{xz}^i}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\theta z}^i}{R\partial\theta} + \frac{\cos(\varphi)}{R} Q_{xz}^i - \frac{\sin(\varphi)}{R} N_{\theta\theta}^i &= I_1 \ddot{w}_0^i \\ \frac{\partial M_{xx}^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}^i}{R\partial\theta} + \frac{\cos(\varphi)}{R} (M_{xx}^i - M_{\theta\theta}^i) - Q_{\theta z}^i & \\ &= I_2 \ddot{u}_0^i + I_3 \ddot{\varphi}_x^i \\ \frac{\partial M_{x\theta}^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta\theta}^i}{R\partial\theta} + \frac{2\cos(\varphi)}{R} M_{x\theta}^i - Q_{\theta z}^i & \\ &= I_2 \ddot{v}_0^i + I_3 \ddot{\varphi}_\theta^i \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن

$$\begin{aligned} (I_0 \cdot I_1 \cdot I_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho_h(1.z.z^2) dz \\ &+ \int_{-t/2}^{t/2} \rho_t(1.z.z^2) dz \end{aligned} \quad (11)$$

۲-۴- مدل سازی خصوصیات مکانیکی ساندویچ پنل

پارامترهای A_{ij} و D_{ij} که در روابط (۷) و (۸) مورد استفاده قرار گرفته‌اند، به ترتیب سفتی کششی و سفتی خمشی ساندویچ پنل می‌باشند. پوسته‌ها و هسته ساندویچ پنل به ترتیب، اورتوتروپیک و ایزوتروپیک فرض شده‌اند. با توجه به تقارن پوسته نسبت به صفحه میانی، تمام درایه‌های سفتی کوپلینگ پوسته، B_{ij} ، صفر خواهد شد. بر اساس مدل برشی پوسته [۱۲، ۱۹ و ۲۰]، درایه‌های ماتریس سفتی کششی بصورت روابط (۱۲) قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \bar{Q}_t t \xi_{11}, A_{22} = \bar{Q}_t t \xi_{22} \\ A_{12} &= A_{21} = \bar{Q}_t \nu_t t \xi_{12}, A_{66} = G_t t \xi_{66} \\ A_{44} &= G_t t \xi_{13}, A_{55} = G_t t \xi_{23} \end{aligned} \quad (12)$$

که

$$\begin{aligned} \bar{Q}_t &= \frac{E_t}{1-\nu_t^2}, \bar{Q}_h = \frac{E_h}{1-\nu_h^2} \\ \xi_{11} &= 1 + \frac{h}{t} \frac{\bar{Q}_h}{\bar{Q}_t}, \xi_{12} = 1 + \frac{h}{t} \frac{\bar{Q}_h \nu_h}{\bar{Q}_t \nu_t} \\ \xi_{22} &= \xi_{11}, \xi_{33} = 1 + \frac{h}{t} \frac{G_h}{G_t} \\ \xi_{13} &= (1 + \frac{h}{t})^2 (1 + \frac{h}{t} \frac{G_t}{G_h})^{-1}, \xi_{23} = \xi_{13} \end{aligned} \quad (13)$$

درایه‌های ماتریس سفتی خمشی بصورت روابط (۱۴) قابل محاسبه است.

φ در روابط بالا به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (5)$$

روابط کرنش هر نقطه از پوسته به کمک کرنش‌های صفحه‌ی میانی و انحناها به کمک رابطه (۶) قابل بیان است.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^i &= \varepsilon_{xx0}^i + z \kappa_{xx}^i \\ \varepsilon_{\theta\theta}^i &= \varepsilon_{\theta\theta0}^i + z \kappa_{\theta\theta}^i \\ \gamma_{x\theta}^i &= \gamma_{x\theta0}^i + z \kappa_{x\theta}^i \\ \gamma_{xz}^i &= \gamma_{xz0}^i \\ \gamma_{\theta z}^i &= \gamma_{\theta z0}^i \end{aligned} \quad (6)$$

۲-۲- معادلات ساختاری

نیروها و ممان‌های منتجه، طبق رابطه‌های (۷) و (۸) با کرنش‌ها ارتباط می‌یابند.

$$\begin{pmatrix} N_{xx}^i \\ N_{\theta\theta}^i \\ N_{x\theta}^i \\ M_{xx}^i \\ M_{\theta\theta}^i \\ M_{x\theta}^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{11} & A_{26} & B_{12} & B_{11} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{11} & B_{26} & D_{12} & D_{11} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx0}^i \\ \varepsilon_{\theta\theta0}^i \\ \gamma_{x\theta0}^i \\ \kappa_{xx}^i \\ \kappa_{\theta\theta}^i \\ \kappa_{x\theta}^i \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{\theta z}^i \\ Q_{xz}^i \end{pmatrix} = k_s \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{\theta z0}^i \\ \gamma_{xz0}^i \end{pmatrix} \quad (8)$$

که در رابطه‌های (۷) و (۸)، A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} به ترتیب سفتی کششی، کوپلینگ و خمشی پوسته می‌باشند که به صورت رابطه (۹) قابل محاسبه می‌باشند.

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \{1.z.z^2\} dz \quad (9)$$

و k_s ، ضریب تصحیح برشی نام دارد و مقدار آن برابر با ۰/۸۳۳ است.

۲-۳- معادلات حرکت

با نوشتن انرژی کرنشی و جنبشی پوسته و اعمال اصل همپلتون بر تابع انرژی معادلات حرکت به صورت روابط (۱۰) استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}^i}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}^i}{R} + \frac{\cos(\varphi)}{R} (N_{xx}^i - N_{\theta\theta}^i) &= I_1 \ddot{u}_0^i + I_2 \ddot{\varphi}_x^i \\ \frac{\partial N_{\theta\theta}^i}{R\partial\theta} + \frac{\partial N_{x\theta}^i}{\partial x} + 2 \frac{\cos(\varphi)}{R} N_{x\theta}^i + \frac{\sin(\varphi)}{R} Q_{\theta z}^i & \\ &= I_1 \ddot{v}_0^i + I_2 \ddot{\varphi}_\theta^i \end{aligned}$$

روش‌های متفاوتی برای ایجاد نقاط شبکه می‌توان داشت. یک روش توزیع نقاط شبکه، بازه با فواصل یکسان است که به صورت رابطه (۲۰) نشان داده می‌شود:

$$x_i = \frac{i-1}{N-1} L, i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

اما نشان داده شده که مش‌بندی با نقاط شبکه نزدیک به هم در مجاورت شرایط مرزی، موجب همگرایی سریع‌تر جواب‌ها می‌شود. یکی از روش‌های مش‌بندی مطلوب، روشی است که با رابطه (۲۱) بیان می‌شود.

$$x_i = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{i-1}{N-1} \pi \right) L, i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

به علت کامل بودن پوسته در جهت محیطی و متناوب بودن جابه‌جایی در این راستا با دوره تناوب 2π ، ترم‌های جابه‌جایی برای هر نقطه روی پوسته به صورت رابطه‌ی (۲۲) بیان می‌گردد که برای شرایط مرزی مختلف به کار می‌روند.

$$\begin{aligned} u_0^i(x_i, \theta, t) &= U^i(x_i) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ v_0^i(x_i, \theta, t) &= V^i(x_i) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \\ w_0^i(x_i, \theta, t) &= W^i(x_i) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ \phi_x^i(x_i, \theta, t) &= \phi_x^i(x_i) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ \phi_\theta^i(x_i, \theta, t) &= \phi_\theta^i(x_i) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (22)$$

شرایط مرزی این مسئله به دو قسمت تقسیم می‌شود. یکی شرایط مرزی در ابتدا و انتهای پوسته که به شکل روابط (۲۳-۲۵) است:

الف- تکیه گاه ساده:

$$N_{xx} = v_0 = w_0 = \phi_x = \phi_\theta = 0 \quad (23)$$

ب- تکیه گاه گیردار:

$$u_0 = v_0 = w_0 = \phi_x = \phi_\theta = 0 \quad (24)$$

ج- تکیه گاه آزاد:

$$N_{xx} = N_{x\theta} = Q_{xz} = M_{xx} = M_{x\theta} = 0 \quad (25)$$

و شرایط مرزی دیگر که به صورت شرط پیوستگی برای محل اتصال این دو پوسته است که به صورت رابطه (۲۶) است:

$$\begin{aligned} u_0^1 \cos(\alpha_1) - w_0^1 \sin(\alpha_1) &= u_0^2 \cos(\alpha_2) \\ &\quad - w_0^2 \sin(\alpha_2) \\ u_0^1 \sin(\alpha_1) - w_0^1 \cos(\alpha_1) &= u_0^2 \sin(\alpha_2) \\ &\quad - w_0^2 \cos(\alpha_2) \\ v_0^1 &= v_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{\bar{Q}_t t^3}{12} \xi_{11}, D_{22} = \frac{\bar{Q}_t t^3}{12} \xi_{22}, D_{66} = \frac{G_t t^3}{12} \xi_{66} \\ D_{12} = D_{21} &= \frac{\bar{Q}_t \nu_t t^3}{12} \xi_{12} \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= \zeta + \frac{h^3 \bar{Q}_h}{t^3 \bar{Q}_t}, \xi_{12} = \zeta + \frac{h^3 \bar{Q}_h \nu_h}{t^3 \bar{Q}_t \nu_t} \\ \xi_{22} &= \zeta + \frac{h^3 \bar{Q}_h}{t^3 \bar{Q}_t}, \xi_{66} = \zeta + \frac{h^3 G_h}{t^3 G_t} \\ \zeta &= 1 + 3 \frac{h}{t} + 3 \frac{h^2}{t^2} \end{aligned} \quad (15)$$

۲-۵- روش تفاضل مربعات

اساس روش تفاضل مربعات بر این اصل استوار است که مشتق یک تابع یکنواخت در یک نقطه در جهتی از مختصات با مجموع وزنی مقدار تابع در تمام نقاط مجزا در همان راستا برابر است و در نهایت منجر به تبدیل معادلات دیفرانسیلی به معادلات جبری می‌شود. روش فوق از لحاظ ریاضی به صورت رابطه (۱۶) بیان می‌گردد [۷] و [۲۱]:

$$\left. \frac{\partial^p f(x)}{\partial x^p} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N \bar{E}_{ij}^p f(x_j), i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

که ضرایب وزنی مشتق مرتبه p در نقطه x_i و N تعداد نقاط شبکه می‌باشند. برای یافتن ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول، از فرمول صریح (۱۷) استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ij}^1 &= \frac{\pi(x_i)}{(x_i - x_j)\pi(x_j)}, i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j \\ \pi(x_i) &= \prod_{j=1}^N (x_i - x_j), i \neq j \end{aligned} \quad (17)$$

ضرایب وزنی برای مشتق مراتب بالاتر از روابط بازگشتی (۱۸) و (۱۹) به‌دست می‌آیند:

$$\bar{E}_{ij}^p = p \left[\bar{E}_{ij}^{p-1} \bar{E}_{ij}^1 - \frac{\bar{E}_{ij}^{p-1}}{(x_i - x_j)} \right], i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j, 2 \leq p \leq N-1 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ij}^p &= \bar{E}_{ii}^p = - \sum_{k=1}^N \bar{E}_{ik}^p, i, j = 1, 2, \dots, N, \\ i = j, 1 \leq p &\leq N-1 \end{aligned} \quad (19)$$

۳- نتایج عددی

در این بخش، ابتدا به راستی‌آزمایی مدلسازی ریاضی صورت گرفته با مقایسه نتایج تحقیق حاضر با نتایج موجود در ادبیات تحقیق و نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس پرداخته می‌شود. سپس به بررسی پارامترهای مختلف بر ارتعاشات پوسته کویل مخروطی-مخروطی ساندویچی پرداخته می‌شود.

۳-۱- راستی‌آزمایی مدل سازی ریاضی

به قصد بررسی صحت مدلسازی ساندویچ پنل به کمک روابط (۱۲) و (۱۴)، با برابر قرار دادن زاویه رأس دو مخروط، نتایج با نتایج مراجع [۴ و ۶] مقایسه شده است که در جدول ۱ ارائه شده است. شرایط مرزی در این نمونه، دو سر گیردار مدل شده است. نزدیکی نتایج نشان از صحت مدلسازی ریاضی ساندویچ پنل به کمک این روابط دارد.

جدول ۱- مقایسه فرکانس طبیعی (بر حسب هرتز) پوسته

مخروطی ساندویچی با شرط مرزی دو سرگیردار

تحقیق حاضر	D.J.WILKINS [۴]	T.C.RAMESH [۶]	n
۲۹۹/۷۳	—	۲۹۹/۹	۱
۱۸۳/۸۹	۱۷۷/۳	۱۸۴/۹	۲
۱۲۶/۹۷	۱۲۶/۰	۱۲۸/۳	۳
۱۱۰/۴۵	۱۱۰/۷	۱۱۱/۳	۴
۱۲۷/۵۸	۱۲۶/۷	۱۲۷/۳	۵
۱۶۶/۰۵	۱۶۳/۵	۱۶۴/۷	۶
۲۱۶/۱۸	۲۱۲/۳	۲۱۳/۸	۷
۲۷۴/۶۲	۲۶۹/۱	۲۷۱/۳	۸

در جدول ۲، نتایج تحقیق حاضر با نتایج مراجع [۱۳-۱۶] مقایسه شده است که فرکانس طبیعی پوسته استوانه-ای مخروطی ایزوتروپ با شرایط مرزی یک سر آزاد و یک سر گیردار را ارائه داده است. برای رسیدن به این نتایج، زاویه رأس مخروط اول برابر صفر قرار داده شده

$$\begin{aligned} \varphi_x^1 &= \varphi_x^2 \\ \varphi_\theta^1 &= \varphi_\theta^2 \\ N_{xx}^1 \cos(\alpha_1) - Q_{xz}^1 \sin(\alpha_1) &= N_{xx}^2 \cos(\alpha_2) - Q_{xz}^2 \sin(\alpha_2) \\ N_{xx}^1 \sin(\alpha_1) - Q_{xz}^1 \cos(\alpha_1) &= N_{xx}^2 \sin(\alpha_2) + Q_{xz}^2 \cos(\alpha_2) \\ M_{xx}^1 &= M_{xx}^2 \\ N_{x\theta}^1 &= N_{x\theta}^2 \\ M_{x\theta}^1 &= M_{x\theta}^2 \end{aligned} \quad (26)$$

با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی، معادلات حرکت که در معادله (۱۰) آمده است، به شکل رابطه (۲۷) بازنویسی می‌شود:

$$-[M]\omega^2\{d\} + [S_{aa}]\{d\} + [S_{ab}]\{b\} = 0 \quad (27)$$

که در آن بردارهای $\{d\}$ و $\{b\}$ به ترتیب نشان‌گر بزرگی جابه‌جایی نقاط شبکه در دامنه و مرز سیستم بوده و ابعاد آن به ترتیب برابر است با $(10 \cdot N - 20)$ و 20 .

بطور مشابه، معادلات شرط مرزی نیز بصورت رابطه (۲۸) می‌شوند:

$$[S_{ba}]\{d\} + [S_{bb}]\{b\} = 0 \quad (28)$$

ابعاد ماتریس‌های $[S_{ba}]$ و $[S_{bb}]$ و $[S_{ab}]$ و $[S_{aa}]$ به ترتیب از چپ به راست برابر است با: $20 \times 20, 20 \times (10 \cdot N - 20), (10 \cdot N - 20) \times 20, (10 \cdot N - 20) \times (10 \cdot N - 20)$ با استفاده از معادله (۲۸)، بردار شرط مرزی دامنه $\{b\}$ به صورت (۲۹) محاسبه می‌شود.

$$\{b\} = -[S_{bb}]^{-1}[S_{ba}]\{d\} \quad (29)$$

که با جایگذاری رابطه (۲۹) در معادله (۳۰) رابطه زیر استخراج می‌شود.

$$-[M]\omega^2 + K\{d\} = 0. \quad (30)$$

با ضرب کردن M^{-1} از سمت راست در معادله (۳۰)، خواهیم داشت:

$$\{[M]^{-1}[K] - [I]\omega^2\}\{d\} = 0 \quad (31)$$

که مساله مقدار ویژه استاندارد حاصل شده و فرکانس طبیعی برابر خواهد شد با:

$$\omega^2 = eig([M]^{-1}[K]) \quad (32)$$

Natural Ferquency = $\frac{\omega}{2\pi}$

۳-۲- مطالعه پارامتری نتایج

در این بخش اثر مؤلفه‌های هندسی مربوط به این پوسته‌ها و همچنین جنس هسته روی فرکانس طبیعی بررسی شده است. در این تحقیق برای هسته ساندویچ پل از چهار نوع ماده پلی‌اتراکتون (PEEK)، پلی‌کربنات (PC)، پلی‌پروپیلن جامد (SPP) و فوم پلی‌آمید با چگالی بالا (HDPF) استفاده شده که خواص آن‌ها در جدول ۵ آمده است و لایه‌های جانبی ساندویچ پل نیز از جنس آلومینیوم است [۱۱].

در جدول ۶ پارامتر بی‌بعد فرکانسی f برای پوسته استوانه‌ای-مخروطی در پنج شماره مود محیطی اول به ازای تغییر در زاویه مخروط درج شده است. چهار نوع شرط مرزی در این جدول مورد بررسی قرار گرفته است که عبارتند از: دو سر گیردار (C-C)، دو سر تکیه‌گاه ساده (S-S)، تکیه‌گاه ساده در سر پوسته اول و تکیه‌گاه گیردار در سر پوسته دوم (S-C) و تکیه‌گاه آزاد در سر پوسته اول و تکیه‌گاه گیردار در سر پوسته دوم (F-C). با افزایش زاویه مخروط مقدار پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد؛ ولی این افزایش تا یک زاویه مشخص ادامه پیدا می‌کند و از آن زاویه به بعد روند کاهشی پیدا می‌کند که این موضوع برای شرایط مرزی مختلف،

است و جنس هسته و رویه یکسان در نظر گرفته شده است؛ همچنین در جدول ۳، پارامتر فرکانسی مخروطی $f = \omega R_2 \sqrt{\rho(1-U^2)}/E$ پوسته کوپل مخروطی-مخروطی ایزوتروپ با نتایج مرجع [۱۷] مقایسه شده است. نتایج برای شرایط مرزی دو سر گیردار و دو سر تکیه‌گاه ساده محاسبه شده است. در نهایت فرکانس طبیعی پوسته کوپل مخروطی-مخروطی ساندویچی با هسته از جنس پلی‌اتراکتون (PEEK)، با نتایج نرم افزار آباکوس مقایسه شده است که در جدول ۴ ارائه شده است. لازم به ذکر است که به دلیل عدم وجود نتایج برای پوسته مورد نظر، از مدلسازی نرم افزار اجزای محدود جهت مقایسه استفاده شده است. به دلیل ضخامت قابل توجه هسته در مقایسه با رویه‌ها، جهت افزایش دقت این مدلسازی، از المان‌های سالیید برای مدل کردن هسته استفاده شده است. ضمن اینکه از المان‌های پوسته جهت مدلسازی لایه‌های جانبی استفاده شده است که سرعت حل را کاهش داده است و به علت ضخامت کم آنها دقت حل را دچار مشکل نمی‌کند. با توجه به نزدیکی نتایج در جداول ۱ تا ۴، اعتبار مدلسازی صورت گرفته تایید می‌شود.

جدول ۲- اعتبارسنجی پارامتر بی‌بعد فرکانسی f پوسته به هم چسبیده استوانه ای - مخروطی با شرط مرزی

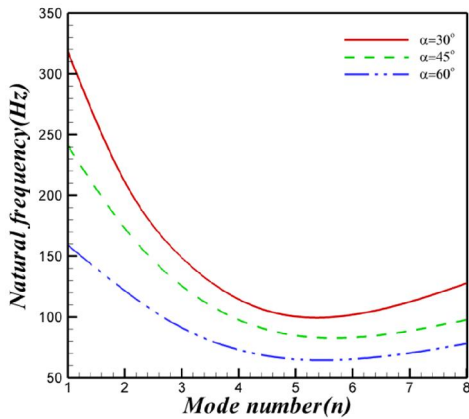
یکسر آزاد یکسرگیردار

تحقیق حاضر	Qu et al. [۱۶]	Caresta and kessoglou [۱۵]	Efraim and Eisenberger [۱۴]	Irie et al [۱۳]	n
۰/۲۹۲۹	۰/۲۹۲۹	۰/۲۹۲۳۵۷	۰/۲۹۲۸۷۵	۰/۲۹۳۰	۱
۰/۱۰۱۳	۰/۱۰۰۰	۰/۱۰۰۰۸۷	۰/۰۹۹۹۶۸	۰/۱۰۱۰	۲
۰/۰۹۲۷	۰/۰۸۷۶	۰/۰۸۷۳۳۰	۰/۰۸۷۶۰۳	۰/۰۹۰۷۶	۳
۰/۱۴۸۹	۰/۱۴۴۶	۰/۱۴۴۴۷۸	۰/۱۴۴۶۱۹	۰/۱۴۷۷	۴
۰/۲۰۳۳	۰/۱۹۹۵۱	۰/۱۹۹۵۴۰	۰/۱۹۹۵۴۶	۰/۲۰۲۱	۵

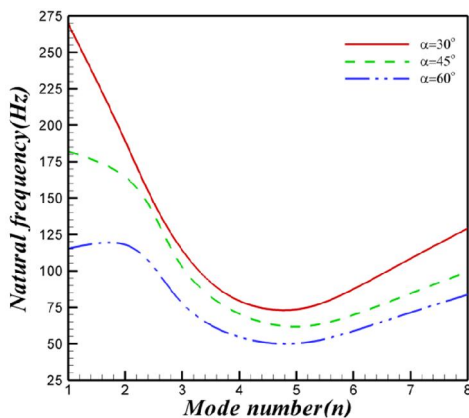
جدول ۳- اعتبارسنجی پارامتر بی‌بعد فرکانسی f پوسته ی مخروطی - مخروطی چسبیده

n	تکیه‌گاه گیردار		تکیه‌گاه ساده	
	تحقیق حاضر	مرجع [۱۷]	تحقیق حاضر	مرجع [۱۷]
۱	۰/۴۳۶۳	۰/۴۳۶۲	۰/۳۵۱۲	۰/۳۵۰۹
۲	۰/۳۰۶۱	۰/۳۰۶۰	۰/۱۲۸۲	۰/۱۲۷۷
۳	۰/۲۳۶۱	۰/۲۳۵۶	۰/۰۶۵۹	۰/۰۶۴۱
۴	۰/۲۱۹۹	۰/۲۱۸۶	۰/۱۴۵۱	۰/۱۴۳۴
۵	۰/۲۱۹۲	۰/۲۱۶۲	۰/۱۸۱۵	۰/۱۷۸۳
۶	۰/۲۱۲۸	۰/۲۰۷۷	۰/۱۸۵۰	۰/۱۷۹۸

در شکل ۲ و ۳ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته مخروطی ساندویچی با شماره مود محیطی به ازای زوایای مختلف رأس مخروط به ترتیب در شرایط مرزی دو سرگیردار و ساده مشاهده می‌شود. با توجه به شکل ۲ و ۳، مشاهده می‌شود که فرکانس پایه در شماره مود محیطی پنج ($n=5$) اتفاق می‌افتد و همچنین با افزایش زاویه رأس مخروط، فرکانس طبیعی سیستم کاهش می‌یابد، ولی شماره مود فرکانس پایه تغییری نکرده و ثابت باقی می‌ماند. پوسته مخروطی ساندویچی که در این نمودار بررسی شده، دارای مشخصات نمونه مورد استفاده برای جدول ۱ است.



شکل ۲- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته مخروطی ساندویچی با شماره مود محیطی به ازای زوایای مختلف رأس مخروط در شرایط مرز دو سرگیردار



شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته مخروطی ساندویچی با شماره مود محیطی به ازای زوایای مختلف رأس مخروط در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده

جدول ۴- اعتبار سنجی فرکانس طبیعی (بر حسب هر تیز)

در پوسته کوپل مخروطی-مخروطی ساندویچی
($h=5\text{mm}$, $t=2\text{mm}$, $L_1=1\text{m}$, $L_2=1\text{m}$, $R_1=0.5\text{m}$, $\alpha_1=10^\circ$,
 $\alpha_2=5^\circ$)

n	نرم افزار آباکوس	مقاله حاضر
۱	۴۲۱/۵۴	۴۳۶/۱۳
۲	۲۶۶/۱۹	۲۷۳/۹۷
۳	۱۸۹/۵۹	۱۹۳/۴۱
۴	۱۵۹/۷۷	۱۶۱/۱۰
۵	۱۶۵/۴۰	۱۶۵/۰۰
۶	۱۹۴/۳۹	۱۹۱/۵۱
۷	۲۳۷/۱۷	۲۳۰/۴۶
۸	۲۹۲/۴۵	۲۸۱/۸۸
۹	۳۵۹/۱۸	۳۴۴/۴۰
۱۰	۴۳۶/۳۴	۴۱۶/۲۰

جدول ۵- خواص مکانیکی مواد مختلف به عنوان هسته

ساندویچ پنل

$\rho(\frac{kg}{m^3})$	G(GPa)	E(GPa)	
۶۴۶	۰/۹۶	۲/۳	پلی اتراکتون (PEEK)
۶۷۹	۰/۶۸	۱/۶	پلی کربنات (PC)
۹۰۰	۰/۴۳۵	۱	پلی پروپیلن جامد (SPP)
۵۰۰	۰/۲۲	۰/۵	فوم پلی آمید (HDPF)

فرق دارد. علت این امر، تقابل بین شرایط مرزی و سفتی پوسته است. با افزایش زاویه رأس مخروط سفتی پوسته کاهش می‌یابد، اما در عین حال محیط سر پوسته بزرگ می‌شود و با اعمال شرایط مرزی غیر آزاد به آن، سفتی سیستم افزایش می‌یابد. همانطور که انتظار می‌رود، شرایط مرزی که تعداد بیشتری از درجات آزادی را محدود می‌کند، دارای مقدار فرکانس بیشتر است که در اینجا فرکانس در شرایط مرزی C-C بیشتر از S-C و S-C بیشتر از S-S و بیشتر از F-C است.

جدول ۶- پارامتر فرکانسی f برای پنج شماره مود محیطی اول در شرایط مرزی مختلف مربوط به پوسته استوانه ای - مخروطی به هم چسبیده با زاویه رأس مخروط متفاوت

$\alpha_1=60^\circ$	$\alpha_1=50^\circ$	$\alpha_1=40^\circ$	$\alpha_1=30^\circ$	$\alpha_1=20^\circ$	n	شرط مرزی
۰/۴۹۸	۰/۵۵۸	۰/۵۶۴	۰/۵۲۷	۰/۴۳۲	۱	C-C
۰/۴۱۲	۰/۴۳۹	۰/۴۲۸	۰/۳۷۸	۰/۲۷۴	۲	
۰/۳۵۹	۰/۳۷۰	۰/۳۴۹	۰/۲۸۹	۰/۱۹۰	۳	
۰/۳۳۰	۰/۳۲۷	۰/۲۹۹	۰/۲۴۰	۰/۱۵۹	۴	
۰/۳۰۹	۰/۳۰۳	۰/۲۸۳	۰/۲۳۲	۰/۱۷۱	۵	
۰/۳۵۹	۰/۳۵۴	۰/۳۳۱	۰/۲۹۳	۰/۲۳۰	۱	F-C
۰/۱۲۸	۰/۱۲۵	۰/۱۱۶	۰/۱۰۱	۰/۰۷۹	۲	
۰/۱۳۰	۰/۱۱۷	۰/۱۰۵	۰/۰۹۳	۰/۰۸۲	۳	
۰/۱۹۰	۰/۱۷۹	۰/۱۶۴	۰/۱۴۹	۰/۱۲۸	۴	
۰/۲۵۵	۰/۲۴۴	۰/۲۲۷	۰/۲۰۳	۰/۱۶۷	۵	
۰/۴۲۲	۰/۴۶۸	۰/۴۹۱	۰/۴۷۸	۰/۳۸۹	۱	S-S
۰/۳۸۳	۰/۴۰۹	۰/۳۹۹	۰/۳۴۷	۰/۲۳۶	۲	
۰/۳۳۷	۰/۳۴۶	۰/۳۲۳	۰/۲۶۱	۰/۱۶۰	۳	
۰/۳۰۶	۰/۳۰۱	۰/۲۷۴	۰/۲۱۶	۰/۱۴۳	۴	
۰/۲۷۵	۰/۲۷۱	۰/۲۵۸	۰/۲۱۷	۰/۱۶۶	۵	
۰/۴۴۲	۰/۵۲۲	۰/۵۵۱	۰/۵۲۲	۰/۴۲۷	۱	S-C
۰/۴۰۰	۰/۴۳۱	۰/۴۲۱	۰/۳۶۷	۰/۲۵۶	۲	
۰/۳۴۶	۰/۳۵۸	۰/۳۳۵	۰/۲۷۰	۰/۱۶۸	۳	
۰/۳۱۴	۰/۳۱۲	۰/۲۸۱	۰/۲۱۹۳	۰/۱۴۵	۴	
۰/۳۰۷	۰/۲۹۷	۰/۲۶۸	۰/۲۱۹۵	۰/۱۶۸	۵	

مشاهده می‌شود با افزایش زاویه و شماره مود، فرکانس طبیعی روند نزولی دارد و مقادیر آنها برای شرط مرزی ساده کمتر از گیردار است.

جدول ۷ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته مخروطی ساندویچی برای ۴ مود فرکانسی اول در زوایای مختلف رأس با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار را نشان می‌دهد که

در جدول ۸ فرکانس طبیعی پوسته کویل استوانه‌ای - بررسی شده است که تاثیر زاویه رأس مخروط روی فرکانس مخروطی ساندویچی برای ده مود ارتعاشی محیطی اول طبیعی بررسی شده است؛ به طوری که با افزایش زاویه رأس

جدول ۷- فرکانس طبیعی (بر حسب هرتز) برای چهار شماره مود محیطی اول در شرایط مرزی ساده و گیردار مربوط به پوسته مخروطی ساندویچی با زاویه رأس مخروط متفاوت

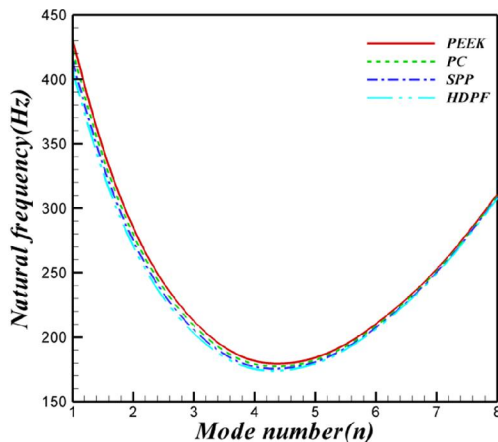
شرط مرزی	n	$\alpha_1=10^\circ$	$\alpha_1=20^\circ$	$\alpha_1=30^\circ$	$\alpha_1=40^\circ$	$\alpha_1=50^\circ$
C-C	۱	۳۷۴/۴	۳۵۴/۷	۳۱۸/۵	۲۶۸/۴	۲۱۳/۲
	۲	۲۳۲/۰	۲۲۶/۴	۲۱۱/۳	۱۸۷/۵	۱۵۶/۹
	۳	۱۵۸/۰	۱۵۶/۷	۱۴۸/۹	۱۳۴/۷	۱۱۵/۱
	۴	۱۲۵/۵	۱۲۰/۹	۱۱۴/۴	۱۰۴/۲	۹۰/۲
S-S	۱	۳۵۲/۲	۳۴۵/۲	۲۶۹/۸	۲۰۸/۵	۱۵۸/۲
	۲	۱۸۵/۶	۱۹۲/۵	۱۸۹/۲	۱۷۵/۴	۱۵۱/۱
	۳	۱۰۹/۲	۱۱۴/۳	۱۱۴/۲	۱۰۸/۰	۹۵/۷
	۴	۸۸/۴	۸۲/۷	۷۹/۴	۷۴/۳	۶۶/۰

جدول ۸- فرکانس طبیعی (بر حسب هرتز) برای ده شماره مود محیطی اول در شرایط مرزی دو سرگیردار مربوط به پوسته کویل استوانه ای - مخروطی ساندویچی با زاویه رأس مخروط متفاوت

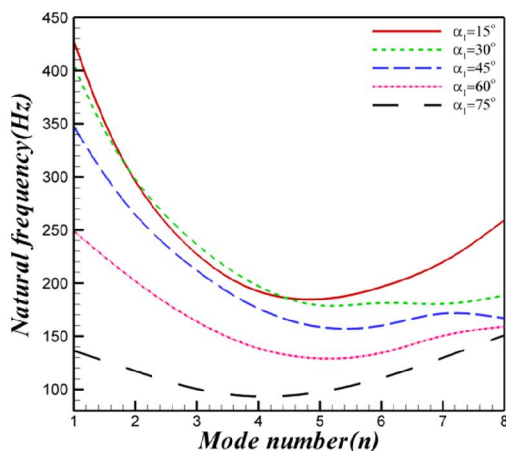
n	$\alpha_1=10^\circ$	$\alpha_1=20^\circ$	$\alpha_1=30^\circ$	$\alpha_1=40^\circ$
۱	۴۳۱/۱۹	۴۲۲/۲۹	۴۰۳/۵۶	۳۷۰/۵۵
۲	۲۸۵/۲۱	۳۰۱/۲۰	۲۹۷/۵۴	۲۷۸/۷۲
۳	۲۱۲/۵۶	۲۳۵/۳۱	۲۳۶/۴۰	۲۲۲/۹۵
۴	۱۸۱/۷۴	۱۹۷/۸۱	۱۹۷/۲۵	۱۸۵/۴۴
۵	۱۸۴/۱۵	۱۸۵/۰۰	۱۷۹/۳۱	۱۶۶/۸۸
۶	۲۱۰/۲۳	۱۸۹/۲۴	۱۸۱/۵۶	۱۶۸/۳۷
۷	۲۵۲/۵۴	۱۹۹/۹۷	۱۸۰/۶۹	۱۷۳/۴۲
۸	۳۱۰/۷۰	۲۲۵/۵۹	۱۸۸/۵۱	۱۷۱/۷۳
۹	۳۸۲/۰۳	۲۶۴/۳۴	۲۰۸/۵۴	۱۸۰/۶۴
۱۰	۴۶۴/۴۱	۳۱۳/۱۴	۲۳۸/۲۶	۱۹۸/۶۵

که علت آن غالب شدن اثر افزایش سفتی شرط مرزی پیوستگی بر کاهش سفتی پوسته است.

در شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی نسبت به شماره مود محیطی مختلف برای مقادیر مختلف ضخامت هسته ساندویچ پدل نمایش داده شده است. شکل ۶ نشان می‌دهد که در شماره مودهای پایین‌تر از چهار ضخامت کمتر هسته،



شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی با شماره مود محیطی به ازای جنس‌های مختلف هسته در شرایط مرز دوسرگیردار



شکل ۵- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی با شماره مود محیطی به ازای زوایای مختلف رأس مخروط در شرایط مرز دوسرگیردار

مخروط فرکانس طبیعی پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی کاهش می‌یابد. در مورد تغییر فرکانس طبیعی نسبت به شماره مود مشاهده می‌شود که با افزایش شماره مود فرکانس طبیعی ابتدا روند نزولی دارد و سپس از یک شماره مود به بعد روند تغییرات فرکانس طبیعی صعودی می‌شود. شماره مود تغییر روند نزول فرکانس طبیعی و تبدیل آن به روند افزایشی (مود پایه) در جدول زیر برای زاویه مخروط ده درجه عدد چهار و برای بقیه زوایای موجود در جدول عدد پنج را نشان می‌دهد.

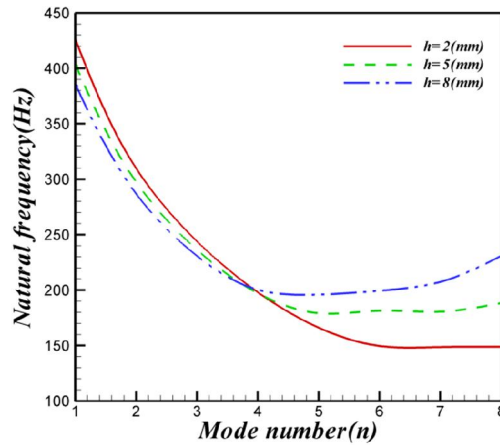
در شکل ۴ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی نسبت به شماره مود محیطی مختلف برای جنس‌های مختلف هسته ساندویچ پدل نمایش داده شده است. از نمودار شکل ۴ می‌توان دریافت که اختلاف فرکانس طبیعی بین مواد مختلف هسته ساندویچ پدل در مودهای محیطی بالاتر از مود پایه، کاهش می‌یابد. بالاترین فرکانس طبیعی مربوط به پوسته با هسته PEEK است که علت آن مدول الاستیسیته بالاتر این ماده نسبت به دیگر مواد هسته است. البته چگالی این ماده در قیاس با HDPF بیشتر می‌باشد که تاثیر منفی آن در کاهش فرکانس محسوس نیست. در تمامی شکل‌های ۲ تا ۴، تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب شماره مود محیطی ابتدا نزولی و سپس صعودی می‌باشد. علت این امر آن است که در پوسته‌های مخروطی با نسبت طول به شعاع نه چندان بزرگ، کمترین انرژی لازم برای رسیدن به شکل مودهای فرکانسی در مودهای محیطی کوچک و بزرگ بیشتر از مودهای میانی است؛ بنابراین در تمامی اشکال یک نقطه کمینه مشاهده می‌شود که در آن مود، پوسته کمترین سختی را از خود نشان می‌دهد.

در شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی نسبت به شماره مود محیطی مختلف برای زوایای مختلف رأس پوسته مخروطی نمایش داده شده است. شکل ۵ نشان می‌دهد که با افزایش زاویه رأس مخروط فرکانس طبیعی در تمام شماره مودها کاهش می‌یابد که علت آن کاهش سفتی پوسته با افزایش زاویه رأس است. فقط در زاویه رأس ۳۰ درجه نسبت به ۱۵ درجه در برخی شکل مودها افزایش فرکانس دیده می‌شود

۴- نتیجه گیری

در این تحقیق، ارتعاشات آزاد پوسته کوپل مخروطی-مخروطی-مخروطی ساندویچی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حرکت مستخرج، به کمک روش تفاضل مربعات حل و فرکانس طبیعی ارائه شده است. اثرات جنس هسته، شرایط مرزی و پارامترهای هندسی روی فرکانس طبیعی پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور صحت‌سنجی نتایج برای پوسته استوانه‌ای-مخروطی و مخروطی-مخروطی ایزوتروپ از مراجع [۱۳-۱۷] و برای پوسته مخروطی ساندویچی از مراجع [۴] و [۶] و همچنین برای پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی از مقایسه با نرم افزار آباکوس استفاده گردیده است. اهم نتایج عبارتند از:

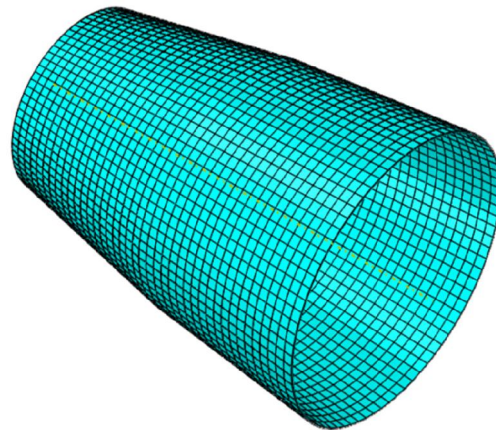
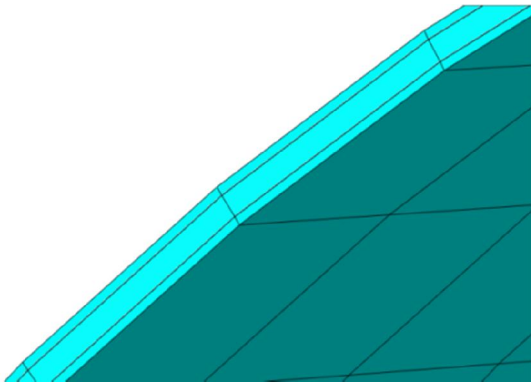
۱. بررسی نتایج، این اطمینان را ایجاد می‌کند که روش تفاضل مربعات از کارآمدی مناسبی برای تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی-مخروطی ساندویچی برخوردار است و امکان استفاده از این روش برای شرایط مرزی غیر کلاسیک را فراهم می‌کند که روش‌هایی نظیر گالرکین در آن ناکارآمد است.



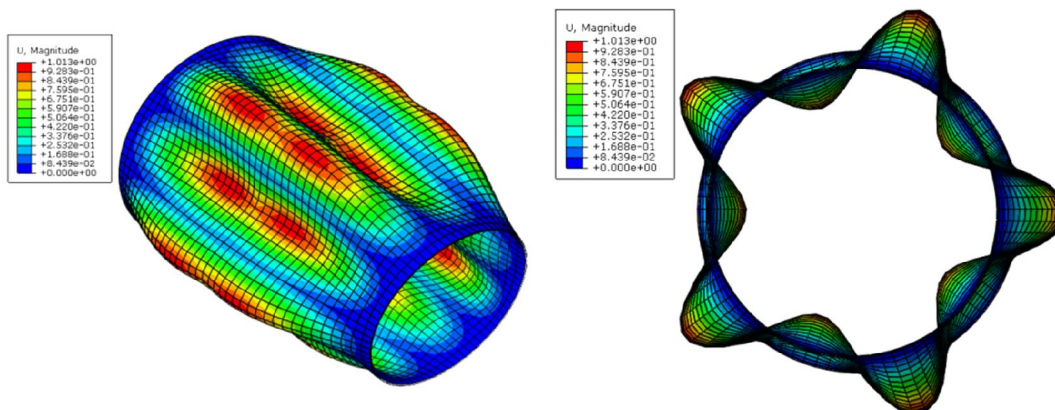
شکل ۶- تغییرات فرکانس طبیعی پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی با شماره مود محیطی به ازای ضخامت مختلف هسته در شرایط مرز دوسرگبردار

باعث ایجاد فرکانس طبیعی بیشتر می‌شود و در شماره مودهای بیشتر از چهار ضخامت بیشتر هسته، باعث ایجاد فرکانس طبیعی بیشتر می‌شود که علت آن تقابل بین وزن و سفتی با افزایش ضخامت در مودهای مختلف است.

در شکل ۷ و ۸ به عنوان نمونه، مش‌بندی و شکل مود پوسته استوانه‌ای-مخروطی مدل شده، در نرم‌افزار آباکوس آورده شده است.



شکل ۷- نمونه‌ای از پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی مدل شده در نرم‌افزار آباکوس و مش بندی بزرگ نمایی شده



شکل ۸- شکل مود پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی در نرم‌افزار آباکوس

۲. در پوسته‌های مخروطی ساندویچی با زاویه راس کمتر از ۴۵ درجه، با افزایش شماره مود محیطی، فرکانس طبیعی ابتدا روند کاهشی و سپس روند افزایشی به خود می‌گیرد. در زوایای بالاتر، بیش از یک نقطه ایتیمم مشاهده می‌شود.
۳. پوسته کوپل مخروطی-مخروطی ساندویچی با رویه آلومینیوم و هسته با جنس پلی‌اتراکتون (PEEK) دارای بالاترین فرکانس و هسته با جنس فوم پلی‌آمید با چگالی بالا (HDPF) دارای کمترین فرکانس طبیعی است که با افزایش شماره مود محیطی تاثیر جنس هسته بر فرکانس کاهش می‌یابد.
۴. با افزایش زاویه رأس در قسمت مخروطی پوسته استوانه‌ای-مخروطی، مقدار فرکانس ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد؛ اما این امر استثنائاتی هم دارد که در نمودارها و جداول مربوطه مشخص است.
۵. در مورد پوسته کوپل استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی در شماره مدهای پایین‌تر از چهار، ضخامت کمتر هسته باعث ایجاد فرکانس طبیعی بیشتر می‌شود و در شماره مدهای بیشتر از چهار، اثر برعکس مشاهده می‌شود.
- ۵- مراجع

[1] Ashenai Ghasemi F, Malekzadeh Fard K, Khalili MA (2015) dynamic response of curved sandwich

- joined cylindrical-conical shells. *J Vib control* 19(16): 2319-2334.
- [17] Bagheri H, Kiani Y, Eslami MR (2017) Free vibration of joined conical-conical shells. *Thin Wall Struct* 120: 446-457.
- [18] Mohammadimehr M, Ghorbanpour Arani A, Rousta Navi B (2015) Free vibration of the cylindrical panel made of functionally graded materials resting on pasternak elastic foundation subjected to magnetic fields using first order shear deformation theory. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 5(1): 149-163. (in Persian)
- [19] Gray AK, Khare RK, Kant T (2006) Higher-order closed-form solutions for free vibration of laminated composite and sandwich shells. *J Sandwich Struct Mater* 8: 205-35.
- [20] An C, Duan M, Estefen S (2013) Collapse and buckle propagation of sandwich pipes: A review. ASME, 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering.
- [21] Makvandi H, Moradi S, Poorveis D, Heidari Shirazi K (2019) Study on free vibration of buckled cracked plates using differential quadrature element method. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(4): 67-83. (in Persian)
- [10] Tornabene F (2009) Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures with a four-parameter power-law distribution. *Comput Methods Appl Mech Eng* 198(37-40): 2911-2935.
- [11] Lopatin AV, Morozov EV (2015) Buckling of the composite sandwich cylindrical shell with clamped ends under uniform external pressure. *Compos Struct* 122: 209-216.
- [12] Hoseini M, Talebitooti M (2016) Buckling analysis of moderately thick composite conical shells using Galerkin and DQ methods. *Modares Mechanical Engineering* 15(12): 367-375 (in Persian).
- [13] Irie T, Yamada G, Muramoto Y (1984) Free vibration of joined conical-cylindrical shells. *J Sound Vib* 95(1): 31-39.
- [14] Efraim E, Eisenberger M (2006) Exact vibration frequencies of segmented axisymmetric shells. *Thin Wall Struct* 44(3): 281-289.
- [15] Caresta M, Kessissoglou NJ (2010) Free vibrational characteristics of isotropic coupled cylindrical-conical shells. *J Sound Vib* 329(6): 733-751.
- [16] Qu Y, Chen Y, Long X, Hua H, Meng G (2013) A variational method for free vibration analysis of