



## کاربرد تجزیه مقدار تکین در روش ترکیب مودهای مؤلفه‌ها با رویکرد تجربی در مدل ورق

سید علی حسینی کوردخیلی<sup>۱\*</sup> و سید حسن مومنی ماسوله<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا دانشگاه شریف

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا دانشگاه شریف

### چکیده

در این مقاله به مشکلات عددی ناشی از انتخاب مختصات مناسب مدل مودال برای شرکت در فرآیند کوپلینگ با رویکرد تجربی پرداخته می‌شود. برای این منظور ابتدا روش ترکیب مودهای مؤلفه‌ها (CMS) سطح مشترک آزاد برای توضیح روش کوپلینگ با استفاده از داده‌های تجربی بیان می‌شود. سپس خطای عددی افزونگی مدل مودال شرح داده می‌شود. در ادامه تجزیه مقدار تکین به عنوان یک ابزار ریاضی قدرتمند برای تشخیص مختصات مناسب جهت شرکت در فرآیند کوپلینگ مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین یک الگوریتم انتخاب مختصات برای جلوگیری از بروز خطای افزونگی مدل مودال معرفی شده است. در پایان میزان تأثیر این روش‌ها و محدودیت‌های آن‌ها با استفاده از دو مدل پیوسته نوار باریک و ورق و یک مدل تجربی ورق سنجیده شده است. شایان ذکر است به‌کارگیری روش تجزیه مقدار تکین روی داده‌های تجربی مدل ورق با مود صلب در فعالیت‌های پیش از این مشاهده نشده است. به علاوه مشکل افزونگی مدل مودال در ورق به خوبی نمایان است و می‌توان تأثیر روش‌های به کار گرفته شده را برای کاهش خطای افزونگی مدل مودال مشاهده نمود.

**کلمات کلیدی:** تفکیک سازه؛ تجزیه مقدار تکین؛ ترکیب مودهای مؤلفه‌ها؛ روش‌های تجربی؛ مدل ورق.

## Application of singular value decomposition in component mode synthesis with experimentally approach

S. A. Hosseini Kordkheili<sup>1\*</sup> and S. H. Momeni Massouleh<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Assist. Prof., Aerospace Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran

<sup>2</sup> Ph.D. Student, Aerospace Eng., Sharif Univ. of Tech., Tehran, Iran

### Abstract

Numerical problems due to selection of proper modal coordinates which participate in coupling procedure with experimentally approach were discussed in this paper. For this purpose, free interface component mode synthesis (CMS) method is described as a coupling approach that utilizes experimentally data, firstly. Then, redundancy in modal model is expressed. Afterward, to recognize proper modal coordinates that required in coupling process, singular value decomposition is used as a powerful mathematical tool. In addition, to decrease the redundancy errors an algorithm is employed that eliminates extra degrees of freedom (DOFs). Finally, using two continues model (strip of sheet and plate) and one empirical plate model, the efficacy of these methods and their eliminations are estimated. Modal redundancy errors are evident well in plates and effects of methods which employed to decrease these errors can be observed, easily.

**Keywords:** Structural decomposition; Singular value decomposition; Component mode synthesis; Experimentally methods; Plate model.

ها به خاطر مزایای خود محبوبیتشان را از دست نداده‌اند. به علاوه همانطور که اشاره شد، در روش‌های تجربی هنوز یا امکان تست سازه‌های بزرگ و پیچیده وجود ندارد و یا بسیار هزینه بر است.

برخی مزایای مهم زیرسازه کردن یک سازه عبارت است از [۱]:

- امکان ارزیابی رفتار دینامیکی سازه‌های بزرگ با استفاده از روش‌های تحلیلی و تجربی
- امکان بررسی بهتر رفتار دینامیکی محلی در هر زیرسازه
- کاهش زمان محاسبه برای سیستم‌های تحلیلی
- امکان ترکیب مدل‌های تحلیلی با تجربی
- امکان محاسبه همزمان زیرسازه‌ها توسط گروه‌های مختلف
- و ...

از طرفی باید دانست که در طی ترکیب خواص مودال زیرسازه‌ها به خاطر وجود منابع خطا خصوصاً هنگام استفاده از داده‌های تجربی، نتایج حاصل جفت شدگی زیرسازه‌ها با نتایج واقعی سازه اصلی دارای اختلاف است. برخی از این منابع خطا عبارتند از: خطای برش، دینامیک اتصالات، درجات آزادی دورانی، مشکلات عددی و ... که را هکارهایی برای کاهش اثر برخی از این خطاها ارائه شده است [۲].

این مقاله به مشکلات عددی طی فرآیند کوپلینگ می‌پردازد. این مشکلات در فرآیند معکوس‌گیری بهتر و واضح‌تر دیده می‌شوند. چرا که در هنگام معکوس‌گیری در فرآیند کوپلینگ، هنگامی که ماتریس تکین<sup>۳</sup> یا نزدیک به تکین<sup>۴</sup> باشد، خواص دینامیکی پیش‌بینی شده برای سازه نهایی (ترکیب شده) بی معنی و دارای خطای زیادی است. البته در روش‌هایی از کوپلینگ که احتیاج به معکوس‌گیری ندارند، همچنان خطای عددی ناشی از این مشکلات باقی است.

برای ترکیب دو سازه پیوسته، به طور طبیعی انتظار بر این است که هرچه تعداد نقاط بیشتری از ناحیه اتصال، در فرآیند کوپلینگ شرکت داده شوند، نتایج بهتری بدست آید.

## ۱- مقدمه

در صنایع امروزی، برای تخمین بهتر پاسخ یک سازه در شرایط مختلف، به نتایج تحلیل دینامیکی آن نیاز است. تخمین صحیح پاسخ سازه منجر به طراحی‌هایی با کارایی بیشتر و افزایش طول عمر و راحتی محصولات شده و همچنین کاهش مصرف انرژی را در پی دارد. عموماً سازه‌های مهندسی به صورت مجموعه‌ای از چندین زیرسازه بوده که مدلسازی، تخمین پاسخ و بهینه‌سازی این مجموعه‌ها با مشکلات فراوانی همراه است. در واقع برای بسیاری از مسائل موجود، حل تحلیلی دقیقی برای بدست آوردن خواص دینامیکی سازه وجود ندارد. همچنین حل عددی سازه‌های مهندسی بزرگ شامل چندین زیرسازه بسیار مشکل و زمان‌بر است. بدست آوردن مشخصات دینامیکی سازه از طریق تجربی، برای سازه‌های بزرگ مقرون به صرفه نیست. چرا که چنین آزمایشی گذشته از تهیه نمونه تستی، احتیاج به تجهیزات تست زیادی دارد تا بتواند تمام سازه را پوشش دهد. این معایب با انجام تحلیل یک سازه با استفاده از تحلیل اجزای تشکیل دهنده آن تا حد زیادی برطرف می‌شود، ابتدا سازه‌ی اصلی را به چند زیرسازه تفکیک کرده و خواص دینامیکی هر زیر سازه بطور مستقل بدست می‌آید. سپس نتایج تحلیل تمام زیرسازه‌ها با هم ترکیب شده و ضمن اعمال اثرات متقابل آن‌ها بر یکدیگر خواص دینامیکی سازه‌ی اصلی استخراج می‌گردد. لازم به ذکر است که فرآیند استخراج خواص دینامیکی برای تک‌تک زیرسازه‌ها روند ساده‌تری داشته و دستیابی به نتایج دقیق‌تر برای این زیرسازه‌ها ساده‌تر است. به همین جهت برای بدست آوردن خواص دینامیکی سازه‌های مهندسی بزرگ، از روش‌های زیرسازه کردن<sup>۱</sup> دینامیکی آن‌ها استفاده می‌شود. اصطلاحاً به روش‌های زیرسازه کردن در حوزه مودال، روش جمع مؤلفه‌ها<sup>۲</sup> گفته می‌شود. CMS، زمانی مطرح شد که سیستم‌های محاسباتی کامپیوتری قادر به حل مسائل مقدار ویژه برای تعداد درجات آزادی زیاد نبودند و یا برای حل آن‌ها به زمان و هزینه بسیار زیادی احتیاج بود. اما با این حال، هم اکنون که قدرت پردازشگرها افزایش چشمگیری داشته است، هنوز این روش -

<sup>3</sup> Singular

<sup>4</sup> Near-singular

<sup>1</sup> Substructuring

<sup>2</sup> Component Mode Synthesis (CMS)

تأثیر این روش با استفاده از نتایج تحلیلی و تجربی سنجیده می‌شود. از آنجا که مشکل افزونگی مدل مودال در ورق به خوبی خود را نشان می‌دهد، مدل‌های انتخاب شده اعم از اجزای محدود و تجربی، ورق‌های مستطیل شکل در ابعاد مختلف هستند. نکته قابل توجه آن‌که، به دلیل پیچیدگی‌های به‌کارگیری روش تجزیه مقدار تکین روی مدل‌های پیوسته صفحه‌ای (نظیر ورق و پوسته)، کار مشابهی برای استفاده از داده‌های تجربی مدل ورق در فعالیت‌های پیش از این مشاهده نشده است. شایان ذکر است که مدل‌های به‌کار گرفته شده در این مقاله، دارای مودهای صلب هستند.

## ۲- روش CMS سطح مشترک آزاد

روش‌هایی که در آن‌ها، برای انتقال از فضای فیزیکی به مودال، از مودهای نرمال سطح مشترک آزاد استفاده شود، به روش‌های سطح مشترک آزاد مشهور می‌باشند. در جفت شدگی‌های مبتنی بر داده‌های تجربی نیز از این روش استفاده می‌گردد. در این بخش روش سطح مشترک آزاد مطرح شده توسط هو<sup>۵</sup> [۷] بیان می‌شود که نسبت به روش‌های مشابه از پیچیدگی کمتری برای بیان روند استخراج ماتریس انتقال برخوردار است. در اینجا فرض بر این است سیستم‌ها بدون میرایی هستند و به صورت صلب به یکدیگر متصل شده‌اند. همچنین از اثرات مودهای باقیمانده صرف نظر شده است. دو زیرسازه نامیرای A و B را در نظر گرفته که به صورت صلب به یکدیگر متصل هستند. درجات آزادی هر زیرسازه، به درجات آزادی داخلی،  $n_i$  و درجات آزادی مرزی،  $n_c$  دسته بندی می‌شوند. معادله تعادل هر زیرسازه در حوزه فیزیکی با فرض آن که به درجات آزادی داخلی، نیرویی وارد نمی‌شود به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ic} \\ M_{ci} & M_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ic} \\ K_{ci} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_c \end{Bmatrix} \quad (1)$$

برای هر زیرسازه، مودهای نرمال با قرار دادن نیروهای مرزی  $f_c$ ، برابر با صفر و حل معادله مقدار ویژه زیر محاسبه می‌شود:

ولی در واقعیت چنین چیزی نیست. چون هر درجه آزادی جدیدی که به ماتریس اطلاعات درجات آزادی اتصال افزوده می‌گردد، لزوماً اطلاعات جدیدی نمی‌دهد و در عوض ماتریس را تکین یا نزدیک به تکین می‌سازد. این مطلب، موجب می‌شود که در نتایج کوپلینگ، خصوصاً در فرکانس‌های پایین خطای بسیار زیادی مشاهده شود. به طور کلی، هر چه افزونگی در مختصات شرکت داده شده در فرآیند کوپلینگ بیشتر باشد، جواب‌ها نامطلوب‌تر شده و در نهایت به کلی بی‌معنی می‌شوند.

برای رفع این مشکل عددی، باید قبل از فرآیند کوپلینگ، درجات آزادی اضافه حذف گردند. اما خود این کار ممکن است موجب خطا گردد. چرا که امکان دارد آن دسته‌ای از درجات آزادی مربوط نقاط اتصال حذف شوند که تأثیر بیشتر و مهمتری داشته و نتایج کوپلینگ با آن درجات آزادی از دقت بالا تری برخوردار می‌شد. برای این منظور، باید یک الگوریتم قدرتمند مورد استفاده قرار گیرد تا درجات آزادی را به ترتیب اولویت دسته بندی و انتخاب کند. یکی از ابزارهای مهمی که برای این منظور استفاده می‌شود، تجزیه مقدار تکین<sup>۱</sup> است که در تحقیقات آماری و کنترل سیستم کاربرد فراوانی دارد. SVD، نه تنها مرتبه<sup>۲</sup> یک ماتریس را معین می‌کند، بلکه فارغ از این که ماتریس تکین است یا نه، برای بدست آوردن معکوس آن نیز کاربرد دارد. اورگویرا<sup>۳</sup> [۳] در فعالیت‌های خودبه این روش پرداخته شده و ابعاد آن را تا حدی مورد بحث قرار داده است. بلیمز<sup>۴</sup> [۴]، با استفاده از روش‌های عددی و بردار ریلی-ریتز (و نه مودهای نرمال) برای مدل ورق بدون مود صلب از SVD استفاده نموده است. استفاده از روش‌های عددی یا روش‌های مشابه الگوریتم مورد نظر بر روی مدل‌های عددی در برخی فعالیت‌ها مشاهده شده است [۵ و ۶]. در این مقاله ابتدا روش CMS سطح مشترک آزاد برای استفاده از داده‌های تجربی بیان گردیده و سپس به خطای عددی افزونگی مدل مودال اشاره شده است. در ادامه ابزار ریاضی مورد نیاز و روش انتخاب مختصات مستقل برای کاهش اثرات خطای عددی معرفی شده است. در پایان میزان

<sup>1</sup> Singular Value Decomposition (SVD)

<sup>2</sup> Rank

<sup>3</sup> Urgueira

<sup>4</sup> Balmès

<sup>5</sup> Hou

که  $S_d$  یک ماتریس مربعی غیر تکین و  $S_i$  قسمت باقیمانده ماتریس  $S$  است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} A P \\ B P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_d \\ P_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_d^{-1} \\ I \end{bmatrix} \{p_i\} = [T] \{q\} \quad (12)$$

### ۳- افزودگی در مدل مودال

فرض می‌شود که برای یک سازه، اطلاعات مودال  $m_k$  موجود در بازه فرکانسی مورد بررسی، اندازه‌گیری شده باشد. ماتریس مودال تفکیک شده به مختصات داخلی و مرزی به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ - \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{ik} \\ - \\ \phi_{ck} \end{Bmatrix} \{p_k\} \quad (13)$$

ممکن است که برخی سطرهای ماتریس مودال در رابطه (۱۳) (برخی درجات آزادی) با توجه به بازه فرکانسی اندازه‌گیری شده، تقریباً به یکدیگر وابسته باشند. به عنوان مثال فرض می‌شود که سطرهای ۱ تا ۳ در ماتریس  $[\phi_{ck}]$  به صورت خطی تا حدی به یکدیگر وابسته باشند.

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{nc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1k} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2k} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \cdots & \phi_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n,1} & \phi_{n,2} & \cdots & \phi_{n,k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_k \end{Bmatrix} \quad (14)$$

اگر تعداد مودهای موجود در بازه اندازه‌گیری کاهش یابد (مثلاً به ۳ مود)، این وابستگی افزایش خواهد یافت. بنابر این لازم است از یک ابزار ریاضی برای شناسایی این دسته از مختصات وابسته به هم، قبل از شرکت در فرآیند کولپینگ استفاده شود. به علاوه استفاده از یک معیار برای تعیین نقص مرتبه<sup>۱</sup> ماتریس قبل از انجام فرآیند کولپینگ ضروری به نظر می‌رسد.

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{u\} = \{0\} \quad (2)$$

بفرض آنکه مودها نسبت به جرم نرمال شده‌اند و با توجه به خاصیت تعامدشان نسبت به جرم و سختی نتیجه می‌شود:

$$[\phi_a]^T [M] [\phi_a] = [I] \quad (3)$$

$$[\phi_a]^T [K] [\phi_a] = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (4)$$

به وسیله این شکل مودهای متعامد، می‌توان هر بردار جابجایی در فضای فیزیکی را به فضای مودال منتقل کرد و به مختصات جدید، مختصات مودال یا مختصات تعمیم یافته گفته می‌شود و مؤلفه‌های آن عبارتند از ضرایب شکل مودهای تشکیل دهنده ترکیب خطی بردار جابجایی:

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ X_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{ia} \\ \phi_{ca} \end{Bmatrix} \{p_a\} = [\phi_a] \{p_a\} \quad (5)$$

اگر  $m$  تعداد تمامی مودها باشد، رابطه (۵) کاملاً دقیق است اما اگر  $k$  مود اول در نظر گرفته شود جواب برای هر زیرسازه به صورت تقریب زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ X_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{ik} \\ \phi_{ck} \end{Bmatrix} \{p_k\} = [\phi_k] \{p_k\} \quad (6)$$

بنابراین معادله حرکت کل سازه را برای دو زیرسازه جدا از هم  $A$  و  $B$  می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$[I][I] \begin{Bmatrix} A \ddot{p}_k \\ B \ddot{p}_k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{diag}(A \omega_{rk}^2) & 0 \\ 0 & \text{diag}(B \omega_{rk}^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A p_k \\ B p_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A \phi_k^T & 0 \\ 0 & B \phi_k^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A f_c \\ B f_c \end{Bmatrix} \quad (7)$$

با نوشتن شرایط تعادل نیرویی و جابجایی می‌توان دو زیرسازه را به یکدیگر متصل نمود. این شرایط عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} A f_c \\ B f_c \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} B f_c \\ A f_c \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} A X_c \\ B X_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B X_c \\ A X_c \end{Bmatrix} \quad (9)$$

رابطه (۹) را در فضای مودال می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{bmatrix} A \phi_{ck} & \vdots & -B \phi_{ck} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A p_k \\ B p_k \end{Bmatrix} = [S] \{p\} = \{0\} \quad (10)$$

سپس برای کاهش بیشتر ماتریس  $S$  به دو قسمت دسته بندی می‌شود:

$$[S_d \quad \vdots \quad S_i] \begin{Bmatrix} P_d \\ P_i \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (11)$$

<sup>1</sup> Rank deficiency

۴- مرتبه و معکوس یک ماتریس

۴-۱- تجزیه مقدار تکین (SVD)

SVD، ابزار ریاضی جالب توجهی است که در مهندسی کنترل استفاده‌های فراوانی دارد. در اینجا این ابزار برای بدست آوردن مختصات مناسب (یا تشخیص مختصات اضافی) و همچنین محاسبه معکوس یک ماتریس مرتبه ناقص به کار می‌رود.

SVD، برای به حداقل رساندن خطاهای محاسباتی در طی کار با ماتریس‌های با ابعاد بزرگ ایجاد شد. SVD یک ماتریس حقیقی مثل  $[A]$ ، سه ماتریس را نتیجه می‌دهد که به صورت زیر به یکدیگر مرتبطند:

$$[A]_{m \times n} = [U]_{m \times m} \begin{bmatrix} \Sigma & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} [V]_{n \times n}^T \quad (15)$$

شرح مختصری در مورد هر یک از سه ماتریس فوق به صورت زیر است:

$[U]_{m \times m}$ ، ماتریس متعامد یکه که بردارهای تکین چپ<sup>۱</sup> را شامل می‌شود. ماتریس

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \cdot & & & \\ & \Sigma & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ماتریس قطری که مقادیر تکین<sup>۲</sup> نامیده می‌شود و به صورت زیر مرتب شده است:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

$[V]_{n \times n}$ ، ماتریس متعامد یکه که بردارهای تکین راست<sup>۳</sup> را تشکیل می‌دهد.

هر دو ماتریس  $[U]$  و  $[V]$ ، دارای بردارهای با اندازه واحد بوده و در هر ماتریس، هر بردار بر تمامی بردارهای دیگر آن ماتریس عمود است. در واقع  $[U]$  و  $[V]$ ، یک چرخش مختصات ساده را نمایش می‌دهند، لذا می‌توان نوشت:

$$[U]^T [U] = [U][U]^T = [I]_{m \times m} \quad (16)$$

$$[V]^T [V] = [V][V]^T = [I]_{n \times n} \quad (17)$$

هرچند SVD، برای محاسبه مرتبه و حالت یک ماتریس طراحی شد، ولی جنبه جالب SVD در فرآیند کولپینگ این است که وقتی SVD بر روی ماتریس معرف مشخصات یک زیر سیستم عمل می‌کند، مقادیر تکین و بردارهای تکین، دارای تفسیر فیزیکی هستند. فرض می‌شود که ماتریس‌های FRF و مودال یک زیرسازه، مختصات را به ترتیب با نیرو و شکل مودها به صورت زیر مرتبط کرده‌اند:

$$\{x\}_{m \times 1} = [\alpha]_{m \times n} \{F\}_{n \times 1} \quad (18)$$

$$\{x\}_{m \times 1} = [\phi]_{m \times n} \{p\}_{n \times 1} \quad (19)$$

با اجرای SVD بر هر یک از ماتریس‌های FRF یا مودال،  $[U]$  و  $[V]$  دارای خواص زیر هستند:

$[U]_{m \times m}$ ، بردارهای تکین چپ، که مناسب‌ترین مختصات را برای نمایش پاسخ معرفی می‌کند. بدین ترتیب که اولین بردار تکین  $\{u_1\}$ ، آسان‌ترین جهتی است که سیستم می‌تواند در آن تغییر کند. دومین بردار تکین  $\{u_2\}$ ، آسان‌ترین جهت بعدی و الی آخر.

$[V]_{n \times n}$ ، بردارهای تکین راست، که مناسب‌ترین مختصات را برای نمایش نیروها (یا مودها) نمایش می‌دهند. اولین بردار تکین  $\{v_1\}$ ، ترکیبی از نیروها (یا مودها) را نمایش می‌دهد که بیشترین اثر را بر سیستم دارند.  $\{v_2\}$ ، مؤثرترین ترکیب بعدی است و به همین ترتیب برای بقیه بردارها.

۴-۲- انحطاط مرتبه<sup>۴</sup>

مرتبه یک ماتریس تعداد سطرهای (و ستون‌های) مستقل خطی آن ماتریس است. به طور کلی نیز تصدیق شده که SVD، ابزار قابل اطمینانی برای محاسبه عددی مرتبه یک ماتریس است. اما هنوز مشکل دیگری در محاسبه مرتبه ماتریس وجود دارد. برای یک ماتریس مثل  $[A]_{m \times n}$  با مرتبه  $r$  ( $r < n$ )، فرض می‌شود که بعضی درایه‌ها دچار خطا شوند (مثل خطای اندازه گیری یا خطای گرد کردن). بعید به نظر می‌رسد که پس از وارد شدن خطا مرتبه ماتریس  $r$  باقی

<sup>1</sup> Left singular vectors

<sup>2</sup> Singular values

<sup>3</sup> Right singular vectors

<sup>4</sup> Rank degeneracy

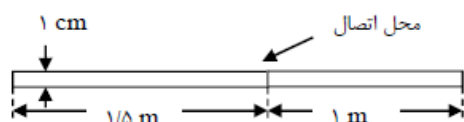


از ماتریس  $[U]$  و  $[V]$  (در مرحله ب) استفاده شود. ولی اورگوریا [۳] در برخی مثال‌ها نشان داده که  $[U]$  و  $[V]$  برای انتخاب سطرها و ستون‌های مستقل بهترین جواب را نمی‌دهند. در عوض پیشنهاد کرده است که برای انتخاب سطرها و ستون‌های مستقل به ترتیب از  $[U_1][U_1]^T$  و  $[V_1][V_1]^T$  استفاده گردد (روابط (۲۳)، (۲۴) و (۲۵)).

هرچند به نظر می‌رسد این الگوریتم برای انتخاب مناسب است، ولی معایبی نیز دارد. نخست آن که مختصات مستقل دو زیرسازه نامتقارن با یکدیگر منطبق نباشند. این مشکل در کوپلینگ پاسخ، بیشتر به چشم می‌خورد، هر چند که در کوپلینگ مودال نیز خطا ایجاد می‌نماید. راه حل پیشنهادی برای رفع این مشکل، این است که در مواردی که مختصات مستقل با یکدیگر منطبق نیستند بدون توجه به روش انتخاب مختصات، از SVD برای مواردی که احتیاج به معکوس‌گیری دارد استفاده شود. البته در این‌جا مشکل زمانبر بودن محاسبات در مورد کوپلینگ پاسخ مطرح می‌گردد. چرا که در کوپلینگ پاسخ فرآیند معکوس‌گیری در هر فرکانس به طور مجزا باید انجام پذیرد و SVD نیز از معکوس‌گیری معمول زمانبرتر است. برای کوپلینگ مودال اورگوریا پیشنهاد می‌کند که استفاده تنها از SVD برای معکوس‌گیری کافی است. اما در کل بهتر است که برای کوپلینگ مودال نیز مختصات به گونه‌ای انتخاب شوند که ماتریس معکوس‌شونده یک ماتریس تکین نباشد.

#### ۶- بررسی نمونه

در این قسمت با توجه به مطالب بیان شده برای پرداختن به مدل ورق، ابتدا از یک باریکه (نوار) به عنوان زیرسازه استفاده می‌گردد. باریکه تا حدودی شرایط تیر را داراست. نمونه اول را ۲ نوار فولادی ۱ متری و ۱/۵ متری تشکیل می‌دهند. عرض نوارها ۱ سانتی متر و ضخامتشان ۲/۵ میلی متر است. دو نوار با اتصال به یکدیگر مطابق شکل ۱ سازه اصلی را تشکیل می‌دهند.



شکل ۱- نحوه اتصال دو نوار

ماتریس  $[A]$  به خطای اندکی آغشته باشد). سؤالی که مطرح است این است که آیا می‌توان مجموعه‌ای از ستون‌های مستقل خطی از ماتریس  $[A]$  یافت که تقریب خوبی از ستون‌های فضای ماتریس  $[A_r]$  را بیان کنند؟ در واقع منظور این است که مقادیر تکین کوچک که در اثر خطاهای موجود در ماتریس به وجود آمدند، حذف شوند و اثرات نویز با جایگزینی  $[A_r]$  به جای  $[A]$  از بین برود. از نظر ریاضی این کار برای از بین بردن انحطاط مرتبه ماتریس (که به آن اشاره شد) صورت می‌گیرد. الگوریتم ارائه شده چگونگی انتخاب این ستون‌های مستقل را بیان می‌کند.

گلوب، کِلما و استوارت<sup>۱</sup> [۹] راه حلی را با عنوان «دسته بندی QR با جایگشت ستون‌ها»<sup>۲</sup> ارائه دادند (پیوست ب). مراحل اصلی انتخاب این ستون‌ها به شکل زیر است:

الف) محاسبه SVD ماتریس  $[A]$  و استفاده از آن برای تعیین مرتبه  $r$ .

ب) دسته بندی ماتریس  $V$  (بردارهای تکین راست) به

$$\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$

شکل روبرو:  $r \quad n-r$

ج) استفاده از الگوریتم QR با جایگشت ستون‌ها برای

ستون‌های متناظر با مقادیر تکین بزرگتر یا مساوی  $\sigma_r$ :

$$[V_{11}^T \quad V_{21}^T]_{r \times n} = [Q]_{r \times r} [R_{11} \quad R_{12}] [P]_{n \times n}^T \quad (30)$$

اگر ترانهاده استفاده نشود، اندازه ماتریس  $[P]$ ،  $r$  خواهد بود نه  $n$ .

د) در نهایت برای مرتب سازی ستون‌ها، ماتریس جایگشت  $[P]$  بر ماتریس  $[A]$  اثر می‌کند:

$$[A]_{m \times n} [P]_{n \times n} = [B_1 \quad B_2] \quad \begin{matrix} r & n-r \end{matrix} \quad (31)$$

ماتریس  $[B_1]$ ، دارای ستون‌های تقریباً مستقل ماتریس  $[A]$  است.

کِلما و لاوب<sup>۳</sup> [۱۰]، پیشنهاد کردند که برای بدست آوردن سطرها و ستون‌های مستقل ماتریس  $[A]$ ، به ترتیب

<sup>1</sup> Golub, Klema and Stewart

<sup>2</sup> QR factorization with column pivoting

<sup>3</sup> Klema and Laub

آزادی دورانی درجه‌ها مختلف). در این حالت مقادیر تکین قسمت معکوس شونده ( $S_h$ ) به صورت زیر است:

$$\Sigma = [784.473 \quad 23.878 \quad 4.105 \quad 7.103 \times 10^{-7}]$$

نتایج ۳ مود الاستیک اول کوپلینگ با نتایج سازه اصلی در جدول ۱ مقایسه شده است.

اکنون به جای ۴ درجه آزادی از ۳ درجه آزادی استفاده می‌گردد. مقادیر تکین قسمت معکوس شونده در این حالت مطابق زیر است:

$$\Sigma = [784.670 \quad 8.832 \quad 2.011]$$

جدول ۲ نتایج کوپلینگ را با ۴ درجه آزادی نمایش می‌دهد.

جدول ۱- مقایسه ۵ فرکانس اول نتایج کوپلینگ (۳ درجه آزادی) با نتایج اجزای محدود

مود	اجزای محدود	CMS با استفاده از SVD	خطا %
۱	۲/۰۸	۲/۱۴	۲/۵۹
۲	۵/۷۴	۵/۸۲	۱/۳۰
۳	۱۱/۲۷	۱۱/۳۴	۰/۶۱
۴	۱۸/۶۵	۱۹/۰۸	۲/۳۴
۵	۲۷/۹۰	۲۷/۹۶	۰/۲۳

جدول ۲- مقایسه ۵ فرکانس اول نتایج کوپلینگ (۴ درجه آزادی) با نتایج اجزای محدود

مود	اجزای محدود	CMS با استفاده از SVD	خطا %
۱	۲/۰۸	۲/۱۴	۲/۵۹
۲	۵/۷۴	۵/۸۲	۱/۳۰
۳	۱۱/۲۷	۱۱/۳۴	۰/۶۱
۴	۱۸/۶۵	۱۹/۰۸	۲/۳۴
۵	۲۷/۹۰	۲۷/۹۶	۰/۲۳

همانطور که مشخص است جواب‌های کوپلینگ با ۴ و ۳ درجه آزادی با یکدیگر مطابقت دارند، لذا در ۴ درجه آزادی یک درجه آزادی اضافی بوده که البته خطایی هم در نتایج وارد نکرده است. اگر ۵ درجه آزادی برای کوپلینگ استفاده شود، در صورت انتخاب نامناسب درجات آزادی ماتریس تکین می‌گردد. اگر درجات آزادی به گونه‌ای انتخاب شوند که از تکین شدن ماتریس  $S_h$  جلوگیری شود، نتایج کوپلینگ مطابق جدول ۳ خواهد بود.

باید توجه داشت که در ورق علاوه بر درجه آزادی جابجایی در جهت عمود بر صفحه ورق، دو درجه آزادی دورانی نیز وجود دارد. وجود این دو درجه آزادی باعث تشکیل مودهای خمشی، مودهای پیچشی و مودهای مرکب می‌شود. در زیرسازه ۱ متری علاوه بر مودهای خمشی، مودهای پیچشی نیز وجود دارد.

از آنجا که حل تحلیلی برای شرایط آزاد - آزاد ورق وجود ندارد، لذا برای دستیابی به اطلاعات مودال ورق از نرم افزار اجزای محدود انسیس استفاده می‌شود. برای مدلسازی نوع المان، شیل ۶۳<sup>۱</sup> تعیین می‌گردد. این المان نیروها و ممان‌های خمشی و غشایی<sup>۲</sup> را تحمل می‌کند. به عبارت دیگر اعمال تمام نیروهای داخل صفحه‌ای و عمود بر صفحه برای این المان مجاز است. هر گره این المان ۶ درجه آزادی دارد (۳ درجه آزادی جابجایی و ۳ درجه آزادی دورانی) و تغییر شکل‌های آن الاستیک است. در بررسی مدل ورق تنها از یک درجه آزادی جابجایی (عمود بر صفحه) و دو درجه آزادی دورانی (در جهت محورهای داخل صفحه) استفاده می‌شود. شبکه بندی المان‌ها نیز به حد کافی ریز انتخاب می‌گردد تا همگرایی مطلوب حاصل آید. در مرز دو زیرسازه ۶ گره (۱۸ درجه آزادی مشترک) با فاصله‌های یکسان وجود دارد.

با استفاده از آنالیز مودال فرکانس‌های طبیعی هر نوار و شکل مودها محاسبه می‌شوند. با اعمال تجزیه مقدار تکین (SVD) بر قسمت معکوس شونده ماتریس S در روش هو ( $S_h$ ) در رابطه (۱۱) مقادیر تکین به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\Sigma = [3327.813 \quad 1202.268 \quad 21.806 \quad 2.671 \quad 3.491 \times 10^{-1} \quad 3.15 \times 10^{-2} \quad 1.094 \times 10^{-2} \quad 1.460 \times 10^{-3} \quad 1.097 \times 10^{-4} \quad 9.322 \times 10^{-5} \quad 1.694 \times 10^{-5} \quad 7.006 \times 10^{-6} \quad 1.255 \times 10^{-6} \quad 5.192 \times 10^{-7} \quad 5.885 \times 10^{-14} \quad 3.91 \times 10^{-14} \quad 3.062 \times 10^{-15} \quad 9.668 \times 10^{-17}]$$

برای کوپلینگ دو زیرسازه، ۳ مود صلب و ۱۶ مود الاستیک از هر زیرسازه در کوپلینگ شرکت دارد. با توجه به معیار معرفی شده در روابط (۲۰) و (۲۱) مقدار  $\delta$  برابر است با ۱۹/۰۴، یعنی ۳ درجه آزادی برای شرکت در فرآیند کوپلینگ کافی است. ابتدا به جای ۳ درجه آزادی، ۴ درجه آزادی انتخاب می‌شود (۲ درجه آزادی جابجایی و ۲ درجه

<sup>1</sup> Shell 63

<sup>2</sup> Membrane



$$\Sigma = [9.719 \quad 8.222 \quad 6.918 \quad 5.875 \quad 2.832 \quad 1.632 \\ 8.445 \times 10^{-1} \quad 2.588 \times 10^{-2} \quad 6.662 \times 10^{-3} \quad 1.409 \times 10^{-3} \\ 5.513 \times 10^{-5}]$$

جدول ۴ نتایج کوپلینگ با ۱۱ درجه آزادی را نمایش می‌دهد.

جدول ۴- مقایسه ۵ فرکانس اول نتایج کوپلینگ با نتایج

مود	اجزای محدود	CMS با استفاده از SVD	خطا %
۱	۲/۶۲	۲/۸۹	۱۰/۴۴
۲	۳/۲۴	۳/۳۷	۴/۰۲
۳	۷/۱۳	۷/۳۸	۳/۴۲
۴	۷/۲۷	۷/۴۸	۲/۸۹
۵	۱۰/۷۳	۱۰/۶۸	۱/۱۷

از آنجا که در این مثال هر دو زیرسازه یکسانند، می‌توان از الگوریتم معرفی شده در بخش ۵ برای دستیابی به درجات آزادی مستقل استفاده نمود. در صورت استفاده از این الگوریتم، نتایج کوپلینگ به صورت جدول ۵ خواهد بود.

جدول ۵- مقایسه ۵ فرکانس اول نتایج کوپلینگ به روش

مود	اجزای محدود	CMS با استفاده از SVD	خطا %
۱	۲/۶۲	۲/۹۰	۱۱/۳۱
۲	۳/۲۴	۳/۳۵	۳/۲۵
۳	۷/۱۳	۷/۳۵	۳/۱۴
۴	۷/۲۷	۷/۳۸	۱/۵۰
۵	۱۰/۷۳	۱۰/۸۶	۱/۲۶

در این قسمت از دو ورق فولادی به عنوان زیر سازه استفاده می‌شود. ضخامت هر دو ورق ۳ میلی متر است. ابعاد ورق اول ۰/۳ در ۰/۴ متر و ابعاد ورق دوم ۰/۳ در ۰/۲ متر است. هر دو ورق از ضلع ۰/۳ متری به یکدیگر متصل شده و سازه اصلی را تشکیل می‌دهند. شکل ۳ نحوه آماده سازی تست را برای زیرسازه بزرگ و کوچک در شرایط آزاد-آزاد نمایش می‌دهد.

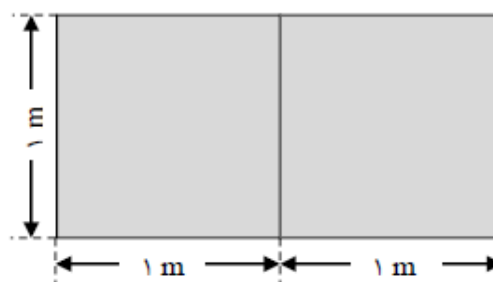
شکل ۴ مکان‌های ضربه چکش و محل قرارگیری سنسور را نمایش می‌دهد.

جدول ۳- مقایسه ۵ فرکانس اول نتایج کوپلینگ (۵درجه

مود	اجزای محدود	CMS با استفاده از SVD	خطا %
۱	۲/۰۸	۲/۶۸	۲۸/۶۳
۲	۵/۷۴	۵/۸۷	۲/۱۷
۳	۱۱/۲۷	۱۱/۷۳	۴/۱۱
۴	۱۸/۶۵	۱۹/۱۱	۲/۴۷
۵	۲۷/۹۰	۲۹/۴۸	۵/۶۶

دیده می‌شود که در این حالت خطا نسبت به حالت‌های قبلی افزایش یافته است.

در نمونه دوم، دو ورق فولادی مشابه مربعی شکل با اضلاع ۱ متر و ضخامت ۲ میلی متر مطابق شکل ۲ به یکدیگر متصل شده‌اند.



شکل ۲- نحوه اتصال دو ورق مربعی شکل

در مرز دو زیرسازه از اطلاعات ۲۱ گره با فواصل یکسان استفاده می‌شود. بنابراین اطلاعات ۶۳ درجه آزادی برای کوپلینگ در دسترس است. تعداد مودهای مورد استفاده ۳ مود صلب و ۲۴ مود الاستیک از هر زیرسازه است. پس از اعمال SVD بر قسمت معکوس شونده ماتریس قید درجات آزادی مشترک ( $S_d$ )، ۲۰ مقدار تکین نخست مطابق زیر است:

$$\Sigma = [50.471 \quad 50.311 \quad 47.987 \quad 42.544 \quad 41.013 \quad 39.914 \\ 11.460 \quad 10.783 \quad 7.890 \quad 3.784 \quad 2.585 \quad 6.945 \times 10^{-1} \\ 4.564 \times 10^{-1} \quad 2.501 \times 10^{-1} \quad 5.568 \times 10^{-2} \quad 2.298 \times 10^{-2} \\ 2.069 \times 10^{-2} \quad 1.007 \times 10^{-2} \quad 6.566 \times 10^{-3} \quad 1.118 \times 10^{-3}]$$

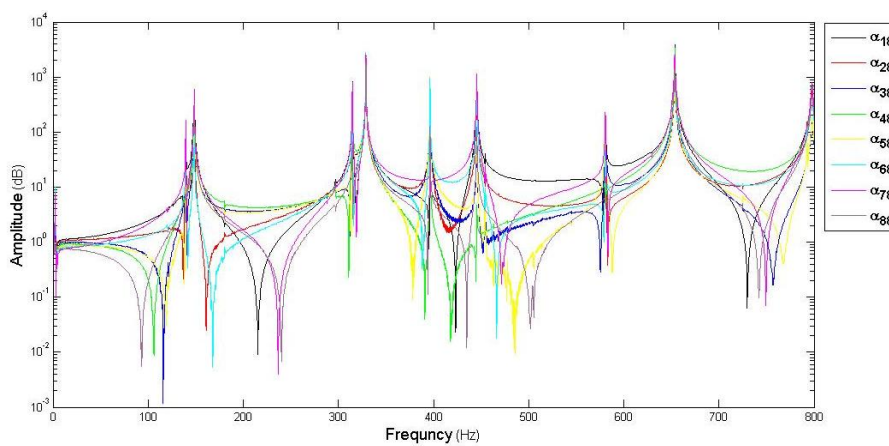
با استفاده از معیار رابطه (۴-۷) مقدار  $\delta$  برابر است با ۱۹/۰۴، که در این صورت ۱۱ درجه آزادی می‌توانند در کوپلینگ شرکت کنند. اطلاعات کامل سه گره (لبه‌ها و وسط) به همراه اطلاعات یک درجه آزادی جابجایی و یک درجه آزادی دورانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت مقادیر تکین ماتریس  $S_d$  برابر است با:



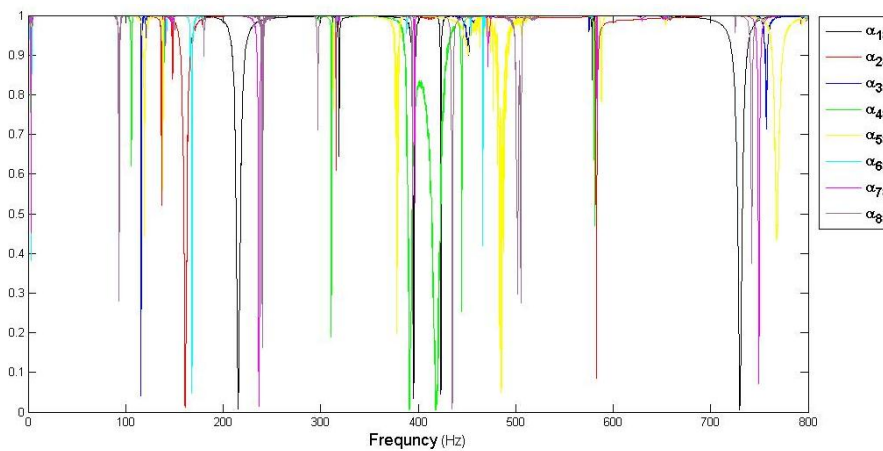
شکل ۴- مکان نصب سنسور و محل‌های ضربه زدن



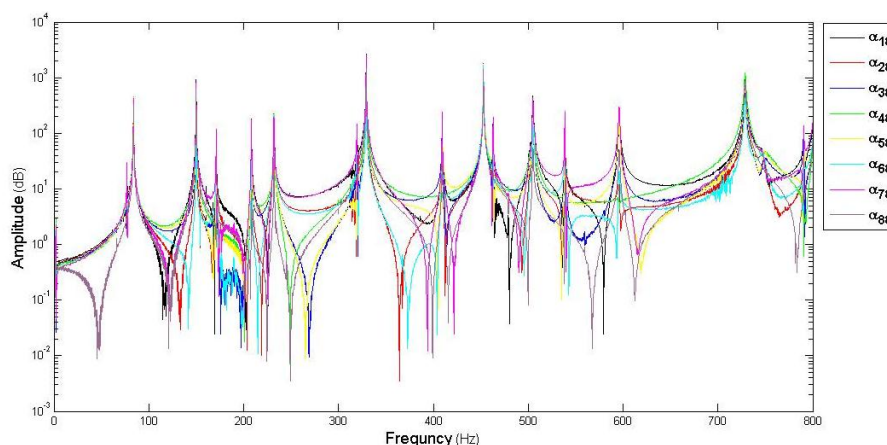
شکل ۳- نحوه آماده سازی تست برای زیرسازه‌ها



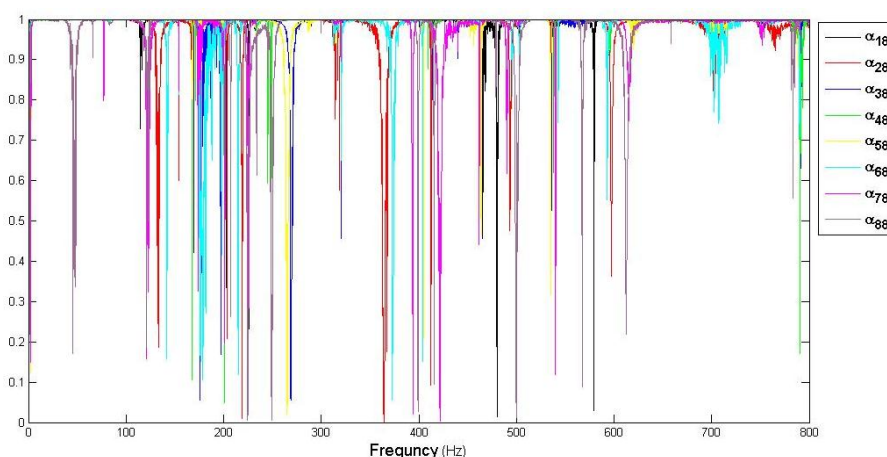
شکل ۵- توابع پاسخ فرکانسی برای زیرسازه کوچکتر با تحریک در نقطه ۸



شکل ۶- نمودار وابستگی پاسخ‌های فرکانسی شکل ۵



شکل ۷ - توابع پاسخ فرکانسی برای زیرسازه بزرگتر با تحریک در نقطه ۸



شکل ۸ - نمودار وابستگی پاسخ‌های فرکانسی شکل ۷

$$\Sigma = [149.283 \quad 128.392 \quad 123.226 \quad 115.386 \quad 33.018 \\ 29.010 \quad 11.757 \quad 3.171 \quad 1.628 \quad 1.570 \quad 4.696 \times 10^{-1} \\ 2.331 \times 10^{-1} \quad 3.944 \times 10^{-2} \quad 3.491 \times 10^{-2} \quad 1.059 \times 10^{-2} \\ 1.643 \times 10^{-3} \quad 1.133 \times 10^{-3}]$$

با توجه به معیار معرفی شده در روابط (۴-۶) و (۴-۷) مقدار  $\delta$  برابر است با  $2/594$ ، یعنی ۸ درجه آزادی برای شرکت در فرآیند کوپلینگ کافی است. به عنوان نمونه از اطلاعات ۲ گره در لبه‌ها و دو درجه آزادی دلخواه دیگر استفاده نمود به گونه‌ای که ماتریس معکوس شونده تکین نگردد.

نتایج ۵ مود الاستیک اول کوپلینگ با نتایج سازه اصلی در جدول ۶ مقایسه شده است.

برای این آزمایش نتایج تست سازه اصلی توسط آزمایش بدست آمد، سپس به منظور جلوگیری از تأثیرات برش، از

برای محاسبه مودهای دورانی، داده‌های نقطه‌ای با فواصل ۲ سانتی متر در جهت دو محور عمود بر اضلاع (برای تقریب مرتبه اول) استفاده می‌شود. (شکل ۴)

بازه فرکانسی اندازه‌گیری ۰ تا ۸۰۰ هرتز است. توابع پاسخ فرکانسی برای نقاط مرزی برای زیرسازه بزرگ و کوچک به ترتیب در شکل ۵ و ۷ نمایش داده شده است (تنها برای اطلاعات مربوط به جابجایی در خود گره‌ها و نقطه نصب سنسور). شکل‌های ۶ و ۸، نمودارهای وابستگی توابع پاسخ فرکانسی شکل‌های ۵ و ۷ را نمایش می‌دهد.

پس از محاسبه شکل مودها، با اعمال SVD بر قسمت معکوس شونده ماتریس قید درجات آزادی مشترک  $(S_0)$ ، مقادیر تکین مطابق زیر است:

تعداد تمامی موده‌ها	$a$
مرزی	$c$
حداقل مرتبه ماتریس $S$	$d$
مختصات مودال (تعمیم یافته)	$p$
مختصات کاهش یافته	$q$
مرتبه ماتریس	$r$
بردار جابجایی	$u$
بردار مختصات فیزیکی	$x$
معیار انتخاب مرتبه	$\delta$
فرکانس	$\omega$
داخلی	$i$
مرتبه باقیمانده ماتریس $S$	$j$
تعداد موده‌های در نظر گرفته شده	$k$
شماره مود	$t$

برش با آب (واتر جت) برای تبدیل سازه اصلی به دو زیر سازه استفاده گردید.

جدول ۶- مقایسه ۵ فرکانس اول نتایج کوپلینگ با نتایج تست سازه اصلی

مود	تست	CMS با استفاده از SVD	خطا %
۱	۴۵/۶۸	۴۲/۱۰	۷/۸۴
۲	۶۵/۲۹	۵۴/۳۶	۱۶/۷۳
۳	۱۲۶/۰۷	۱۰۶/۴۰	۱۵/۶۰
۴	۱۳۴/۳۹	۱۲۹/۴۳	۳/۶۹
۵	۱۹۰/۵۴	۱۸۱/۳۱	۴/۸۵

### ۷- نتیجه گیری

مشکلات عددی ناشی از انتخاب مختصات مناسب مدل مودال زیرسازه‌ها منجر به بروز نتایج بی معنی دارای خطای فاحش می‌شود. به همین جهت پس از شرح خطای عددی افزونگی مدل مودال روش تجزیه مقدار تکین برای تشخیص مختصات مناسب جهت شرکت در فرآیند کوپلینگ معرفی شد. برای بررسی میزان تأثیر این ابزار و محدودیت‌های آن از دو مدل پیوسته نوار باریک و ورق و یک مدل تجربی ورق استفاده گردید. از آنجا که مشکل افزونگی مدل مودال در ورق به خوبی دیده می‌شود، مشاهده گردید که نتایج کوپلینگ با خطای نسبتاً قابل قبولی، مشخصات دینامیکی سازه اصلی را بیان می‌کنند. در هر صورت استفاده از ابزار SVD، داده‌های بی معنی حاصل از کوپلینگ را به نتایجی منطقی سوق داد.

### ۹- پیوست الف

#### نُرم بردار (Vector Norm)

نُرم  $p$  یک بردار به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{الف-۱})$$

بنابر این، نُرم بی‌نهایت یک بردار به شکل زیر است:

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_i |x_i| \quad (\text{الف-۲})$$

#### نُرم ماتریس (Matrix Norm)

نُرم اول یک ماتریس مانند زیر است:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_j \sum_i |a_{ij}| \quad (\text{الف-۳})$$

نُرم بی‌نهایت یک ماتریس عبارت است از:

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad (\text{الف-۴})$$

### ۱۰- پیوست ب

#### تجزیه QR

در جبر خطی تجزیه QR (یا تفکیک QR) یک ماتریس، به تفکیک آن ماتریس به دو زیرماتریس گفته می‌شود به گونه‌ای که یک ماتریس متعامد و یک ماتریس بالامثلثی تولید شود. تفکیک QR اغلب برای مسائل حداقل مربعات خطی مورد

### ۸- علایم، نشانه‌ها و ارقام

ماتریس سختی	K
ماتریس جرم	M
ماتریس جایگشت	P
ماتریس سازگاری شکل مود	S
ماتریس تبدیل	T
بردار نیرو	$f$
تابع پاسخ فرکانسی	$\alpha$
ماتریس شکل مود	$\phi$
نماد زیرسازه‌ها	$A, B$

تجزیه QR با جایگشت ستون‌ها ماتریس جایگشتی  $[P]$  را نیز معرفی می‌کند به گونه‌ای که:

$$[A][P] = [Q][R] \Leftrightarrow [A] = [Q][R][P]^T \quad (\text{ب-۷})$$

ماتریس  $[P]$  به گونه‌ای انتخاب می‌گردد که ترتیب قرار گیری درایه‌های قطری ماتریس  $[R]$  به صورت زیر باشد:

$$|r_{11}| \geq |r_{22}| \geq \dots \geq |r_{nn}| \quad (\text{ب-۸})$$

با استفاده از این مطلب می‌توان مرتبه یک ماتریس را با هزینه کمتری نسبت به تجزیه مقدار تکین (SVD) محاسبه نمود.

### مراجع

- [1] Rixen DJ, de Klerk D, Voormeeren SN (2008) General Framework for Dynamic Substructuring: History, Review, and Classification of Techniques. *AIAA Journal* 46(5): 1169-1181.
- [2] Hosseini Kordkheili SA, Momeni Mossouleh SH, Kokabi MJ, Bahai H (2012) A modal coupling procedure to improve residual modal effects based on experimentally generated data. *Journal of Sound and Vibration* 331(1): 66-80, doi:10.1016/j.jsv.2011.08.013.
- [3] Urgueira APV (1996) Dynamic analysis of coupled structures using experimental data. Ph.D. Thesis - Imperial College, University of London.
- [4] Balmès E (1996) Optimal ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition. *AIAA Journal* 34(6): 1256-1260.
- [5] Hohl A, Siewert C, Panning L, Wallaschek J (2009) A substructure based reduced order model for mistuned bladed disks. *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, DETC2009 1(PART B)*: 899-906.
- [6] Hohl A, Siewert C, Panning L, Wallaschek J (2010) Analysis of the influence of blade pattern characteristics on the forced response of mistuned blisks with a cyclic CMS-based substructure model. *ASME 10th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, ESDA2010 5*: 443-455.
- [7] Hou SN (1969) Review of modal synthesis techniques and a new approach. *Shock and Vibration Bulletin* 40(4): 25-39.
- [8] Golub GH, Van Loan CF (1983) *Matrix computations*. North Oxford Academic Publishing Co. Ltd.

استفاده قرار می‌گیرد و مبنای برخی الگوریتم‌های خاص مقدار ویژه نیز می‌باشد.

برای یک ماتریس مستطیلی مثل  $[A]_{m \times n}$  که  $(m > n)$ ، این تجزیه به صورت حاصل ضرب ماتریس متعامد یکه  $[Q]_{m \times m}$  در ماتریس بالا مثلثی  $[R]_{n \times n}$  است:

$$[A]_{m \times n} = [Q]_{m \times m} [R]_{m \times n} \quad (\text{ب-۱})$$

از آنجا که  $(m-n)$  ردیف پایینی ماتریس  $[R]$  صفر است، معمولاً  $[Q]$  و  $[R]$  را به صورت زیر تجزیه می‌کنند:

$$[A] = [Q][R] = [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [Q_1][R_1] \quad (\text{ب-۲})$$

$[R_1]$  برابر عامل بالا مثلثی تولید شده در تجزیه چولسکی نیز می‌باشد. اگر مرتبه  $[A]$  کامل باشد (مرتبه  $n$ ) و نیاز باشد که درایه‌های قطری ماتریس  $[R_1]$  مثبت باشند، آنگاه  $[R_1]$  و  $[Q_1]$  یکتا هستند ولی در حالت کلی  $[Q_2]$  این گونه نیست.

می‌توان از تجزیه QR برای یافتن قدر مطلق دترمینان یک ماتریس مربعی استفاده نمود. بدین ترتیب که:

$$\det[A] = \det[Q] \cdot \det[R] \quad (\text{ب-۳})$$

از آنجا که  $|\det[Q]| = 1$ ، لذا می‌توان نوشت:

$$|\det[A]| = |\det[R]| = \left| \prod_i r_{ii} \right| \quad (\text{ب-۴})$$

$r_{ii}$  درایه‌های روی قطر ماتریس  $[R]$  هستند. به علاوه، از آنجا که دترمینان یک ماتریس برابر حاصل ضرب مقادیر ویژه آن است، خواهیم داشت:

$$\left| \prod_i r_{ii} \right| = \left| \prod_i \lambda_i \right| \quad (\text{ب-۵})$$

که  $\lambda_i$ ، مقادیر ویژه ماتریس  $[A]$  است.

می‌توان این خواص را برای یک ماتریس غیر مربعی مختلط بسط داد. در این حالت مقادیر ویژه با مقادیر تکین جایگزین می‌شوند. رابطه (ب-۵) با استفاده از خواص SVD و ارتباط آن با دترمینان ماتریس به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\left| \prod_i \sigma_i \right| = \left| \prod_i \lambda_i \right| \quad (\text{ب-۶})$$

که  $\sigma_i$ ، مقادیر ویژه ماتریس  $[A]$  است.

- [10] Klema VC, Laub AJ (1980) The singular value decomposition: its computation and some applications. IEEE Transactions on Automatic Control AC-25(2): 164-176.
- [9] Golub GH, Klema V, Stewart GW (1976) Rank degeneracy and least squares problems. Stanford University, STAN-CS-76-559.