



پاسخ دینامیکی تیر دوبل با لایه‌ی میانی ویسکوالاستیک تحت عبور خودرو با شتاب ثابت

روح الله طالبی توتی^{۱*} و کمال الدین نصری نژاد^۲

^۱ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

^۲ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۰۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۳۰

چکیده

پژوهش حاضر، به پاسخ اجباری یک تیر دوبل با لایه میانی ویسکوالاستیک تحت اثر عبور دو نیرو با شتاب و سرعت اولیه‌ی ثابت می‌پردازد. نیروهای عبوری، نیروهای محور عقب و جلوی یک خودرو و دارای مقادیر متغیر در شتاب‌های مختلف هستند. از معادلات تیر اویلر-برنولی برای تیرها و از مدل وینکلر برای لایه ویسکوالاستیک استفاده شده است. پس از استخراج معادلات، با استفاده از بسط مووال و تعامد مودها، پاسخ دینامیکی به دست آمده است. نمودارهای خیز نقطه میانی هر دو تیر، در شتاب‌های مختلف و به ازای مقادیر مختلفی از ضریب میرایی و سفتی لایه‌ی ویسکوالاستیک به دست آمده و بررسی شده‌اند. پژوهش حاضر از طریق مقایسه با کار دیگر پژوهشگران اعتبارسنجی شده است. بررسی نمودارها نشان می‌دهد که اثر ضریب میرایی در خیز نقطه‌ی میانی تیر فوقانی ناچیز و بر خیز این نقطه در تیر تحتانی قابل توجه است. افزایش سفتی لایه ویسکوالاستیک، منجر به کاهش اثر ضریب میرایی بر خیز نقطه میانی تیر دوبل، کاهش خیز نقطه میانی تیر فوقانی و افزایش این خیز در تیر تحتانی می‌شود. افزایش شتاب بر رفتار کلی منحنی خیز تیر دوبل تأثیری ندارد. در شتاب‌های بالاتر، افزایش سفتی با شدت کمتری منجر به کم شدن اثر ضریب میرایی می‌شود.

کلمات کلیدی: بار متحرک؛ تیر دوبل؛ لایه‌ی ویسکوالاستیک؛ خودرو؛ شتاب ثابت.

Dynamic Response of a Double Beam Interconnected by a Viscoelastic Layer Due to a Moving Vehicle with a Constant Acceleration

R. Talebitooti^{1,*}, K. Naserinejad²

¹ Associate Professor, Mechanical Engineering Department, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

² MSc, Mechanical Engineering Department, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

Abstract

Forced vibration of a double-beam interconnected by a viscoelastic layer is investigated under two constant acceleration moving loads. These forces are standing for a vehicle rear and front axis loads; hence their values depend on the vehicle acceleration. The Euler-Bernoulli equations and Winkler model are used for the beams and the viscoelastic layer, respectively. With deriving the equations, the modal expansion and modes orthogonality are used to obtain the dynamic response of the beam. Middle point deflections of both beams are presented considering various accelerations, damping ratios and stiffness values of viscoelastic layer. The present work is validated with the results of other authors. It is observed that the damping ratio has not a considerable effect on middle point deflection of the upper beam, whereas it has a significant effect on that of the lower one. Meanwhile, increasing the stiffness leads into decreasing the effect of damping ratio in middle point of the double-beam, decreasing the deflection of the upper beam and increasing that of the lower beam. Increasing the acceleration has not any considerable effects on the general trends. In higher accelerations, increasing the stiffness will decrease the effect of damping ratio with a lower intensity.

Keywords: Moving Load; Double Beam; Viscoelastic Layer; Vehicle; Constant Acceleration.

۱- مقدمه

جهت تحلیل اجزای یک سازه، در بسیاری از موارد، از مدل‌سازی اجزاء به صورت یک جزء مکانیکی شناخته شده مانند تیر، شفت، خرپا و غیره استفاده می‌شود. در این میان حل معادلات ارتعاشی حاکم بر تیرها در شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف، می‌تواند برای مهندسان راهگشا باشد.

در روسازی [۱]، ریل‌ها [۲]، پل‌ها، جاده‌ها، موشک‌ها، هواپیماها [۳]، سازه و پی [۴] و در کاربری‌های نوینی مانند، تیرهای ساندویچی یا کامپوزیتی، جاذب‌های ممتد ارتعاشات دینامیکی و میرایی مقید لایه‌ای فعال [۵] مدل‌سازی می‌تواند به صورت یک تیر یا دو تیر با تکیه‌گاه طولی از لایه‌ای با خواص الاستیک یا ویسکوالاستیک باشد. پژوهشگران متعددی حل مسئله‌ای را مورد توجه قرار داده‌اند که در آن یک تیر دارای بارگذاری متحرک و تکیه‌گاه طولی الاستیک یا ویسکوالاستیک باشد. برای نمونه می‌توان در نظر گرفتن بستر الاستیک در پژوهش متیوز [۶] در بررسی ارتعاشی تیرها، چونان [۷] در بررسی تیر تیموشنکو با بار متحرک، فلسزقی [۸] در تیر تیموشنکو با بار پله‌ای متحرک، سان [۹] در بار متحرک خطی هارمونیک، را مورد اشاره قرار داد. برای نمونه‌های مربوط به سال‌های اخیر، می‌توان به [۱۰-۱۲] مراجعه نمود.

نوع دیگری از مدل‌سازی، مدل دو تیر با تکیه‌گاه طولی یا لایه میانی الاستیک است. سیلینگ و هاپمن [۱۳] ضربه، چونان [۱۴] رفتار دینامیکی، ایری و همکاران [۱۵]، پاسخ حالت پاپا، هامادا و همکاران [۱۶]، ارتعاشات آزاد و اجباری، آنیسزک [۱۷ و ۱۸] ارتعاشات آزاد و اجباری عرضی، لی و هوا [۱۹]، تحلیل المان محدود طیفی و زانگ و همکاران [۲۰]، اثر بار محوری را در مدل مذکور مدل نظر قرار داده‌اند. برخی از پژوهش‌ها دارای بار متحرک در طول تیر هستند. برای نمونه کسل [۲۱] شرایط تشدید را برای دو تیر اوپلر- برنولی با تکیه‌گاه ساده استخراج نمود که به شکل الاستیک به هم متصل شده‌اند. یکی از این تیرها تحت اثر نیرویی دارای حرکت طولی سینوسی و مقدار کسینوسی با سرعت زاویه‌ای متفاوت قرار داشته است. از نتایج این پژوهش آن بوده است که علاوه بر حالت معمول ایجاد تشدید، بسامد حرکت بار هم می‌تواند باعث تشدید شود. لی و سان [۲۲]، یک سیستم بدون میرایی تشکیل شده از دو تیر که به صورت یکنواخت با

یک لایه الاستیک به یکدیگر متصل شده‌اند را مد نظر قرار دادند. ایشان روشی شبه تحلیلی را جهت تحلیل فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای این سیستم ارائه نمودند. جرم و سفتی خمشی تیرها و شرایط مرزی دلخواه است. در این پژوهش به تعیین پاسخ ارتعاشات اجباری بر اساس بسامد طبیعی و شکل مودها نیز پرداخته شده است. در ارتعاشات اجباری، دو توزیع زمانی و مکانی دلخواه از بار روی تیر بالا و پایین قرار دارد و در تحلیل انجام گرفته دو بار با ضرب این توزیع‌ها در توابع مختلف انتگرال‌گیری انجام می‌شود. فروزنده و آریایی [۲۳]، به تحلیل ارتعاشات مجموعه‌ای از تیرهای تیموشنکو به تعداد دلخواه پرداخته‌اند. بین تیرهای مفروض، تعداد دلخواهی فنر با ثوابت دلخواه قرار گرفته‌اند و جرم متحرک با شتاب ثابت و سرعت اولیه از روی یک یا تعدادی از تیرها عبور می‌کند.

استفاده از لایه میانی ویسکوالاستیک بین دو تیر یا به عنوان تکیه‌گاه در پژوهش‌های متعددی مورد توجه بوده است. برای مدل‌سازی این لایه در مراجع متعددی [۱-۳، ۵ و ۲۴-۳۰] از ترکیبی از فنر و میراکننده استفاده شده است. یکی از اولین پژوهش‌های استفاده کننده از فنر و میراکننده بین دو تیر در ارتعاشات اجباری، توسط دوبلین و فردریچ [۳۱] انجام شده است. در مدل مورد مطالعه در این پژوهش، مجموعاً سه فنر و میراکننده متمرکز و یک نیروی متمرکز وجود دارد. تادایوشی و همکاران [۳۲]، با هدف کنترل ارتعاشات به وسیله یک جاذب ارتعاشی، یک تیر با شرایط مرزی مشابه تیر اصلی را پیشنهاد داده‌اند که با توزیعی از فنر و میراکننده به تیر اصلی متصل است. نیروی وارده به تیر اصلی، دارای محل ثابت و مقدار متغیر است. چن و شئو [۲۴] مشخصه‌های دینامیکی یک تیر لایه‌ای با هسته انعطاف‌پذیر را مورد توجه قرار دادند. این لایه انعطاف‌پذیر به صورت یک لایه ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده است. در این پژوهش بر اساس تئوری تیر تیموشنکو، توابع شکلی دینامیکی و ماتریس سفتی دینامیکی سیستم به صورت تحلیلی استخراج شده است. چن و شئو در پژوهش دیگر خود [۲۵]، به مطالعه ارتعاشات آزاد، پاسخ دینامیکی و کمانش استاتیکی دو تیر مشابه با لایه میانی ویسکوالاستیک پرداخته‌اند. شرایط مرزی این دو تیر می‌تواند متفاوت باشد. ایشان در به دست آوردن توابع شکلی دینامیکی و ماتریس سفتی دینامیکی از

خود جهت جداسازی معادلات مربوط به هریک از دو تیر از [۲۷] کمک گرفته است. در پژوهش ابوهلال اثر سرعت عبور بار و میرایی و خاصیت الاستیک لایه‌ی ویسکوالاستیک بر پاسخ دینامیکی تیرها، مورد توجه بوده است. وو و جائو [۳] به حل مسئله‌ای مشابه پژوهش ابوهلال، اما با بار هارمونیک متحرک پرداخته‌اند. روش مورد استفاده توسط ایشان برای جداسازی معادلات با روش ابوهلال یکسان نیست.

هیچ یک از این پژوهش‌های انجام شده روی دو تیر با لایه میانی ویسکوالاستیک و دارای نیرو با شتاب ثابت متمرکز نبوده است. حتی در یکی از آخرین پژوهش‌های موجود در این زمینه که روی پاسخ دو تیر با شرایط تکیه‌گاه ساده و لایه میانی ویسکوالاستیک به عبور یک نوسانگر می‌پردازد [۳۶]، سرعت عبور ثابت و حرکت بدون شتاب است. در حالی که عملاً در بسیاری از موارد کاربردی، متحرک دارای سرعت ثابت نمی‌باشد.

پژوهش حاضر روی شرایط عبور دو نیرو با حرکتی دارای سرعت اولیه و شتاب ثابت از روی دو تیر با لایه میانی ویسکوالاستیک متمرکز است. این دو نیرو به عنوان نیروهای محور عقب و جلوی یک خودرو در نظر گرفته شده‌اند که در شتاب‌های مختلف دارای مقادیر متفاوتی هستند. از این جهت در پژوهش حاضر سعی شده است، شرایط به شرایط کاربردی عبور یک خودرو از روی تیر دویل نزدیک شود که می‌تواند مدل بخشی از یک پل باشد. مهم‌ترین مانع در مساله حاضر، حل معادلات خیز تیرها با در نظر گرفتن اثر شتاب است. به گونه‌ای که حل تحلیلی معادلات ناممکن خواهد بود. بدین منظور از بسط تیلور برخی پارامترهای مثلثاتی بهره‌گیری شده است. در ادامه، با در نظر گرفتن چند شتاب و سرعت اولیه‌ی ثابت، خیز نقطه میانی تیرها بررسی، مقایسه و تفسیر شده است. همچنین نتایج حاضر با نتایج یکی از مقالات موجود اعتبارسنجی گردیده‌اند.

۲- شرح مسئله، نکات و روابط حل

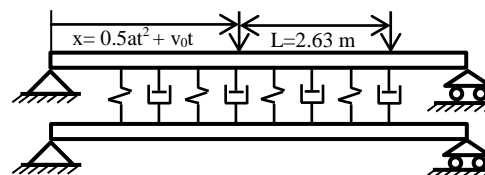
سیستم از دو تیر با تکیه‌گاه ساده و لایه میانی ویسکوالاستیک تشکیل شده است (شکل ۱). تیر فوقانی، تیر اول و تیر تحتانی تیر دوم نامیده می‌شود. جهت مدل‌سازی لایه‌ی میانی، از مدل وینکلر استفاده شده است. به این منظور

برهم‌نهی استفاده نموده‌اند. کاوازوئه و همکاران [۳۳]، نوعی جاذب ارتعاشات را ارائه داده‌اند که بر بسیاری از مودهای ارتعاشی تیر اثر گذار است. این جاذب از یک تیر با شرایط مرزی آزاد-آزاد و توزیع یکنواختی از فنر و میراکننده متصل به آن تشکیل شده است. این توزیع یکنواخت از سوی دیگر، به تیر اصلی متصل است. چن و لین [۲۶]، تحلیل سازه‌ای و طراحی بهینه جاذبی مشابه را ارائه داده‌اند. عملکرد مؤثر چنین جاذبی در کاهش فاکتورهای بزرگ‌نمایی دینامیکی از نتایج پژوهش ایشان است.

در تعدادی از پژوهش‌ها انجام شده در زمینه دو تیر با لایه میانی ویسکوالاستیک بار اعمال شده، دارای حرکت است. کسل و راسک [۳۴]، در بررسی دو تیر که با یک لایه الاستیک به یکدیگر متصل شده‌اند، حالتی را در نظر گرفته‌اند که میرایی موجود در سازه تابعی از سرعت نسبی دو تیر باشد. روابط به دست آمده در این حالت، مشابه برخی از موارد وجود لایه ویسکوالاستیک [۲۴ و ۲۷] است. نیروی در نظر گرفته شده در این پژوهش، نیروی متحرکی است که با یک دامنه، روی تیر فوقانی حرکت سینوسی دارد. یافته‌های این پژوهش - مشابه پژوهش دیگر کسل [۲۱] - اهمیت نسبی بسامد حرکت نیرو در تحریک بسامدهای اصلی سیستم را نشان می‌دهد. وو و همکاران [۲۷]، روشی دقیق را برای حل ارتعاشات یک سیستم شامل، دو تیر با لایه میانی ویسکوالاستیک و با تحریک دلخواه روی تیر فوقانی ارائه داده‌اند. این روش به ادعای پژوهشگران، نمونه مشابهی نداشته است. در حل ارائه شده از مدل اویلر-برنولی برای ارتعاشات تیرها استفاده گردیده است. لازم به ذکر است که با وجود دلخواه بودن تحریک، در مطالعه موردی ارائه شده در این پژوهش، نیرو در مکانی ثابت (وسط تیر فوقانی) اعمال می‌شود. هوسین و هانت [۳۵]، به مدل‌سازی سازه‌ای ریلی پرداخته‌اند که از دو تیر با طول بی‌نهایت تشکیل شده است. بین دو تیر و بین تیر تحتانی و تکیه‌گاه صلب زیرین، توزیعی از فنر و میراکننده وجود دارد. نیروی وارد شده به تیر فوقانی، دارای مقدار متغیر نوسانی است و با سرعت ثابت در طول تیر حرکت می‌کند. ابوهلال [۲۸] به حل تحلیلی مسئله عبور یک بار متمرکز با سرعت ثابت از روی دو تیر اویلر-برنولی با لایه میانی ویسکوالاستیک پرداخته است. این دو تیر مشابه، دارای طول محدود و تکیه‌گاه ساده هستند. وی در پژوهش

جدول ۱- مشخصات تیرها

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
طول (l)	۵ متر	مدول یانگ (E)	۲۰۰ گیگا پاسکال
ممان سطح (I)	۰.۵ متر ^۴	جرم بر واحد طول (ρ)	۹۲/۶ کیلوگرم بر متر



شکل ۱- دو نیروی عبوری از روی تیر اول

توزیع یکنواخت فنر و میراکننده در طول ناحیه بین دو تیر به کار گرفته می‌شود. خودرویی با شتاب و سرعت اولیه ثابت از روی تیر فوقانی عبور می‌کند. شتاب‌های مختلف عبور خودرو، باعث اعمال نیروهای مختلف توسط محور عقب و جلو خواهد شد. فرآیند حل انجام شده برای این سیستم با در نظر گرفتن پاسخ دینامیکی به رسم نمودارهای خیز نقطه میانی تیرها بر اثر عبور این دو نیرو منتهی می‌شود.

جهت حل مسئله از روابط تیر اویلر- برنولی استفاده می‌شود. در ادامه و در قسمت روابط مشخص خواهد شد که روند حل معادلات دیفرانسیل مسئله فوق با انتگرال‌گیری از تابعی که دارای تابع مثلثاتی سینوس با تابع زاویه‌ای درجه دوم است، روبرو می‌شود؛ لذا با توجه به عدم امکانپذیری حل تحلیلی انتگرال‌ها، نمی‌توان همانند مراجع [۳، ۱۷ و ۲۷-۲۸]، حل معادلات را به صورت پارامتریک انجام داد. در [۲۲] که در آن بار روی تیر اول و دوم دارای توزیع زمانی و مکانی دلخواه است، دو مرتبه با ضرب این توزیع‌ها در توابع مختلف، انتگرال‌گیری انجام می‌شود؛ لذا حتی در این پژوهش هم انتگرال‌گیری می‌تواند به توابعی برخورد کند که انتگرال نامعین نداشته باشند. اگر توزیع نیرو در نظر گرفته شده انتگرال‌گیری نامعین را غیرممکن کند، می‌توان اثر پارامترهای مختلف را یک مورد خاص بررسی کرد.

بر این اساس، پس از مراحل حل آورده شده در قسمت معادلات اساسی، خیز نقطه میانی تیر اول و دوم با در نظر گرفتن سه شتاب مشخص، تیرهایی با ویژگی‌های مشخص (جدول ۱) و خودرویی با پارامترها و سرعت اولیه مشخص و به ازای مقادیر مختلف سفتی و ضریب میرایی لایه میانی رسم می‌شود. شتاب‌های در نظر گرفته شده در محدوده‌ی منطقی برای شتاب یک خودرو قرار دارند. سرعت اولیه خودرو در ورود به تیرها ۲ متر بر ثانیه است.

۲-۱- معادلات اساسی

با اضافه کردن عبارات مربوط به میرایی و سفتی لایه [۳۷]:

$$E \cdot I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \cdot A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k \cdot y + c \cdot \dot{y} = p(x, t) \quad (۱)$$

در رابطه‌ی (۱) y جابه‌جایی، A سطح مقطع، ρ نیروی تابع زمان t و مکان x ، k و c نیز ثوابت میرایی و فنر هستند. y_1 و y_2 به ترتیب جابه‌جایی المان تیر اول و دوم هستند:

$$E \cdot I \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + \rho \cdot A \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + k(y_1 - y_2) + c(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = p(x, t) \quad (۲)$$

$$E \cdot I \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + \rho \cdot A \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + k(y_2 - y_1) + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0 \quad (۳)$$

$$y_1(0, t) = y_1(l, t) = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}(l, t) = 0 \quad (۴-الف)$$

$$y_2(0, t) = y_2(l, t) = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}(l, t) = 0 \quad (۴-ب)$$

با تغییر متغیر [۲۸] و جمع معادلات:

$$y = y_1 + y_2 \quad (۵)$$

$$E \cdot I \frac{\partial^4 (y_1 + y_2)}{\partial x^4} + \rho \cdot A \frac{\partial^2 (y_1 + y_2)}{\partial t^2} = E \cdot I \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \cdot A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (۶)$$

$$E \cdot I \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + \rho \cdot A \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} + 2k \cdot y_2 + 2c \cdot \dot{y}_2 = k \cdot y + c \cdot \dot{y} \quad (۷)$$

$$= \int_0^l (k \cdot y + c \cdot \dot{y}) \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} x\right) dx = P_{2n}(t) \quad (۱۶)$$

به طریق مشابه (جرم عمومی همان رابطه‌ی (۱۲)):

$$Y_{2n}(t) = \frac{1}{m \cdot \omega_{2d}} \int_0^t P_{2n}(\tau) e^{-\xi_{2n} \cdot \omega_{2n} \tau} \cdot \sin(\omega_{2d}(t - \tau)) d\tau \quad (۱۷)$$

$$k_{2n} = (E \cdot I \frac{n^4 \cdot \pi^4}{l^4} + 2 \cdot k) \frac{l}{2} \quad (۱۸)$$

$$\omega_{2n} = \sqrt{\frac{1}{\rho \cdot A} (E \cdot I \frac{n^4 \cdot \pi^4}{l^4} + 2 \cdot k)} \quad (۱۹)$$

$$\xi_{2n} = \frac{2 \cdot c}{c_{cr}} = \frac{2 \cdot c}{2 \cdot m \cdot \omega_{2n}} \quad (۲۰)$$

$$\omega_{2d} = \sqrt{1 - \xi_{2n}^2} \quad (۲۱)$$

با توجه به نوع حرکت خودرو نیروی وارد بر تیر اول با استفاده از تابع دلتای دیراک به شکل روابط (۲۲) خواهد بود. در این رابطه a شتاب و v_0 سرعت اولیه‌ی حرکت نیرو است.

$$p(x, t) = \delta(x - (\frac{a}{2}t^2 + v_0t)), \quad 0 < x < l \quad (۲۲-الف)$$

$$p(x, t) = 0, x \leq 0 \text{ or } x \geq l \quad (۲۲-ب)$$

با توجه به این نیرو، انتگرال‌های رابطه (۱۰) به سادگی بر اساس تئوری ارائه شده در [۳۹] عبارت خواهد بود از:

$$P_n(t) = \int_0^l p(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx = \sin\left(\frac{n\pi}{l} (\frac{a}{2}t^2 + v_0t)\right) \quad (۲۳)$$

بنابراین انتگرال رابطه (۱۱) شامل، عبارت با شکل کلی $\sin(x^2)$ خواهد بود که دارای حل پارامتریک نمی‌باشد؛ لذا با استفاده از مقادیر مشخص برای پارامترها، از بسط تیلور تابع به شکل کلی $\sin(at^2 + v_0t)$ استفاده می‌شود. تطابق مقادیر بسط با مقادیر تابع در محدوده‌ی مورد نیاز، در همه شتاب‌ها بررسی گردیده و اطمینان از تطابق حاصل شده است. نرم‌افزار مورد استفاده در پژوهش حاضر، نرم‌افزار Maple است.

۲-۲- به دست آوردن نیروی مربوط به هر محور

نیروی هر محور با ساده‌سازی روابط [۴۰]، طبق شرایط مسئله از رابطه (۲۴) به دست خواهد آمد. در این رابطه و جدول ۲ نیروی وارد شده توسط محور مورد نظر، w وزن

با حل معادله (۶)، y و با حل معادله (۷)، y_2 به دست خواهد آمد. نهایتاً با استفاده از رابطه (۵) y_1 حاصل خواهد گردید. شکل جواب برای معادله (۶)، بر اساس [۳۸] به صورت رابطه (۸) است. رابطه (۹) با استفاده از معادله (۶):

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} x\right) \quad (۸)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \cdot I \cdot Y_n(t) \frac{n^4 \cdot \pi^4}{l^4} \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho \cdot A \cdot \ddot{Y}_n(t) \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} x\right) = p(x, t) \quad (۹)$$

با ضرب $\sin((m \cdot \pi/l) \cdot x)$ و انتگرال از 0 تا 1 و با تعامد:

$$E \cdot I \frac{n^4 \cdot \pi^4}{l^4} \frac{l}{2} Y_n(t) + \rho \cdot A \frac{l}{2} \ddot{Y}_n(t) = \int_0^l p(x, t) \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} x\right) dx = P_n(t) \quad (۱۰)$$

بنابراین خواهیم داشت [۳۷]:

$$Y_n(t) = \frac{1}{m \omega_n} \int_0^t P_n(\tau) \sin(\omega_n(t - \tau)) d\tau \quad (۱۱)$$

که در آن، طبق روابط جرم و سفتی عمومی برابر است با:

$$m = \int_0^l \rho \cdot A \cdot \sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{l} x\right) dx = \rho \cdot A \frac{l}{2} \quad (۱۲)$$

$$k_n = \int_0^l E \cdot I \frac{n^4 \cdot \pi^4}{l^4} \sin^2\left(\frac{n \cdot \pi}{l} x\right) dx = E \cdot I \frac{n^4 \cdot \pi^4}{l^4} \frac{l}{2} \quad (۱۳)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m}} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A}} \quad (۱۴)$$

ω سرعت زاویه‌ای است. جهت حل (۷)، جواب به صورت مختصات عمومی رابطه‌ی (۱۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{2n}(t) \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l} x\right) \quad (۱۵)$$

با ضرب دو طرف در $\sin((m \cdot \pi/l) \cdot x)$ و انتگرال‌گیری از 0 تا 1 و با استفاده از تعامد توابع:

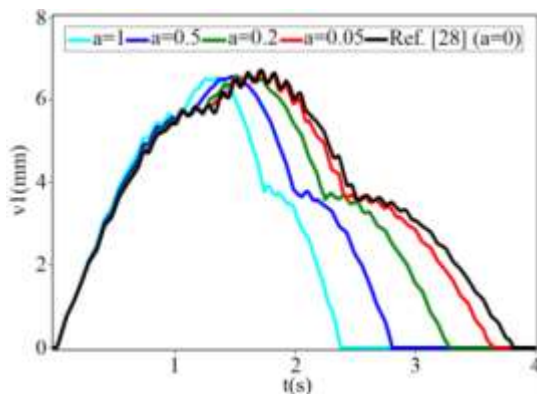
$$\left(E \cdot I \frac{n^4 \cdot \pi^4}{l^4} + 2 \cdot k\right) \frac{l}{2} Y_{2n}(t) + \rho \cdot A \frac{l}{2} \ddot{Y}_{2n}(t) + 2 \cdot c \frac{l}{2} \dot{Y}_{2n}(t)$$

جدول ۲- مشخصات خودرو

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
L	۲/۶۳ متر	g	۹/۸ متر بر ثانیه ^۲
l ₁	۱/۰۱۴ متر	w	۱۰۹۷۲ نیوتن
l ₂	۱/۶۱۶ متر	h	۰/۵۲۳ متر

جدول ۳- نیروهای محور عقب و جلو در شتاب‌های مختلف

شتاب	نیروی محور عقب	نیروی محور جلو
۱ متر بر مجذور ثانیه	۴۴۳۵/۷۲۸ نیوتن	۶۴۹۱/۲۷۲ نیوتن
۳ متر بر مجذور ثانیه	۴۸۷۹/۱۸۴ نیوتن	۶۰۴۷/۸۱۶ نیوتن
۵ متر بر مجذور ثانیه	۵۳۲۲/۶۴۰ نیوتن	۵۶۰۴/۳۶۰ نیوتن



شکل ۲- صحت‌سنجی خیز تیر اول، شتاب (m/s²)

ضعیف‌تری دارد. با افزایش سفتی لایه میانی، این اثر ضعیف تقریباً از بین می‌رود و در شکل ۳.پ و ۳.ت نمودار مربوط به سه ضریب میرایی تقریباً بر هم منطبق‌اند. اثر ضریب میرایی در خیز نقطه میانی تیر دوم مشهودتر است. اثر عمده افزایش این ضریب در شرایط پایین بودن سفتی لایه ویسکوالاستیک (شکل ۳.ث و ۳.ج) افزایش قدر مطلق خیز در نقطه میانی تیر دوم است. این اثر به گونه‌ای است که در حالت صفر بودن ضریب میرایی و پایین بودن سفتی، نقطه میانی تیر دوم تقریباً هیچ خیزی ندارد (شکل ۳.ث). در این شرایط افزایش ضریب میرایی،

خودرو، L فاصله بین دو محور، l₁ فاصله بین محور مورد نظر و مرکز جرم (l₁ و l₂ محور جلو و عقب)، h ارتفاع مرکز جرم خودرو از زمین، a شتاب خودرو و g شتاب گرانش می‌باشند. نیروی وارده توسط محورها در جدول ۳ مشاهده می‌شود.

$$p = \frac{l_i}{L}w - \frac{h}{L} \left(\frac{a \cdot w}{g} \right) \quad (24)$$

۲-۳- روش به دست آوردن خیز حاصل از دو نیرو

خیز حاصل از عبور دو نیرو با حل معادلات و استفاده از جمع اثر به دست می‌آید. پس از ورود خودرو و در ناحیه زمانی حضور فقط نیروی محور جلو، خیز حاصل از این نیرو در نمودار نشان داده می‌شود. پس از ورود نیروی محور عقب، منحنی خیز، جمع خیز حاصل از دو نیرو است. نهایتاً پس از خروج نیروی محور جلو از روی تیر و تا زمان خروج خودرو، تنها خیز حاصل از محور عقب در نمودار نمایش داده می‌شود.

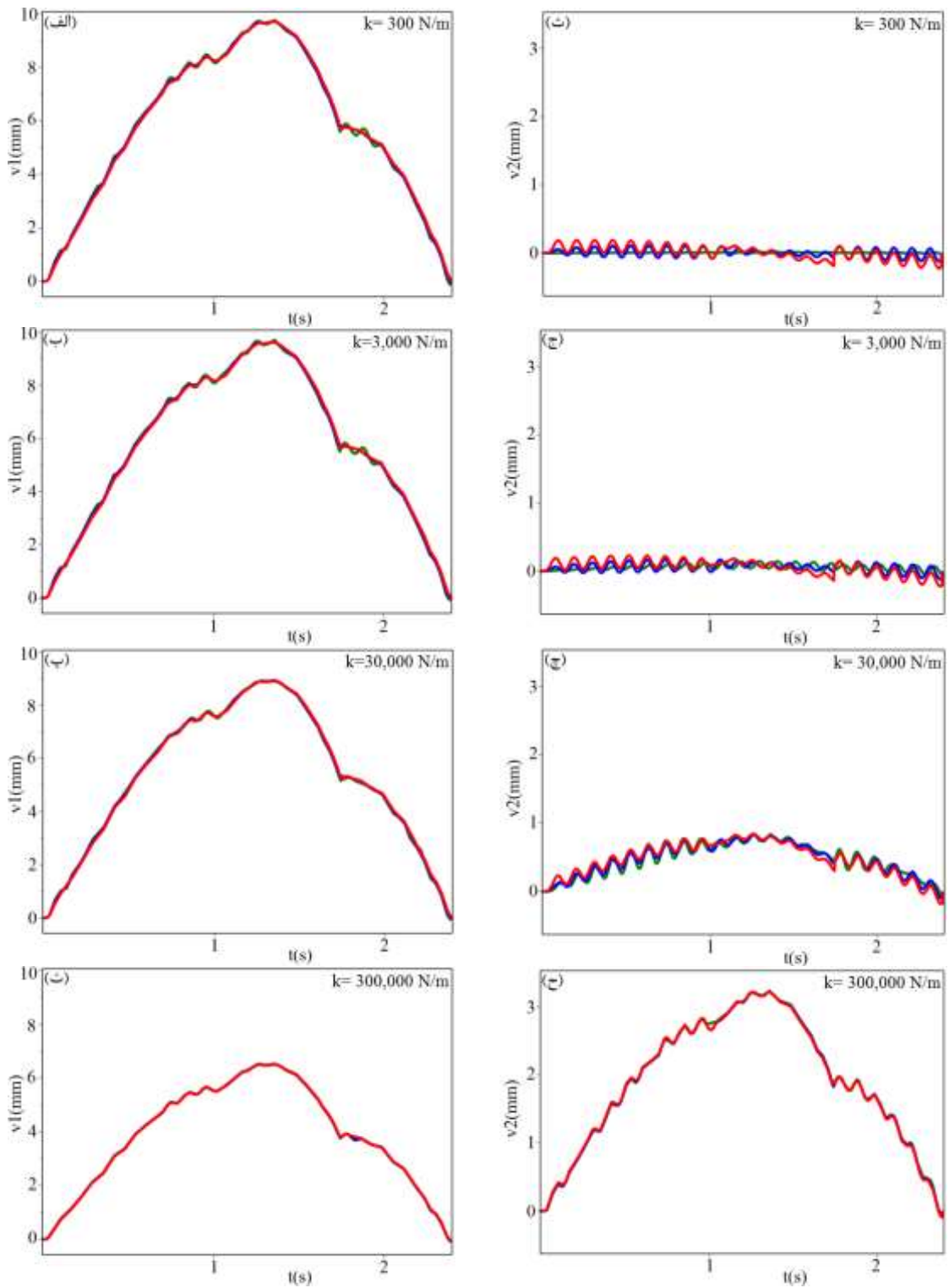
۳- نتایج و بحث

۳-۱- صحت‌سنجی نتایج

جهت درستی سنجی، شتاب نیروها در چند مرحله به صفر نزدیک می‌شود و حالتی مشابه عبور نیرو با سرعت ثابت را به وجود می‌آورد. این حالت در پژوهش ابوهلال [۲۸]، مورد بررسی قرار گرفته است. نزدیک شدن روند نمودار به نمودار به دست آمده با روابط پژوهش [۲۸]، درستی نتایج پژوهش حاضر را تأیید می‌کند (شکل ۲). درستی سنجی در تیر دوم هم انجام شده و به دلیل محدودیت فضا آورده نشده است.

۳-۲- بررسی اثر پارامترها

در این بخش اثر سفتی و ضریب میرایی لایه میانی و شتاب عبور نیروها بر خیز نقطه میانی تیرها بررسی شده است. در نمودارهای به دست آمده که در شکل ۳ الی ۵ مشاهده می‌شوند، v₁ و v₂ به ترتیب خیز نقطه میانی تیر اول و دوم است. z نسبت ضریب میرایی به ضریب میرایی بحرانی است. در شتاب ۱ متر بر مجذور ثانیه، در شکل ۳.الف مشاهده می‌شود که ضریب میرایی اثر کمی بر تغییرات خیز نقطه میانی تیر اول دارد. این ضریب به جز در نواحی زمانی قبل و بعد از رخ دادن خیز حداکثر، تغییر چندانی در نمودارها ایجاد نکرده است. در شکل ۳.ب ضریب میرایی اثر مشابه و



شکل ۳- خیز نقطه میانی تیر اول (v1) و دوم (v2) در شتاب 1 m/s^2 ، $z=0$: (—), $z=0.1$: (—) و $z=0.5$: (—)

شتاب ۱ متر بر مجذور ثانیه، نیروی دوم در لحظه تقریبی $t=1/0.4$ ثانیه وارد تیر و در لحظه تقریبی $t=1/0.74$ ثانیه چرخ جلو از تیر خارج می‌شود. تغییر روند نمودار در این دو لحظه، ناحیه زمانی حضور دو نیرو به شکل همزمان را از نواحی زمانی حضور یک تیر جدا می‌کند.

در شتاب ۳ متر بر مجذور ثانیه، رفتار کلی مانند شتاب ۱ متر بر مجذور ثانیه است (شکل ۴). تغییر شتاب حرکت نیروها، به جز در مورد سفتی ۳۰۰,۰۰۰ نیوتن بر متر، در مقدار خیز حداکثر نقطه میانی تیر اول تغییر قابل توجهی به وجود نیاورده است. اثر عمده افزایش شتاب، کم شدن نقاط حداقل و حداکثر به وجود آمده در نمودار خیز نقطه میانی تیر اول است. به عبارت دیگر، با افزایش شتاب، شکل کلی نمودار و حداکثر مطلق آن تقریباً ثابت است؛ اما نمودار هموارتر شده است. وو و جائو نیز در پژوهش خود که در آن یک نیروی نوسانی با سرعت ثابت از روی دو تیر با لایه میانی ویسکوالاستیک عبور می‌کند، این نتیجه را ذکر کرده‌اند که افزایش سرعت عبور نیرو، باعث کاهش سیکل‌های جابه‌جایی می‌شود [۳].

با دقت در شکل‌های ۳.۳، ۳.۴، ۳.۵ و ۳.۶ مشاهده می‌شود که نمودارهای مربوط به سه میرایی مختلف در شتاب ۱ متر بر مجذور ثانیه در سفتی ۳۰۰,۰۰۰ و ۳۰۰,۰۰۰ نیوتن بر متر بر یکدیگر منطبق شده‌اند؛ اما در شتاب ۳ متر بر مجذور ثانیه اختلاف نمودارها در سفتی ۳۰۰,۰۰۰ نیوتن بر متر باقی می‌ماند و در سفتی ۳۰۰,۰۰۰ نیوتن بر متر نمودارها بر هم منطبق می‌شوند. به عبارت دیگر، اثر میرایی بر خیز نقطه میانی تیر اول با سرعت کمتری محو می‌شود.

مقایسه خیزهای مربوط به تیر دوم در شتاب ۱ و ۳ متر بر مجذور ثانیه نشان می‌دهد که به جز در سفتی فتر ۳۰۰,۰۰۰ نیوتن بر متر، افزایش شتاب باعث افزایش قدر مطلق حداکثر خیز نقطه میانی شده است (شکل‌های ۳.۳ تا ۳.۴). افزایش دامنه ارتعاش در نواحی‌ای از نمودارهای مربوط به هر چهار سفتی مشهود است.

شکل کلی نمودارهای شتاب ۵ متر بر مجذور ثانیه (شکل ۵)، مشابه نمودارهای مربوط به شتاب‌های ۱ و ۳ متر بر مجذور ثانیه است و خیز حداکثر نیز عمدتاً تغییر قابل ملاحظه‌ای ندارد؛ اما با مقایسه شکل‌های ۳.۴ و ۳.۵ مشاهده

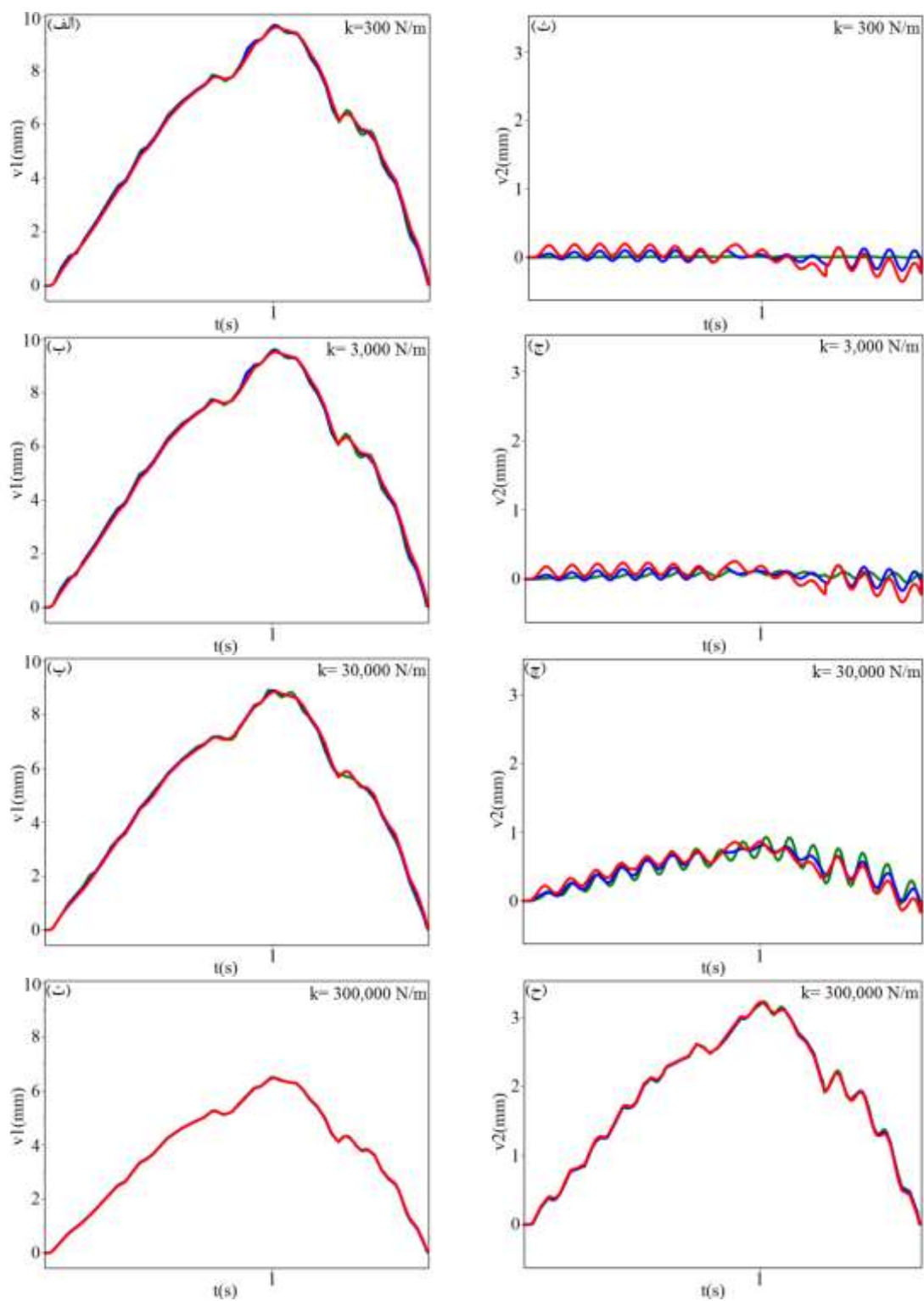
قدر مطلق خیز به وجود آمده در نقطه میانی تیر دوم را افزایش می‌دهد. ابوهلال [۲۸] نیز در پژوهش خود این مورد را مشاهده نموده است و دلیل آن را افزایش کوپلینگ بین دو تیر با افزایش ضریب میرایی در این شرایط دانسته است.

همچنین با دقت در شکل‌های ۳.۳، ۳.۴ و ۳.۵ مشاهده می‌شود که در نیمه اول کل زمان حضور نیروها، افزایش ضریب میرایی، خیز نقطه میانی تیر دوم را عمدتاً افزایش می‌دهد. در نیمه دوم زمانی، افزایش این ضریب، خیز نقطه میانی تیر دوم را عمدتاً کاهش می‌دهد؛ اما با افزایش سفتی، مانند آنچه در تیر اول رخ داد، اثر ضریب میرایی رو به کاهش می‌گذارد و در شکل ۳.۴ سه نمودار مربوط به سه ضریب میرایی تقریباً بر یکدیگر منطبق می‌شوند؛ لذا در شتاب ۱ متر بر مجذور ثانیه یکی از اثرات افزایش سفتی لایه ویسکوالاستیک، کاهش و نهایتاً محو تقریبی اثر ضریب میرایی این لایه روی تغییرات خیز نقطه میانی هر دو تیر است. کاهش اثر ضریب میرایی لایه ویسکوالاستیک در اثر افزایش سفتی این لایه از نتایج پژوهش‌های مشابه پژوهش حاضر (ابوهلال [۲۸] و وو و جائو [۳]) نیز بوده است.

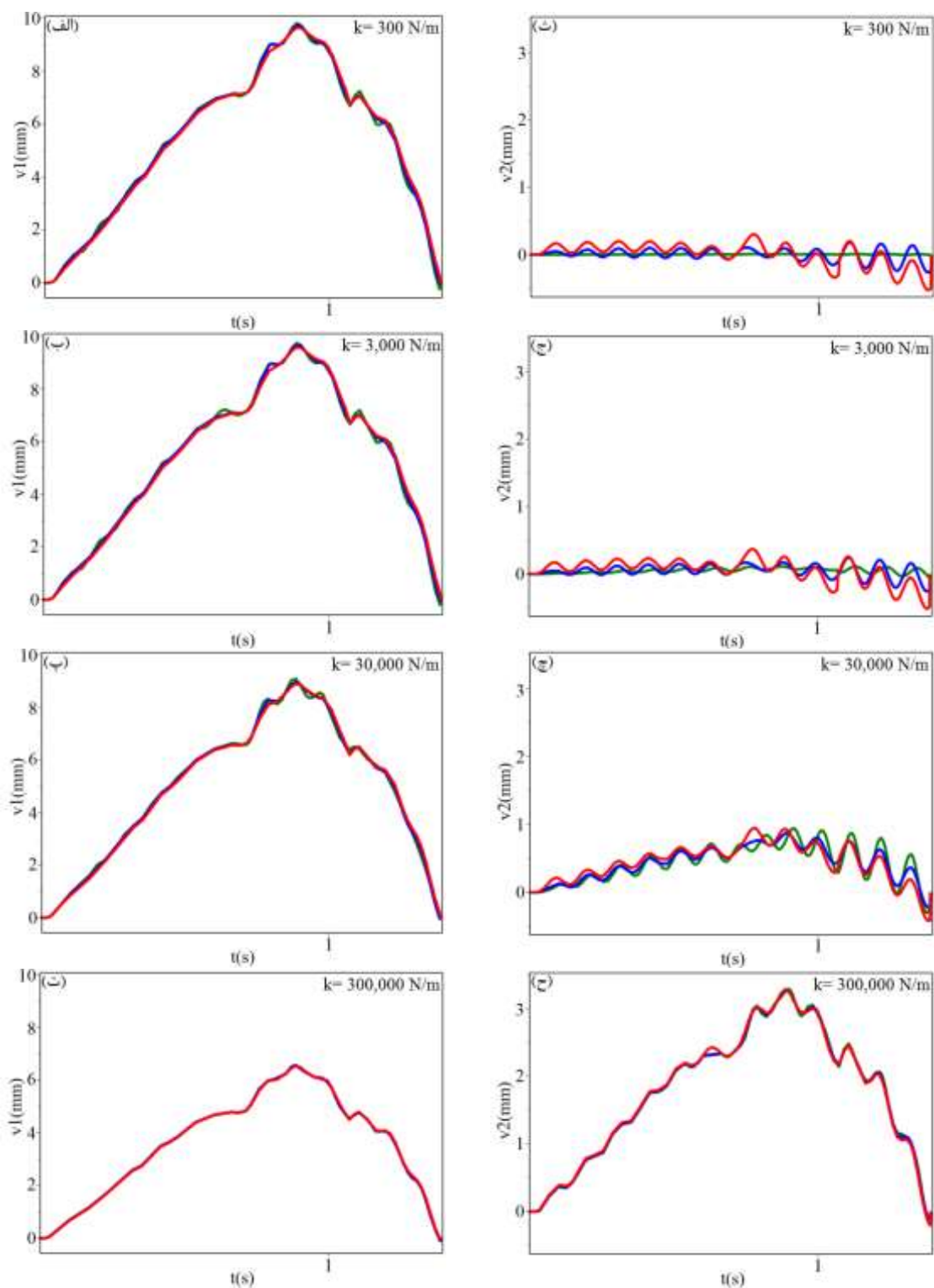
در نواحی مشهود بودن اثر ضریب میرایی در نمودار خیز نقطه میانی تیر اول، مشاهده می‌شود که افزایش میرایی، عمدتاً باعث کاهش دامنه ارتعاشات گردیده است. به عبارت دیگر لایه میانی و تیر دوم نقش یک جاذب ارتعاشی را ایفا می‌نمایند. در پژوهش‌های [۲۶، ۳۰ و ۳۲-۳۳] نیز تحت عنوان جاذب ارتعاشی یا تیر جاذب به بررسی سیستم‌های مشابه سیستم پژوهش حاضر پرداخته شده است.

مقایسه شکل ۳.۳ الف و شکل ۳.۳ ب نشان می‌دهد که در صورت پایین بودن سفتی لایه ویسکوالاستیک، خیز نقطه میانی تیر دوم ناچیز است. با افزایش سفتی لایه ویسکوالاستیک (شکل ۳.۳ الف تا ۳.۳ ب) و همچنین شکل ۳.۳ تا ۳.۴ ج)، خیز نقطه میانی تیر اول کاهش و خیز نقطه میانی تیر دوم افزایش می‌یابد. این اثر سفتی لایه میانی در پژوهش‌های [۲۸] و [۳] نیز مشاهده شده است.

یکی دیگر از وجه تمایزهای پژوهش حاضر با اکثر قریب به اتفاق پژوهش‌های مشابه، عبور دو نیرو از روی مجموعه دو تیر است. حضور نیروی دوم که نشانگر نیروی محورهای عقب یک خودرو است، در شکل ۳ هم در نمودارها مربوط به تیر اول و هم در نمودارهای مربوط به تیر دوم مشهود است. در



شکل ۴- خیز نقطه میانی تیر اول (v_1) و دوم (v_2) در شتاب 2 m/s^2 ، $z=0$: (—)، $z=0.1$: (—) و $z=0.5$: (—)



شکل ۵- خیز نقطه میانی تیر اول (v_1) و دوم (v_2) در شتاب 5 m/s^2 ، $z=0$: (—)، $z=0.1$: (—) و $z=0.5$: (—)

جدول ۴- قدر مطلق حداکثر خیز نقطه میانی تیر

دوم (تقریبی)			شتاب (m/s ²)
۵	۳	۱	
خیز نقطه میانی (mm)			k (N/m)
۰/۵۲۲	۰/۳۵۳	۰/۲۲	۳۰۰
۰/۵۱۱	۰/۳۲	۰/۲۲۶	۳۰۰۰
۰/۹۳۷	۰/۹۳	۰/۸۶۵	۳۰۰۰۰
۳/۳۳۹	۳/۲۲	۳/۲۲۶	۳۰۰۰۰۰

محققین صحه گذاری گردیده است. نتایج به دست آمده را می توان در این موارد خلاصه نمود:

۱. اثر ضریب میرایی بر خیز نقطه میانی تیر اول، بسیار کم و بر خیز نقطه میانی تیر دوم قابل توجه است.
۲. افزایش ضریب میرایی در شرایط پایین بودن سفتی لایه میانی، باعث افزایش خیز نقطه میانی تیر دوم می شود.
۳. با وجود آن که افزایش ضریب میرایی در شرایط پایین بودن سفتی در اکثر نواحی قدر مطلق خیز نقطه میانی تیر دوم را افزایش می دهد، افزایش سفتی باعث کاهش این اثر و نهایتاً محو شدن آن در هر دو تیر می گردد.
۴. در نواحی وضوح اثر میرایی در تیر اول، دامنه ارتعاشات با مقدار پیدا کردن ضریب میرایی نسبت به حالت صفر بودن آن، عمدتاً کاهش می یابد (مشابه جاذب ارتعاش).
۵. در صورت صفر بودن میرایی و سفتی ناچیز، نقطه میانی تیر دوم خیز ناچیزی دارد. افزایش سفتی خیز نقطه میانی تیر اول و دوم به ترتیب کاهش و افزایش می دهد.
۶. افزایش شتاب، شکل کلی نمودارها را تغییر نمی دهد.
۷. افزایش شتاب خودرو می تواند باعث کم شدن سیکلها (هموارتر شدن نمودار) در تیر اول

می شود که افزایش خیز حداکثر بر اثر افزایش شتاب در شرایط سفتی ۳۰,۰۰۰ نیوتن بر متر برای لایه میانی، به شکل خفیف تری باز هم رخ داده است. اثر افزایش شتاب در هموارتر شدن نمودار در شتاب ۵ متر بر مجذور ثانیه در ناحیه حضور فقط نیروی چرخ جلو مشاهده می شود.

اثر افزایش شتاب بر کم شدن سرعت حذف اثر میرایی در نمودارهای خیز نقطه میانی تیر اول، در شتاب ۵ نیز مشخص است. افزایش شتاب، اختلاف سه نمودار سه میرایی را در سفتی ۳۰,۰۰۰ افزایش داده است (شکل ۴.پ).

شکل ۵.ث الی ۵.ح خیز نقطه میانی تیر دوم در شرایط عبور دو نیرو با شتاب ۵ متر بر مجذور ثانیه را نشان می دهد. افزایش شتاب از ۳ به ۵ متر بر مجذور ثانیه نیز، باعث افزایش قدر مطلق حداکثر خیز نقطه میانی تیر دوم شده است. این افزایش در هر چهار مقدار سفتی مشاهده می شود. جدول ۴ مقدار تقریبی قدر مطلق حداکثر خیز نقطه میانی تیر دوم در هر سه شتاب نشان می دهد. اثر کم افزایش شتاب در افزایش مقدار پارامتر مذکور، در این جدول مشهود است. از سویی افزایش دامنه ارتعاش در شتاب ۵ متر بر مجذور ثانیه نسبت به حالتی که خودروی عبوری دارای شتاب ۳ متر بر مجذور ثانیه است، در نواحی مختلف از نمودارهای خیز، نقطه میانی قابل رؤیت است.

با دقت به شکل های ۴.ث الی ۴.ج و ۵.ث الی ۵.ج و همچنین مقایسه ی این شکلها با شکل های ۳.ث الی ۳.ج مشاهده می شود که مشابه تیر اول، افزایش شتاب اثر تغییرات میرایی بر خیز نقطه میانی تیر دوم را افزایش می دهد.

۴- جمع بندی

خیز نقطه میانی دو تیر اوپلر- برنولی با لایه میانی ویسکوالاستیک بر اثر عبور نیروی محورهای یک خودروی مورد بررسی قرار گرفت. از روش بسط مودال با استفاده از توابع متعامد به حل معادلات دیفرانسیل مزبور پرداخته شده است. در فرآیند حل، با توجه به دشواری انتگرال های پارامتریک از یک رویه عددی جهت حل معادلات مزبور بهره گرفته شده است. این بررسی بر مبنای حل مسئله و پاسخ دینامیکی سازه در شتابها مختلف عبور نیروها و مقادیر مختلف سفتی و ضریب میرایی لایه ویسکوالاستیک انجام شده است؛ همچنین نتایج مزبور با استفاده از نتایج سایر

- [11] Bogacz R, Frischmuth K (2009) Vibration in sets of beams and plates induced by traveling loads. *Arch Appl Mech* 79(6): 509-516.
- [12] Zhen B, Luo W, Xu J (2014) Analysis of critical velocities for an Infinite Timoshenko beam resting on an elastic foundation subjected to a harmonic moving load. *Shock Vib* 2014: 9.
- [13] Seelig JM, Hoppmann IWH (1964) Impact on an elastically connected double-beam System. *J Appl Mech* 31(4): 621-626.
- [14] Chonan S (1976) Dynamical behaviours of elastically connected double-beam systems subjected to an impulsive load. *Bulletin of the JSME* 19(132).
- [15] Irie T, Yamada G, Kobayashi Y (1982) The steady - state response of an internally damped double - beam system interconnected by several springs. *J Acoust Soc Am* 71(5): 1155-1162.
- [16] Hamada TR, Nakayama HD, Hayashi K (1983) Free and forced vibrations of elastically connected double-beam systems. *Bulletin of the JSME* 26(221).
- [17] Oniszczuk Z (2000) Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system. *J Sound Vib* 232(2): 387-403.
- [18] Oniszczuk Z (2003) Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system. *J Sound Vib* 264(2): 273-286.
- [19] Li J, Hua H (2007) Spectral finite element analysis of elastically connected double-beam systems. *Finite Elem Anal Des* 43(15): 1155-1168.
- [20] Zhang YQ, Lu Y, Ma GW (2008) Effect of compressive axial load on forced transverse vibrations of a double-beam system. *Int J Mech Sci* 50(2): 299-305.
- [21] Kessel PG (1966) Resonances excited in an elastically connected double - beam system by a cyclic moving load. *J Acoust Soc Am* 40(3): 684-687.
- [22] Li YX, Sun LZ (2016) Transverse vibration of an undamped elastically connected double-beam system with arbitrary boundary conditions. *J Eng Mech* 142(2).
- [23] Foroozande S, Ariaei A (2016) Vibration analysis of multiple parallel Timoshenko beams with intermediate flexible connections subjected to a moving mass. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 6(2): 69-86. (in Persian)
- [24] Chen YH, Sheu JT (1994) Dynamic characteristics of layered beam with flexible core. *J Vib Acoust* 116(3): 350-356.
- شود و تأثیر قابل توجهی در افزایش خیز حداکثر ندارد.
۸. افزایش شتاب خودرو، باعث کاهش سرعت محو شدن اثر تغییرات میرایی بر اثر افزایش سفتی می شود.
۹. افزایش شتاب خودرو در تیر دوم، باعث افزایش دامنه ارتعاش در بسیاری از نواحی و عمدتاً باعث افزایش قدر مطلق حداکثر خیز نقطه میانی می شود.

۵- مراجع

- [1] Sun L (2001) A closed-form solution of a Bernoulli-Euler Beam on a viscoelastic foundation under harmonic line loads. *J Sound Vib* 242(4): 619-627.
- [2] Basu D, Kameswara Rao NSV (2013) Analytical solutions for Euler-Bernoulli beam on visco-elastic foundation subjected to moving load. *Int J Numer Anal Meth Geomech* 37(8): 945-960.
- [3] Wu Y, Gao Y (2015) Analytical solutions for simply supported viscously damped double-beam system under moving harmonic loads. *J Eng Mech* 141(7): 04015004.
- [4] Pavlović R, Kozić P, Pavlović I (2012) Dynamic stability and instability of a double-beam system subjected to random forces. *Int J Mec Sci* 62(1): 111-119.
- [5] Li YX, Hu ZJ, Sun LZ (2016) Dynamical behavior of a double-beam system interconnected by a viscoelastic layer. *Inter J Mech Sci* 105: 291-303.
- [6] Mathews PM (1959) Vibrations of a beam on elastic foundation II. *J Appl Math Mech Z Angew Math Mech* 39(1-2): 13-19.
- [7] Chonan S (1978) Moving harmonic load on an elastically supported timoshenko beam. *J Appl Math Mech Z Angew Math Mech* 58(1): 9-15.
- [8] Felszeghy SF (1996) The Timoshenko Beam on an elastic foundation and subject to a moving step load, Part 1: Steady-State Response. *J Vib Acoust* 118(3): 277-284.
- [9] Sun L (2003) An explicit representation of steady state response of a beam on an elastic foundation to moving harmonic line loads. *Int J Numer Anal Meth Geomech* 27(1): 69-84.
- [10] Muscolino G, Palmeri A (2007) Response of beams resting on viscoelastically damped foundation to moving oscillators. *Int J Solid Struct* 44(5): 1317-1336.

- [33] Kawazoe K, Kono I, Aida T, Aso T, Ebisuda K (1998) Beam-type dynamic vibration absorber comprised of free-free beam. *J Eng Mech* 124(4).
- [34] Kessel PG, Raske TF (1967) Damped response of an elastically connected double - beam system due to a cyclic moving load. *J Acoust Soc Am* 42(4): 873-881.
- [35] Hussein MFM, Hunt HEM (2006) Modelling of floating-slab tracks with continuous slabs under oscillating moving loads. *J Sound Vib* 297(1-2): 37-54.
- [36] Wu Y, Gao Y (2016) Dynamic response of a simply supported viscously damped double-beam system under the moving oscillator. *J Sound Vib* 384: 194-209.
- [37] Craig RR, Kurdila AJ (2006) *Fundamentals of structural dynamics*. 2nd edn. John Wiley & Sons, United States of America.
- [38] Olsson M (1991) On the fundamental moving load problem. *J Sound Vib* 145(2): 299-307.
- [39] Jeffrey A (2002) *Advanced engineering mathematics*. Academic Press, United States of America.
- [40] Wong JY (2001) *Theory of ground vehicles*. John Wiley & Sons, Inc.
- [25] Chen YH, Sheu JT (1995) Beam on viscoelastic foundation and layered beam. *J Eng Mech* 121(2).
- [26] Chen YH, Lin CY (1998) Structural analysis and optimal design of a dynamic absorbing beam. *J Sound Vib* 212(5): 759-769.
- [27] Vu HV, OrdÓÑez AM, Karnopp BH (2000) Vibration of a double-beam system. *J Sound Vib* 229(4): 807-822.
- [28] Abu-Hilal M (2006) Dynamic response of a double Euler-Bernoulli beam due to a moving constant load. *J Sound Vib* 297(3-5): 477-491.
- [29] Palmeri A, Adhikari S (2011) A Galerkin-type state-space approach for transverse vibrations of slender double-beam systems with viscoelastic inner layer. *J Sound Vib* 330: 6372-6386.
- [30] Abd MY, Putra A, Jalil NAA, Noorzaei J (2012) Effects of structural parameters on the dynamics of a beam structure with a beam-type vibration absorber. *Adv Acoust Vib* 2012: 10.
- [31] Dublin M, Friedrich HR (1956) Forced responses of two elastic beams interconnected by spring-damper systems. *J Aeronaut Sci* 23(9): 824-829.
- [32] Aida T, Toda S, Ogawa N, Imada Y (1992) Vibration control of beams by beam-type dynamic vibration absorbers. *J Eng Mech* 118(2).