



بررسی پدیده‌ی غیرخطی ولتاژ کشیدگی در میکروتیرهای هدفمند تحت بارگذاری الکترواستاتیک

عطیه اندخشیده^۱، ستار مالکی^{۱*} و سید صادق مرعشی^۲

^۱استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان

^۲دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۲/۱۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۳/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۱۸

چکیده

در این پژوهش به بررسی رفتار میکروتیرهای هدفمند، تحت بارگذاری الکترواستاتیک پرداخته شده است. مدل سیستم، براساس تیر اویلر-برنولی و تئوری وابسته به اندازه تنش ممان بهبود یافته استخراج شده است. انرژی پتانسیل کرنشی و انرژی پتانسیل الکتریکی با در نظر گرفتن تأثیرات تحریک الکترواستاتیک و کشیدگی لایه میانی برای مدل نوشته شده است. معادلات حاکم بر میکروتیر با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل استخراج شده‌اند. برای حل معادله غیرخطی حاکم بر آن، از روش مشتقات تریبیعی تعمیم یافته و روش نیوتن-رافسون استفاده شده است. به منظور استخراج ولتاژ کشیدگی از نتایج حل عددی، الگوریتمی توسعه داده شده است. در نتایج عددی پژوهش، تغییرات ولتاژ کشیدگی بر اثر توزیع سختی تیر هدفمند و فاصله اولیه میان تیر و سطح زیرین آن، مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش هر یک از متغیرهای سختی معادل تیر هدفمند و فاصله اولیه میکروتیر، ولتاژ کشیدگی افزایش پیدا می‌کند. در نتایج عددی، تأثیر نوع شرط مرزی بر ولتاژ کشیدگی میکروتیر نیز بررسی شده است.

کلمات کلیدی: میکروتیر؛ هدفمند؛ ولتاژ کشیدگی؛ بارگذاری الکترواستاتیک؛ بارگذاری غیرخطی.

Investigation of Nonlinear Pull-in Phenomena in Functionally Graded Micro-Beams under Electrostatic Excitation

A. Andakhshideh¹, S. Maleki^{1,*}, S. S. Marashi²

¹Assis Prof, Mech Eng, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

² M. Sc. Student, Mech Eng, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.

Abstract

In this research, the behavior of functionally graded micro-beams under electrostatic excitation is investigated. The system model is developed based on Euler-Bernoulli and Modified Couple Stress size-dependent theories. The potential strain energy and the potential electrostatic energy are written for the microbeam by considering, the effects of electrostatic excitation and mid-layer stretching. In order to solve the nonlinear governing equation, Generalized Differential Quadrature method and the Newton-Raphson method are used. To develop the pull-in voltage through the numerical results, a novel algorithm is developed. In numerical results of this research, the pull-in voltage variation with respect to the functionally graded micro-beam stiffness distribution and initial gap of micro-beam is studied. Results show that increasing the micro-beam equivalent stiffness or beams initial gap, will increase the pull-in voltage. The boundary conditions effect on the micro-beam pull-in voltage is also studied in the numerical results.

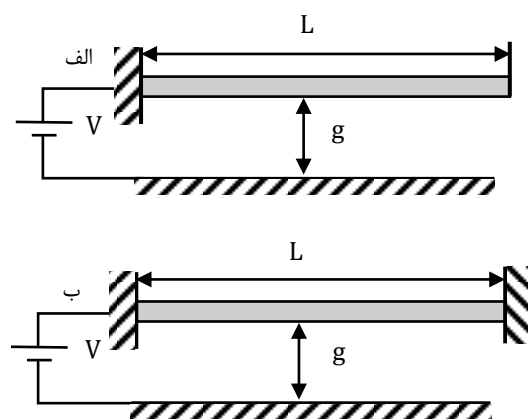
Keywords: Micro-beam; Functionally graded material; Pull-in Voltage; Electrostatic Loading; Nonlinear Loading.

۱- مقدمه

با ولتاژ مستقیم و کوچک بودن خیز ناشی از ولتاژ متناوب نسبت به خیز استاتیکی ناشی از ولتاژ مستقیم، نیروی الکترواستاتیک را خطی فرض کرده و برای سیستم، مدار الکتریکی مرتبه دو معادلی را در نظر گرفتند. آن‌ها همچنین سیستم جرم فنر دمیری، معادل سیستم اصلی استخراج و ارائه کردند. پامیدیگانت و همکاران [۴]، جهت تعیین دقیق ولتاژ کشیدگی، ضرایب مؤثر را در مدل یک بعدی ناتانسون جایگزین کردند. آن‌ها سختی مؤثر تیر، سطح مؤثر در بارگذاری الکترواستاتیک و کشش در اثر نیروی محوری را برای دو حالت تیر دوسرگیردار و یک سرگیردار، مورد بررسی قرار دادند.

به منظور ایجاد مدلی بر اساس تئوری مدارهای الکتریکی، اهن و همکاران [۵]، سیستمی برای تحلیل میکرو نوسانگرها به صورت جرم-فنر-دمپر، تحت بارگذاری الکترواستاتیک فرض کردند. آن‌ها پی بردند که افزایش ولتاژ مستقیم اعمالی، باعث کاهش فرکانس اصلی و ضریب کیفیت نوسانگر می‌شود که در نتیجه افزایش تلفات انرژی در نوسانگر را به همراه دارد. یونس و همکاران [۶]، با در نظر گرفتن اثر غیرخطی هندسی و نیروی غیر خطی الکترواستاتیک، مدلی براساس تیر اویلر-برنولی ارائه کردند. عبد الرحمن و همکاران [۷]، مدلی از تیری اویلر برنولی تحت بارگذاری الکترواستاتیک ارائه دادند، آن‌ها رفتار کشیدگی استاتیکی و ارتعاشات آزاد مدل ارائه شده را مورد بررسی قرار دادند و دریافته‌اند با انتخاب مناسب نسبت عرض فاصله اولیه به ضخامت تیر، می‌توان بازه رفتار خطی فرکانس اختلاف پتانسیل اعمالی را افزایش داد. صادقیان و همکاران [۸]، مدلی غیر خطی را با در نظر گرفتن نیروی الکترواستاتیکی، اثرات هاله‌ای میدان الکتریکی، نیروی محوری حاصل از تنش پسماند و نیروی محوری حاصل از تغییر طول لایه میانی طراحی کردند. در این پژوهش اثرات هریک از نیروها، مورد بررسی قرار گرفت و این نتیجه بدست آمد که نیروی حاصل از تنش پسماند، تاثیر بسیار زیادی در بالا بردن ولتاژ کشیدگی دارد. مجتهدی و همکاران [۹]، مدل پیوسته غیر خطی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در مدل خود، اثرات بارگذاری الکترواستاتیکی، کشیدگی غشایی لایه میانی و اعمال نیروی محوری را در نظر گرفتند. مدل در نظر گرفته شده با روش هموتویی اختلالات تحلیل شد. جواب‌های

سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی، به عنوان ابزارهای اندازه‌گیری و نوسان‌ساز در ابعاد میکرو به کار می‌روند. یکی از روش‌های دسته‌بندی سیستم‌ها، شیوه‌های تحریک آن‌ها است؛ به عنوان مثال می‌توان تحریک الکترواستاتیک، حرارتی و پیزوالکتریک را نام برد [۱]. در میان شیوه‌های مختلف تحریک، روش بارگذاری الکترواستاتیکی، به دلیل سادگی پیاده‌سازی و قابلیت انطباق با مدارات الکتریکی با اقبال خوبی مواجه شده است. در بارگذاری‌های الکترواستاتیکی، یک تیر در مقابل سطحی ثابت قرار گرفته است، مطابق شکل ۱، بین دو سطح اختلاف پتانسیل الکتریکی برقرار می‌شود. اختلاف پتانسیل الکتریکی اعمالی، باعث جذب دو سطح به یکدیگر می‌شود.



شکل ۱- الف) میکروتیر یکسرگیردار و ب) میکروتیر دوسرگیردار تحت بارگذاری الکترواستاتیک

با توجه به کاربرد وسیع مکانیزم بارگذاری الکترواستاتیکی، این مکانیزم توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. ناتانسون و همکاران [۲]، با هدف ارائه راهکاری برای طراحی اولیه این دسته از سیستم‌ها، آن را به صورت جرم و فنری یک درجه آزادی در نظر گرفتند که یک صفحه الکتروود به آن متصل است. آن‌ها در این حالت روابطی برای ولتاژ کشیدگی و ضریب کیفیت استخراج کردند. ایجنمتا و تیلمنز [۳]، با در نظر گرفتن تیر دو سرگیردار به بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی آن تحت اثر نیروی الکترواستاتیکی ایجاد شده توسط ولتاژ مستقیم و متناوب پرداختند. آن‌ها با فرض کوچک بودن ولتاژ متناوب در قیاس

میکروتیر به وجود آوردند و سپس با بارگذاری متناوب در میکروتیر ارتعاش به وجود آوردند. نتایج نشان داد که رفتار مدل آنالاستیک و ویسکوالاستیک در حالت کلی با یکدیگر متفاوت است، اما در شرایط خاص رفتاری مشابه از خود نشان می‌دهند. اعتمادی و همکاران [۱۸] رفتار میکروتیری وابسته به اندازه تحت تحریک الکترواستاتیک را که در سیال غوطه‌ور است با استفاده از تئوری آیرودینامیک سه بعدی، مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با بررسی ارتعاشات این میکروتیر دریافتند، تئوری آیرودینامیک سه بعدی در حضور اثرات وابسته به اندازه به خوبی می‌تواند وجود اختلاف فشار در دو طرف میکروتیر را پیش بینی کند. آن‌ها اثرات اختلاف فشار روی پاسخ فرکانسی میکروتیر را مورد بررسی قرار دادند. ملیحی و همکاران [۱۹] اثر نیروی بین مولکولی و اندروال و ناپایداری کشیدگی پیچشی-خمشی را در نانو آینه‌ها پیچشی، مورد بررسی قرار دادند. نتایج مدل ارائه شده توسط آن‌ها نشان داد که نیروی و اندروال اثر تعیین کننده‌ای در زاویه ناپایداری کشیدگی پیچشی دارد. حیدری [۲۰] به منظور بررسی پدیده کشیدگی ناپایداری در میکروتیر وابسته به اندازه تحت بارگذاری الکترواستاتیک از شبکه عصبی با انتشار معکوس استفاده کرد. او پس از راستی آزمایی داده‌های آموزشی شبکه نشان داد که روش استفاده شده، خطایی به اندازه ۶/۳۶٪ در پیش‌بینی ولتاژ کشیدگی دارد.

مواد هدفمند، دسته خاصی از مواد مرکب هستند که خواص آن‌ها به طور پیوسته تغییر می‌کند [۲۱]. اولین بار ایده مواد هدفمند در سال ۱۹۸۴ توسط گروه سدای هنگام طراحی پروژه‌های فضایی مطرح شد. سنکار [۲۲]، راه حلی بر مبنای تئوری الاستیسته برای تیرهای هدفمند ارائه کرد. ژانگ و یو [۲۳]، بر مبنای تئوری الاستیسته دو بعدی، راه حلی عمومی برای توزیع دلخواه خواص در تیرهای یکسرگیردار ارائه نمودند. قریب و همکاران [۲۴]، با مطالعه ساختارهای هوشمند، راه حلی تحلیلی برای تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند ارائه کردند. در مسئله مورد بررسی آن‌ها، لایه‌های پیزو الکتریک به منظور اندازه‌گیری و اعمال نیروی تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند، مورد استفاده قرار گرفته بود. کنگ و لی [۲۵]، اثرات غیرخطی ناشی از خیزهای بزرگ را در تیر یکسرگیردار ساخته شده از مواد هدفمند را بررسی و نتایج را با نتایج حاصل از خیزهای

حاصل با جواب‌های ارائه شده توسط سایر محققان مطابقت خوبی داشت.

تمامی پژوهش‌های ارزشمند فوق، براساس تئوری الاستیسته کلاسیک انجام شده است؛ اما آزمایش‌ها نشان داده با کاهش ضخامت تیر به اندازه‌ای که به آن طول مشخصه تیر گفته می‌شود، تغییر شکل الاستیک تیر از روابط الاستیسته کلاسیک پیروی نخواهد کرد [۱۰]. بر این اساس تئوری‌های وابسته به اندازه مختلفی مانند، گردایان کرنش بهبود یافته [۱۱] و تنش ممان بهبود یافته [۱۲] ارائه شده است تا رفتار ماده در ابعاد میکرو را توضیح دهند. در این تئوری‌ها علاوه بر کرنش، مشتقات کرنش نیز، در انرژی پتانسیل کرنشی لحاظ شده‌اند.

بر اساس تئوری‌های وابسته به اندازه کارهای پژوهشی ارزشمندی برای بررسی رفتار میکروتیر تحت اثر بار الکترواستاتیکی انجام شده است. پژوهش‌های انجام شده در این زمینه را می‌توان به دو بخش، بررسی رفتار استاتیکی و بررسی رفتار دینامیکی دسته بندی کرد.

رهایب فرد و همکاران [۱۳] کشیدگی استاتیکی میکروتیر یکسرگیردار تحت تاثیر بار الکترواستاتیکی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در مدل میکروتیر مورد بررسی خود، تئوری الاستیسته تنش ممان بهبود یافته را بکار بردند. تاتی و سینا [۱۴]، به بررسی کشیدگی استاتیکی میکروتیر هدفمند در بستر الاستیک پرداختند، آن‌ها اثر وابسته به اندازه را با استفاده از تئوری گرادین کرنش بهبود یافته در نظر گرفتند. در مدل آن‌ها از دو بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک استفاده شد. شن و همکاران [۱۵]، کشیدگی استاتیکی میکروتیری کامپوزیتی با لایه‌های پیزوالکتریک که تحت اثر بارگذاری الکترواستاتیکی قرار گرفته بود، مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از تئوری تنش ممان بهبود یافته استفاده کردند که برای مواد غیرهمسانگرد توسعه داده شده بود.

مختاری و طهانی [۱۶] رفتار دینامیکی ژيروسکوپ با ساختار میکروتیر دارای جرم متمرکز در وسط را تحت بارگذاری الکترواستاتیکی ناگهانی و تحریک هارمونیک پایه مورد بررسی قرار دادند. ویسی و همکاران [۱۷] ارتعاشات غیرخطی میکروتیری وابسته به اندازه با رابطه ساختاری ویسکو-آنالاستیک را تحت بارگذاری الکترواستاتیک، مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها ابتدا با بارگذاری مستقیم، خیزی در

در رابطه فوق σ_{ij} مولفه‌های تانسور تنش، ε_{ij} مولفه‌های تانسور کرنش، m_{ij} مولفه‌های بخش انحرافی تانسور تنش ممان و χ_{ij} مولفه‌های تانسور انحنای متقارن هستند. براساس تیر اویلر-برنولی میدان جابجایی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x) - z \frac{dw}{dx} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= w(x) \end{aligned} \quad (2)$$

در روابط فوق u_1 ، u_2 و u_3 به ترتیب، مولفه‌های بردار جابجایی در راستای x ، y و z هستند. $u(x)$ جابجایی محوری تار خنثی و $w(x)$ جابجایی عرضی تار خنثی است. تانسور کرنش با فرض تغییر شکل کوچک به صورت رابطه (۳) نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

با توجه به در نظر گرفتن اثرات غیرخطی هندسی، کرنش در میکروتیر به فرم غیرخطی (۴) نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du_3}{dx}\right)^2 \\ &= \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

مولفه‌های بردار دوران و تانسور انحنای متقارن از روابط (۵-۶) محاسبه می‌شوند.

$$\theta_i = \frac{1}{2} \text{Curl}(u)_i \quad (5)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2}(\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (6)$$

با جایگزینی بردار جابجایی در روابط فوق، مولفه‌های غیرصفر بردار دوران و تانسور انحنای متقارن به صورت خواهد بود.

$$\theta_y = -\frac{dw}{dx} \quad (7)$$

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (8)$$

مولفه‌های تانسور تنش و بخش انحرافی تانسور تنش ممان عبارتند از:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (9)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij} \quad (10)$$

در روابط فوق μ و λ ثوابت لامه و l طول مشخصه ماده در تئوری تنش ممان بهبود یافته است.

کوچک مقایسه کردند. ما و لی [۲۶]، تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول مدلسازی کردند و تحت بارگذاری حرارتی درون صفحه‌ای قرار دادند. از آن‌جا که در بسیاری عملگرها و سنج‌های ابعاد میکرو، عنصر ساختاری اصلی تغییر شکل میکروتیرها هستند، شناخت کامل بر رفتارهای آن‌ها کلید طراحی انواع ادوات میکرو به حساب می‌آید. با توجه به رواج زیاد بارگذاری الکترواستاتیکی در ابزارهای میکرو یکی از رفتارهای میکروتیرها که از اهمیت زیادی برخوردار بوده، پدیده کشیدگی استاتیکی است. این پدیده در مدل‌های مختلف میکروتیر توسط پژوهشگران مختلف، مورد بررسی قرار گرفته است. براساس مطالعات نویسنده تا کنون رفتار کشیدگی استاتیکی میکروتیرهای هدفمند بر اساس تئوری تنش ممان بهبود یافته، مورد مطالعه قرار نگرفته است. از طرفی با توجه به اینکه در تئوری تنش ممان بهبود یافته تنها به یک ثابت بیشتر نسبت به تئوری الاستیسیته کلاسیک نیاز بوده و تعداد آزمایش‌های لازم برای شناسایی خواص مواد نسبت به سایر تئوری‌های وابسته به اندازه کمتر است، آشنایی با این رفتار کلیدی در طراحی به حساب می‌آید؛ بنابراین بررسی کشیدگی استاتیکی میکروتیر هدفمند براساس تئوری تنش ممان بهبود یافته در ادامه سایر پژوهش‌های این موضوع، یک ضرورت به نظر می‌رسد. بر این اساس در مدل ارائه شده، میکروتیری هدفمند وابسته به اندازه با نیروهای غیرخطی الکترواستاتیکی و کششی لایه میانی در نظر گرفته شده است. اثر فاصله اولیه میکروتیر با سطح ثابت زیرین و توزیع خواص در سطح مقطع ماده هدفمند، روی ولتاژ کشیدگی، مورد مطالعه قرار گرفته است؛ همچنین منحنی‌های تغییرات ولتاژ کشیدگی بر حسب پارامترهای مدل ارائه شده است. در این پژوهش کشیدگی استاتیکی میکروتیری هدفمند بر اساس تئوری تنش ممان بهبود یافته با استفاده از الگوریتمی ابداعی، مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲- معادلات حاکم

براساس تئوری تنش ممان بهبود یافته [۱۲] انرژی پتانسیل کرنشی در میکرو تیر عبارت است از:

$$U_S = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{dw}{dx} \frac{d}{dx} \left[I_0 \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) - I_1 \frac{d^2w}{dx^2} \right] \\
 & + \frac{d^2}{dx^2} \left[(I_2 + \gamma) \frac{d^2w}{dx^2} - I_1 \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) \right] \\
 & = \frac{\epsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w)^2} \quad (17)
 \end{aligned}$$

در روابط فوق I_n و γ به صورت (۱۸-۱۹) محاسبه می‌شوند.

$$I_n = \int_A z^n E(z) dA \quad (18)$$

$$\gamma = l^2 \int_A \mu(z) dA \quad (19)$$

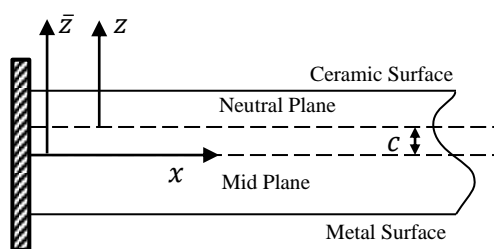
رابطه (۲۰) شیوه محاسبه خواص میکروتیر هدفمند را از محل صفحه میانی ارائه می‌دهد [۲۷].

$$P(\bar{z}) = (P_l - P_u) \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{z}}{h} \right)^k + P_u \quad (20)$$

در رابطه فوق \bar{z} فاصله از صفحه میانی، P_l مقدار خاصیت در صفحه پایینی میکروتیر، P_u مقدار خاصیت در صفحه بالایی میکروتیر، h ضخامت میکروتیر و k عددی غیر منفی بیان کننده توطیع خواص است.

با توجه به هدفمند بودن میکروتیر و تغییر خواص آن در راستای ضخامت (شکل ۲)، برخلاف میکروتیرهای همگن تاریخی بر صفحه میانی منطبق نمی‌باشد. برای محاسبه فاصله‌ی تار خنثی، مرکز الاستیک تیر، از صفحه میانی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲۸]

$$c = \frac{\int_A E(\bar{z}) \bar{z} dA}{\int_A E(\bar{z}) dA} \quad (21)$$



شکل ۲- میکروتیر هدفمند

بنابراین توزیع مدول یانگ و مدول برشی در ضخامت میکروتیر حول مرکز الاستیک آن به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$E(z) = (E_l - E_u) \left(\frac{1}{2} - \frac{z + C}{h} \right)^k + E_u \quad (22)$$

با استفاده از روابط (۱) تا (۱۰) انرژی پتانسیل کرنش میکروتیر مورد بررسی به صورت رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
 U_s = \frac{1}{2} \int_V \left[E(z) \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 - z \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \right. \\
 \left. + 4\mu(z) l^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 \right] dV \quad (11)
 \end{aligned}$$

میکروتیر مورد بررسی را می‌توان به صورت خازنی صفحه‌ای در نظر گرفت. بر این اساس انرژی پتانسیل الکترواستاتیک در میکروتیر، رابطه انرژی پتانسیل الکتریکی خازن صفحه‌ای محاسبه می‌شود.

$$U_E = \frac{1}{2} \int V^2 dC \quad (12)$$

در رابطه فوق V اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه خازن و dC ظرفیت جزء دیفرانسیلی خازن است. برای محاسبه ظرفیت جزء دیفرانسیلی خازن، از رابطه (۱۳) می‌توان استفاده کرد.

$$dC = \frac{\epsilon_0 dA}{g_0 - w(x)} = \frac{\epsilon_0 b dx}{g_0 - w(x)} \quad (13)$$

در این رابطه، ϵ_0 ضریب گذردهی الکتریکی خلاء، b عرض میکروتیر، g_0 فاصله اولیه میان دو صفحه میکروتیر و $w(x)$ خیز عرضی در تار خنثی میکروتیر است. با جایگزینی رابطه (۱۳) در رابطه (۱۲)، انرژی پتانسیل الکترواستاتیکی میکروتیر به صورت رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود.

$$U_E = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\epsilon_0 b V^2}{g_0 - w(x)} dx \quad (14)$$

در این پژوهش برای استخراج معادلات حاکم از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده شده است.

$$\delta U = \delta \int_V (U - W) dV = 0 \quad (15)$$

در رابطه فوق V حجم میکروتیر، U مجموع انرژی پتانسیل کرنشی و الکترواستاتیک و W کار خارجی است. با حل معادله تغییراتی فوق معادلات حاکم بر میکروتیر هدفمند تحت بارگذاری الکترواستاتیک و با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی به صورت روابط (۱۶-۱۷) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{dx} \left[I_0 \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) - I_1 \frac{d^2w}{dx^2} \right] = 0 \quad (16) \\
 & -\frac{d^2w}{dx^2} \left[I_0 \left(\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right) - I_1 \frac{d^2w}{dx^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$a_{ii}^{(n)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(n)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

با استفاده از روابط (۲۶) تا (۲۹)، گسسته‌سازی مسئله مورد بررسی به صورت روابط (۳۰) و (۳۱) انجام می‌شود. شرایط مرزی حاکم بر مسئله، روابط (۲۴) و (۲۵)، به ترتیب به صورت روابط (۳۲) و (۳۳) قابل گسسته‌سازی هستند.

رابطه (۳۲) شرط مرزی گسسته‌سازی شده برای میکروتیر دوسرگیردار و رابطه (۳۳)، شرط مرزی گسسته‌سازی شده برای میکروتیر یکسر گیردار است. برای بدست آوردن خیز میکروتیر در هر نقطه، دستگاه معادلات گسسته‌سازی شده به همراه شرایط مرزی همزمان حل می‌شوند؛ با توجه به غیرخطی بودن دسته معادلات حاصل، بایستی آن‌ها را خطی‌سازی کرد. در این پژوهش از روش نیوتن-رافسون برای حل معادلات جبری غیرخطی استفاده شده است. خطی‌سازی معادلات با استفاده از روش نیوتن رافسون بعد از گسسته‌سازی آن‌ها با روش مشتقات تربیعی بهبود یافته انجام می‌شود. در گسسته‌سازی معادلات با روش مشتقات تربیعی بهبود یافته، روابط (۳۰) تا (۳۳)، متغیرهای مسئله از $w(x)$ و $u(x)$ به w_1, w_2, \dots, w_N و u_1, u_2, \dots, u_n تبدیل می‌شوند. و معادلات از ۲ معادله به $2N$ معادله تبدیل می‌شوند که N تعداد نقاط گسسته‌سازی روی دامنه است؛ بنابراین در محاسبه ژاکوبین در روش نیوتن رافسون بایستی مشتق هریک از $2N$ معادله نسبت به $2N$ درجه آزادی محاسبه شود. (محاسبه این مشتقات در پیوست الف ارائه شده است.)

۴- بحث و بررسی نتایج

به منظور اعتبار سنجی روش ارائه شده، در شکل ۳، نتایج بدست آمده از روش حاضر با نتایج بدست آمده توسط عبدالرحمن و همکاران [۷] و حل انجام شده با استفاده از کد تجاری المان محدود COMSOL Multiphysics [۳۰] مقایسه شده‌است. در این مقایسه فرض شده، طول مشخصه ماده $l = 0$ باشد تا تئوری وابسته به اندازه به تئوری کلاسیک تبدیل شود؛ همچنین فرض شده که خواص صفحه بالایی و پایینی میکروتیر یکسان است و ماده هدفمند به ماده‌ای همگن تبدیل شده است. در این مقایسه از مدل

$$\mu(z) = (\mu_l - \mu_u) \left(\frac{1}{2} - \frac{z+C}{h} \right)^k + \mu_u \quad (23)$$

برای حل میکروتیر در حالت دوسر گیردار از شرایط مرزی (۲۴) و برای حل آن در حالت یکسر گیردار از شرایط مرزی (۲۵) استفاده می‌شود.

$$w_{x=0,L} = \frac{dw}{dx}_{x=0,L} = u_{x=0,L} = 0 \quad (24)$$

$$w_{x=0} = \frac{dw}{dx}_{x=0} = \frac{d^2w}{dx^2}_{x=L} = \frac{d^3w}{dx^3}_{x=L} = u_{x=0} = \frac{du}{dx}_{x=L} = 0 \quad (25)$$

۳- روش مشتقات تربیعی بهبود یافته

در این روش، تخمین تابع مجهول به صورت چند جمله‌ای فرض می‌شود. برای بدست آوردن چند جمله‌ای فرض شده از درونبایی لاگرانژ استفاده می‌شود. بر همین اساس برای مشتقات از ضرایب مشتق چند جمله‌ای درون یاب [۲۹] استفاده می‌شود. به این ترتیب، عملگر مشتق مرتبه n روی N نقطه دلخواه به صورت (۲۶) گسسته می‌شود.

$$f^{(n)}(x_i) \approx \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(n)} f(x_j) \quad (26)$$

در صورتی که $f(x)$ چند جمله‌ای باشد، رابطه (۲۶) به تساوی تبدیل می‌شود. ضرایب $a_{ij}^{(n)}$ برای حالت $n = 1$ استفاده از (۲۷) محاسبه می‌شوند.

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad i \neq j$$

$$a_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(1)} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (27)$$

که $M^{(1)}(x_i)$ را می‌توان از رابطه (۲۸) بدست آورد.

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (x_i - x_j) \quad (28)$$

ضرایب مشتقات مراتب بالاتر ($n > 1$)، مطابق رابطه (۲۹) بدست می‌آیند.

$$a_{ij}^{(n)} = n \left(a_{ii}^{(n-1)} - \frac{a_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad i \neq j$$

المان محدودی ۲ بعدی، با المان‌های مرتبه ۲ پتانسیل الکتریکی و جابجایی استفاده شده است. برای اعتبارسنجی پاسخ‌ها، خیز بیشینه تیر بر حسب تغییرات ولتاژ بررسی می‌شود.

$$-\sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} \left[I_0 \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} u_k + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k \right)^2 \right) - I_1 \sum_{k=1}^N D_{jk}^{(2)} w_k \right] = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} w_j \left[I_0 \left(\sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} u_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} w_j \right)^2 \right) - I_1 \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} w_j \right] \\ & - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} w_j \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} \left[I_0 \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} u_k + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k \right)^2 \right) - I_1 \sum_{k=1}^N D_{jk}^{(2)} w_k \right] \\ & + \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} \left[(I_2 + \gamma) \sum_{k=1}^N D_{jk}^{(2)} w_k - I_1 \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} u_k + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k \right)^2 \right) \right] \\ & - \frac{\epsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w_i)^2} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$w_{1,N} = \sum_{j=1}^N a_{1j}^{(1)} w_j = \sum_{j=1}^N a_{Nj}^{(1)} w_j = 0 \quad (32)$$

$$w_1 = \sum_{j=1}^N a_{1j}^{(1)} w_j = \sum_{j=1}^N a_{Nj}^{(2)} w_j = \sum_{j=1}^N a_{Nj}^{(3)} w_j = 0 \quad (33)$$

شرط مرزی به مسئله شرط اولیه تبدیل و با استفاده از حلگرهای رایج مسائل مقدار اولیه حل می‌شود. در این پژوهش با توجه به غیرخطی بودن، معادلات حاکم، بایستی مقدار مناسب شرایط اولیه جدید با استفاده از حلگرهای غیر خطی تخمین زده شود. در روش پرتابی با تبدیل مسئله شرط مرزی به مسئله شرط اولیه مفهوم فیزیکی شرایط اولیه از بین رفته و نسبت به روش استفاده شده در این پژوهش، دارای پیچیدگی‌های زیادی در پیاده‌سازی است.

علاوه بر این، روش جاری در مقایسه با روش اجزاء محدود، قابلیت پیاده‌سازی بسیار ساده‌تری دارد. همچنین با تغییر مسئله، برخلاف روش اجزاء محدود، نیازی به تعریف مجدد جزء حل ندارد و با تعریف مشتق ارائه شده در روش، امکان گسسته‌سازی معادلات به سادگی فراهم است. به عنوان مثال به علت پیچیدگی پیاده‌سازی المان جدید، با وجود اینکه استفاده از نظریه‌های الاستیسته وابسته به اندازه در زمینه‌های مختلف مکانیک رایج شده است، در نرم افزارهای

مسئله مورد بررسی شامل، تیر دو سرگیردار به طول $L = 400 \mu\text{m}$ ، عرض $b = 45 \mu\text{m}$ ، ضخامت $h = 2 \mu\text{m}$ و فاصله اولیه بین دوسطح $g = 1 \mu\text{m}$ است. در مدل استفاده شده برای راستی آزمایشی مدول یانگ $E = 165 \text{GPa}$ است. همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، جواب‌های ارائه شده در هر سه حل از توافق بالایی برخوردار هستند.

در این پژوهش برای تبدیل معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری از روش مشتقات تربیعی بهبود یافته استفاده شده است. در این روش از یک چند جمله‌ای با درجه بالا روی کل دامنه حل استفاده شده و دقت عددی بالایی ارائه می‌کند. برای مقایسه روش جاری با سایر روش‌ها، می‌توان نمونه به مقاله عبد الرحمن و همکاران [۷] اشاره کرد که در آن مدلی از تیری اوپلر برنولی تحت بارگذاری الکترواستاتیک با استفاده از روش پرتابی^۱ تحلیل نمودند. در این روش مسئله

^۱ Shooting Method

الکترواستاتیکی، خیز به طور ناگهانی افزایش پیدا کرده و مطابق آنچه در پژوهش‌های قبلی آمده است [۷]، باعث از کارافتادگی سیستم می‌شود.

جدول ۱- مشخصات هندسی میکروتیر مورد بررسی و ضریب گذردهی الکتریکی خلا [۳۱]

عنوان	مقدار
طول (L)	$500\mu m$
عرض (b)	$90\mu m$
ضخامت (h)	$6\mu m$
فاصله اولیه بین دو صفحه (g)	$2\mu m$
ضریب گذر دهی الکتریکی هوا (ϵ)	$8.8541 \frac{pF}{m}$

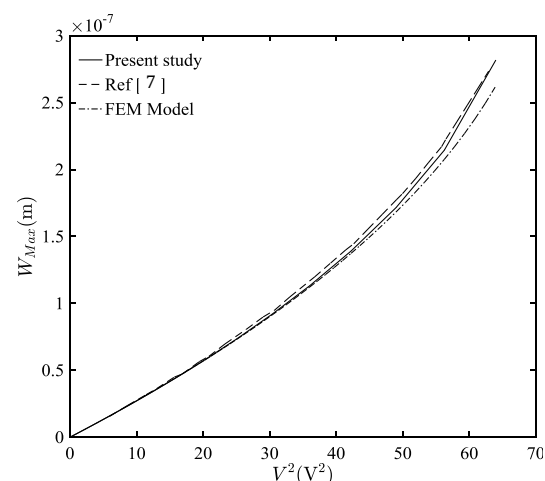
جدول ۲- خواص مواد به کار برده شده در میکروتیر هدفمند [۳۱]

مقدار		عنوان
فلز	سرامیک	
Aluminum (Al)	Alumina (Al_2O_3)	نام ماده
70 GPa	390 GPa	مدول یانگ (E)
0.228	0.220	ضریب پواسان (ν)
$2700 \frac{kg}{m^3}$	$3960 \frac{kg}{m^3}$	چگالی (ρ)

به این پدیده که باعث از کار افتادگی سیستم می‌شود، کشیدگی استاتیکی می‌گویند. از آنجا که نیروی الکترواستاتیک حاکم بر سیستم با معکوس مربع فاصله میان تیر و سطح زیرین آن متناسب است، نرخ رشد آن از نرخ رشد نیروی بازدارنده مکانیکی سیستم بیشتر است؛ در نتیجه با رشد سریع نیروی الکترواستاتیکی در نقطه ولتاژ کشیدگی امکان برقراری تعادل میان این دو نیرو وجود نداشته و سیستم دچار از کار افتادگی می‌شود.

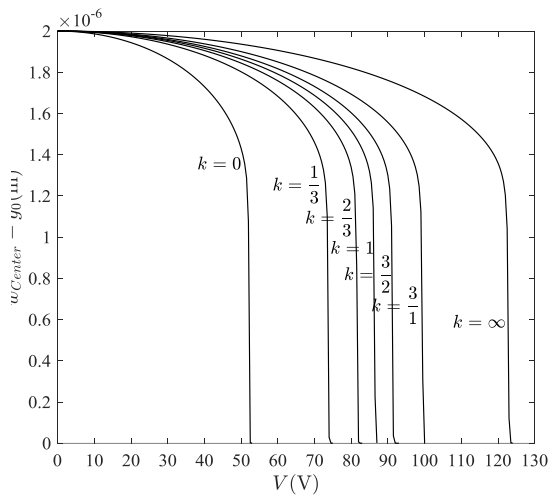
تجاری با کاربرد عمومی المان محدود، هنوز المان‌های وابسته به اندازه تعریف نشده‌اند.

ابعاد و خواص مکانیکی میکروتیر مورد بررسی در ادامه این پژوهش، در جدول ۱ و جدول ۲ ارائه شده است. از آنجا که نتایج آزمایشگاهی اندازه گیری طول مشخصه برای مواد هدفمند در پیشینه پژوهش موجود نیست، در بررسی میکرو ساختارهای هدفمند رایج است [۳۲-۳۳] طول مشخصه ماده را ثابت و حدود $l = 15\mu m$ در نظر می‌گیرند. بر همین اساس در این پژوهش نیز، طول مشخصه میکروتیر $l = 15\mu m$ در نظر گرفته شده است.

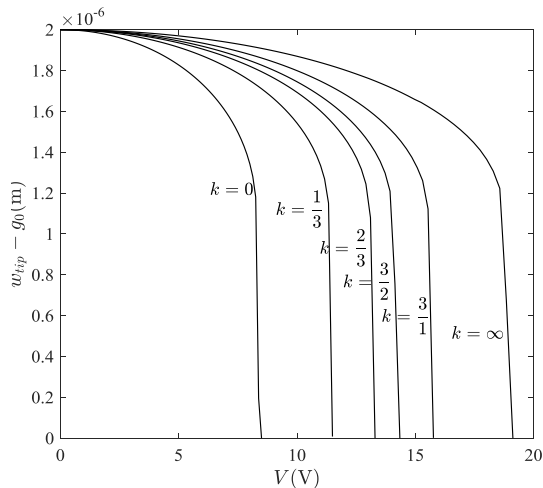


شکل ۳- بیشترین خیز بر حسب مجذور ولتاژ اعمالی

توزیع غیریکنواخت خواص در ماده هدفمند رفتار سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهد. در شکل‌های ۴ و ۵ توزیع چگالی و مدول یانگ در میکروتیر هدفمند، در راستای ضخامت نشان داده شده است. در حالت خاص $k = 0$ و $k = \infty$ ماده به حالت همگن تبدیل شده و خواص در تمامی نقاط به ترتیب برابر با خواص در سطح پایینی و بالایی تیر خواهند بود. با توجه به توزیع غیریکنواخت خواص و ماهیت غیرخطی بارگذاری‌های موجود در مسئله، در شکل ۶ و ۷ نمودار تغییرات فاصله نقطه میانی و انتهای میکروتیر از صفحه پایینی در ازای تغییرات ولتاژ در توزیع سختی‌های مختلف رسم شده است. با توجه به نیروهای غیرخطی اعمال شده در مسئله همانطور که در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است، با افزایش تدریجی ولتاژ اعمالی در بارگذاری

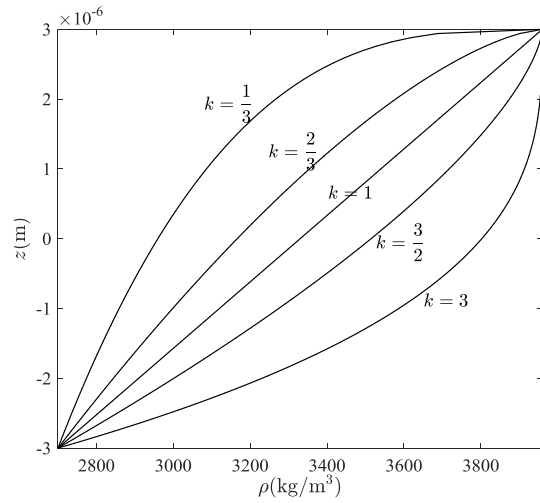


شکل ۶- تغییرات فاصله نقطه میانی میکروتیر از سطح زیری نسبت به ولتاژ اعمالی بین دو سطح در میکروتیر دوسر گیردار

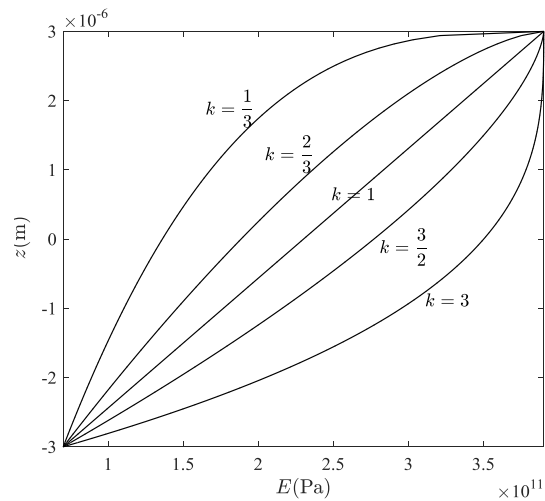


شکل ۷- تغییرات فاصله نقطه انتهایی میکروتیر از سطح زیری نسبت به ولتاژ اعمالی بین دو سطح در میکروتیر یکسر گیردار

به عنوان قید جابجایی تعریف شده و مساله بدست آوردن جابجایی در اثر ولتاژ اعمالی را به مسئله بدست آوردن ولتاژ لازم برای رسیدن به جابجایی دلخواه جایگزین می کنند. این روش پیچیدگی زیادی در پیاده سازی دارد. یکی دیگر از روش های رایج برای محاسبه عددی ولتاژ کشیدگی [۶]، تبدیل مسئله مقدار مرزی به مسئله مقدار



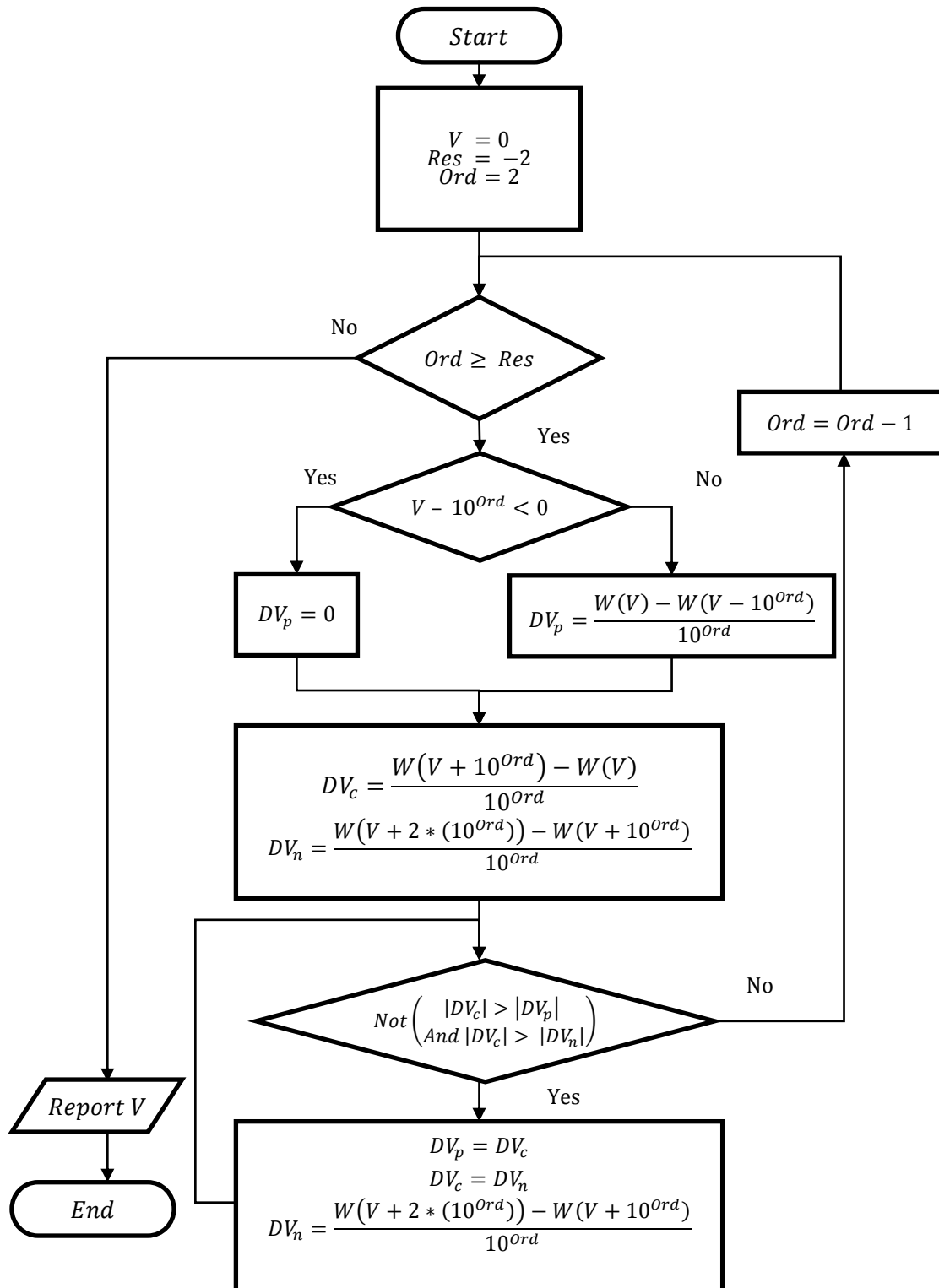
شکل ۴- توزیع چگالی نسبت به ضخامت



شکل ۵- توزیع مدول یانگ نسبت به ضخامت

با توجه به شکل های ۶ و ۷ می توان گفت، در نقطه کشیدگی جهت تقعر نمودار خیز-ولتاژ اعمالی عوض می شود. بر اساس این تغییر جهت تقعر در این پژوهش الگوریتمی برای استخراج ولتاژ کشیدگی با دقت مطلوب از نتایج حل عددی ارائه شده است (شکل ۸).

برای استخراج ولتاژ کشیدگی در پژوهش های عددی مرتبط با پدیده کشیدگی، از روش های متفاوتی استفاده می شود. با توجه به تکنیکی ماتریس ژاکوبین در نقطه ناپایداری، در نرم افزارهای اجزاء محدود [۳۰] معادله ای



شکل ۸- الگوریتم ارائه شده برای محاسبه‌ی ولتاژ کشیدگی

کم می‌شود. علت این امر آن است که در مواد هدفمند، بیشترین مقدار سفتی متعلق به ماده با سفتی بیشتر است و با رشد k تا ۲۰ ماده به حداکثر سفتی خود رسیده و پس از آن با افزایش مقدار k ، دیگر تغییر قابل توجهی در سفتی و در نتیجه ولتاژ کشیدگی اتفاق نمی‌افتد.

۳- با تغییر شرایط مرزی از یکسرگردار به دوسرگردار، ولتاژ کشیدگی تا ۶ برابر افزایش می‌یابد. علت این پدیده را می‌توان بیشتر بودن سفتی میکروتیر دوسرگردار در مقایسه با میکروتیر یکسرگردار بیان کرد.

به منظور بررسی اثر تغییر فاصله ابتدایی میان میکروتیر دوسرگردار و صفحه پایینی در ولتاژ کشیدگی، در شکل ۱۱ این تغییرات ترسیم شده‌اند.

در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود که افزایش فاصله اولیه از ۲ تا ۱۰ میکرون می‌تواند ولتاژ کشیدگی را تا ۶ برابر افزایش دهد. همانطور که در توضیح شکل ۹ و ۱۰ نیز ذکر شد، این اثر به خاطر رفتار غیر خطی نیروی الکترواستاتیکی است که با جابجایی میان میکروتیر و الکتروده رابطه معکوس دارد.

در شکل ۱۲ اثر طول مشخصه ماده بر ولتاژ کشیدگی، مورد بررسی قرار گرفته است. در این شکل تغییرات ولتاژ کشیدگی در اثر افزایش طول مشخصه ماده مطالعه شده است. به این ترتیب که طول مشخصه از $l = 0 \mu m$ که معادل تئوری الاستیسته کلاسیک است تا $l = 20 \mu m$ تغییر کرده و به ازای هر مقدار از آن ولتاژ کشیدگی در میکروتیر دوسرگردار محاسبه شده است. همانطور که در شکل ملاحظه می‌شود، با افزایش طول مشخصه ولتاژ کشیدگی نیز تا ۶ برابر افزایش پیدا کرده است. در سایر پژوهش‌های حوزه میکروتیرها گزارش شده است که افزایش متغیر وابسته به اندازه باعث افزایش سفتی میکروتیر می‌شود [۱۰-۱۲]؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که افزایش متغیر وابسته به اندازه باعث افزایش سفتی و در نتیجه افزایش ولتاژ کشیدگی استاتیکی می‌شود. این تغییر زیاد ولتاژ کشیدگی، اهمیت استفاده از تئوری‌های وابسته به اندازه را آشکار می‌کند.

اولیه و پس از آن از روش ادامه یابی طول کمان^۱ است. در این روش جواب مسئله به صورت تکرار شونده محاسبه می‌شود. در هر مرحله از اجرای الگوریتم با توجه مشتقات پاسخ بدست آمده و طول کمان در نظر گرفته شده، محدوده پاسخ‌های احتمالی جستجو می‌شود. به منظور جلوگیری از تکینگی جواب در این روش، مسئله بر حسب یک پارامتر ثانویه مثل طول کمان باز تعریف می‌شود.

دو روش ذکر شده، هر دو مسئله را به صورت یک مسئله ثانویه بازنویسی می‌کنند که پیچیدگی جدیدی در فرآیند حل ایجاد می‌کند. الگوریتم ارائه شده در این پژوهش، به صورت مستقیم بر اساس مشتق خیز نسبت به ولتاژ عمل می‌کند، از آنجا که مشتق‌گیری‌ها به صورت عددی انجام شده، مرحله جدیدی در تحلیل مسئله اضافه نمی‌شود. در مقابل، روش‌های غیرمستقیم توانایی استخراج جواب‌های غیرپایدار مسئله را نیز دارند؛ اما الگوریتم ارائه شده امکان محاسبه این جواب‌ها را ندارد.

در الگوریتم استخراج ولتاژ کشیدگی، پارامتر Res بیان کننده دقت عدد حاصل برای ولتاژ کشیدگی است، تابع W ، کد محاسبه کننده خیز سیستم در نقطه مورد بررسی در اثر ولتاژ اعمالی است.

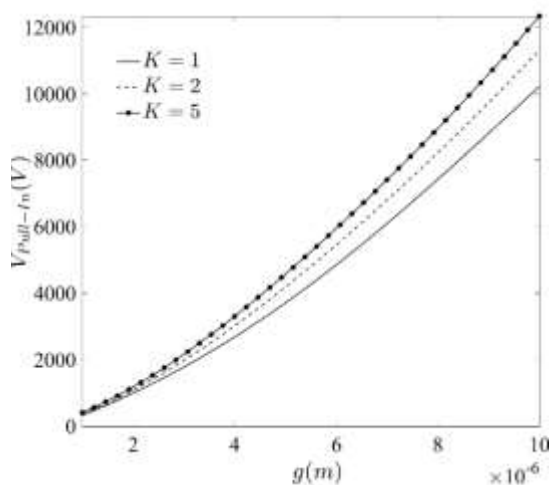
با استفاده از الگوریتم ارائه شده، در شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب نمودار تغییرات ولتاژ کشیدگی بر حسب تغییرات توزیع سختی، k ، در تیر دو سرگردار و یکسرگردار به ازای فواصل مختلف میان دو صفحه رسم شده است.

با بررسی شکل‌های ۹ و ۱۰ مشاهده می‌شود:

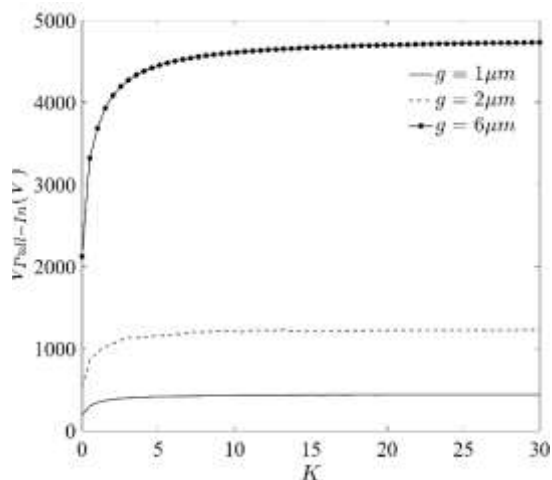
۱- افزایش فاصله اولیه تاثیر مستقیمی در افزایش ولتاژ کشیدگی دارد. مشاهده معادلات حاکم بر سیستم نیز، رخداد این پدیده را توجیه می‌کنند، به این صورت که نیروی الکترواستاتیکی که نیرویی غیرخطی است، نسبت معکوسی با فاصله میان میکروتیر و الکتروده دارد و با زیاد شدن مقدار فاصله اولیه اندازه این نیرو کاهش قابل توجهی دارد.

۲- بیشترین تغییرات کشیدگی با تغییر k در بازه ۰ تا ۲۰، اتفاق می‌افتد و پس از آن سرعت این تغییرات

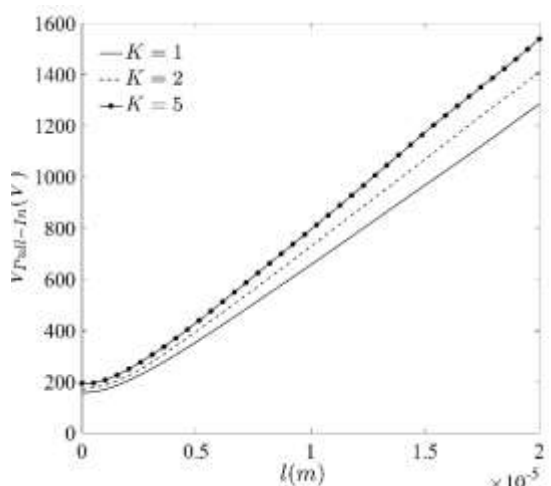
^۱ Pseudo-Arclength



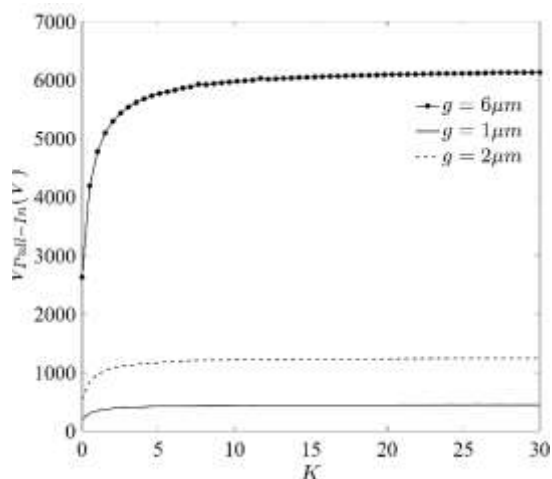
شکل ۱۱- تغییرات ولتاژ کشیدگی نسبت به فاصله اولیه در تیر دوسرگردار



شکل ۹- تغییرات ولتاژ کشیدگی نسبت به توان تابع توزیع سختی میکروتیر دوسرگردار



شکل ۱۲- تغییرات ولتاژ کشیدگی نسبت به طول مشخصه در تیر دوسرگردار



شکل ۱۰- تغییرات ولتاژ کشیدگی نسبت به توان تابع توزیع سختی میکروتیر یکسرگردار

با مقایسه نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود که روش حل ارائه شده قابلیت به کارگیری در حل مسائل کشیدگی را داراست.

در این پژوهش، تغییرات خیز تیر یکسرگردار و دوسرگردار با افزایش اختلاف پتانسیل اعمالی، مورد مطالعه قرار گرفت. با افزایش اختلاف پتانسیل اعمالی مشاهده شد که ابتدا خیز به صورت تدریجی افزایش پیدا می‌کند، اما پس از رسیدن اختلاف پتانسیل به مقدار ولتاژ کشیدگی در مدت زمان بسیار کوتاهی، نیروی الکترواستاتیک رشد زیادی داشته

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش پدیده کشیدگی در میکروتیر هدفمند غیرخطی براساس تئوری تنش ممان بهبود یافته، مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حاکم بر میکروتیر با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل و حساب تغییرات توسعه داده شدند. معادلات توسعه داده شده با روش مشتقات تریبیعی بهبود یافته گسسته سازی و با روش نیوتن-رافسون، خطی سازی و حل شدند. به منظور استخراج ولتاژ کشیدگی از الگوریتمی ابداعی (شکل ۸) استفاده شد.

کشیدگی سیستم، فاصله اولیه متغیر بسیار مهمی به حساب می‌آید و باید توجه ویژه به تعیین آن داشت.

با توجه به بررسی اثر توزیع سفتی و فاصله اولیه میکروتیر با سطح زیرین بر ولتاژ کشیدگی و ارائه مجموعه کاملی از نمودارها، پژوهش حاضر را می‌توان ابزار مناسبی برای تخمین ولتاژ کشیدگی در طراحی میکروتیرهای مشابه برشمرد.

۶- پیوست الف

در این پیوست جزئیات شیوه خطی سازی معادلات با روش نیوتن-رافسون بیان می‌شود. می‌توان معادلات حاکم گسسته سازی شده با استفاده از روش مشتقات تربیعی تعمیم یافته، روابط (۳۰) و (۳۱) به صورت معادلات ضمنی زیر بازنویسی کرد.

$$Eq_i^u(\bar{U}, \bar{W}) = 0 \quad (\text{الف-۱})$$

$$Eq_i^w(\bar{U}, \bar{W}) = 0 \quad (\text{الف-۲})$$

در روابط فوق \bar{U} و \bar{W} بردارهای درجه آزادی، Eq_i^u فرم ضمنی رابطه (۳۰) و Eq_i^w فرم ضمنی رابطه (۳۱) است.

$$\bar{U} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$$

$$\bar{W} = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T \quad (\text{الف-۳})$$

$$Eq_i^u(\bar{U}, \bar{W}) = - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} \left[I_0 \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} u_k + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k \right)^2 \right) - I_1 \sum_{k=1}^N D_{jk}^{(2)} w_k \right] \quad (\text{الف-۴})$$

$$Eq_i^w(\bar{U}, \bar{W}) = - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} w_j \left[I_0 \left(\sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} u_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} w_j \right)^2 \right) - I_1 \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} w_j \right] - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} w_j \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} \left[I_0 \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} u_k + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k \right)^2 \right) - I_1 \sum_{k=1}^N D_{jk}^{(2)} w_k \right] + \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} \left[(I_2 + \gamma) \sum_{k=1}^N D_{jk}^{(2)} w_k - I_1 \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} u_k + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k \right)^2 \right) \right] - \frac{\epsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w_i)^2} \quad (\text{الف-۵})$$

بنابراین در مسئله موجود ماتریس ژاکوبین به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial Eq_i^u}{\partial u_q} & \frac{\partial Eq_i^u}{\partial w_q} \\ \frac{\partial Eq_i^w}{\partial u_q} & \frac{\partial Eq_i^w}{\partial w_q} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۸})$$

درآیه‌های ماتریس ژاکوبین به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

و بر سفتی تیر به طور کامل غلبه می‌کند. با مقایسه نتایج ارائه شده برای خیز-اختلاف پتانسیل اعمالی مشاهده می‌شود که ولتاژ کشیدگی ارتباط مستقیمی با سفتی میکروتیر دارد و با افزایش سفتی، ولتاژ کشیدگی افزایش می‌یابد.

با استفاده از الگوریتم توسعه داده شده، اثر فاصله اولیه میان میکروتیر و سطح زیرین آن و توزیع سفتی در میکروتیر هدفمند بر ولتاژ کشیدگی، مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج بدست آمده نشان داد که با افزایش سفتی میکروتیر، ولتاژ کشیدگی آن افزایش پیدا می‌کند. بر اساس نتایج بدست آمده مشاهده شد که در شرایط برابر، ولتاژ کشیدگی میکروتیر دو سرگیردار تا ۶ برابر بیشتر از ولتاژ کشیدگی میکروتیر یکسر گیردار است.

در این پژوهش اثر متغیر وابسته به اندازه بر ولتاژ کشیدگی استاتیکی، مورد مطالعه قرار گرفت و نشان داده شد که با افزایش متغیر وابسته به اندازه، ولتاژ کشیدگی افزایش پیدا می‌کند.

در بررسی اثر فاصله اولیه بر ولتاژ کشیدگی نشان داده شد که با افزایش فاصله اولیه میکروتیر با سطح زیرین مقدار ولتاژ کشیدگی به صورت چشمگیری افزایش پیدا می‌کند. از مشاهدات انجام شده می‌توان نتیجه گرفت، در کنترل ولتاژ

اگر فرم ضمنی دستگاه معادلات غیرخطی به صورت $F(\bar{x}) = 0$ باشد. با استفاده از روش نیوتن-رافسون به صورت زیر می‌توان آن را حل کرد.

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J(x^{(k-1)})^{-1} F(x^{(k-1)}) \quad (\text{الف-۶})$$

در رابطه فوق ژاکوبین J به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (\text{الف-۷})$$

$$\frac{\partial E q_i^u}{\partial u_q} = -I_0 \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} D_{jq}^{(1)} \quad \text{(الف-۹)}$$

$$\frac{\partial E q_i^u}{\partial w_q} = - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} \left[I_0 \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k \right) D_{jq}^{(1)} - I_1 D_{jq}^{(2)} \right] \quad \text{(الف-۱۰)}$$

$$\frac{\partial E q_i^w}{\partial u_q} = - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} w_j (I_0 D_{iq}^{(1)}) - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} w_j \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} [I_0 D_{jq}^{(1)}] - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} I_1 D_{jq}^{(1)} \quad \text{(الف-۱۱)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E q_i^w}{\partial w_q} = & -D_{iq}^{(2)} \left[I_0 \left(\sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} u_j + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} w_j \right)^2 \right) - I_1 \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} w_j \right] \\ & - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} w_j \left[I_0 D_{iq}^{(1)} \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} w_j - I_1 D_{iq}^{(2)} \right] \\ & - D_{iq}^{(1)} \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} \left[I_0 \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} u_k + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k \right)^2 \right) - I_1 \sum_{k=1}^N D_{jk}^{(2)} w_k \right] \\ & - \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} w_j \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(1)} \left[I_0 D_{jq}^{(1)} \sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k - I_1 D_{jq}^{(2)} \right] \\ & + \sum_{j=1}^N D_{ij}^{(2)} \left[(I_2 + \gamma) D_{jq}^{(2)} - I_1 D_{jq}^{(1)} \sum_{k=1}^N D_{jk}^{(1)} w_k \right] + \frac{\epsilon_0 b V^2 \delta_{iq}}{(g_0 - w_i)^3} \quad \text{(الف-۱۲)} \end{aligned}$$

[8] Sadeghian H, Rezazadeh G, Osterberg PM (2007) Application of the Generalized Differential Quadrature Method to the Study of Pull-In Phenomena of MEMS Switches, *J Microelectromech Syst* 16(6): 1334-1340.

[9] Mojahedi M, Moghimi M, Ahmadian MT (2010) Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method. *Appl Math Model* 34(4): 1032-1041.

[10] McFarland AW, Colton JS (2005) Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *J Micromech Microeng* 15(5): 1060-1067.

[11] Lam DCC, Yang F, Chong ACM, Wang J, Tong P (2003) Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J Mech Phys Solids* 51(8): 1477-1508.

[12] Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P (2002) Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int J Solids Struct* 39(10): 2731-2743.

[13] Rahaeifard M, Kahrobaian MH, Asghari M, Ahmadian MT (2011) Static pull-in analysis of microcantilevers based on the modified couple stress theory. *Sensor Actuat A-Phys* 171(2): 370-374.

[14] Taati E, Sina N (2018) Static pull-in analysis of electrostatically actuated functionally graded

۷- مراجع

[1] Senturia SD (2002) *Microsystem Design*. Kluwer Academic Publishers, Boston.

[2] Nathanson HC, Newell WE, Wickstrom RA, Davis JR (1967) The resonant gate transistor. *IEEE Trans Electron Devices* 14(3): 117-133.

[3] Ijntema DJ, Tilmans HA (1992) Static and dynamic aspects of an air-gap capacitor. *Sensor Actuat A-Phys* 35(2): 121-128.

[4] Pamidighantam S, Puers R, Baert K, Tilmans HA (2002) Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated beam structures with fixed-fixed and fixed-free end conditions. *J Micromech Microeng* 12(4): 458-464.

[5] Ahn Y, Guckel H, Zook JD (2001) Capacitive microbeam resonator design. *J Micromech Microeng* 11(1): 70-80.

[6] Younis MI, Abdel-Rahman EM, Nayfeh AH (2003) A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS, *J Microelectromech Syst* 12(5): 672-680.

[7] Abdel-Rahman EM, Younis MI, Nayfeh AH (2002) Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam, *J Micromech Microeng* 12(6): 759-766.

- [24] Gharib A, Salehi M, Fazeli S (2008) Deflection control of functionally graded material beams with bonded piezoelectric sensors and actuators. *International Conference on Recent Advances in Composite Materials (ICRACM 2007)* 498(1-2): 110-114.
- [25] Kang YA, Li XF (2009) Bending of functionally graded cantilever beam with power-law non-linearity subjected to an end force. *Int J Nonlinear Mech* 44(6): 696-703.
- [26] Ma LS, Lee DW (2012) Exact solutions for nonlinear static responses of a shear deformable FGM beam under an in-plane thermal loading. *Eur J Mech A-Solid* 31(1): 13-20.
- [27] Şimşek M, Kocatürk T (2009) Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Compos Struct* 90(4): 465-473.
- [28] Li L, Hu Y (2016) Nonlinear bending and free vibration analyses of nonlocal strain gradient beams made of functionally graded material. *Int J Eng Sci* 107: 77-97.
- [29] Shu C (2000) *Differential quadrature and its application in engineering*. Springer, London.
- [30] Comsol, MEMS Module (2015) *User's guide*, Version 5.2.
- [31] Abbasnejad B, Rezazadeh G (2012) Mechanical behavior of a FGM micro-beam subjected to a nonlinear electrostatic pressure. *Int J Mech Mater Des* 8(4): 381-392.
- [32] Ansari R, Gholami R, Shojaei MF, Mohammadi V, Sahmani S (2013) Size-dependent bending, buckling and free vibration of functionally graded Timoshenko microbeams based on the most general strain gradient theory. *Compos Struct* 100: 385-397.
- [33] Ke LL, Wang YS (2011) Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory. *Compos Struct* 93(2): 342-350.
- micro-beams based on the modified strain gradient theory. *Int J Appl Mech* 10(03): 1850031.
- [15] Shen J, Wang H, Zheng S (2018) Size-dependent pull-in analysis of a composite laminated micro-beam actuated by electrostatic and piezoelectric forces: Generalized differential quadrature method. *Int J Mech Sc* 135: 353-361.
- [16] Mokhtari Amir Majdi MA, Tahani M (2018) Size-dependent analysis of micro-bridge gyroscopes under the combined effects of instantaneous DC voltage and harmonic base excitations. *Modares Mechanical Engineering* 18(01): 231-238. (in Persian)
- [17] Veysi Gorgabad A, Rezazadeh Gh, Shabani R (2017) A Study on the Nonlinear Vibrations of Electrostatically Actuated Micro Beams with Anelastic Stress-Strain Behavior. *Modares Mechanical Engineering* 17(6): 197-206. (in Persian)
- [18] Etemadi H, Fathalilou M, Shabani R, Rezazadeh Gh (2017) A study on the size-dependent behavior of electrostatic microbeams immersed in incompressible fluid. *Modares Mechanical Engineering* 17(1): 185-192. (in Persian)
- [19] Malihi S, Tadi Beni Y, Golestanian H (2017) Modeling the Influence of Van der Waals Force on the Size-dependent Pull-in Instability of Torsional Nano-actuator Using Torsion/bending Model. *Tabriz University Journal of Mechanical Engineering* 47(1): 295-304. (in Persian)
- [20] Heidari M (2015) Estimation of pull-in instability voltage of Euler-Bernoulli micro beam by back propagation artificial neural network. *Int J Nano Dimens* 6(5): 487-500.
- [21] Koizumi M (1993) Functionally gradient materials the concept of FGM. *Ceram Trans* 34: 3-10.
- [22] Sankar BV (2001) An elasticity solution for functionally graded beams. *Compos Sci Technol* 61(5): 689-696.
- [23] Zhong Z, Yu T (2007) Analytical solution of a cantilever functionally graded beam. *Compos Sci Technol* 67(3-4): 481-488.