



استفاده از نیروهای وارد بر وصله‌های تحلیل ایزوژئومتریکی جهت محاسبه تنش بهبود یافته و برآورد توزیع خطا

بهرروز حسنی^۱ و احمد گنجعلی^{۲*}

^۱ دانشیار گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد
^۲ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

در این مقاله، یک روش جدید جهت محاسبه میدان تنش تحلیل ایزوژئومتریکی بیان می‌شود. در این روش با بکارگیری نیروهای وارد بر هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریکی، سطح مربوط به هر مولفه تنش با استفاده از توابع شکل نریز هم مرتبه با توابع مورد استفاده در تخمین تابع جابجایی، تقریب زده می‌شود. این سطح تنش جدید نسبت به تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی دارای دقت بیشتری است، لذا می‌توان از آن جهت برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریکی نیز استفاده نمود. این برآورد کننده خطا در دسته روش‌های مبتنی بر بازیافت تنش قرار می‌گیرد و نشان داده خواهد شد که کارایی بهتری نسبت به روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا در تحلیل ایزوژئومتریکی خواهد داشت. جهت بررسی صحت این روش به مدل‌سازی و تحلیل سه مسئله الاستیسیته دارای حل تحلیلی و مقایسه نتایج به دست آمده از این روش با روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا و حل دقیق پرداخته شده است. نتایج به دست آمده از تمامی مثال‌ها نشان دهنده کارایی مناسب این روش می‌باشد و بر این اساس می‌توان از این روش نیز به عنوان یک روش ساده و موثر دیگر جهت بهبود تنش و برآورد خطا در روش ایزوژئومتریکی نام برد.

کلمات کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریکی؛ بهبود تنش؛ برآورد خطا؛ تکنیک نریز.

۱- مقدمه

عددی توسعه یافته اند که از جمله مهمترین آنها می‌توان به روش‌های تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته روش‌های موسوم به روش‌های بدون مش اشاره کرد. از میان این روش‌ها، روش اجزای محدود به عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و توسعه یافته است. این روش در دهه ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت و امروزه با

تحلیل سازه از اولین گام‌های شناخت و ارزیابی صحیح مسایل مهندسی به شمار می‌رود. این تحلیل در نهایت منجر به حل معادلات دیفرانسیلی می‌شود که در حالت کلی دارای پیچیدگی بسیار زیادی است و تنها با استفاده از روش‌های عددی قابل حل می‌باشد. در دهه‌های اخیر روش‌های مختلف

خلاصه از مزایای روش ایزوژئومتریک^۸ در مقایسه با دیگر روش‌های عددی می‌توان به مواردی چون، امکان مدلسازی دقیق تر، دقت قابل ملاحظه در اقلان شریط مرزی، عدم نیاز به شبکه بندی مجدد در مسائلی که مدل هندسی در حین حل دچار تغییر می‌شود، کاهش قابل ملاحظه اندازه دستگاه معادلات، انعطاف پذیری و سادگی در مسائل بهبود شبکه و قابلیت استفاده از این روش در حل معادلات دیفرانسیلی که ضرائب آنها خود تابعی متغیر می‌باشند، اشاره کرد [۵]. در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتریک به سرعت در زمینه‌های مختلفی همچون دینامیک سیالات، مکانیک سازه‌ها و یا الکترومغناطیس توسعه داده شده است. همچنین در این زمینه یک کتاب به چاپ رسیده است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به آن مراجعه نمود [۶].

خطا بخش جدانشدنی تحلیل‌های عددی به شمار می‌رود و همواره باعث نگرانی محققین در قابلیت اعتماد نتایج بوده است. از اولین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شد، مقاله‌هایی است که توسط ریچاردسون^۹ در سال ۱۹۱۰ نوشته شده است. روش ریچاردسون در تخمین خطا از این حقیقت پیروی می‌کند که خطا در هر طرحی از تفاوت محدود، معمولاً به اندازه مش‌های مورد استفاده بستگی دارد [۷]. کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ و توسط بابوشکا^{۱۰} و رینبولت^{۱۱} آغاز شد [۸ و ۹]. روش آن‌ها که روش باقیمانده‌ای نام گرفت بر این اساس بود که با قرار دادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادله دیفرانسیل اولیه و محاسبه مانده آن و نیز محاسبه پرش میدان گرادیان در لبه‌ها، تخمینی از خطای حل اجزای محدود به دست می‌آید. دسته دیگر از روش‌های برآورد خطا، روش‌های بازیافت تنش می‌باشند که طبق تحقیقاتی که بابوشکا در سال ۱۹۹۴ توسط آزمون وصله خود انجام داد، پی برد که این روش‌ها در مقایسه با روش‌های باقیمانده‌ای از دقت و همگرایی بهتری برخوردار می‌باشند [۱۰ و ۱۱]. به طور کلی بازیافت تنش روشی به منظور بالا بردن دقت و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش به دست

کاهش عیوب و ادغام آن با روش‌های تفاضل محدود و بدون مش بسیاری از مشکلات دانشمندان مکانیک محاسباتی را مرتفع ساخته است. اما علی‌رغم این پیشرفت قابل ملاحظه، هنوز هم نمی‌توان روشی را یافت که بتوان آن را کامل و بدون نقص نامید. از جمله این نواقص و مشکلات می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسایل دارای هندسه پیچیده، ضعف در مدلسازی دقیق مسائل با تغییرات شدید در خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المانها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، اشاره نمود.

تقریباً یک دهه پس از شکل‌گیری روش اجزای محدود و بین سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ و به دلیل توسعه رایانه‌ها، پیشرفت‌های چشمگیری در علم مدلسازی هندسه به کمک رایانه^۱ شکل گرفت. واضح است که تحلیل مسائل مهندسی بر مبنای هندسه استوار است و استفاده از این پیشرفت‌ها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل مهندسی در رفع نقایص خود نماید، اما به دلیل عدم هم‌زمانی پیدایش روش اجزای محدود و روش‌های طراحی به کمک رایانه، این اتصال بین تحلیل مهندسی و طراحی به کمک رایانه به وجود نیامد.

از اولین تلاش‌هایی که برای ورود تکنیک‌های طراحی به کمک رایانه در تحلیل مهندسی صورت پذیرفت در سالهای ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ و توسط کیگان^۲ و هولیگ^۳ انجام شد [۱-۳]؛ که در آن به جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود، از توابع پایه اسپلاین^۴ استفاده شده بود. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نریز^۵ (بی-اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت)^۶ که از توسعه توابع اسپلاین به دست می‌آیند توسط هیوز^۷ و همکارانش [۴] تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک نام گرفت. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپلاین و نریز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، همانند توابع شکل در روش اجزای محدود، از آنها جهت درون‌یابی و تقریب‌سازی هم استفاده می‌شود. به طور

^۱ Computer Aided Design

^۲ Kagan

^۳ Hollig

^۴ Spline

^۵ NURBS

^۶ Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)

^۷ Hughes

^۸ Isogeometric

^۹ Richardson

^{۱۰} Babuska

^{۱۱} Rheinboldt

باز یافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریکی، توسط حسینی و همکاران ارائه شد [۵]. اساس روش آنها، مشابه روش SPR در اجزای محدود، برگرفته از خاصیت فوق همگرایی تنش در نقاط انتگرال گیری گوسی است. یکی از ویژگی‌های روش ارائه شده در این پژوهش، عدم نیاز به نقاط فوق همگرا در برآورد خطای مسائلی است که از روشی به غیر از روش گوس جهت انتگرال گیری عددی استفاده می نمایند. جهت بررسی کارایی این روش، نرم خطاهای انرژی دقیق و تقریبی به دست آمده با روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا و روش ارائه شده در این پژوهش مقایسه شده‌اند. تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده، تیر طره تیموشنکو^۸ و صفحه ترکدار تحت کشش، سه مسئله حل شده در این پژوهش می‌باشند. نتایج نشان می‌دهد که در تمامی مثال‌ها، توزیع خطا با استفاده از این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا، به توزیع خطای دقیق نزدیکتر است و تنش بهبود یافته به دست آمده از این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا از دقت بیشتری برخوردار است.

۲- بی - اسپلاین و نربز

در این بخش به طور خلاصه و در حد نیاز، به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی-اسپلاین و نربز پرداخته می‌شود. برای آشنایی بیشتر، مراجعه به مراجع [۲۲ و ۲۳] پیشنهاد می‌شود.

نربزها از بی-اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی-اسپلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه)^۹ تعریف می‌شوند. نواحی مذکور دامنه مدلسازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گرهی^{۱۰} در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به صورت زیر تشکیل می‌شود [۲۳].

$$\Xi = \left\{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1} \right\}, \quad (1)$$

$$\xi_{i+1} \geq \xi_i \quad i = 1, 2, \dots, n+p+1$$

که در آن ξ_i آمین گره، p مرتبه چند جمله ای و n تعداد توابع شکل تشکیل دهنده بی-اسپلاین به شمار می‌رود. انواع مختلفی از بردارهای گره ای وجود دارد ولی در این بحث

آمده از تحلیل عددی مسائل می‌باشد. با استفاده از باز یافت تنش، یک جواب نزدیک به حل دقیق محاسبه شده که دقت بالاتری نسبت به حل اولیه خواهد داشت. از جمله ابتدایی ترین روش‌های باز یافت تنش در اجزای محدود می‌توان به روش میانگین گیری که توسط هینتن^۱ و کمپبل^۲ در سال ۱۹۷۴ [۱۲] و روش تصویر L_2 که توسط اودن^۳ و براچلی^۴ در سال ۱۹۷۱ [۱۳] به کار برده شده، اشاره کرد. اصلی ترین گام در روش‌های باز یافت تنش در سال ۱۹۹۲ توسط زینکویچ^۵ و زو^۶ [۱۴] با روش SPR^۷ برداشته شد. اساس این روش بر مبنای استفاده از نقاطی به نام نقاط فوق همگرا در اجزای محدود است که در آنها تنش به دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط دارای دقت بیشتری است. بعد از آن استفاده از قید معادلات تعادل جهت بهبود کارایی روش SPR دنبال شد [۱۵-۲۱]. با توجه به عدم ارضای معادلات تعادل توسط تنش باز یافتی به دست آمده از روش SPR بویژه در نزدیک مرزها، در این روش‌ها با استفاده از قید معادلات تعادل، سعی بر بهبود کارایی برآورد کننده خطا شده است.

در روش ایزوژئومتریکی نیز با وجود استفاده از تکنیک نربز در مدلسازی دامنه مسئله و حذف خطای مدلسازی هندسه، عدم اطمینان نسبت به نتایج به دست آمده از برآورد جابجایی با توابع شکل نربز وجود دارد. این عدم اطمینان نسبت به نتایج به دست آمده برای تنش‌ها بیشتر است، زیرا در این روش نیز میدان کرنش و تنش حاکم بر مسئله، با مشتق گیری از میدان جابجایی به دست آمده از حل تقریبی محاسبه می‌شود، که این امر باعث کاهش مرتبه همگرایی تنش نسبت به جابجایی می‌شود. در این پژوهش با استفاده از نیروهای وارد بر هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریکی، روش دیگری برای محاسبه تنش معرفی می‌شود که دارای دقت بیشتری است. با استفاده از این سطح تنش بهبود یافته نیز می‌توان به برآورد توزیع خطای دامنه مدلسازی شده پرداخت. لازم به ذکر است که اولین روش برآورد خطا بر مبنای

¹ Hinton

² Campbell

³ Oden

⁴ Brauchli

⁵ Zienkiewicz

⁶ Zhu

⁷ superconvergent patch recovery

⁸ Timoshenko

⁹ Patch

¹⁰ Knot Vector

به طوری که بردار گره ای Ξ دارای $r+1$ گره و \mathcal{H} دارای $s+1$ گره می‌باشد.

یک منحنی نریز از درجه p به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad a \leq \xi \leq b \quad (7)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره ای به صورت رابطه (۷) تعریف شده اند.

در نهایت، یک سطح نریز که در جهت ξ از درجه p ، و در جهت η از درجه q باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}, \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (8)$$

در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می‌باشد که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره ای به صورت رابطه (۶) تعریف شده اند. در رابطه (۸) اگر توابع پایه ای نسبی قطعه‌ای را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (9)$$

خواهیم داشت:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (10)$$

در شکل ۱ شبکه نقاط کنترلی و سطح نریز به دست آمده از آن مشاهده می‌شود.

فقط از نوع خاصی از بردارهای گره ای به نام بردارهای گره ای نامتناوب^۱ (یا باز)^۲ استفاده می‌کنیم. این نوع بردارها به شکل زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (2)$$

در این صورت آمین تابع پایه ای بی-اسپلاین از درجه p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی-اسپلاین از درجه p به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (4)$$

$C(\xi)$ یک منحنی چند جمله ای قطعه ای (Piecewise polynomial curve) است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین هستند که روی بردار گره ای نامتناوبی به صورت رابطه (۲) با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می‌شوند. اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آنگاه می‌توان رابطه $m = n + p + 1$ را برای آن‌ها نوشت.

به طرز مشابهی سطوح بی-اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (5)$$

که در آن:

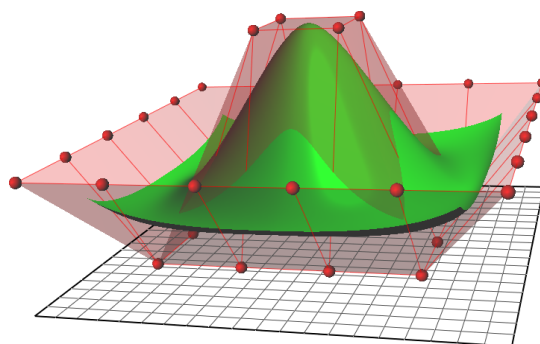
$$\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}; \quad (6)$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$$

¹ Nonperiodic knot vector

² Open

با توجه به خاصیت بازه تاثیر توابع نرَبز که بیان می‌کند برای هر η و ξ فقط تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می‌باشند [۲۳]، می‌توان برای کاهش هزینه محاسبات، معادله (۱۱) را به صورتی که در ادامه بیان خواهد شد، تغییر داد. بدین منظور اگر فرض کنیم η و ξ به ترتیب در دهانه‌های گره‌ای i ام و j ام قرار دارند (یعنی $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ و $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1}]$)، و درجه‌ی توابع پایه‌ای در جهت بردار گره ای Ξ ، p و در جهت بردار گره‌ای \mathcal{H} ، q باشند، آن‌گاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)$ تابع پایه‌ای غیر صفر وجود خواهد داشت. در این صورت هر المان نرَبز تنها بر تعداد مشخصی از نقاط کنترلی پیرامون خود تاثیرگذار است. به طور مثال در شکل ۲ شبکه المان‌ها و نقاط کنترلی دامنه مدلسازی شده با چهار وصله توسط توابع پایه نرَبز درجه سه نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود هر المان نرَبز در بازه تاثیر خود دارای $(3+1)(3+1)=16$ نقطه کنترلی می‌باشد.



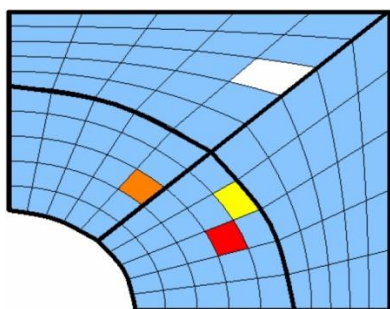
شکل ۱- شبکه نقاط کنترلی و سطح نرَبز مربوط به آن

۳- فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریک

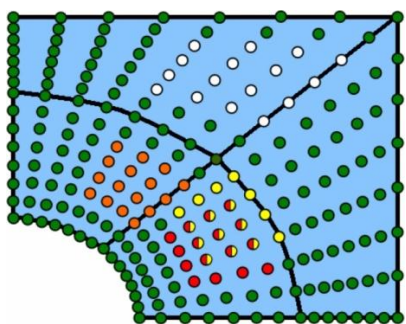
به‌طور کلی در روش ایزوژئومتریک، مقدار مجهول مسئله در حالت دوبعدی، (به طور مثال مولفه‌ی تغییر مکان جهت x) به عنوان یک سطح نرَبز، طوری تعیین می‌شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هر نقطه از دامنه، بیان‌کننده‌ی مقدار مجهول مسئله در آن مکان باشد. در مسائل تنش و کرنش مسطح، اگر نقاط کنترلی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که مولفه‌های اول و دوم مختصات این نقاط (P_x, P_y) ، بتوانند هندسه مسئله را در صفحه xy برآورد کنند، در این صورت مولفه‌ی سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می‌کنیم که درونیایی بین این نقاط به وسیله توابع پایه‌ی نرَبز نشان دهنده‌ی تغییر مکان آن نقطه باشد. در حقیقت می‌توان رویه‌ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه‌ی xy نشان دهنده‌ی هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحه xy نشان دهنده‌ی تغییر مکان آن نقطه باشد. بنابراین اگر تغییر مکان در جهت x و y را به ترتیب با u و v نشان دهیم، می‌توان تغییر مکان هر نقطه در داخل زیر دامنه نرَبز (وصله) را به‌صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درونیایی کرد:

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u, i,j} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v, i,j} \end{array} \right\} \quad (11)$$

در رابطه‌ی بالا $\mathbf{P}_{i,j}$ ها نمایشگر بردار مولفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نرَبز، $R_{i,j}$ توابع پایه‌ای نرَبز و m و n تعداد نقاط کنترلی در جهت‌های x و y می‌باشند.



الف) شبکه المانها



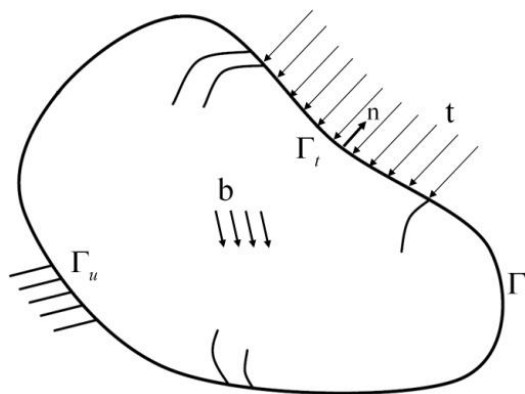
ب) شبکه نقاط کنترلی

شکل ۲- نقاط کنترلی مورد تاثیر هر المان از دامنه مدلسازی شده با چهار وصله و توابع شکل نرَبز درجه سه

که در آن L عملگر مشتق می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (17)$$

و σ ، u و b به ترتیب بردارهای تنش، جابجایی و نیروی‌های حجمی می‌باشند. t نیروهای سطحی از پیش تعیین شده بر روی مرز طبیعی Γ_t و \hat{u} جابجایی از پیش تعیین شده بر روی مرز ضروری Γ_u و n بردار یک‌عمود بر هر نقطه از مرز طبیعی و به سمت خارج سطح می‌باشد (شکل ۳ را ببینید).



شکل ۳- شرایط مرزی یک مسئله الاستیسیته دو بعدی

با جایگذاری معادله (۱۳) در (۱۶) و با استفاده از روش تغییر مکان مجازی و یا روش مینیمم کردن تابع پتانسیل صورت ضعیف معادله (۱۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega} B^T (DBP) d\Omega - \int_{\Omega} R^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} R^T t d\Gamma = 0 \quad (18)$$

که در آن R و P مطابق با روابط (۱۴) و (۱۵)، D ماتریس خواص مصالح و B ماتریس مشتقات توابع شکل نریز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = LR = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial y} & \frac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial x} & \dots \end{bmatrix} \quad (19)$$

با توجه با خاصیت بازه تاثیر توابع نریز می‌توان معادله (۱۱) را به صورت معادله‌های (۱۲) و (۱۳) بیان نمود:

$$u \approx \bar{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi,\eta) P_{u k,l} \\ \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi,\eta) P_{v k,l} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{u} = RP \quad (13)$$

که در آن R ماتریس توابع پایه‌ای نسبی نریز و P ماتریس ستونی مختصات نقاط کنترلی به صورت زیر هستند:

$$R = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi,\eta) \\ \vdots & \vdots \\ R_{i-p,j}(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j}(\xi,\eta) \\ \vdots & \vdots \\ R_{i,j}(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & R_{i,j}(\xi,\eta) \end{bmatrix}^T \quad (14)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{u i-p,j-q} \\ P_{v i-p,j-q} \\ \vdots \\ P_{u i-p,j} \\ P_{v i-p,j} \\ \vdots \\ P_{u i,j} \\ P_{v i,j} \end{bmatrix} \quad (15)$$

با توجه به رابطه (۱۳) مشاهده می‌شود که تنها پارامتر مجهول برای تعیین سطح تغییر مکان در جهت x و y بردار P می‌باشد. محدودیتی که بردار مولفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نریز را مشخص می‌کند، ارضای معادله دیفرانسیل تعادل در فضای تاثیر هر المان نریز در تحلیل ایزوژئومتریک است.

معادله دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی نیرو و جابجایی حاکم بر یک مسئله الاستیسیته دو بعدی را می‌توان به صورت رابطه (۱۶) تعریف نمود:

$$\begin{aligned} L^T \sigma + b &= 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma n &= t & \text{on } \Gamma_t \\ u &= \hat{u} & \text{on } \Gamma_u \end{aligned} \quad (16)$$

در صورتی که مطابق رابطه (۲۴)، F_{Ω} را به عنوان نیروهای حجمی و سطحی وارد بر وصله جدا شده از کل دامنه مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی فرض کنیم، رابطه (۲۳) را می‌توان به صورت رابطه (۲۵) بیان نمود:

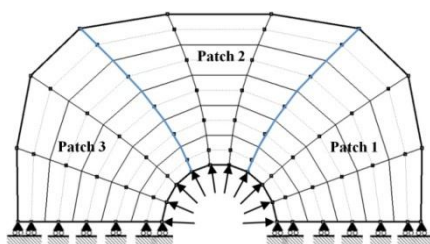
$$F_{\Omega} = \int_{\Omega_p} R^T b d\Omega + \int_{\Gamma_p} R^T t d\Gamma \quad (24)$$

$$\int_{\Omega_p} B^T (DBP) d\Omega = F_{\Omega} - F_{\Omega-\Omega_p} \quad (25)$$

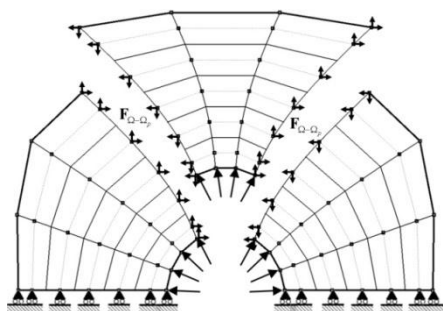
حال در صورتی که $f = F_{\Omega} - F_{\Omega-\Omega_p}$ را به عنوان کل نیروهای وارد شده بر وصله جدا شده در نظر بگیریم و معلوم فرض کنیم، می‌توان وصله جدا شده را به عنوان یک سیستم مجزا در نظر گرفت و معادله تعادل (۱۶) را به صورت زیر برای آن بیان نمود:

$$\int_{\Omega_p} B^T (\sigma) d\Omega = f = F_{\Omega} - F_{\Omega-\Omega_p} \quad (26)$$

که در آن σ میدان تنش دقیق حاکم بر مسئله می‌باشد. با مقایسه روابط (۲۶) و (۲۵) می‌توان رابطه (۲۷) را نتیجه گرفت.



الف) شبکه نقاط کنترلی و دامنه مدلسازی شده با سه وصله



ب) وصله جدا شده و نیروهای وارد بر آن

شکل ۴- مدلسازی یک مسئله دوبعدی در روش ایزوژئومتریکی

همچنین می‌توان معادله (۱۸) را به صورت زیر بیان نمود:

$$KP = F \quad (20)$$

که در آن K ماتریس ضرایب (ماتریس سختی)، P مجهولات مسئله (مختصه سوم نقاط کنترلی) و F نیروهای خارجی وارد بر دامنه می‌باشند. حال با گسسته سازی دامنه، K و F به ترتیب از گردآوری ماتریس سختی و بردار نیروی هر المان از فضای پارامتری، مطابق با رابطه (۲۱) ساخته می‌شوند:

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^T (DB) d\Omega ; \quad (21)$$

$$F_e = \int_{\Omega_e} R^T b d\Omega + \int_{\Gamma_e} R^T t d\Gamma$$

و در نهایت با حل معادله (۲۰) و مشخص شدن بردار P می‌توان مولفه‌های کرنش و تنش را به صورت روابط زیر به دست آورد:

$$\varepsilon = BP ; \quad \sigma = D\varepsilon \quad (22)$$

۴- محاسبه سطح تنش بهبود یافته

به طور کلی در این روش، مشابه روشهایی که جهت بهبود میدان تنش اجزای محدود در مراجع [۱۸ و ۲۱] ارائه شده است، با معادل قرار دادن نیروهای عمل کننده بر یک وصله از فضای محاسباتی به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی و میدان تنش بازیافتی، می‌توان برای هر مولفه تنش به یک سطح تنش بهبود یافته دست یافت.

همانطور که در بخش قبل بیان شد، رابطه سازی تحلیل ایزوژئومتریکی و نحوه به دست آمدن سطح جایجایی به گونه ای است که با ارضای معادله تعادل در فضای تاثیر هر یک از المانهای تحلیل ایزوژئومتریکی، تعادل در کل دامنه مدلسازی شده برقرار می‌شود. در صورت وجود تعادل در کل دامنه، هر وصله نیز از دامنه مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی نیز در شرایط تعادل قرار دارد. به این ترتیب می‌توان معادله (۱۸) را برای یک وصله مجزا از کل دامنه مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی، به صورت زیر بیان نمود:

$$\int_{\Omega_p} B^T (DBP) d\Omega - \int_{\Omega_p} R^T b d\Omega - \int_{\Gamma_p} R^T t d\Gamma + F_{\Omega-\Omega_p} = 0 \quad (23)$$

که در آن $F_{\Omega-\Omega_p}$ ، مطابق شکل ۴، نیروهای عمل و عکس العمل بین وصله جدا شده و کل دامنه مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی می‌باشد.

$$\mathbf{P}_\alpha^* = \begin{bmatrix} P_{\alpha i-p, j-q} \\ P_{\alpha i-p, j-q-1} \\ \vdots \\ P_{\alpha i-p, j} \\ P_{\alpha i-p-1, j} \\ \vdots \\ P_{\alpha i, j} \end{bmatrix} \quad (30)$$

حال با جایگذاری σ^* در معادله (۲۷) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\sigma^*) d\Omega = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\mathbf{DBP}) d\Omega \quad (31)$$

در صورتی که مولفه‌های تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی در هر وصله را نیز به صورت معادله (۳۲) در نظر بگیریم، سمت راست معادله (۳۱)، یعنی نیروهای وارد هر وصله را می‌توان به صورت معادله (۳۳) بیان نمود:

$$\sigma_{iso} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\mathbf{DBP}) d\Omega = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\sigma_{iso}) d\Omega = \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_{xy} \quad (33)$$

به طور مشابه، برای میدان تنش بازیافتی نیز خواهیم داشت:

$$\sigma^* = \begin{bmatrix} \sigma_x^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_y^* \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xy}^* \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\sigma^*) d\Omega = \mathbf{F}_p^* = \mathbf{F}_x^* + \mathbf{F}_y^* + \mathbf{F}_{xy}^* \quad (35)$$

در اینصورت می‌توان معادله (۳۱) را به صورت روابط (۳۶) و (۳۷) بیان نمود:

$$\mathbf{F}_x^* = \mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y^* = \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_{xy}^* = \mathbf{F}_{xy} \quad (36)$$

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \sigma_\alpha^* d\Omega = \left(\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \mathbf{1}^\alpha \mathbf{R}^* d\Omega \right) \mathbf{P}_\alpha^* = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \sigma_\alpha^{iso} d\Omega; \alpha = x, y, xy \quad (37)$$

که در آن $\mathbf{1}^\alpha$ ، برای هر مولفه تنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\sigma) d\Omega = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\mathbf{DBP}) d\Omega \quad (27)$$

رابطه بالا محدودیتی است که به طور مستقیم بر میدان تنش دقیق حاکم بر مسئله وارد می‌شود. حال میدان تنش حاکم بر مسئله را، همانند سطوح مفروض برای جابجایی، به صورت سطوح نریز با مختصه سوم مجهول نقاط کنترلی فرض می‌کنیم. بردار مختصات سوم نقاط کنترلی با استفاده از محدودیت معادله (۲۷) به دست خواهد آمد. واضح است که این سطوح تنش بازیافتی نسبت به سطوح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی دارای دقت بیشتری خواهند بود. زیرا همانطور که در معادله (۲۷) مشاهده می‌شود، این سطوح تنش بازیافتی با انتگرال گیری مستقیم به دست می‌آید و مرتبه آن نسبت به سطوح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی که از مشتق گیری میدان جابجایی محاسبه می‌شود، بالاتر است.

مطابق رابطه (۲۸) هر مولفه از میدان تنش بازیافتی در حالت دو بعدی، به صورت یک سطح نریز به همراه بردار نقاط کنترلی با مولفه سوم مجهول فرض می‌شود. مولفه اول و دوم نقاط کنترلی، معلوم و هندسه مسئله را تعیین می‌کنند:

$$\sigma^* = \begin{bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^* \mathbf{P}_x^* \\ \mathbf{R}^* \mathbf{P}_y^* \\ \mathbf{R}^* \mathbf{P}_{xy}^* \end{bmatrix} \quad (28)$$

مشابه روابط (۱۴) و (۱۵) که از خاصیت بازه تاثیر توابع نریز استفاده شده است، در رابطه (۲۸) نیز، \mathbf{R}^* به صورت رابطه (۲۹) و \mathbf{P}_α^* برای هر مولفه تنش α به صورت رابطه (۳۰) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} R_{i-p, j-q}(\xi, \eta) \\ R_{i-p, j-q-1}(\xi, \eta) \\ \vdots \\ R_{i-p, j}(\xi, \eta) \\ R_{i-p-1, j}(\xi, \eta) \\ \vdots \\ R_{i, j}(\xi, \eta) \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_\alpha^* = \left[\mathbf{C}_\alpha^T \mathbf{C}_\alpha + \sum_{e=1}^{Nel} (\mathbf{C}_\alpha \mathbf{C}_\alpha)_e \right]^{-1} \times \left[\mathbf{C}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha^{iso} + \sum_{e=1}^{Nel} (\mathbf{C}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha^{iso})_e \right] \quad (45)$$

در ادامه جهت درک بهتر این روش، مراحل گام به گام تشکیل بردار نقاط کنترلی سطح تنش بهبود یافته هر مولفه تنش به صورت زیر ارائه می‌شود:

۱- استفاده از انتگرال گیری عددی به روش گوس جهت محاسبه ماتریس C در معادله (۴۰). برای این منظور باید مراحل زیر دنبال شود:

الف) محاسبه مولفه‌های ماتریس محلی توابع شکل \mathbf{R}^* در نقاط گوسی هر المان

ب) محاسبه مولفه‌های ماتریس محلی \mathbf{B}^T در نقاط گوسی

ج) محاسبه حاصل جمع، ضرب ماتریس‌های معادله (۴۰) در ژاکوبین و وزن نقاط گوسی هر المان.

۲- استفاده از انتگرال گیری عددی به روش گوس جهت محاسبه بردار نیروهای \mathbf{F}_α^{iso} هر مولفه تنش در معادله (۴۱). برای این منظور باید مراحل زیر دنبال شود:

الف) محاسبه مولفه‌های بردار تنش هر مولفه تنش در نقاط گوسی هر المان

ب) محاسبه حاصل جمع، ضرب بردار تنش به دست آمده از مرحله الف) در ماتریس محلی \mathbf{B}^T به دست آمده از مرحله قبل، ژاکوبین و وزن نقاط گوسی هر المان

۳- جمع بردارها و ماتریس‌های محاسبه شده در مرحله قبل برای کل المان‌های هر ناحیه و تشکیل رابطه (۴۵) برای محاسبه بردار نقاط کنترلی هر مولفه تنش

لازم به ذکر است که با وجود هزینه بیشتر این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا در به دست آوردن تنش بازیافتی، این افزایش هزینه به دلیل استفاده از خاصیت بازه تاثیر توابع نریز در تشکیل سطح تنش بازیافتی در این روش نسبت به سطح تنش بازیافتی ارائه شده در مرجع [۵]، تا حدی کاهش یافته است.

با توجه به دقیق‌تر بودن سطح تنش بازیافتی نسبت به سطح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی می‌توان از آن به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتریکی استفاده نمود. روش کار این تخمین کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین

$$\mathbf{I}^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}^y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

در رابطه (۳۷) نیروهای حاصل از هر مولفه تنش تحلیل ایزوژئومتریکی یک وصله، با نیروهای مولفه‌های تنش بازیافتی برابر قرار داده شده است. این تساوی برای هر مولفه تنش به صورت تقریبی، با استفاده از روش حداقل مربعات و تعریف تابع Π به صورت زیر برقرار می‌گردد:

$$\Pi = \left[\mathbf{C}_\alpha \mathbf{P}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha^{iso} \right]^T \left[\mathbf{C}_\alpha \mathbf{P}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha^{iso} \right] \quad (39)$$

که در آن:

$$\mathbf{C}_\alpha = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \mathbf{1}^\alpha \mathbf{R}^* d\Omega \quad (40)$$

$$\mathbf{F}_\alpha^{iso} = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{iso} d\Omega \quad (41)$$

با کمینه کردن تابع Π خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{P}_\alpha^*)}{\partial (P_{i,j})_\alpha} = 0 \quad (42)$$

$$\mathbf{P}_\alpha^* = \left[\mathbf{C}_\alpha^T \mathbf{C}_\alpha \right]^{-1} \left[\mathbf{C}_\alpha^T \mathbf{F}_\alpha^{iso} \right] \quad (43)$$

با مشخص شدن بردار نقاط کنترلی برای هر مولفه تنش، سطح تنش مربوط به آن نیز به دست می‌آید که در ادامه نشان داده خواهد شد این سطح تنش بازیافتی نسبت به سطح تنش ایزوژئومتریکی و سطح تنش بازیافتی مبتنی بر نقاط فوق همگرا دقیق‌تر است.

همانطور که در معادله (۴۳) مشاهده می‌شود، برای به دست آوردن بردار نقاط کنترلی هر مولفه تنش، نیاز به محاسبه معکوس ماتریس $[\mathbf{C}_\alpha^T \mathbf{C}_\alpha]$ می‌باشد. این ماتریس برای بعضی از مسائل با تعداد المانهای کم در هر وصله، معکوس ناپذیر می‌شود. بنابراین برای اطمینان از معکوس پذیری این ماتریس و پایداری معادله (۴۳) در تمامی مسائل، مطابق معادله (۴۴)، قید معادلات تعادل در داخل هر المان از یک وصله به معادله (۳۹) اضافه می‌شود:

$$\Pi = \left[\mathbf{C}_\alpha \mathbf{P}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha^{iso} \right]^T \left[\mathbf{C}_\alpha \mathbf{P}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha^{iso} \right] + \sum_{e=1}^{Nel} \left[\mathbf{C}_\alpha \mathbf{P}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha^{iso} \right]_e^T \left[\mathbf{C}_\alpha \mathbf{P}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha^{iso} \right]_e \quad (44)$$

که در آن، Nel تعداد المان‌های موجود در هر وصله می‌باشد. در این صورت با کمینه کردن تابع Π ، صورت دیگری از معادله (۴۳) به شکل زیر به دست می‌آید:

این صورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۴]:

$$\|\tilde{e}\|_e = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

که در اینجا $\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بازیافتی و $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المان‌ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می‌دهد. برای بعضی مسائل خاص که حل دقیق مسئله موجود است می‌توان علاوه بر نرم خطای انرژی تقریبی، نرم خطای انرژی دقیق را نیز به دست آورد. نسبت نرم خطای تقریبی کل دامنه به نرم خطای دقیق آن، بیانگر همگرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه گر خطا می‌باشد که این نسبت شاخص تأثیر محاسبه گر خطا نامیده می‌شود و مطابق زیر نمایش داده می‌شود [۲۴]:

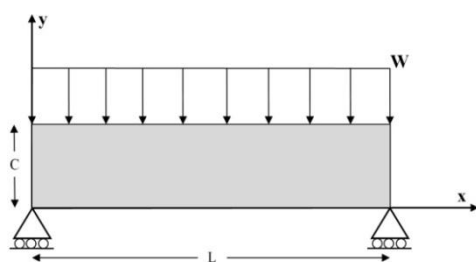
$$\theta = \frac{\|\tilde{e}\|_{total}}{\|e\|_{total}} \quad (50)$$

هنگامی یک محاسبه گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تأثیر به سمت واحد میل نماید.

۶- تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

در این بخش به مدلسازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک دو سر مفصل تحت بار گسترده در شرایط تنش مستوی توسط تحلیل ایزوژئومتریکی و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل ۵). پارامترهای به کار برده شده در مدلسازی و تحلیل این مثال به صورت زیر می‌باشد:

$$L = 10, \quad C = 2, \quad W = 11, \quad E = 1500, \quad \nu = 0.25$$



شکل ۵- تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده

تنش‌های دقیق این مسئله با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل ۶ به صورت روابط (۵۱) تا (۵۳) در نظر گرفته شده است [۲۵].

سطح تنش بازیافتی و سطح تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی برای هر المان، به صورت تقریبی به یک معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد. در ادامه جهت بررسی کارایی این تخمین کننده خطا، به مقایسه نرم خطای انرژی تقریبی به دست آمده از این روش و روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا و نرم خطای انرژی دقیق برای سه مسئله نمونه الاستیسیته که معمولاً جهت بررسی کارایی برآوردکننده‌های خطا به کار می‌روند، پرداخته شده است.

۵- معیارهای بیان خطا

در حالت کلی، خطا عبارت است از اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی به دست آمده از روش عددی می‌باشد. بنابراین خطای حل تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$e_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (46)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ میدان تنش دقیق و $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش حاصل از حل تقریبی است. اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می‌توان از میدان تنش بهبود یافته به دست آمده از یکی از روشهای بازیافت تنش استفاده نمود. بنابراین خطای تقریبی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{e}_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (47)$$

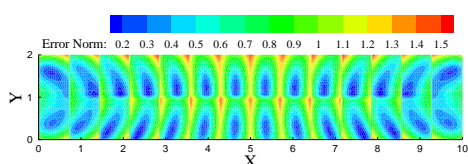
رابطه اخیر مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می‌کند ضمن اینکه این مقدار ممکن است از نظر عددی، کوچکتر از صفر باشد. بنابراین برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری برای بیان آن استفاده می‌شود.

یکی از معروف ترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به صورت زیر بیان می‌شود [۲۴]:

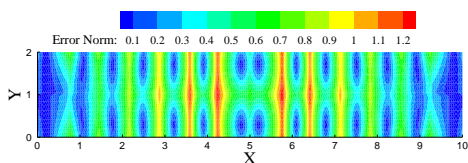
$$\|e\|_e = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

در این رابطه $\boldsymbol{\sigma}$ مقدار دقیق تانسور تنش، $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش به دست آمده از حل تقریبی، \mathbf{D} ماتریس الاستیسیته خواص مصالح و Ω دامنه المان می‌باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نیست، به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در

فوق همگرا و روش مبتنی بر ارضای معادلات تعادل به همراه شاخص تاثیر آنها نشان داده شده است. همان طور که دیده می‌شود نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی روش جدید نسبت به روش قدیمی، به تغییرات نرم خطای دقیق نزدیک است که نشان دهنده کارایی بهتر تخمین کننده خطا پیشنهادی نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا است. همچنین افزایش شاخص تاثیر کل دامنه به دست آمده از روش جدید نسبت به روش قدیمی نیز نشان دهنده کارایی بهتر این روش می‌باشد. در شکل ۹ به عنوان نمونه، نحوه تغییرات تنش σ_y به دست آمده از حل دقیق و تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی و روش بازیافت تنش قدیمی و جدید در مسیر $y=1/96$ ترسیم شده است. همچنین نحوه تغییرات تنش τ_{xy} نیز در مسیر $y=1/10$ در شکل ۱۰ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات تنش به دست آمده از روش مبتنی بر ارضای معادلات تعادل نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا، نزدیکتر به تنش دقیق می‌باشد.

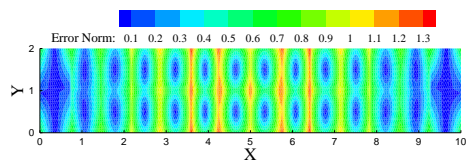


الف) نرم خطای انرژی دقیق



$$\theta_{old} = 0.81$$

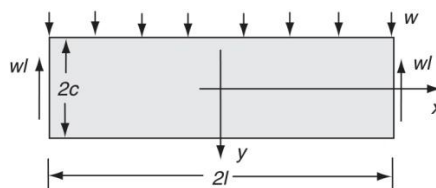
ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)



$$\theta_{new} = 0.85$$

ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

شکل ۸- نحوه توزیع نرم خطای انرژی تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده



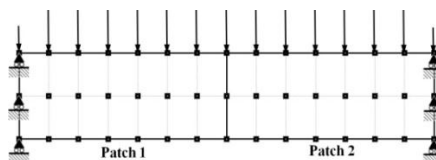
شکل ۶- پارامترهای تعریف شده در حل تحلیلی تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده [۲۵]

$$\sigma_x = \frac{3w}{4c} \left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) y - \frac{3w}{4c^3} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \quad (51)$$

$$\sigma_y = -\frac{w}{2} + \frac{3w}{4c} y - \frac{w}{4c^3} y^3 \quad (52)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3w}{4c} x + \frac{3w}{4c^3} x y^2 \quad (53)$$

برای مدلسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریکی از ۴۵ نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده شده است. در شکل ۷ آرایش المان‌ها و شبکه نقاط کنترلی به همراه شرایط مرزی اعمال شده در مدلسازی تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده نمایش داده شده است. جهت برآورد میدان جابجایی و میدان‌های تنش بازیافتی به دست آمده از روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا و روش ارضای معادلات تعادل، از توابع شکل درجه یک استفاده شده است.



شکل ۷- نقاط کنترلی و شرایط مرزی مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریکی تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

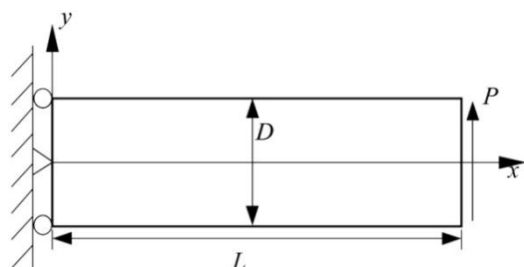
همچنین بردارهای گرهی در جهات ξ و η به صورت زیر می‌باشند:

$$\xi = \{0, 0, 0.14, 0.29, 0.43, 0.57, 0.71, 0.86, 1, 1\},$$

$$\eta = \{0, 0, 0.5, 1, 1\}$$

جهت انتگرالگیری عددی در تمامی محاسبات و نقاط بهینه تنش در هر المان، از نه نقطه گوسی استفاده شده است. در شکل ۸ نحوه توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی به دست آمده از روش مبتنی بر نقاط

$L = 10$, $D = 2$, $P = 300$, $E = 1500$, $\nu = 0.15$



شکل ۱۱- تیر طره در شرایط تنش مستوی

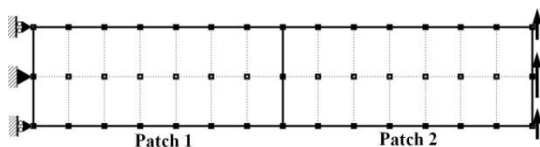
تنش‌های دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن توسط تیموشنکو و گودیر^۲ به صورت زیر ارائه شده است [۲۶]:

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I}$$

$$\sigma_y = 0 \tag{۵۴}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right)$$

که در آن $I = \frac{D^3}{12}$ می‌باشد. برای مدلسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از ۴۵ نقطه کنترلی، دو ناحیه مشابه، توابع شکل درجه یک و نه نقطه گوسی جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش استفاده شده است (به شکل ۱۲ مراجعه نمایید).



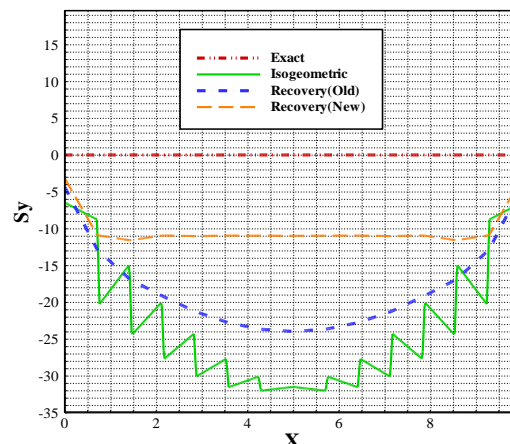
شکل ۱۲- نقاط کنترلی و شرایط مرزی مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک تیر طره تیموشنکو

همچنین بردارهای گرهی در جهات ξ و η به صورت زیر می‌باشند:

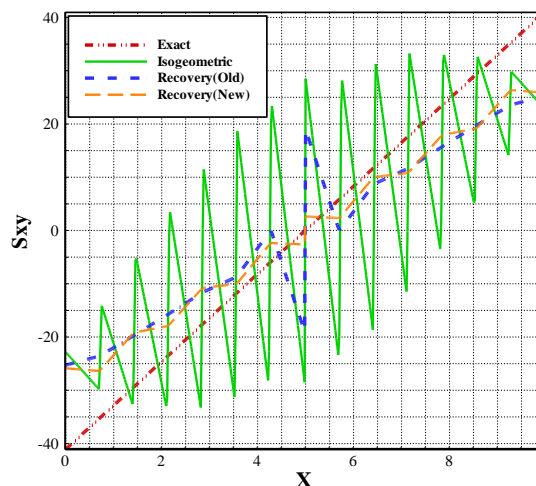
$$\xi = \{0, 0, 0.14, 0.29, 0.43, 0.57, 0.71, 0.86, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0.5, 1, 1\}$$

در شکل ۱۳ نحوه توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی به دست آمده از روش ارائه شده در این



شکل ۹- نمودار تغییرات مولفه تنش σ_y تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده در مسیر $y=1/96$



شکل ۱۰- نمودار تغییرات مولفه تنش τ_{xy} تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده در مسیر $y=1/10$

۷- تیر طره تیموشنکو^۱

نتایج گرفته شده از مدلسازی تیر طره تیموشنکو با مصالح الاستیک خطی ایزوتروپیک و در شرایط تنش مستوی توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش‌های آن در این بخش نشان داده شده است. پارامترهای به کار برده شده در مدلسازی این مسئله در تحلیل ایزوژئومتریک به صورت زیر است (شکل ۱۱ را ببینید).

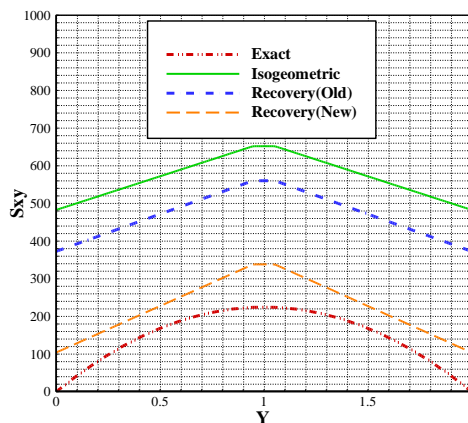
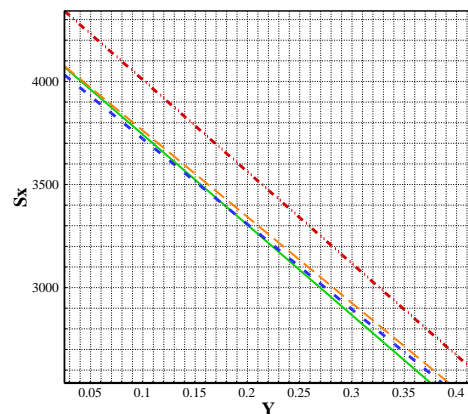
² Goodier

¹ Timoshenko

۸- صفحه ترک‌دار تحت کشش

در این مثال به بررسی رفتار تخمین‌کننده‌های خطا، در برآورد خطای به دست آمده از تحلیل مسئله دارای یک نقطه تکین با روش ایزوژئومتریکی می‌پردازیم. معمولاً مسائل با نقطه تکین، به علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی جهت بررسی کارایی تخمین‌کننده‌های خطا به شمار نمی‌روند؛ اما هدف از این مثال، بررسی رفتار تخمین‌کننده‌های خطا در تعیین میزان نرم خطای انرژی نوک ترک و توزیع خطا در دیگر نقاط دامنه خواهد بود.

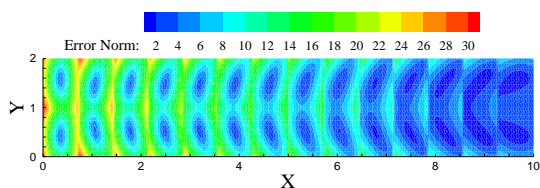
در شکل ۱۶ مشخصات صفحه مربعی تحت تنش کششی P مشاهده می‌شود. اضلاع این مربع به طول 2a و گسترش ترک به میزان a فرض شده است.

الف) نمودار تغییرات مولفه تنش τ_{xy} ب) نمودار تغییرات مولفه تنش σ_x

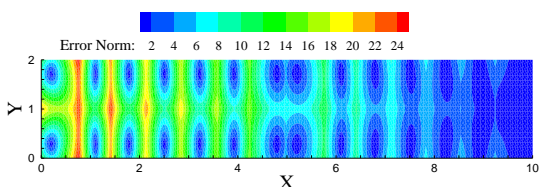
شکل ۱۴- نمودار تغییرات تنش تیر طره تیموشنکو در مسیر $x=0/1$

پژوهش (روش جدید) و روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا (روش قدیمی) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود در این مثال نیز نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی روش جدید نسبت به روش قدیمی، به تغییرات نرم خطای دقیق نزدیکتر است. همچنین افزایش شاخص تاثیر کل دامنه از ۰/۸۸ در روش قدیمی به ۰/۹۳ روش جدید، نشان دهنده کارایی بهتر روش پیشنهادی می‌باشد.

نحوه تغییرات تنش σ_x و τ_{xy} به دست آمده از حل دقیق، تحلیل ایزوژئومتریکی و روش بازیافت تنش قدیمی و جدید در مسیر $x=0/1$ در شکل ۱۴ و تغییرات σ_y در مسیر $y=1/9$ در شکل ۱۵ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در این مثال نیز تنش بهبود یافته به دست آمده از روش ارضای معادلات تعادل نسبت به تنش به دست آمده از روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا دقیق تر است.

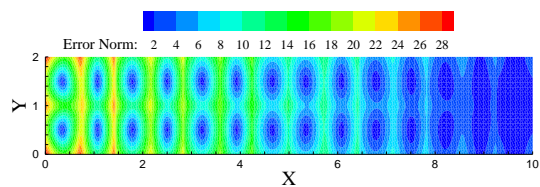


الف) نرم خطای انرژی دقیق



$$\theta_{old} = 0.88$$

ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)



$$\theta_{new} = 0.93$$

ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

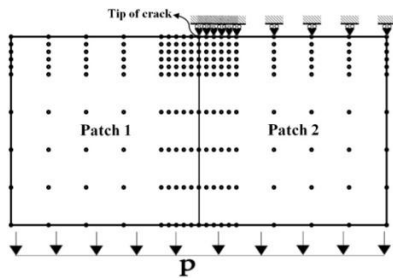
شکل ۱۳- نحوه توزیع نرم خطای انرژی تیر طره تیموشنکو

شده است. همچنین در جهت ξ و η هر وصله، از توابع شکل نریز درجه یک، نه نقطه گوسی و بردارهای گرهی به صورت زیر استفاده شده است.

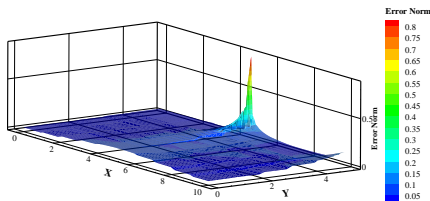
$$\xi = \{0, 0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1\},$$

$$\eta = \{0, 0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1\}$$

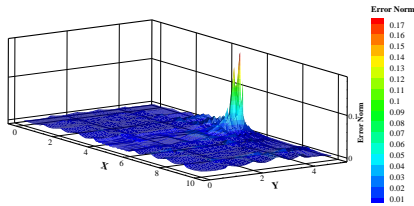
در شکل ۱۷، آرایش نقاط کنترلی و شرایط مرزی اعمال شده در مدلسازی این مسئله نشان داده شده است.



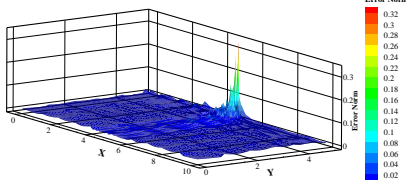
شکل ۱۷- نقاط کنترلی و شرایط مرزی مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتری یک صفحه ترکدار



الف) نرم خطای انرژی دقیق

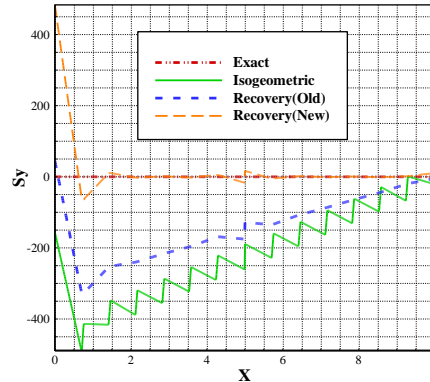


ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)

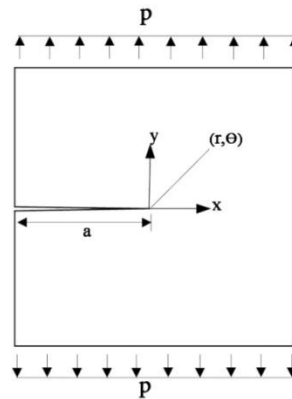


ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

شکل ۱۸- نحوه توزیع نرم خطای انرژی صفحه ترکدار تحت کشش



شکل ۱۵- نمودار تغییرات مولفه تنش σ_y تیر طره تیموشنکو در مسیر $y=1/9$



شکل ۱۶- صفحه مربعی ترکدار تحت تنش کششی

بازشدگی ترک در مد اول است و بر اساس سیستم مختصات قطبی نشان داده شده در شکل ۱۶ نتایج تحلیلی آن به صورت زیر می‌باشد [۲۷].

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (55)$$

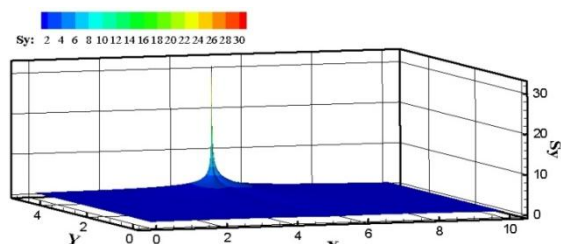
$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (56)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (57)$$

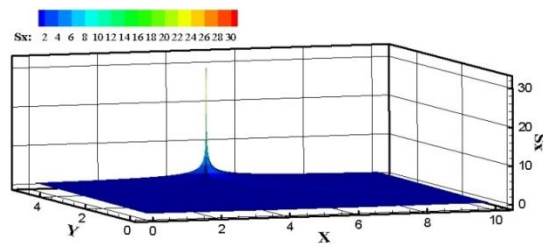
که در آن فاکتور شدت تنش برابر $K_I = P\sqrt{\pi a}$ در نظر گرفته شده است. پارامترهای به کار رفته در تحلیل مسئله به صورت زیر می‌باشند.

$$2a = 10; \nu = 0.3; E = 1000; P = 1$$

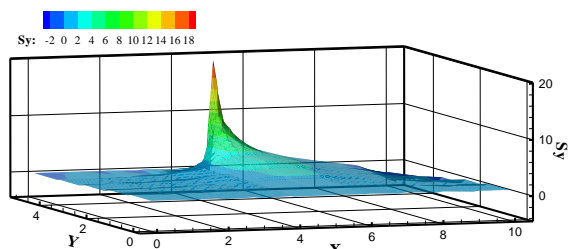
به علت تقارن تنها نیمی از دامنه مورد تحلیل قرار می‌گیرد. برای مدلسازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتری از ۱۹۰ نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده



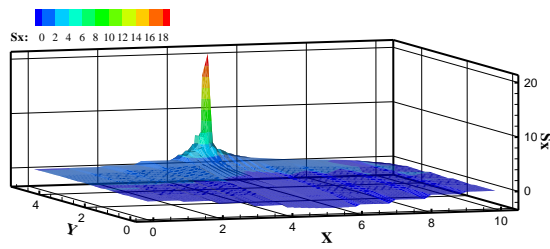
تحلیل دقیق



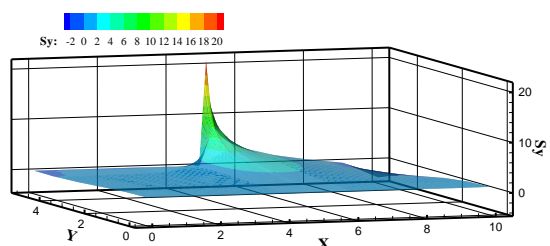
تحلیل دقیق



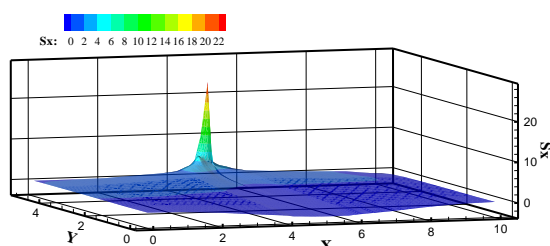
تحلیل ایزوژئومتریک



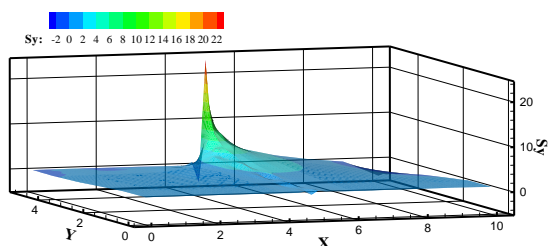
تحلیل ایزوژئومتریک



تنش بهبود یافته (روش قدیم)

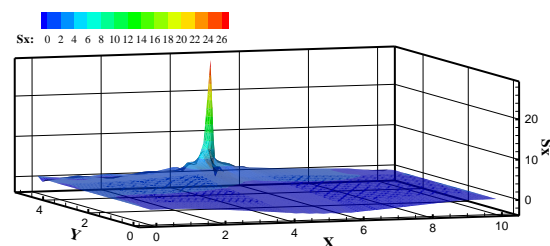


تنش بهبود یافته (روش قدیم)



تنش بهبود یافته (روش جدید)

ب) توزیع تنش σ_y



تنش بهبود یافته (روش جدید)

الف) توزیع تنش σ_x

شکل ۱۹- نحوه توزیع تنش‌های صفحه مربعی ترکدار تحت کشش

در شکل ۱۹، نحوه توزیع تنش‌های σ_x و σ_y به دست آمده از حل تقریبی، تحلیل ایزوژئومتریک و تنش‌های بهبود یافته نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود هر دو روش بازیافت تنش توانسته‌اند میزان تنش نوک ترک را نسبت به حل ایزوژئومتریک بهبود بخشند و این میزان بهبود تنش در روش جدید بیشتر است.

در شکل ۱۸ نتایج به دست آمده از نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی برای تحلیل صفحه ترکدار تحت کشش نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، روش تخمین خطای جدید کارایی بهتری نسبت به روش قدیمی در برآورد نرم خطای نوک ترک و توزیع نرم خطای کل دامنه دارد. همچنین در این مثال نیز افزایش شاخص تاثیر کل دامنه در روش جدید نشان دهنده کارایی بهتر روش پیشنهادی می‌باشد.

- [6] Cottrell JA, Hughes TJR, Bazilevs Y (2009) *Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA*. Wiley.
- [7] Richardson LF (1910) The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems. *Trans. Roy. Soc. (London) A* 210: 307–357.
- [8] Babuska I, Rheinboldt C (1978) A-posteriori error estimates for the finite element method. *INT J NUMER METH ENGRG* 12: 1597–1615.
- [9] Babuska I, Rheinboldt C (1979) Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis. *Comput. METHODS APPL MECH ENGRG* 17–18: 519–540.
- [10] Babuska I, Strouboulis T, Upadhyay CS, Gangaraj SK (1994) A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles. *COMPUT METH APPL MECH ENG* 114: 307–378.
- [11] Babuska I, Strouboulis T, Upadhyay CS, Gangaraj SK, Copps K (1994) Validation of a posteriori error estimators by a numerical approach. *INT J NUMER METH ENG* 37: 1073–1123.
- [12] Hinton E, Campbell J (1974) Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least square method. *INT J NUMER METH ENG* 8: 461–480.
- [13] Oden TJ, Brauchli J (1971) On the calculation of consistent stress distribution in finite element approximation. *INT J NUMER METH ENG* 3: 317–325.
- [14] Zienkiewicz OC, Zhu Z (1992) The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. *INT J NUMER METH ENG* 33: 1331–1364.
- [15] Wiberg N-E, Abdulwahab F (1993) Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium. *INT J NUMER METH ENG* 36: 2703–2724.
- [16] Wiberg N-E, Abdulwahab F, Ziukas S (1994) Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *INT J NUMER METH ENG* 37: 3417–3440.
- [17] Blacker T, Belytschko T (1994) Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolation enhancements *INT J NUMER METH ENG* 37: 517–536.
- [18] Boroomand B, Zienkiewicz OC (1997) Recovery by equilibrium in patches (REP). *INT J NUMER METH ENG* 40: 137–164.
- [19] LO SH, LEE CK (1998) On using different recovery procedures for the construction of

۹- نتیجه‌گیری

در این مقاله به ابداع روشی جدید جهت بهبود میدان تنش تحلیل ایزوژئومتریکی پرداخته شد. همچنین با استفاده از این تنش بهبود یافته، می‌توان به برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریکی دست یافت. این برآورد کننده خطا، دومین روش از روش‌های مبتنی بر بازیافت تنش در برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریکی و بر پایه نیروهای وارد بر هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریکی می‌باشد. ویژگی بارز این روش عدم نیاز به نقاط فوق همگرا و استفاده یکسان از توابع شکل نرَبز در تخمین جابجایی و سطح تنش بهبود یافته است. نتایج بدست آمده از این پژوهش نشان می‌دهد که نرم خطای تقریبی حاصل از روش پیشنهادی نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا دارای توزیع دقیقتری می‌باشد. همچنین شاخص تاثیر در این روش نسبت به روش قبل افزایش یافته و به عدد یک نزدیکتر شده است. به علاوه، نحوه توزیع مولفه‌های تنش نیز در روش پیشنهادی نسبت به روش قبل دقیقتر می‌باشد. با توجه به نتایج حاصل، می‌توان بیان نمود که روش ارائه شده در این پژوهش از کارایی بهتری نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا برخوردار است و می‌توان از آن به عنوان یک راه حل ساده و مهندسی دیگر جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش به دست آمده از تحلیل ایزوژئومتریکی نام برد.

مراجع

- [1] Kagan P, Fischer A, Bar-Yoseph PZ (1998) New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis. *INT J NUMER METHODS ENGRG* 41: 435–458.
- [2] Hollig K, Reif U, Wipper J (2001) Weighted extended B-Spline approximation of dirichlet problems. *SIAM J NUMER ANAL* 39(2): 442–462.
- [3] Kagan P, Fischer A and Bar-Yoseph PZ (2003) Mechanically based models: adaptive refinement for B-Spline finite element. *INT J NUMER METHODS ENGRG* 57: 1145–1175.
- [4] Hughes TGR, Cottrell JA, Bazilevs Y (2005) *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. *COMPUT. METHOD APPL MECH. ENGRG* 194: 4135–4195.
- [5] Hassani B, Ganjali A, Tavakkoli M (2012) An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery. *EUR J MECH A-SOLID* 31: 101–109.

- [24] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ (2005) The Finite Element Method. 6th Ed., Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [25] Sadd MH (2005) ELASTICITY: Theory, Applications, and Numerics. Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [26] Timoshenko SP, Goodier JN (1977) Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York.
- [27] Anderson TL (1991) Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, 1th Ed., CRC Press, Boca Raton.
- smoothed stress in finite element method. INT J NUMER METH ENG 43: 1223–1252.
- [20] Rodenas JJ, Tur M, Fuenmayor FJ, Vercher A (2007) Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique. INT J NUMER METH ENG 70: 705–727.
- [21] Payen DJ, Bathe KJ (2011) The use of nodal point forces to improve element stresses. COMPUT STRUCT 89: 485–495.
- [22] Rogers DF (2001) An Introduction to NURBS. Morgan Kaufmann Publishers.
- [23] Piegl L, Tiller W (1997) The NURBS Book. 2nd Ed., Springer-Verlag, New York.