مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۷/ دوره ۸/ شماره ۳/ صفحه ۳۱۵-۳۲۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/jsfm.2018.6664.2553

حل حجم محدود بر اساس مشخصه‌ها برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر با انتقال گرما

وحید فرهنگ مهر[۱,*] و سید اسماعیل رضوی[۲]

[۱] استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه بناب، بناب، ایران

[۲] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۱/۰۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۳/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۶/۱۰

چکیده

در تحقیق حاضر، یک حل حجم محدود بر پایه مشخصه‌ها برای حصول جواب‌های دقیق، بهبود سرعت همگرایی و فراهم نمودن پایداری برای حل عددی جریان‌های تراکم‌ناپذیر، آرام، پایا و دوبعدی با انتقال گرمای جابجایی اجباری توسعه داده شده است. از تراکم‌پذیری مصنوعی برای کوپل‌کردن معادلات پیوستگی و ممنتوم و از الگوریتم رانگ-کوتای مرتبه پنج برای پیمایش‌زمانی حل استفاده شده است. یک طرح بر اساس مشخصه‌های مجازی برای محاسبه جملات جابجایی و یک طرح مرتبه دوم برای محاسبه جملات لزج و رسانش‌گرمایی به کار گرفته شده‌اند. به منظور سنجش کارامدی این حل حجم محدود توسعه داده شده، جریان صلیبی تراکم‌ناپذیر، آرام، پایا و دوبعدی هوای گذرنده از روی ایرفویل ناکا۰۰۱۲ بدون انتقال گرما و از روی استوانه دایروی افقی بلند با انتقال گرمای جابجایی اجباری شبیه‌سازی عددی شده‌اند. نتایج حاصل در این شبیه‌سازی‌ها، با اطلاعات موجود در ادبیات فن مقایسه شده‌اند که نشانگر توافق خوب بین آنها است.

کلمات کلیدی: جریان تراکم‌ناپذیر؛ انتقال گرمای جابجایی اجباری؛ روش مشخصه‌ها؛ تراکم‌پذیری مصنوعی؛ جریان صلیبی.

A Characteristic-Based Finite-Volume Solution of Incompressible Flows with Heat Transfer

V. Farhangmehr[1,*], S.E. Razavi[2]

[1] Assist. Prof., Mech. Eng., Univ. of Bonab, Bonab, Iran

[2] Prof., Mech. Eng., Univ. of Tabriz, Tabriz, Iran

Abstract

In this study, a characteristic-based finite-volume solution has been developed to obtain accurate results, improve the convergence rate, and provide the stability for the numerical solution of incompressible, steady, laminar, and two-dimensional flows with heat transfer. The artificial compressibility in order to couple the continuity and momentum equations and the fifth-order Runge-Kutta algorithm in order to marching the solution in time have been used. The convective terms have been calculated by a scheme based on the virtual characteristics and the viscous and thermal conduction terms have been calculated by a second-order scheme. In order to assess the capability of aforementioned developed finite-volume solution, the laminar, incompressible, steady, and two-dimensional cross flow of air on a NACA0012 airfoil without heat transfer and on a long horizontal circular cylinder with the forced convective heat transfer have been numerically simulated. The results obtained in these simulations have been compared with the data available in the literature. This comparison showed a good agreement between them.

Keywords: Incompressible Flow; Forced Convective Heat Transfer; Characteristic-Based Method; Artificial Compressibility; Cross Flow.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۴۳۲۰۶۷۳۵

آدرس پست الکترونیک: vfarhangmehr@gmail.com

۱- مقدمه

حل عددی معادلات ناویر-استوکس و انتقال گرمای جریان‌های تراکم‌ناپذیر بسیار با اهمیت بوده، به گونه‌ای که همواره توجهات پیوسته‌ای را به ویژه در سال‌های اخیر به خود جلب کرده است. محققان زیادی تلاش کرده‌اند تا طرح‌های ارائه شده برای حل عددی معادلات حاکم بر جریان‌های تراکم‌پذیر را به منظور حل عددی معادلات حاکم بر جریان‌های تراکم‌ناپذیر توسعه دهند، ولی در تلاش‌های خود با مشکلات زیادی مواجه شده‌اند. از آن جمله می‌توان به خشکی[1] جملات جابجایی[2] در معادلات حاکم بر جریان‌های تراکم‌ناپذیر اشاره کرد که موجب بروز مسائلی در همگرایی حل، دقت نتایج و نیز حساسیت حل به شرایط مرزی می‌شود [۱]. از جمله طرح‌های عددی جریان‌های تراکم‌پذیر که قابل‌توسعه به جریان‌های تراکم‌ناپذیر است، می‌توان به طرح مشخصه‌ها[3] اشاره کرد [۲-۶].

شبیه‌سازی عددی جریان تراکم‌ناپذیر هوا که از روی یک ایرفویل می‌گذرد، همواره مورد توجه محققان دینامیک سیالات محاسباتی جهت سنجش میزان کارامدی طرح‌های عددی ارائه شده خود در حصول جواب‌های دقیق در یک فرایند همگرایی حل سریع و نیز با کمترین نیاز به حافظه‌کامپیوتری جهت انجام محاسبات بوده است. کاتالانو و توگناسینی [۷] به صورت عددی جریان تراکم‌ناپذیر هوا را که از روی یک ایرفویل ویژه می‌گذرد، یک‌بار با استفاده از معادلات ناویر-استوکس متوسط‌گیری شده رینولدز[4] (RANS) و بار دیگر با مدل آشفتگی شبیه‌سازی گردابه بزرگ[5] (LES) مطالعه و نتایج حاصل را با یکدیگر مقایسه کردند. آنها برای از میان برداشتن برخی محدودیت‌های مدل آشفتگی RANS که در جریان‌هایی با اعداد رینولدز پایین وجود دارد، مدل آشفتگی بهبودیافته k-ω SST-LR را به خدمت‌گرفته و دریافتند که این مدل آشفتگی نتایجی در توافق بسیار خوب با نتایج مدل آشفتگی LES و اطلاعات تجربی موجود در ادبیات فن حاصل می‌کند. آنها ایرفویل را در رژیم‌های مختلف مادون صوت، در حد صوت و مافوق‌صوت و تحت زوایای حمله بالا در نظر گرفته و از روش حجم محدود[6] برای گسسته‌سازی معادلات حاکم و از اتلاف مصنوعی[7] برای میرا کردن ناپایداری‌های حل عددی بهره گرفتند. آنها همچنین از شتاب‌دهنده‌های همگرایی مانند، شبکه چندگانه[8] و تکنیک هموارسازی مانده‌ها[9] در کنار الگوریتم رانگ-کوتا[10] در پیمایش زمانی[11] فرایند حل عددی استفاده کردند. هجرانفر و کمالی‌مقدم [۸]، جریان دوبعدی هوای گذرا با عدد ماخ پایین از روی ایرفویل ناکا۰۰۱۲[12] تحت زوایای حمله مختلف را مورد مطالعه عددی قرار دادند. در تحقیق آنها، معادلات اویلر مقیّد[13]در یک شبکه بی‌سازمان[14] با روش حجم محدود گسسته‌سازی شده و با در نظر گرفتن شرایط مرزی مشخصه‌ای مقیّد در مرز دور[15] حل شدند. آنها در پیمایش زمانی فرایند حل از شتاب‌دهنده‌های همگرایی مانند، تکنیک هموارسازی مانده‌ها و تکنیک گام زمانی محلی[16] بهره گرفتند و با مقایسه نتایج حاصل با اطلاعات تجربی و عددی موجود در ادبیات‌فن، درستی کار خود را اعتبارسنجی نمودند. رودریگوز و همکاران [۹]، جریان تراکم‌ناپذیر، دوبعدی و آشفته هوای گذرنده از روی ایرفویل ناکا۰۰۱۲ تحت دو زاویه حمله متفاوت در یک عدد رینولدز مشخص جریان را به صورت عددی مورد مطالعه قرار دادند. آنها از مدل آشفتگی شبیه‌سازی عددی مستقیم[17] (DNS) بهره گرفتند. در کار آنها، ابتدا معادلات ناویر- استوکس در یک شبکه بی‌سازمان گسسته‌سازی شده و سپس طی فرایند پیمایش زمانی با روش گام کسری[18] حل شدند. کاپسالیس و همکاران [۱۰]، جریان پایا و تراکم‌ناپذیر هوای گذرنده از روی ایرفویل دوبعدی ناکا۰۰۱۲که تحت زاویه‌های حمله مختلف در دو رژیم آرام و آشفته با اعداد رینولدز جریان

[1] Stiffness
[2] Convective Terms
[3] Characteristic-Based Scheme
[4] Reynolds-Averaged Navier-Stokes
[5] Large Eddy Simulation
[6] Finite Volume Method
[7] Artificial Dissipation
[8] Multigrid
[9] Residual Smoothing Technique
[10] Runge-Kutta Algorithm
[11] Time Marching
[12] NACA0012
[13] Preconditioned
[14] Unstructured Grid
[15] Far-Field Boundary
[16] Local Time-Stepping Technique
[17] Direct Numerical Simulation
[18] Fractional Step Method

مختلف قرار داشت را مورد مطالعه عددی قرار دادند. آنها در تحقیق‌شان از یک مدل انتگرالی دو معادله‌ای، مدل آشفتگی k-ω و نیز معادلات ناویر-استوکس استفاده کردند. هجرانفر و پارسه [۱۱]، به مطالعه عددی جریان دوبعدی، تراکم‌ناپذیر، پایا و آرام هوای گذرنده از روی ایرفویل ناکا۰۰۱۲ با و بدون زاویه حمله پرداختند. آنها بعد از کوپل کردن میدان‌های سرعت و فشار، با افزودن یک مشتق شبه‌زمانی فشار بر اساس تراکم‌پذیری مصنوعی[1] (AC) به معادله پیوستگی، معادلات ناویر-استوکس مقیّد را با استفاده از روش اختلاف محدود[2] گسسته‌سازی‌کرده و با در نظرگرفتن یک طرح فیلترسازی ناپایداری‌های عددی، طی فرایند پیمایش زمانی با الگوریتم رانگ-کوتا حل نمودند. آنها از یک شبکه با سازمان[3] حول ایرفویل و شرایط مرزی مشخصه‌ای مقیّد در مرز دور بهره بردند. در کار آنها مشاهده گردید که شرایط مرزی مشخصه‌ای مقیّد به طور قابل‌ملاحظه‌ای سرعت همگرایی حل را بهبود داده و هزینه‌های محاسباتی را به طور قابل‌توجهی کاهش می‌دهد.

استوانه دایروی افقی بلند در جریان صلیبی[4] تراکم‌ناپذیر هوا با و بدون انتقال گرمای جابجایی اجباری کاربردهای صنعتی فراوانی دارد. به‌دلیل وفور اطلاعات تحلیلی، تجربی و عددی در ادبیات فن برای حالت بدون انتقال گرما [۱۲-۱۶] و برای حالت با انتقال گرما [۱۷]، این مساله نیز همواره مورد توجه محققان دینامیک سیالات محاسباتی به منظور ارزیابی طرح‌های عددی ارائه شده خود قرار گرفته است.

در مطالعه حاضر، یک طرح دینامیک سیالات محاسباتی که بر پایه مشخصه‌ها بوده و برای محاسبه جملات جابجایی در معادلات‌حاکم بر جریان‌های آرام، دوبعدی، غیرلزج، تراکم-پذیر، پایا و بدون انتقال گرما، به عبارتی دیگر معادلات اویلر، در اصل ارائه شده‌است، به منظور محاسبه جملات جابجایی در معادلات ناویر-استوکس و انتقال‌گرمای حاکم بر جریان-های تراکم‌ناپذیر، آرام، دوبعدی و پایا توسعه داده می‌شود. این توسعه بر اساس انتشار امواج صوتی مجازی و تراکم-پذیری مصنوعی (AC) است. طرح توسعه داده شده بدون نیاز به تدبیر مرزی خاص و اتلاف مصنوعی، توانایی میرا کردن نوسانات عددی را داشته، به هیچ شتاب‌دهنده همگرایی نیاز نداشته و نتایج قابل‌قبولی را حاصل می‌کند. جهت اعتبارسنجی کارامدی آن، ابتدا جریان دوبعدی، تراکم‌ناپذیر، آرام و پایای هوای گذرا از روی ایرفویل ناکا۰۰۱۲ با عدد ماخ ۰/۳ و سپس جریان دوبعدی، آرام، پایا و تراکم‌ناپذیر هوای گذرنده از روی استوانه دایروی افقی بلند با انتقال گرمای جابجایی اجباری مورد مطالعه قرار می‌گیرند. هدف این تحقیق، معرفی طرح توسعه داده شده برای‌کاربردهای مختلف مهندسی می‌باشد.

۲- معادلات حاکم

برای جریان پایا، دوبعدی، تراکم‌ناپذیر، آرام و با انتقال گرمای جابجایی‌اجباری، شکل بی‌بعد و به‌ترتیب دیفرانسیلی و انتگرالی معادلات حاکم بر پایه تراکم‌پذیری‌مصنوعی (AC) پیشنهاد شده بار اول توسط چورین [۱۸]، در دستگاه مختصات کارتزین بی‌بعد x,y به صورت معادلات (۱) و (۲) است. در استفاده از AC، یک مشتق شبه‌زمانی[5] فشار برای کوپل کردن میدان‌های سرعت و فشار، تغییر ماهیت معادلات از سهموی-بیضوی به هذلولوی و نیز ایجاد امکان پیمایش حل عددی معادلات در زمان مصنوعی جهت نیل به حل حالت پایا، به معادله پیوستگی اضافه می‌شود.

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial F_N}{\partial N}=\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y} \tag{۱}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Omega}^{\Omega} W dA+\oint_{\partial\Omega}^{\partial\Omega} F_N dL=\oint_{\partial\Omega}^{\partial\Omega}(Rdy-Sdx) \tag{۲}$$

Ω و $\partial\Omega$ به ترتیب حجم کنترل و مرز آن، F_N بردار شار جابجایی بی‌بعد عبوری به صورت عمود از مرز در امتداد بردار یکه بی‌بعد عمود بر آن N، R و S بردارهای مربوط به جملات لزج و رسانش گرمایی بی‌بعد در امتداد محورهای بی‌بعد x و y، W بردار حالت[6] بی‌بعد و t شبه‌زمان بی‌بعد می‌باشند. داریم:

[1] Artificial Compressibility
[2] Finite difference method
[3] Structured grid
[4] Cross flow
[5] Pseudo-time derivative
[6] State vector

$$W = [p \quad u \quad v \quad \theta]^T;$$

$$F_N = [\beta u_N \quad uu_N + pcos\zeta \quad vu_N + psin\zeta \quad \theta u_N]^T;$$

$$R = \frac{1}{Re}[0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{1}{Pr}\frac{\partial \theta}{\partial x}]^T;$$

$$S = \frac{1}{Re}\left[0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{1}{Pr}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right]^T;$$

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad (۳)$$

β ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی بوده و Pr، Re، p، θ، u، v به ترتیب عدد پرانتل، عدد رینولدز، فشار، دما و مولفه‌های سرعت بی‌بعد در امتداد محورهای بی‌بعد xو y به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x = \frac{X}{L_{ch}}; y = \frac{Y}{L_{ch}}; u = \frac{U}{U_\infty}; v = \frac{V}{U_\infty};$$

$$t = \frac{\tau U_\infty}{L_{ch}}; \theta = \frac{T - T_\infty}{T_W - T_\infty}; p = \frac{P - P_\infty}{\rho U_\infty{}^2};$$

$$Pr = \frac{\nu}{\acute{\alpha}}; Re = \frac{U_\infty L_{ch}}{\nu} \qquad (۴)$$

که در آنها X، Y، L_{ch}، U، V، P، T، τ، U_∞، T_∞، ρ، P_∞، T_W، $\acute{\alpha}$، ν به ترتیب مختصات کارتزین، طول مشخصه، مولفه‌های سرعت در امتداد محورهای X و Y، فشار، دما، شبه‌زمان، سرعت مشخصه، دمای مشخصه، چگالی سیال، فشار مشخصه، دمای مرز جامد، ضریب نفوذ گرمایی سیال و لزجت سینماتیک آن می‌باشند. در جریان تراکم‌ناپذیر هوای گذرنده از روی ایرفویل ناکا۰۰۱۲بدون انتقال گرما و نیز از روی استوانه دایروی افقی بلند با انتقال گرما که به عنوان مطالعات موردی در کار حاضر انتخاب‌گردیده‌اند، طول مشخصه به ترتیب وتر ایرفویل و قطر استوانه بوده و در هر دو مورد، سرعت، دما و فشار مشخصه به ترتیب سرعت، دما و فشار جریان آزاد می‌باشند. در سطح مشترک دو سلول مجاور هم در شبکه با توجه به شکل ۱ برای زاویه بین بردار یکه بی‌بعد عمود بر سطح و خط افق ζ، مولفه سرعت بی‌بعد عمود بر سطح u_N، مولفه سرعت بی‌بعد موازی با سطح u_p، طول بی‌بعد سطح ΔL، سرعت بی‌بعد شبه‌صوت a، بردار یکه بی‌بعد عمود بر سطح یا به عبارتی دیگر، جهت انتشار شبه‌صوت $\vec{N}$ داریم:

$$cos\zeta = \frac{\Delta y}{\Delta L}; sin\zeta = -\frac{\Delta x}{\Delta L};$$

$$\Delta L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}; \vec{N} = cos\zeta\vec{\imath} + sin\zeta\vec{\jmath};$$

$$u_N = ucos\zeta + vsin\zeta;$$

$$u_p = vcos\zeta - usin\zeta; a = \sqrt{u_N{}^2 + \beta} \qquad (۵)$$

۳- مدل شار جابجایی

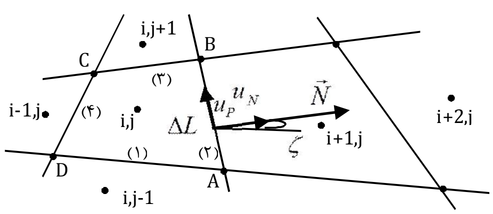
طرحی بر اساس مشخصه‌ها که در اصل به منظور محاسبه شار جابجایی در معادلات اویلر حاکم بر جریان‌های آرام، تراکم‌پذیر، دوبعدی و پایا ارائه شده است، برای محاسبه شار جابجایی در معادلات ناویر-استوکس و انتقال‌گرمای جابجایی اجباری حاکم بر جریان‌های پایا، تراکم‌ناپذیر، آرام و دوبعدی با بهره‌گیری از تراکم‌پذیری مصنوعی (AC) در این بخش، توسعه داده می‌شود. با توجه به شکل ۱ داریم:

$$\oint_{\partial\Omega}^{\partial\Omega} F_N dL = \sum_{K=1}^{4} F_N{}^{(K)} \Delta L \qquad (۶)$$

K به هر سطح سلول، یعنی (۱)، (۲)، (۳) و (۴) اشاره دارد. با تبدیل معادله (۱) به شکل شبه‌خطی داریم:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A\frac{\partial W}{\partial N} = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y};$$

$$A = \frac{\partial F_N}{\partial W} = \begin{bmatrix} 0 & \beta cos\zeta & \beta sin\zeta & 0 \\ cos\zeta & ucos\zeta + u_N & usin\zeta & 0 \\ sin\zeta & vcos\zeta & vsin\zeta + u_N & 0 \\ 0 & \theta cos\zeta & \theta sin\zeta & u_N \end{bmatrix} \qquad (۷)$$



شکل ۱- طرحواره‌ای از یک سلول شبکه با سلول‌های همسایه آن برای محاسبه شار جابجایی در سطوح آن

برای مقادیر ویژه و بردارهای ویژه بی‌بعد ماتریسA داریم:

$$\lambda_{(1)} = u_N; \lambda_{(2)} = u_N;$$
$$\lambda_{(3)} = u_N + a; \lambda_{(4)} = u_N - a \quad (۸)$$

$$E^{(1)} = [0 \quad -sin\zeta \quad cos\zeta \quad 1]^T;$$
$$E^{(2)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T;$$
$$E^{(3)} =$$
$$[-a(u_N - a) \;\; acos\zeta - u_p sin\zeta \;\; asin\zeta + u_p cos\zeta \;\; 1]^T;$$
$$E^{(4)} =$$
$$[a(u_N + a) \;\; -\left(acos\zeta + u_p sin\zeta\right) \;\; -asin\zeta + u_p cos\zeta \;\; 1]^T \quad (۹)$$

اولین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر با آن یک تغییر در امتداد سرعت را نشان می‌دهد و یک شبه‌موج برشی است که با سرعت سیال در امتداد بردار $\vec{N}$ حرکت می‌کند. دومین مقدار و بردار ویژه نشان‌دهنده یک شبه‌موج آنتروپی است که با همان سرعت شبه‌موج برشی حرکت می‌کند. سومین و چهارمین مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه معرف اغتشاش‌های صوتی مجازی هستند که با سرعت‌های $u_N + a$ و $u_N - a$ حرکت می‌کنند. یک متغیر میانگین‌گیری وزنیω تعریف شده بر اساس فشار بی‌بعد، بردار حالت بی‌بعد را در هر سطح - سلول نشان داده شده در شکل ۱ میانگین‌گیری می‌کند. با در نظر گرفتن اندیس‌های R وL برای سلول‌های راست و چپ هر سطح داریم:

$$\omega = \frac{p_L}{p_L + p_R}; \overline{W} = \omega W_L + (1-\omega) W_R; \quad (۱۰)$$

پس برای مولفه‌های سرعت بی‌بعد میانگین‌گیری شده $\bar{u}$ و $\bar{v}$ در هر سطح سلول می‌توان نوشت:

$$\bar{u} = \omega u_L + (1-\omega) u_R;$$
$$\bar{v} = \omega v_L + (1-\omega) v_R \quad (۱۱)$$

و با توجه به آنها داریم:

$$\bar{u}_p = \bar{v} cos\zeta - \bar{u} sin\zeta;$$
$$\bar{u}_N = \bar{u} cos\zeta + \bar{v} sin\zeta; \bar{a} = \sqrt{\bar{u}_N{}^2 + \beta};$$
$$\bar{\lambda}_{(1)} = \bar{u}_N; \bar{\lambda}_{(2)} = \bar{u}_N;$$
$$\bar{\lambda}_{(3)} = \bar{u}_N + \bar{a}; \lambda_{(4)} = \bar{u}_N - \bar{a};$$
$$\bar{E}^{(1)} = [0 \quad -sin\zeta \quad cos\zeta \quad 1]^T;$$
$$\bar{E}^{(2)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T;$$
$$\bar{E}^{(3)} =$$
$$[-\bar{a}(\bar{u}_N - \bar{a}) \;\; \bar{a}cos\zeta - \bar{u}_p sin\zeta \;\; \bar{a}sin\zeta + \bar{u}_p cos\zeta \;\; 1]^T;$$
$$\bar{E}^{(4)} =$$
$$[\bar{a}(\bar{u}_N + \bar{a}) \;\; -\left(\bar{a}cos\zeta + \bar{u}_p sin\zeta\right) \;\; -\bar{a}sin\zeta + \bar{u}_p cos\zeta \;\; 1]^T \quad (۱۲)$$

به منظور محاسبه ماتریس قدرت موج صوتی مجازی α_K، $K = 1,2,3,4$ دستگاه معادلات زیر حل می‌شود:

$$\Delta W = W_R - W_L = \sum_{K=1}^{4} \alpha_K \bar{E}^{(K)}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{E}_1^{(3)} & \bar{E}_1^{(4)} \\ -sin\zeta & 0 & \bar{E}_2^{(3)} & \bar{E}_2^{(4)} \\ cos\zeta & 0 & \bar{E}_3^{(3)} & \bar{E}_3^{(4)} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

$$\alpha_3 = \frac{\Delta u cos\zeta + \Delta v sin\zeta - \left(\frac{\bar{E}_2^{(4)}}{\bar{E}_1^{(4)}} cos\zeta + \frac{\bar{E}_3^{(4)}}{\bar{E}_1^{(4)}} sin\zeta\right)\Delta p}{\left(\bar{E}_2^{(3)} - \frac{\bar{E}_1^{(3)}\bar{E}_2^{(4)}}{\bar{E}_1^{(4)}}\right) cos\zeta + \left(\bar{E}_3^{(3)} - \frac{\bar{E}_1^{(3)}\bar{E}_3^{(4)}}{\bar{E}_1^{(4)}}\right) sin\zeta};$$

$$\alpha_4 = \frac{\Delta p}{\bar{E}_1^{(4)}} - \frac{\bar{E}_1^{(3)}}{\bar{E}_1^{(4)}} \alpha_3;$$

$$\alpha_1 = (\Delta v - \alpha_3 \bar{E}_3^{(3)} - \alpha_4 \bar{E}_3^{(4)}) / cos\zeta;$$

$$\alpha_2 = \Delta\theta - (\alpha_3 - \alpha_4)\bar{\theta} - \alpha_1;$$

$$\Delta u = u_R - u_L; \Delta v = v_R - v_L;$$

$$\Delta p = p_R - p_L;$$

$$\Delta \theta = \theta_R - \theta_L \quad (۱۴)$$

در نهایت، شار جابجایی بی‌بعد در هر سطح سلول به شکل زیر به دست می‌آید:

$$F_N = 0.5\left(F_{N,R} + F_{N,L}\right) - 0.5 \sum_{K=1}^{4} \left|\bar{\lambda}_{(K)}\right| \alpha_K \bar{E}^{(K)} \quad (۱۵)$$

مرتبه دقت طرح محاسبه شار جابجایی به انتخاب W_R و W_L بستگی دارد. به عنوان نمونه، برای سطح AB سلول

نشان داده در شکل ۱، W_R و W_L به صورت رابطه (۱۷) می‌توانند انتخاب شوند:

$$W_{L.i+\frac{1}{2}.j} = W_{i.j};$$

$$W_{R.i+\frac{1}{2}.j} = W_{i+1.j} \text{:دقت مرتبه اول} \qquad (۱۶)$$

$$W_{L.i+\frac{1}{2}.j} = \frac{3}{2}W_{i.j} - \frac{1}{2}W_{i-1.j};$$

$$W_{R.i+\frac{1}{2}.j} = \frac{3}{2}W_{i+1.j} - \frac{1}{2}W_{i+2.j} \text{ :دقت مرتبه دوم} \qquad (۱۷)$$

جملات لزج و رسانش‌گرمایی بی‌بعد با سلول‌های ثانویه و با دقت مرتبه دوم مطابق شکل ۲ گسسته‌سازی می‌شوند:

$$\oint_{\partial\Omega}^{\partial\Omega} (Rdy - Sdx) = \oint_{\partial\Omega}^{\partial\Omega} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dy - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\right]$$

$$= \sum_{K=1}^{4}[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_K \Delta y_K - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_K \Delta x_K] \qquad (۱۸)$$

φ معرف u,v,θ بوده و K معرف هر سطح سلول اولیه یعنیAB، BC، CD و DA است. به‌عنوان نمونه، برای سطح AB داریم:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{AB} = \frac{1}{\acute{\Omega}}\oint_{\partial\acute{\Omega}}^{\partial\acute{\Omega}} \varphi dy = \frac{1}{\acute{\Omega}}\sum_{K=1}^{4}\varphi_K\Delta y_K$$

$$= \frac{1}{\acute{\Omega}}[\varphi_{AE}\Delta y_{AE} + \varphi_{EB}\Delta y_{EB} + \varphi_{BM}\Delta y_{BM} + \varphi_{MA}\Delta y_{MA}]$$

$$= \frac{1}{\acute{\Omega}}[0.5(\varphi_A + \varphi_E)\Delta y_{AE} + 0.5(\varphi_E + \varphi_B)\Delta y_{EB}$$

$$+0.5(\varphi_B + \varphi_M)\Delta y_{BM} + 0.5(\varphi_M + \varphi_A)\Delta y_{MA}];$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{AB} = \frac{1}{\acute{\Omega}}\oint_{\partial\acute{\Omega}}^{\partial\acute{\Omega}} \varphi dx = \frac{1}{\acute{\Omega}}\sum_{K=1}^{4}\varphi_K\Delta x_K$$

$$= \frac{1}{\acute{\Omega}}[\varphi_{AE}\Delta x_{AE} + \varphi_{EB}\Delta x_{EB} + \varphi_{BM}\Delta x_{BM} + \varphi_{MA}\Delta x_{MA}]$$

$$= \frac{1}{\acute{\Omega}}[0.5(\varphi_A + \varphi_E)\Delta x_{AE} + 0.5(\varphi_E + \varphi_B)\Delta x_{EB}$$

$$+0.5(\varphi_B + \varphi_M)\Delta x_{BM} + 0.5(\varphi_M + \varphi_A)\Delta x_{MA}];$$

$$\varphi_A = \frac{1}{4}(\varphi_M + \varphi_E + \varphi_S + \varphi_{SE})$$

$$\varphi_B = \frac{1}{4}(\varphi_M + \varphi_N + \varphi_E + \varphi_{NE}) \qquad (۱۹)$$

که در آنها $\acute{\Omega}$ و $\partial\acute{\Omega}$ به ترتیب مساحت بی‌بعد سلول ثانویه MBEA و مرز آن می‌باشند.

۴- گسسته‌سازی زمانی

برای گسسته‌سازی زمانی، طرح رانگ-کوتای مرتبه پنج[۱۹] به دلیل دقت بالا و نیز گستره پایداری وسیع آن به کار گرفته می‌شود. برای سلول نشان داده شده در شکل ۱ داریم:

$$\frac{\partial\overline{W}}{\partial t} = \frac{1}{\Omega_{i.j}}\sum_{K=1}^{4}[(R\Delta y - S\Delta x)_K - (F_N\Delta L)_K];$$

$$W^{(m)} = W^{(0)} - \alpha_m \Delta t Q^{(m-1)}W$$

$$\alpha_m = \frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{3}{8},\frac{1}{2},1;\ m = 1,\dots,5 \qquad (۲۰)$$

که در آن Q طرف دست راست معادله (۲۰) است. تعداد تکرارها برای رسیدن به حل حالت پایا با استفاده از یک‌گام زمانی متغیر که به تغییرات محلی جریان و اندازه شبکه به‌صورت زیر بستگی دارد، کاهش می‌یابد.

$$\Delta t = \max[\frac{CFL\times\min\left(\sqrt{{\Delta x_{i.j}}^2 + {\Delta y_{i.j}}^2}\right)}{\max\left[\sqrt{\beta} + \sqrt{{u_{i.j}}^2 + {v_{i.j}}^2}\right]}, \frac{CFL}{max_{mm}(\eta_{mm})}];$$

$$\eta_{mm} = \max[\left(|\lambda_{(1)}|.|\lambda_{(2)}|.|\lambda_{(3)}|.|\lambda_{(4)}|\right)\sqrt{{\Delta x_{i.j}}^2 + {\Delta y_{i.j}}^2};$$

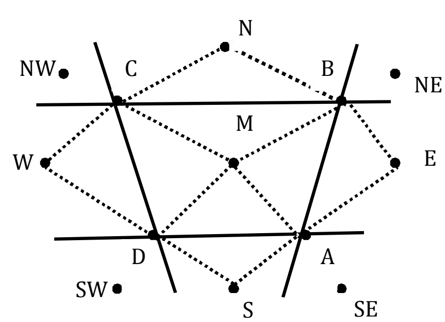
$$mm = 1.2.3.4 \qquad (۲۱)$$

در هر دو مطالعه موردی در تحقیق حاضر، معادلات حاکم بر جریان آرام، دوبعدی، پایا و تراکم‌ناپذیر هوای گذرنده از روی ایرفویل بدون انتقال‌گرما و از روی استوانه افقی با انتقال‌گرمای جابجایی اجباری در یک شبکه باسازمان و هموار با تعداد سلول کافی و نیز با فشرده‌سازی آنها در جاهایی حل می‌شوند که گرادیان‌های شدید متغیرهای جریان وجود دارد. شکل‌های ۳ و ۴ به‌ترتیب شبکه حول ایرفویل و حول استوانه را نمایش می‌دهند. عدم لغزش روی ایرفویل و استوانه$u = 0$ و $v = 0$ و دمای ثابت روی سطح استوانه$\theta = 1$، به عنوان شرایط مرزی در نظر گرفته می‌شوند. فشار روی ایرفویل و استوانه از طریق برون‌یابی با یک چندجمله‌ای مرتبه اول محاسبه می‌شود. با جهت بردار سرعت، بخش‌های ورودی و خروجی مرز دور میدان جریان از

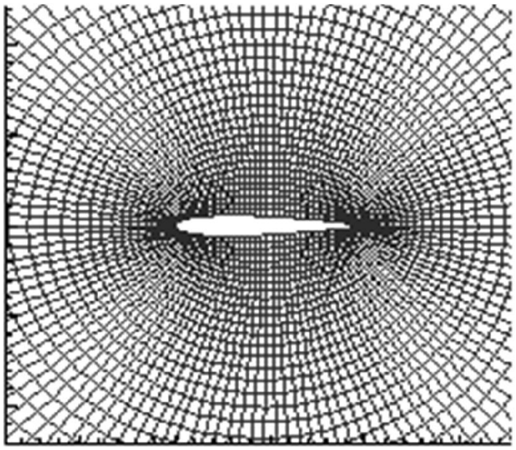
یکدیگر تشخیص داده می‌شوند. در بخش ورودی مرز دور، فشار از ناحیه داخلی برون‌یابی شده و برای سرعت در مورد ایرفویل و برای سرعت و دما در مورد استوانه، مقادیر جریان - آزاد قرار داده می‌شوند. در بخش خروجی مرز دور، فشار ثابت و در مورد ایرفویل، سرعت و در مورد استوانه، سرعت و دما از ناحیه داخلی برون‌یابی می‌شوند. در مورد ایرفویل، مرز دور در فاصله۳۰ برابر وتر ایرفویل C و در مورد استوانه، مرز دور در فاصله پ۲۰ برابر شعاع استوانه در نظر گرفته می‌شود. این فاصله‌ها عدم تاثیر مرز دور بر نتایج را تضمین می‌کند. همچنین لازم به ذکر است‌که ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی ($0.1 < \beta < 10$)، تاثیری بر نتایج نداشته، ولی مقادیر بزرگ β سرعت‌همگرایی حل عددی و مقادیرکوچک β پایداری حل عددی را تحت تاثیر منفی قرار می‌دهد[۱۸]. در کار حاضر، از $\beta = 1$ استفاده می‌شود که هم سرعت همگرایی و هم پایداری حل عددی مناسب را فراهم می‌کند. با توجه به این که استقلال نتایج از شبکه برای ایرفویل ناکا۰۰۱۲ در شبکه با تعداد سلول 60×120 و برای استوانه دایروی در شبکه با تعداد سلول60×60 حاصل شده است، از این دو شبکه در تمام نتایج ارائه شده در بخش بعد استفاده می‌گردد.

۵- نتایج و بحث

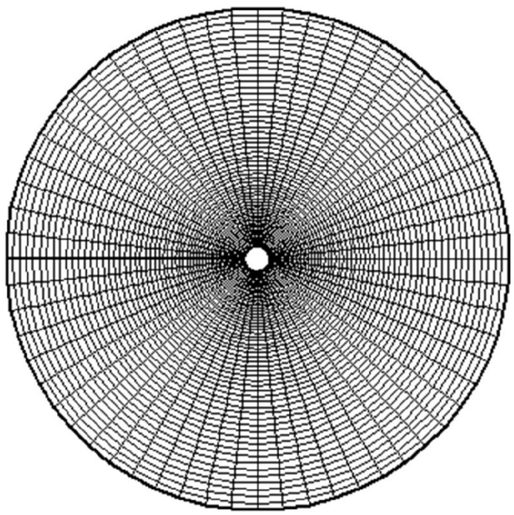
شکل ۵ ضریب فشار روی ایرفویل ناکا۰۰۱۲ بدون زاویه حمله در جریان تراکم‌ناپذیر، دوبعدی، پایا و آرام هوای‌گذرنده از روی آن با عدد ماخ مجازی (نسبت سرعت جریان آزاد هوا



شکل ۲- طرحواره‌ای از سلول اولیهABCD و سلول‌های ثانویه(نقطه‌چین)برای محاسبه جملات لزج و رسانش گرمایی

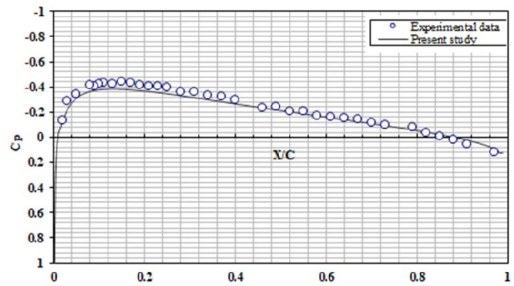


شکل ۳- بخشی از شبکه حول ایرفویل ناکا۰۰۱۲ با تعداد ۱۲۰ گره محیطی و ۶۰ گره شعاعی

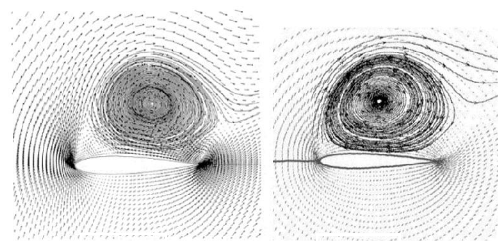


شکل ۴- بخشی از شبکه حول استوانه با تعداد ۶۰ گره محیطی و ۶۰ گره شعاعی

به سرعت شبه‌صوت) ۰/۳ را در مقایسه با اطلاعات‌تجربی [۲۰] ارائه می‌کند. همانگونه که مشاهده می‌شود، توافق بسیار خوبی بین آنها وجود دارد؛ همچنین در شکل‌های ۶ و ۷، بردارهای سرعت جریان هوا حول ایرفویل تحت دو زاویه حمله متفاوت ۳۰ و ۵۳ درجه در همان عدد شبه‌ماخ با نتایج عددی[۲۱] مقایسه شده است که نشان‌دهنده توافق بسیار خوب بین آنها است.

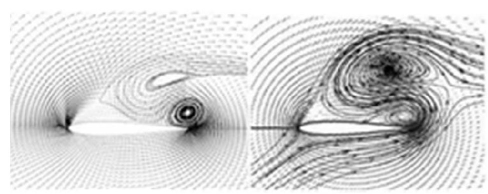


شکل ۵-ضریب فشار روی ایرفویل ناکا۰۰۱۲ بدون زاویه حمله در جریان هوا با عدد شبه‌ماخ۰/۳، اطلاعات تجربی از مرجع[۲۰]



(الف) (ب)

شکل ۶- بردارهای سرعت حول ایرفویل ناکا۰۰۱۲ تحت زاویه حمله ۵۳ درجه در جریان هوا با عدد شبه‌ماخ ۰/۳، الف)کار حاضر و ب) از مرجع [۲۱]



(الف) (ب)

شکل ۷- بردارهای سرعت حول ایرفویل ناکا۰۰۱۲ تحت زاویه حمله ۳۰ درجه در جریان هوا با عدد شبه‌ماخ ۰/۳، الف)کار حاضر و ب) از مرجع[۲۱]

در جریان صلیبی تراکم‌ناپذیر، آرام، دوبعدی و پایای هوای گذرا از روی استوانه دایروی افقی بلند با انتقال‌گرمای جابجایی اجباری، عدد پرانتل هوا ۰/۷بوده و گستره عدد رینولدز از ۱ تا ۱۰۰۰ است. در جدول ۱، ضریب پسای کلی وارد بر استوانه که مجموع ضرایب پسای اصطکاکی و فشاری است، در مقایسه با اطلاعات عددی موجود در ادبیات فن [۱۲-۱۶] و نیز ضریب پسای‌کلی وارد بر استوانه و محاسبه شده با روش میانگین‌گیری شار جابجایی‌جیمسون [۲۲] در اعداد رینولدز مختلف ارائه شده است. همان‌گونه‌که مشاهده می‌شود، توافق قابل قبولی بین آنها وجود دارد. جدول ۲ فشار بی‌بعد در نقطه سکون جلوی استوانه را در مقایسه با اطلاعات عددی موجود در ادبیات فن [۱۲و۱۳] و فشار بی‌بعد محاسبه شده با روش میانگین‌گیری شار جابجایی جیمسون [۲۲] در اعداد رینولدز مختلف ارائه می‌کند. در این جدول، توافق خوبی بین آنها قابل مشاهده است. دیده می‌شود که با افزایش عدد رینولدز، ضریب پسای کلی وارد بر استوانه و فشار بی‌بعد در نقطه سکون جلوی آن کاهش می‌یابند.

جدول ۱- ضریب پسای کلی وارد بر استوانه

Re	10	20	40	80	100	140
مرجع [۱۲]	2.80	2.05	1.52	1.25	1.06	-
مرجع [۱۳]	-	2.00	1.50	-	1.06	-
مرجع [۱۴]	-	2.18	1.61	1.35	1.15	1.08
مرجع [۱۵]	3.07	2.18	1.71	-	-	-
مرجع [۱۶]	2.85	2.06	1.56	-	-	-
جیمسون	2.79	2.02	1.51	1.31	1.13	1.08
کار حاضر	2.89	2.08	1.61	1.41	1.27	1.10

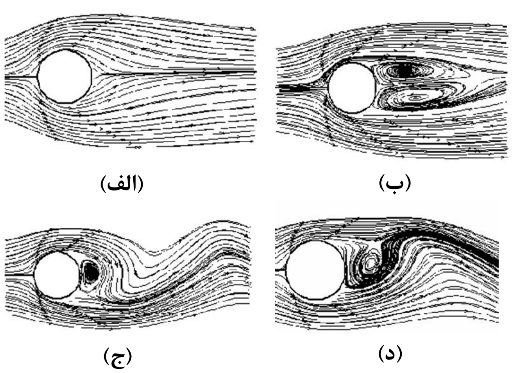
جدول ۲- فشار بی‌بعد در نقطه سکون جلوی استوانه

Re	4	10	20	40	100
مرجع [۱۲]	-	-	0.634	0.572	0.530
مرجع [۱۳]	1.000	0.718	0.638	0.576	0.533
جیمسون	0.900	0.628	0.570	0.541	0.529
کار حاضر	0.823	0.660	0.601	0.559	0.543

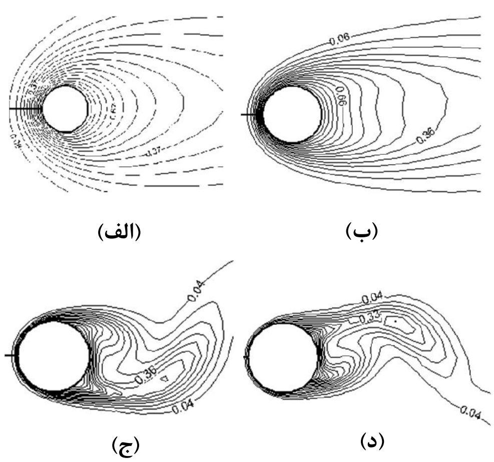
در شکل‌های ۸ و ۹ به‌ترتیب خطوط جریان و خطوط دما ثابت برای اعداد رینولدز ۴، ۲۰، ۲۰۰ و ۵۰۰ نمایش داده شده است. برای اولین عدد رینولدز، خطوط جریان تقریبا

متقارن بوده و استوانه را به طور کامل احاطه می‌کنند و نقطه جدایش درست در نقطه سکون پشت استوانه است. شاخصه اصلی آن توازن تقریبی بین نیروی فشاری و نیروی اصطکاکی است و به دلیل کوچک بودن سرعت سیال، نیروی اینرسی نیز کوچک است. برای $5 < Re < 40$، نقطه‌جدایش از پشت استوانه به جلوی آن حرکت‌کرده و جریان پایای‌جدا شده در پشت استوانه یک جفت گردابه[1] مجزا، هم شکل و پایدار را شکل می‌دهد که در موقعیت مشخصی باقی می‌مانند. برای اعداد رینولدز بالاتر از ۴۰، جریان در پشت استوانه ناپایدار - شده و یک گردابه پس از شکل‌گیری در پشت استوانه و در یک موقعیت مشخص، با یک آهنگ منظم به پایین‌دست حرکت می‌کند و یک جریانی از گردابه در ناحیه دنباله[2] پشت استوانه ایجاد می‌شود. برای $Re > 500$ گردابه‌های ثانویه و کوچکتر مشاهده می‌شود. اولین‌گردابه در $Re \approx 5$ شکل می‌-گیرد و با افزایش عدد رینولدز تا $Re = 40$، طول آن افزایش می‌یابد. خطوط دما ثابت که نشان‌دهنده وجودگرادیان‌های دما است، نیز به طور قابل‌ملاحظه‌ای به عدد رینولدز بستگی دارند. فشردگی زیاد آنها در جلوی استوانه و نزدیک به سطح آن ناشی از شکل‌گیری لایه مرزی گرمایی در آنجا است، در حالی که در پشت استوانه و در ناحیه دنباله، گردابه‌ها نقش بسیار مهمی در دریافت و پخش گرما ایفا کرده و در نتیجه از تراکم خطوط دما ثابت در آنجا کاسته می‌شود. خطوط دما ثابت نزدیک به سطح استوانه به دلیل رسانش گرمایی خالص، تقریبا به صورت دوایر هم‌مرکز و متقارن بوده و با فاصله گرفتن از سطح استوانه، به دلیل تاثیر جابجایی از حالت هم‌مرکز بودن و تقارن به تدریج خارج می‌شوند.

در توزیع عدد ناسلت موضعی روی سطح استوانه، بیشینه در نقطه سکون جلویی استوانه است، چون آنجا هنوز لایه مرزی گرمایی شکل نگرفته و به‌تدریج با شکل‌گیری و رشد لایه مرزی گرمایی و در نتیجه افزایش‌مقاومت‌گرمایی، عدد ناسلت موضعی شروع به‌کاهش‌یافتن می‌کند. در جدول ۳، بیشینه عدد ناسلت موضعی و در جدول ۴، عدد ناسلت متوسط با اطلاعات تجربی موجود در [۱۷] (رابطه سرما و سوخاتمه $Nu_{sp} = 0.91Re^{0.5}$ و رابطه زوکاسکاس ($\overline{Nu} = 0.51Re^{0.5}Pr^{0.33}$ برای اعداد رینولدز مختلف مقایسه شده‌اند که توافق خوبی بین آنها دیده می‌شود. مشاهده می‌شودکه با افزایش عدد رینولدز، عدد ناسلت متوسط $\overline{Nu}$ و بیشینه عدد ناسلت موضعی Nu_{sp} افزایش می-یابند که با توجه به شکل‌گیری گردابه‌ها در ناحیه دنباله پشت استوانه و رشد آنها و در نتیجه افزایش میزان اثرگذاری آنها بر انتقال‌گرما با افزایش عدد رینولدز قابل توجیه است.



شکل ۸- خطوط جریان در الف)Re=4، ب)Re=20، ج) Re=200 و د)Re=500



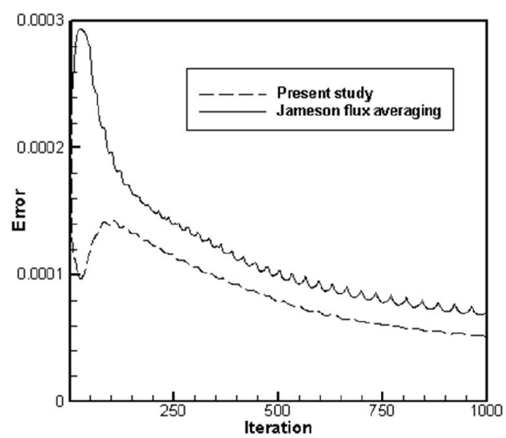
شکل ۹- خطوط دما ثابت در الف)Re=4، ب)Re=20، ج) Re=200 و د)Re=500

[1] Vortex
[2] Wake

در شکل ۱۰ نمودار همگرایی حل‌عددی جریان آرام، پایا، دوبعدی، تراکم‌ناپذیر هوا حول استوانه با انتقال‌گرمای جابجایی اجباری با $Re = 200$ برای طرح توسعه داده شده در کار حاضر و روش میانگین‌گیری شار جابجایی جیمسون [۲۲] با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌گونه‌که دیده می‌شود، حل عددی با طرح توسعه داده شده در کار حاضر بدون نیاز به شتاب‌دهنده‌های همگرایی مانند، شبکه چندگانه، تکنیک هموارسازی مانده‌ها و تکنیک گام زمانی محلی، بدون نیاز به تدبیر مرزی خاص و نیز بدون نیاز به اتلاف مصنوعی برای میرا کردن نوسانات عددی، در گستره پایداری وسیع‌تر، روند همگرایی سریع‌تر دارد. معیار همگرایی حل عددی در کار حاضر 10^{-5} است.

جدول ۳- بیشینه عدد ناسلت موضعی Nu_{sp} و عدد ناسلت متوسط $\overline{Nu}$ روی سطح استوانه

Re	60	100	120	140	200
$\overline{Nu}$ [۱۷] مرجع	3.51	4.53	4.77	5.37	6.41
$\overline{Nu}$ کار حاضر	3.59	4.51	4.78	5.39	6.70
Nu_{sp} [۱۷] مرجع	7.04	9.10	9.96	10.76	12.86
Nu_{sp} کار حاضر	6.80	9.12	10.07	10.88	12.65



شکل ۱۰- مقایسه سرعت همگرایی حل عددی با طرح توسعه داده شده در کار حاضر و روش میانگین‌گیری شار جابجایی جیمسون [۲۲] در Re=200

لازم به ذکر است‌که ضرایب پسای اصطکاکی $C_{D,v}$ [1] و پسای فشاری $C_{D,p}$ [2] وارد بر استوانه و عدد ناسلت موضعی و عدد ناسلت متوسط روی سطح استوانه به شکل زیر تعریف می‌شوند[۱۶]:

$$C_{D,p} = \int_0^{2\pi} p_W cos\eta \, d\eta \tag{۲۲}$$

$$C_{D,v} = \frac{2}{Re}\int_0^{2\pi} \omega_W sin\eta \, d\eta \, ; \tag{۲۳}$$

$$\omega = (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$$

$$Nu(\eta) = -\frac{\partial \theta}{\partial l} ; \overline{Nu} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Nu(\eta) d\eta \tag{۲۴}$$

که در آنها p_W فشار بی‌بعد روی سطح استوانه و l فاصله بی‌بعد از سطح استوانه می‌باشند.

۶- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، یک طرح بر اساس مشخصه‌ها و تراکم‌پذیری مصنوعی برای حل‌عددی معادلات ناویر-استوکس و انتقال‌گرما در جریان‌های آرام، پایا، دوبعدی و تراکم‌ناپذیر توسعه داده شد. در این توسعه، جملات جابجایی با بهره‌گیری از مشخصه‌های مجازی و جملات لزج و رسانش گرمایی با استفاده از یک روش مرتبه دوم گسسته‌سازی‌شدند؛ همچنین برای پیمایش زمانی از الگوریتم رانگ-کوتای مرتبه پنج بهره گرفته شد. برای ارزیابی کارامدی طرح توسعه داده شده در کار حاضر، جریان دوبعدی، تراکم ناپذیر، آرام و پایای هوای گذرا از روی ایرفویل ناکا۰۰۱۲ بدون انتقال‌گرما و نیز از روی استوانه دایروی افقی بلند با انتقال گرمای جابجایی اجباری شبیه‌سازی شدند. نتایج شبیه‌سازی‌ها با اطلاعات موجود در ادبیات فن مقایسه شدند که این مقایسه نشان‌دهنده توافق خوب بین انها بود. مشاهده شد که بهره‌گیری از مشخصه‌ها و تراکم‌پذیری مصنوعی بدون نیاز به تدبیر مرزی خاص، بدون نیاز به اتلاف مصنوعی جهت میرا کردن نوسانات عددی و

[1] Skin Friction Drag Coefficient
[2] Pressure Drag Coefficient

بدون نیاز به شتاب‌دهنده‌های همگرایی، نتایج دقیق در یک فرایند همگرایی سریع حاصل می‌کند.

۷- علائم اختصاری

a	سرعت بی‌بعد شبه‌صوت
A	ماتریس ژاکوبین بی‌بعد
C	وتر ایرفویل
CFL	عدد کورانت
C_P	ضریب فشار
$C_{D,P}$	ضریب پسای فشاری
$C_{V,P}$	ضریب پسای اصطکاکی
E	بردار ویژه بی‌بعد
F_N	بردار شار جابجایی عمودی بی‌بعد
L_{ch}	طول مشخصه
N	بردار یکه عمودی بی‌بعد
Nu_{sp}	بیشینه عدد ناسلت موضعی
$\overline{Nu}$	عدد ناسلت متوسط
P	فشار
P_∞	فشار مشخصه
p	فشار بی‌بعد
Pr	عدد پرانتل
R, S	بردارهای لزج و رسانش گرمایی بی‌بعد
Re	عدد رینولدز
T	دما
T_∞	دمای مشخصه
t	شبه‌زمان بی‌بعد
U, V	مولفه‌های سرعت
U_∞	سرعت مشخصه
u, v	مولفه‌های سرعت بی‌بعد
W	بردار حالت بی‌بعد
X, Y	محورهای مختصات
x, y	محورهای مختصات بی‌بعد

علائم یونانی

ρ	چگالی سیال
τ	شبه‌زمان
ζ	زاویه بین بردار یکه N و خط افق
ω	متغیر میانگین‌گیری وزنی
ν	لزجت سینمانتیک سیال
$\acute{\alpha}$	ضریب نفوذ گرمایی سیال
θ	دمای بی‌بعد
λ	مقدار ویژه
β	ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی
Ω و $\partial\Omega$	حجم کنترل و مرز آن
$\acute{\Omega}$ و $\partial\acute{\Omega}$	سلول ثانویه و مرز آن

زیرنویس‌ها و بالانویس‌ها

R, L	چپ و راست
w	مرز جامد
-	میانگین‌گیری شده

۸- مراجع

[1] Kwak D, Kiris C, Kim CS (2004) Computational challenges of viscous incompressible flows. Comput Fluids 34: 283-299.

[2] Bagabir A, Drikakis D (2004) Numerical experiments using high-resolution schemes for unsteady inviscid compressible flows. Comput Methods Appl Mech Eng 193: 4675-4705.

[3] Nithiarasu P, Codina R, Zienkiewicz OC (2006) The characteristic-based split scheme-a unified approach to fluid dynamics. Int J Num Methods Eng 66: 1514-1546.

[4] Neofytou P (2007) Revision of the characteristic-based scheme for incompressible flows. J Comput Phys 222: 475-484.

[5] Zamzamian K, Razavi SE (2008) Multidimensional upwinding for incompressible flows based on characteristics. J Comput Phys 227: 8699-713.

[6] Razavi SE, Nozari N (2009) On the rotational behavior of the Euler equations at high angles of attack. Int Review Mech Eng 3: 702-708.

[7] Catalano P, Tognaccini R (2011) RANS analysis of the low-Reynolds number flow around the SD7003 airfoil. Aerosp Sci Technol 15: 615-626.

[8] Hejranfar K, Kamali-Moghadam R (2012) Preconditioned characteristic boundary conditions for solution of the preconditioned Euler equations at low Mach number flows. J Comput Phys 231: 4384-4402.

[9] Rodriguez I, Lehmkuhl O, Borrell R, Oliva A (2013) Direct numerical simulation of a NACA0012 in full stall. Int. J Heat Fluid Flow 43: 194-203.

[10] Kapsalis PCh, Voutsinas S, Vlachos N (2016) Comparing the effect of three transition models on the CFD predictions of a NACA0012 airfoil aerodynamics. J Wind Eng Ind Aerodyn 157: 158-170.

[11] Hejranfar K, Parseh K (2017) Preconditioned characteristic boundary conditions based on artificial compressibility method for solution of incompressible flows. J Comput Phys http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2017.05.014.

[12] Dennis SCR, Chang GZ (1970) Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 100. J Fluid Mech 42: 471-489.

[13] Fornberg B (1980) A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. J Fluid Mech 98: 819-855.

[14] Braza M, Chassaing P, Nminh H (1986) Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity field in the near wake of a circular cylinder. J Fluid Mech 165: 79-130.

[15] Deng GB, Piquet J, Queutey P, Visonneau M, (1994) Incompressible flow calculations with a consistent physical interpolation finite volume approach. Comput Fluids 23: 1029-1047.

[16] Nithiarasu P, Zienkiewicz OC (2006) Analysis of an explicit and matrix free fractional step method for incompressible flows. Comput. Methods Appl Mech Eng 195: 5537-5551.

[17] Incropera FP, Dewitt DP, Bergman TL, Lavine AS (2007) Fundamentals of heat and mass transfer. 6th edn. John Wiely, NewYork.

[18] Chorin AJ (1967) A numerical method for solving incompressible viscous problems. J Comput Phys 2: 12-26.

[19] Jameson A, Schmidt W, Turkel E (1981) Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes. AIAA 1259: 1981.

[20] Report of the fluid dynamics panel, working group 04. Experimental data base for computer program assessment. AGARD Advisory report no.138, 1979.

[21] Murthy PS, Holla VS, Kamath H (2000) Unsteady Navier-Stokes solutions for a NACA 0012 airfoil. Comp. Methods Appl Mech Engrg 186: 85-99.

[22] Jameson A, Schmidit W, Turkel E (1981) Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping. AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conf., Palo Alto, California.