



تخمین ضریب تمرکز تنش صفحات تک لایه کامپوزیتی حاوی گشودگی‌های مثلثی با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه

علی عباس‌نیا^۱، محمد جعفری^۲ و عباس روحانی^{۳*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

^۲ دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

^۳ استادیار، دانشکده کشاورزی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۱۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۱۲/۲۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۰۲

چکیده

هدف از انجام این مقاله ارائه مدلی جدید بر پایه روش رگرسیونی جهت تخمین ضریب تمرکز تنش در گشودگی مثلثی در صفحات تک‌لایه کامپوزیتی است. از کاربردهای مهم ارائه توزیع تنش در اطراف گشودگی بر حسب خواص مکانیکی، استفاده از این روابط در تحلیل تنش صفحات ویسکوالاستیک دارای گشودگی با استفاده از روش مدول مؤثر و یا اصل برهم‌نهی بولتزمن است. در ابتدا با استفاده از مقادیر مختلف خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها و به کمک حلی تحلیلی بر پایه روش متغیر مختلط، ضریب تمرکز تنش برای تعداد متعددی از این مواد محاسبه می‌شود؛ سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه برای گشودگی مثلثی، رابطه‌ای صریح برای ضریب تمرکز تنش بر حسب خواص مکانیکی ارائه می‌شود. نتایج بیان می‌کند که مدل رگرسیونی قادر به پیش‌بینی تنش محیطی با حداکثر خطای کمتر از ۱ درصد است. نکته قابل توجه در این مقاله، کاهش محاسبات به‌وسیله رابطه‌ی مذکور است. برای محاسبه تمرکز تنش در سایر مقالات موجود در این زمینه، از محاسبات سخت و پیچیده بهره جستند؛ اما با کمک رابطه موجود در این مقاله، می‌توان با داشتن خواص مکانیکی ورق ضریب تمرکز تنش را محاسبه کرد.

کلمات کلیدی: تمرکز تنش؛ گشودگی مثلثی؛ رگرسیون خطی چندگانه؛ روش متغیر مختلط.

Estimation of Stress Concentration Factor of Composite Lamina with Triangular Hole Using Multiple Linear Regression

A. Abbasnia¹, M. Jafari², A. Rohani^{3,*}

¹ M. Sc, Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran.

² Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran.

³ Assis. Prof., Department of Biosystems Engineering, Faculty of Agriculture, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

Abstract

The purpose of this paper is to present a new model based on the multiple regression method for estimating stress concentration factor of a quasi-triangular hole in composite lamina. One of the important applications of providing stress distribution around holes in terms of mechanical properties is the use of these relationships in the stress analysis of perforated viscoelastic plate using the effective modulus method or Boltzmann's superposition principle. First, using different values of the mechanical properties of the composites plates, and employing an analytical solution based on the complex variable method, the stress concentration factor of quasi-triangular hole is calculated for a number of these materials. Then, using multiple linear regression, An explicit expression for the stress concentration factor is given in terms of mechanical properties. The results show that the multiple regression model is able to predict the circumferential stress with a maximum error of less than 1%. An important point in this article is the reduction of the calculations by applying the aforementioned relations. In other papers in this field, hard and complex calculations were used to obtain the stress concentration factors, but with the help of the relation of this paper, it is to calculate the stress concentration factor with having the mechanical properties of the plate.

Keywords: Stress Concentration Factor; Triangular Hole; Multiple Linear Regression; Complex Variable Method.

۱- مقدمه

با توجه به پیشرفت روزافزون صنعت در جامعه مدرن امروزی، نیاز به مواد جدید بسیار احساس می‌شود. در بین مواد جدید کامپوزیت‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. این مواد با کارایی‌های متفاوت و خصوصیات ذاتی ماده، نظر بسیاری از طراحان را به خود جلب کرده‌اند. شایان ذکر است که در برخی طرح‌ها به دلیل ایجاد راه‌های ورود و خروج و یا اتصال قطعات و ... طراح مجبور به ایجاد برخی گشودگی‌ها در طرح می‌شود.

وجود این ناپیوستگی‌های هندسی در جسم باعث بوجود آمدن پدیده‌ای می‌شود که به نام تمرکز تنش شناخته می‌شود. بایستی توجه داشت که هرچند وجود گشودگی در جسم باعث کاهش استفاده مواد اولیه و در نتیجه کاهش وزن جسم می‌شود، اما تمرکز تنش ناشی از آن استحکام سازه را کاهش داده و همچنین سازه را از محل گشودگی‌ها دچار شکست می‌کند.

لذا با توجه به مطالب بیان شده دانستن مقادیر تمرکز تنش الزامی به‌نظر می‌رسد. هرچند در سال‌های اخیر افراد بسیاری در این زمینه فعالیت کرده‌اند، اما اهمیت و گستردگی موضوع، ما را بر آن داشت تا مطالعاتی در این زمینه انجام دهیم.

مطالعات و تحقیقات فراوانی در زمینه تمرکز تنش در صفحات دارای گشودگی صورت گرفته است. موشخیلشویلی^۱، توانست روش متغیر مختلط را برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه کند. او تعیین ضریب تمرکز تنش در ورق حاوی گشودگی را محدود به محاسبه دو تابع تحلیلی هولومورفیک کرد. همچنین با ترکیب این روش با نگاشت هم‌نوا توانست در جسم الاستیک دو بعدی، توزیع تنش در ورق حاوی گشودگی‌های غیر دایره‌ای را نیز تحلیل کند. لخنیتسکی^۲ با بسط روش متغیر مختلط موشخیلشویلی توانست، حلی برای گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود ناهمسانگرد ارائه دهد. او محاسبات خود را در حالت تنش صفحه‌ای انجام داد. لخنیتسکی از روش سری‌ها برای محاسبه ضریب تمرکز تنش استفاده کرد.

ساوین^۳ تمرکز تنش در ورق نامحدود را برای مواد همسانگرد و ناهمسانگرد بررسی کرد. او در مواد همسانگرد، توزیع تنش اطراف گشودگی با اشکال مختلف را ارائه داد و در مواد ناهمسانگرد، تنها گشودگی دایره‌ای و بیضوی را مورد تحلیل قرار داد. او در پژوهش‌های خود از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی استفاده کرد؛ همچنین ساوین با استفاده از نگاشت هم‌نوا و رابطه شوارتز توزیع تنش در ورق نامحدود حاوی گشودگی مثلثی با لبه‌های گرد را نیز محاسبه کرد.

داوست^۴ و همکاران [۴]، حلی تحلیلی برای صفحات ناهمسانگرد حاوی گشودگی مثلثی ارائه دادند. آن‌ها صفحه را تحت بار مشخصی مورد بررسی قرار دادند. تمرکز تنش حول گشودگی‌های مختلف در صفحات بی‌نهایت کامپوزیتی توسط شارما^۵ [۵]، مورد مطالعه قرار گرفت. او محاسبات خود را با استفاده از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی انجام داد و جهت گیری الیاف، نوع بارگذاری، زاویه بارگذاری و هندسه گشودگی در صفحات ارتوتروپیک را بررسی کرد. در پژوهش دیگری شارما و پتل [۶]، توانستند توزیع گشتاور در اطراف گشودگی‌های دایره‌ای، بیضوی و مثلثی را در صفحات چند لایه‌ی متقارن مورد تحلیل قرار دهند. آن‌ها صفحات را تحت بارگذاری خمشی و پیچشی در بی‌نهایت قرار دادند. آن‌ها هندسه گشودگی، جنس مواد و نوع بارگذاری را مورد بررسی قرار دادند. موهاپاترا^۷ و همکاران [۷]، با استفاده از روش متغیر مختلط، توزیع تنش در اطراف گشودگی‌های نامنظم در یک صفحه بی‌نهایت الاستیک تحت فشار یکنواخت را ارائه دادند. یوکاجونکر^۸ و همکاران [۸]، در تحقیقی توزیع تنش اطراف سوراخ مثلثی در صفحات ناهمسانگرد را مطالعه کردند. آن‌ها راه حل کلی برای توزیع تنش دو بعدی در اطراف گشودگی‌های مثلثی در صفحات ایزوتروپیک و ارتوتروپیک را تحت بارگذاری‌های مختلف ارائه دادند. توزیع تنش اطراف سوراخ‌های متفاوت

³ Savin

⁴ Daoust

⁵ Sharma

⁶ Ptel

⁷ Mohapatra

⁸ Ukadgaonker

¹ Muskhelishvili

² Lekhnitskii

در ورق‌های ناهمسانگرد توسط کرنک^۱ [۹] صورت پذیرفت. او ابتدا صفحات را تحت یک نیروی متمرکز قرار داد و سپس نیروی گسترده را روی آن‌ها بررسی کرد. پتروو^۲ و سیکاریس^۳ [۱۰]، توزیع و شدت تنش را در گوشه‌های گشودگی مثلثی تحلیل کردند. آن‌ها گشودگی مثلثی را با استفاده از تابع نگاشت شوارتز-کریستفل^۴ به دایره‌ای واحد نگاشت دادند. مطالعه روی تأثیرات تمرکز تنش در صفحات دارای گشودگی‌های مختلف توسط کومار^۵ و همکاران [۱۱] انجام شد. آن‌ها ورق را تحت تنش تک محوره بررسی کردند.

رضایی‌پژند و جعفری [۱۲]، توزیع تنش در صفحات فلزی نامحدود حاوی گشودگی‌های با اشکال خاص تحت بارگذاری کششی را مطالعه کردند. آن‌ها در پژوهش دیگری [۱۳]، تأثیر پارامترهای مختلف در توزیع تنش صفحات ناهمسانگرد دارای گشودگی مثلثی را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. ایشان با بسط حلّ تحلیلی لخنیتسکی بررسی-های خود را روی پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش حول گشودگی مثلثی انجام دادند. جعفری و اردلانی [۱۴]، حلّ تحلیلی محاسبه توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای صفحات همسانگرد محدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای را بررسی کردند. آن‌ها بر پایه‌ی روش متغیر مختلط موشخیلشویلی و نگاشت هم‌نوا با فرض تنش صفحه‌ای، تحقیقات خود را انجام دادند. ایشان همچنین تأثیر پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش همچون زاویه‌ی چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت اندازه گشودگی به ورق، انحنای گوشه‌های گشودگی و نوع بارگذاری را بررسی کردند. مدل‌سازی تمرکز تنش در صفحات همسانگرد با گشودگی مثلثی شکل نیز، توسط جعفری و روحانی [۱۵] انجام شد. آن‌ها با بررسی پارامترهای طراحی نشان دادند که با نرم‌تر شدن انحنای گشودگی، ضریب تمرکز تنش نیز کاهش می‌یابد. جعفری و بیاتی چالشتری [۱۶]، بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش گشودگی مثلثی در

ورق‌های همسانگرد محدود را مطالعه کردند. آن‌ها با استفاده از روش بهینه‌سازی الگوریتم سنجاچک پارامترهای مؤثر در تحلیل تنش ورق همسانگرد محدود دارای گشودگی مثلثی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای را بهینه کردند. در بررسی چندلایه‌های متقارن حاوی گشودگی مثلثی نیز جعفری و مشیری‌اول [۱۷]، توانستند تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش این صفحات را بررسی کنند. ایشان بر پایه روش لخنیتسکی و با استفاده از تابع نگاشت هم‌نوا نتایج خود را ارائه دادند. زاویه چرخش گشودگی، کشیدگی گشودگی، چیدمان لایه‌ها، زاویه‌ی بار و شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی از جمله عواملی بود که در پژوهش بررسی شد.

رضایی‌پژند و جعفری [۱۸-۲۰]، در پژوهش‌های جداگانه تأثیر نرمی گشودگی و تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش در صفحات حاوی گشودگی مرکزی تحت کشش بررسی کردند. آن‌ها با بسط روش لخنیتسکی، توانستند پارامترهای بهینه برای دستیابی به کمترین ضریب تمرکز تنش را ارائه دهند. کارهای متعدد انجام شده در این زمینه، نشان‌دهنده اهمیت این پژوهش در به‌دست آوردن رابطه‌ای صریح است که ارتباط بین ضریب تمرکز تنش و خواص مکانیکی در گشودگی مثلثی را مشخص کند. براساس منابع در دسترس و موجود، تاکنون در سایر تحقیقات این امر کمتر مورد توجه قرار گرفته است. از طرف دیگر، با ارائه رابطه‌ای ریاضی برای ضریب تمرکز تنش برحسب خواص مکانیکی، می‌توان با استفاده از اصل برهمنهی بولتزمن مسأله را به ورق ویسکوالاستیک بسط داد. در این پژوهش سعی بر آن شده که یک رابطه تحلیلی برای محاسبه ضریب تمرکز تنش گشودگی مثلثی در صفحات مختلف ارائه گردد. در ابتدا با استفاده از مقادیر مختلف خواص مکانیکی کامپوزیت‌ها E_1 ، E_2 ، ν_{12} و G_{12} ، و به کمک حلّی تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط، ضریب تمرکز تنش برای تعداد متعددی از این مواد محاسبه شد. سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه برای گشودگی مثلثی، رابطه‌ای صریح برای ضریب تمرکز تنش برحسب خواص مکانیکی و انحنای گشودگی ارائه شد. پارامترهای مهم مورد بحث در

رضایی‌پژند و جعفری [۱۲]، توزیع تنش در صفحات فلزی نامحدود حاوی گشودگی‌های با اشکال خاص تحت بارگذاری کششی را مطالعه کردند. آن‌ها در پژوهش دیگری [۱۳]، تأثیر پارامترهای مختلف در توزیع تنش صفحات ناهمسانگرد دارای گشودگی مثلثی را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. ایشان با بسط حلّ تحلیلی لخنیتسکی بررسی-های خود را روی پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش حول گشودگی مثلثی انجام دادند. جعفری و اردلانی [۱۴]، حلّ تحلیلی محاسبه توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی برای صفحات همسانگرد محدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای را بررسی کردند. آن‌ها بر پایه‌ی روش متغیر مختلط موشخیلشویلی و نگاشت هم‌نوا با فرض تنش صفحه‌ای، تحقیقات خود را انجام دادند. ایشان همچنین تأثیر پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش همچون زاویه‌ی چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت اندازه گشودگی به ورق، انحنای گوشه‌های گشودگی و نوع بارگذاری را بررسی کردند. مدل‌سازی تمرکز تنش در صفحات همسانگرد با گشودگی مثلثی شکل نیز، توسط جعفری و روحانی [۱۵] انجام شد. آن‌ها با بررسی پارامترهای طراحی نشان دادند که با نرم‌تر شدن انحنای گشودگی، ضریب تمرکز تنش نیز کاهش می‌یابد. جعفری و بیاتی چالشتری [۱۶]، بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش گشودگی مثلثی در

¹ Krenk

² Petrou

³ Theocariss

⁴ Schwarz-Christoffel

⁵ Kumar

کرد. ابولفتوح^۱ [۲۳] رابطه واحدی برای این منظور ارائه کرده است.

$$\begin{aligned} X &= \lambda(\cos\theta + w\cos(2\theta)) \\ Y &= -\lambda(c\sin\theta - w\sin(2\theta)) \end{aligned} \quad (1)$$

که در رابطه (۱)، λ بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد. c نشان‌دهنده‌ی کشیدگی گشودگی است. w نیز معیار تیزی یا نرمی و انحنای گشودگی است. پارامترهای مذکور بنا به هندسه‌ی گشودگی مقادیر مختلفی را اختیار می‌کنند. برای گشودگی مثلث متساوی‌الاضلاع $c=1$ و $0 < w < 0.5$ است. با کاهش w ، گشودگی ملایم‌تر می‌شود؛ یعنی شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی افزایش می‌یابد. این روند تا تبدیل گشودگی مثلثی به دایره ($w=0$) ادامه پیدا می‌کند که در شکل ۲ قابل مشاهده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی مواد [۲۱-۲۲]

نام ماده	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
Glass/Epoxy	۴۲	۱۴	۷/۰	۰/۲۵
Graphite/Epoxy	۱۶۸	۱۴	۸/۴	۰/۳
Boron/Epoxy	۲۱۰	۲۱	۷/۰	۰/۳
Carbon/Epoxy	۲۰۵	۱۰	۶/۰	۰/۲۶

برای محاسبه تنش‌های مختلف جهت تحلیل رگرسیونی از حلّ تحلیلی ارائه شده توسط لخنیتسکی [۲] استفاده شده که بر پایه تئوری الاستیسیته مواد ناهمسانگرد است. با توجه به اینکه حلّ فوق در مقالات متعددی شرح داده شده است، از بیان مجدد آن صرف نظر می‌کنیم [۱۲-۱۳، ۱۷-۲۰].

۲-۳- تحلیل رگرسیونی

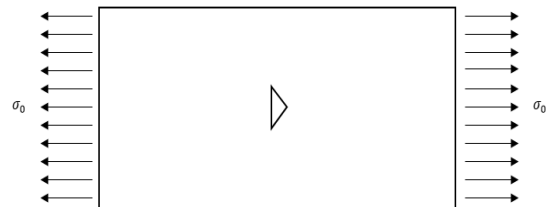
شایان ذکر است، در صفحات دارای نقص هندسی ضریب تمرکز تنش، تابعی از پنج متغیر E_1 ، E_2 ، G_{12} ، ν_{12} و w است. ما برای بی‌بعد سازی متغیرها، خواص E_1 ، E_2 ، G_{12} را با یکدیگر تلفیق کردیم. به همین منظور نیز برای تنش از نسبت $\frac{\sigma_{\theta max}}{\sigma_0}$ استفاده شد که برابر همان

این پژوهش، بارگذاری محوری و خواص مکانیکی ماده هستند.

۲- داده‌ها و حلّ تحلیلی

۲-۱- تعریف مسأله و مواد

در این مقاله سعی شده است، رابطه‌ای صریح برای محاسبه ضریب تمرکز تنش بر حسب خواص مکانیکی در یک ورق حاوی گشودگی مثلثی ارائه شود که تحت بارگذاری محوری قرار گرفته است. صفحه نامحدود و گشودگی در مرکز صفحه قرار دارد (شکل ۱). رفتار ورق در ناحیه الاستیک خطی بررسی می‌شود. تحلیل مسأله با فرض تنش صفحه‌ای صورت می‌گیرد.



شکل ۱- شماتیک ورق دارای گشودگی مثلثی تحت کشش

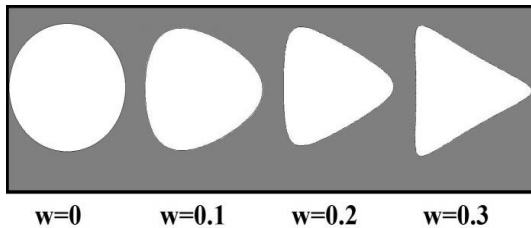
مواد مورد استفاده در این پژوهش شامل، ۱۱۵ ماده مختلف با خواص مکانیکی متفاوت هستند. با استفاده از حلّ تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط و نگاشت هم‌نوا، ضریب تمرکز تنش برای این مواد با شعاع انحنای متفاوت گوشه گشودگی محاسبه شد. در نهایت ۱۲۶۵ داده با مقادیر متفاوت از پارامترهای مورد بررسی در نظر گرفته شد. داده‌های به‌دست آمده جهت تحلیل رگرسیونی استفاده شد. از روش طرح آزمایشی فاکتوریل برای تولید داده‌ها استفاده شد. با توجه به حجم بالای داده‌ها، به ذکر برخی خواص مکانیکی در جدول ۱ اکتفا شده است.

۲-۲- روش حل و نگاشت

برای تحلیل گشودگی‌های مختلف، در ابتدا بایستی از یک تابع نگاشت $z = (X + sY)$ استفاده کرد تا به کمک آن گشودگی‌های مختلف را به یک دایره با شعاع واحد تبدیل

¹ Abuelfoutouh

الاستیک E_1 ، x_2 مدول الاستیک E_2 ، x_3 نسبت پواسون ν_{12} ، x_4 مدول برشی G_{12} و x_5 همان w می‌باشند. جدول ۲ نمایانگر شکل کلی تجزیه واریانس مدل رگرسیون خطی چند گانه است. m تعداد داده‌ها، p پارامترهای مدل، y ضریب تمرکز تنش محاسبه شده از روش تحلیلی، \hat{y} پاسخ مدل، \bar{y} میانگین ضریب تمرکز تنش در جدول ۲ می‌باشند. در مدل رگرسیونی دو عامل مجموع مربعات رگرسیون (sum of squared regression) و مجموع مربعات خطا (sum of squared errors)، مجموع تغییرات کل (sum of squared total) را تشکیل می‌دهند؛ بنابراین می‌توان اثر معنی داری برای هر یک از عامل‌های مدل ارزیابی کرد.



شکل ۲- تأثیر تغییرات پارامتر w بر گشودگی مثلثی [۱۶]

جدول ۲- تجزیه واریانس مدل رگرسیونی [۲۴]

منبع تغییرات	درجه آزادی	مجموع مربعات	متوسط مربعات
رگرسیون	$p-1$	$SS_R = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$MS_R = SS_R / p-1$
باقی‌مانده	$m-p$	$SS_E = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$	$MS_E = SS_E / m-p$
کل	$m-1$	$SS_T = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$	-

۴-۲- ارزیابی مدل رگرسیون خطی چندگانه

در این پژوهش از مدل رگرسیون خطی به کار گرفته شده است. برای سنجش بهتر قابلیت این مدل، تمام داده‌ها، به صورت تصادفی به دو گروه کالیبراسیون و آزمون تقسیم

ضریب تمرکز تنش است که تنش یکنواخت در صفحه بدون آسیب σ_0 نامیده شده است و مقدار آن ۱ Pa می‌باشد؛ بنابراین با توجه به کسرهای متفاوت از ترکیبات E_1 ، E_2 ، G_{12} از شش گزینه به عنوان متغیرهای مستقل مدل رگرسیون خطی چندگانه استفاده شد.

برای پیش‌بینی ضریب تمرکز تنش، از مدل‌های مختلف رگرسیون استفاده شد. این مدل‌ها عبارتند از: مدل خطی^۱، مدل با اثرات متقابل^۲، مدل درجه دوم^۳، مدل درجه دوم کاهش یافته^۴. این مدل‌ها بسته به تعداد متغیرهای مستقل قابل بسط هستند. برای مطالعه‌ی حاضر، این مدل‌ها به صورت روابط ۲ تا ۵ آورده شده است [۲۴].

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + \varepsilon \quad (2)$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{15}x_1x_5 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{25}x_2x_5 + b_{34}x_3x_4 + b_{35}x_3x_5 + b_{45}x_4x_5 + \varepsilon \quad (3)$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{15}x_1x_5 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{25}x_2x_5 + b_{34}x_3x_4 + b_{35}x_3x_5 + b_{45}x_4x_5 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{55}x_5^2 + \varepsilon \quad (4)$$

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + b_{44}x_4^2 + b_{55}x_5^2 + \varepsilon \quad (5)$$

y ، متغیر پاسخ که در این مقاله σ_θ است. b_0 ضریب ثابت، b_1 - b_5 اثرات خطی، b_{12} ، b_{13} ، b_{14} ، b_{15} ، b_{23} ، b_{24} ، b_{25} ، b_{34} ، b_{35} و b_{45} اثرات درجه دوم، b_{11} ، b_{22} ، b_{33} ، b_{44} و b_{55} نیز اثرات متقابل می‌باشند. ε خطای مدل و x_1 - x_5 نیز متغیرهای مستقل می‌باشد. در این پژوهش، x_1 مدول

¹ Multiple Linear Regression (MLR)

² Linear

³ Two Factor Interaction (2FI)

⁴ Quadratic

⁵ Reduce Quadratic

⁶ SS_R

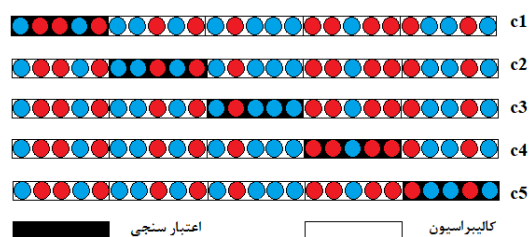
⁷ SS_E

⁸ SS_T

بهترین مدل رگرسیونی، برازش برای تمامی روابط ۲-۵ صورت پذیرفت. در جدول ۳ میانگین خطای مدل (Mean Absolute Percentage Error) و انحراف معیار خطاهای مدل (Root Mean Square Error) برای سنجش مدل رگرسیون خطی چندگانه با چهار متغیر در سه مرحله کالیبراسیون، تست و کل آورده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده تخمین تمرکز تنش در گشودگی مثلثی از آن‌ها به عنوان بهترین متغیرهای مدل رگرسیون خطی چندگانه استفاده می‌شود. متغیرهای $E_2, \frac{E_1}{E_2}, \nu_{12}, W$ منجر به کمترین مقدار برای خطا و انحراف معیار خطاهای مدل شد. بنابراین جهت تخمین تمرکز تنش در گشودگی مثلثی از آن‌ها به عنوان بهترین متغیرهای مدل MLR استفاده می‌شود.

در مباحث قبلی بهترین متغیرهای مستقل مؤثر برای مدل رگرسیون خطی چندگانه مشخص شد. شکل‌هایی که این مدل در بر می‌گیرد عبارتند از: خطی، اثرات متقابل، درجه دوم کاهش یافته و درجه دوم که برای یافتن بهترین شکل مدل رگرسیون خطی چندگانه ارزیابی شدند. برای ارزیابی دقیق مدل از دو روش استفاده شد. ارزیابی روش رگرسیون گام به گام جهت پیدا کردن عامل‌های معنی دار در مدل در مرحله کالیبراسیون و همچنین ارزیابی با استفاده از روش K-fold صورت پذیرفت. میانگین و انحراف معیار مدل‌ها، در جدول ۴ آمده است. جهت تخمین ضریب تمرکز تنش در گشودگی مثلثی با کمترین خطای ممکن، مدل‌های درجه دوم، درجه دوم کاهش یافته، اثرات متقابل و خطی استفاده شدند که با توجه به نتایج، مدل درجه دوم به عنوان بهترین مدل رگرسیون خطی چندگانه انتخاب شد. میانگین درصد خطای کل این مدل، برابر با ۱۱/۳۴ درصد شد؛ همچنین برای دستیابی به بهترین نتیجه برای ضریب تمرکز تنش، انواع تبدیلات مورد بررسی قرار گرفت که نتایج آن در جدول ۵ آمده است و نهایتاً میانگین درصد خطای کل مدل برابر با ۱/۹۰ شد.

گردیده و سهم داده‌های کالیبراسیون برابر با ۸۰ و تست برابر با ۲۰ درصد از کل مجموعه داده‌ها در نظر گرفته شد. در واقع مرحله‌ی کالیبراسیون به مرحله‌ای اطلاق می‌شود که ضرایب مدل رگرسیونی تخمین زده می‌شود و به مرحله‌ای که در آن ارزیابی مدل به مجموعه داده‌های جدید صورت می‌گیرد، مرحله‌ی تست گفته می‌شود. همچنین برای نشان دادن بهتر قابلیت مدل رگرسیون خطی چندگانه، از روشی به نام K-fold استفاده شد. در این نوع اعتبارسنجی، داده‌ها به K زیرمجموعه افراز می‌شوند. از این K زیرمجموعه، هر بار یکی برای اعتبارسنجی و K-۱ تای دیگر برای آموزش به کار می‌روند. این روال K بار تکرار می‌شود و همه داده‌ها دقیقاً یکبار برای آموزش و یکبار برای اعتبارسنجی به کار می‌روند. در نهایت میانگین نتیجه این K بار اعتبارسنجی به عنوان یک تخمین نهایی برگزیده می‌شود. در روش K-Fold طبقه‌ای سعی می‌شود، نسبت داده‌های هر کلاس در هر زیرمجموعه و در مجموعه اصلی یکسان باشد که در این پژوهش از K=۵ استفاده شد (شکل ۳). در نتیجه پنج مجموعه داده مختلف برای کالیبراسیون و ارزیابی مدل ایجاد شد که نهایتاً، ۱۰۰ مجموعه داده مختلف از ۲۰ بار تکرار برای هر مدل ایجاد گردید. در شکل ۳، Cهای مختلف مراحل مختلف کالیبراسیون را نشان می‌دهند.



شکل ۳- اعتبارسنجی ۵-fold

۳- بحث و بررسی صحت نتایج

۳-۱- انتخاب متغیرها و شکل مدل

تخمین ضرایب رگرسیون مدل رگرسیون خطی چندگانه در مرحله‌ی کالیبراسیون صورت می‌پذیرد. برای ارزیابی هر مدل، از مراحل کالیبراسیون و تست از ۱۰۰ مجموعه داده متفاوت استفاده شده است. برای دستیابی به

¹ MAPE

² RMSE

۲-۳- عیب شناسی مدل رگرسیون

برای اعتبار بخشیدن به مدل رگرسیونی عواملی همچون، نرمال بودن توزیع آماری خطاهای مدل رگرسیون، نبود خود همبستگی بین خطاها و مستقل بودن خطاها نیاز است. با توجه به مطالب ذکر شده برای تخمین ضریب تمرکز تنش، مدل رگرسیونی درجه‌ی دوم انتخاب شد. برای اعتماد به این مدل آن را مورد سنجش قرار دادیم. نتایج ارزیابی مدل در مرحله کالیبراسیون، در شکل ۴

آورده شده است. در شکل ۴ (a) و (c)، پراکندگی خطاهای مدل پیرامون خط نرمال مشاهده می‌شود؛ بنابراین خطاهای مدل تابع روند توزیع نرمال هستند. البته نتیجه آزمون کلموگروف-اسمیرنوف نیز، این فرضیه را تأیید کرد (p-value > 0/05). شکل ۴ (b) و (d) نیز به ترتیب نمایانگر، توزیع یکنواخت و مستقل خطا، نبود خود همبستگی بین خطاهای مدل رگرسیونی به دلیل عدم وجود روند تغییرات مشخصی برای آن هستند.

جدول ۳- میانگین و انحراف معیار خطای مدل رگرسیون خطی چندگانه به ازای متغیرهای مختلف

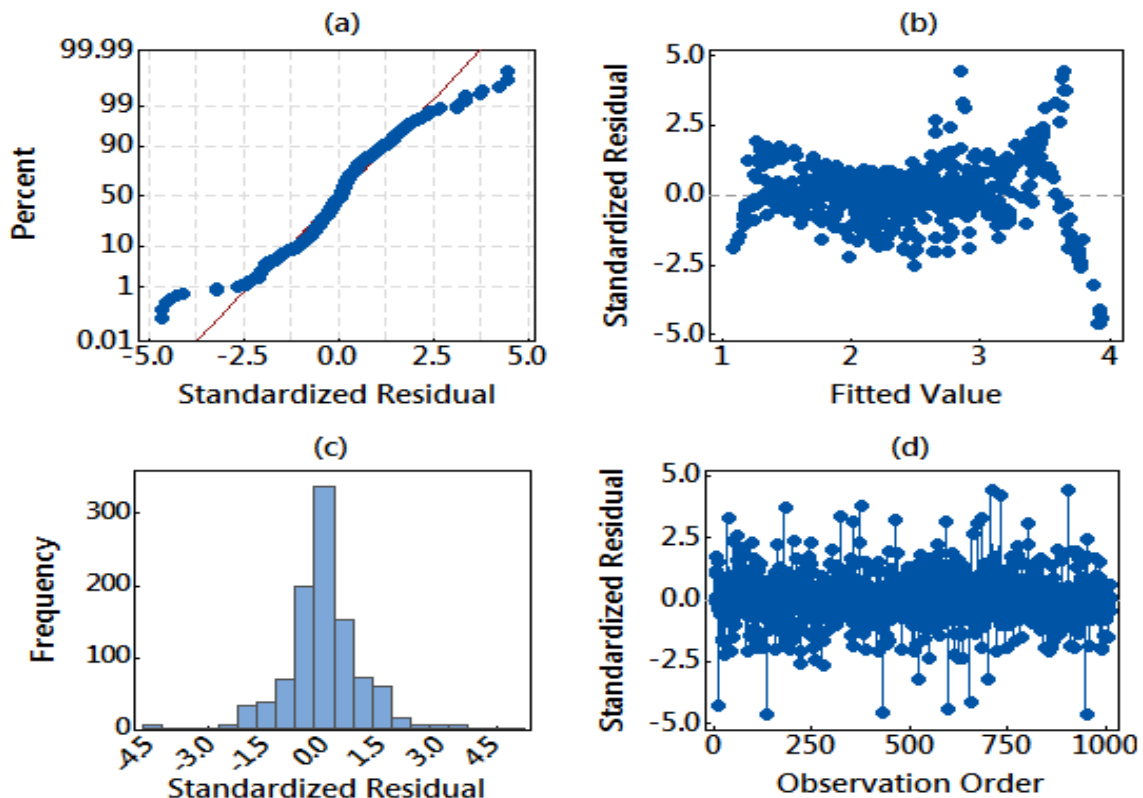
متغیرها	کالیبراسیون		تست		کل	
	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE
$\frac{E_1}{E_2}, \frac{E_1}{G_{12}}, v_{12}, W$	۴/۱۹±۰/۰۴	۳۳/۲۳±۰/۴۷	۴/۲۲±۰/۱۶	۳۳/۴۲±۱/۹۸	۴/۲۰±۰/۰۰	۳۳/۲۷±۰/۴۴
$\frac{E_1}{E_2}, \frac{E_1}{G_{12}}, v_{12}, W$	۴/۳۷±۰/۰۴	۳۴/۲۴±۰/۵۱	۴/۳۹±۰/۱۹	۳۴/۳۹±۲/۲۰	۴/۳۸±۰/۰۰	۳۴/۲۷±۰/۴۳
$\frac{E_1}{E_2}, \frac{E_1}{G_{12}}, v_{12}, W$	۴/۱۰±۰/۰۴	۳۳/۳۰±۰/۴۷	۴/۱۲±۰/۱۷	۳۳/۴۷±۲/۲۲	۴/۱۰±۰/۰۰	۳۳/۳۴±۰/۴۴
$\frac{E_1}{E_2}, \frac{E_1}{G_{12}}, v_{12}, W$	۴/۷۹±۰/۰۵	۳۶/۴۴±۰/۷۴	۴/۸۱±۰/۲۱	۳۶/۷۴±۲/۴۹	۴/۸۰±۰/۰۰	۳۶/۵۰±۰/۴۶
$\frac{E_1}{E_2}, \frac{E_1}{G_{12}}, v_{12}, W$	۴/۷۶±۰/۰۵	۳۶/۲۶±۰/۴۹	۴/۷۸±۰/۲۲	۳۶/۵۰±۲/۵۱	۴/۷۷±۰/۰۰	۳۶/۳۱±۰/۴۶
$\frac{E_1}{E_2}, \frac{E_1}{G_{12}}, v_{12}, W$	۴/۸۱±۰/۰۵	۳۶/۴۸±۰/۵۰	۴/۸۴±۰/۲۲	۳۶/۷۲±۲/۵۳	۴/۸۲±۰/۰۰	۳۶/۵۳±۰/۴۵

جدول ۴- نتیجه ارزیابی مدل‌های مختلف رگرسیون خطی چندگانه

مدل	کالیبراسیون		تست		کل	
	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE
خطی	۴/۱۰±۰/۰۴	۳۳/۳۰±۰/۴۷	۴/۱۲±۰/۱۷	۳۳/۴۷±۲/۲۲	۴/۱۰±۰/۰۰	۳۳/۳۴±۰/۴۴
اثرات متقابل	۳/۵۰±۰/۰۳	۲۵/۷۵±۰/۳۰	۳/۵۳±۰/۱۳	۲۵/۹۸±۱/۰۹	۳/۵۱±۰/۰۰	۲۵/۷۹±۰/۲۸
درجه دوم کاهش یافته	۲/۵۱±۰/۰۳	۱۹/۸۱±۰/۳۵	۲/۵۴±۰/۱۳	۲۰/۰۴±۱/۵۸	۲/۵۲±۰/۰۰	۱۹/۸۵±۰/۳۱
درجه دوم	۱/۳۴±۰/۰۱	۱۱/۲۹±۰/۱۵	۱/۳۶±۰/۰۴	۱۱/۵۳±۰/۹۰	۱/۳۴±۰/۰۰	۱۱/۳۴±۰/۱۲

جدول ۵- نتایج ارزیابی تبدیلات مختلف مدل رگرسیون خطی چندگانه

مدل	کالیبراسیون		تست		کل	
	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE
$\ln(y) = f(x)$	۰/۸۲±۰/۰۲	۱/۸۹±۰/۰۳	۰/۸۴±۰/۱۱	۱/۹۳±۰/۱۱	۰/۸۳±۰/۰۱	۱/۹۰±۰/۰۱
$y = f(\ln(x))$	۳/۵۲±۰/۰۳	۲۹/۱۶±۰/۴۵	۳/۵۶±۰/۱۲	۲۹/۵۷±۱/۷۳	۳/۵۳±۰/۰۰	۲۹/۲۴±۰/۳۳
$\ln(y) = f(\ln(x))$	۲/۲۰±۰/۰۱	۱۰/۷۲±۰/۰۹	۲/۲۱±۰/۱۵	۱۰/۸۲±۰/۲۳	۲/۲۰±۰/۱۵	۱۰/۷۴±۰/۰۵
$y = f(\sqrt{x})$	۲/۱۹±۰/۰۱	۱۸/۶۶±۰/۲۴	۲/۲۱±۰/۰۶	۱۸/۹۴±۱/۲۴	۲/۱۹±۰/۰۰	۱۸/۷۲±۰/۲۱
$\sqrt{y} = f(\sqrt{x})$	۱/۴۱±۰/۰۰	۸/۷۷±۰/۰۸	۱/۴۳±۰/۰۷	۸/۹۰±۰/۳۵	۱/۴۲±۰/۰۱	۸/۸۰±۰/۰۵
$\frac{1}{y} = f(x)$	۴/۳۵±۰/۱۸	۵/۶۸±۰/۱۲	۴/۴۱±۱/۱۵	۵/۷۵±۰/۷۹	۴/۳۹±۰/۲۳	۵/۶۸±۰/۱۴
$\frac{1}{\sqrt{y}} = f(x)$	۱/۶۲±۰/۰۳	۲/۹۶±۰/۰۶	۱/۶۳±۰/۲۵	۳/۰۱±۰/۲۵	۱/۶۲±۰/۰۱	۲/۹۷±۰/۰۱



شکل ۴- نتایج ارزیابی اعتبار مدل رگرسیون خطی چندگانه

۳-۴- سنجش آماری، پایداری و قابلیت تعمیم‌پذیری

مدل رگرسیون

ارزیابی آماری نیز برای نشان دادن بهتر اعتبار مدل رگرسیونی استخراج شده، استفاده شد. در جدول ۷، علاوه بر مقادیر p -value حاصل از آزمون آماری مقایسه میانگین، واریانس و توزیع آماری دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش‌بینی شده از ضریب تمرکز تنش گشودگی مثلثی در دو مرحله کالیبراسیون و تست، مقادیر برخی ویژگی‌های آمار توصیفی شامل، میانگین^۱، واریانس^۲، چولگی^۳ و کشیدگی^۴ دو مجموعه داده مذکور نیز آورده شده است. آزمون‌های آماری t -test، فیشر و کولموگروف-اسمیرنو برای مقایسه میانگین، واریانس و توزیع آماری در سطح معنی داری ۵ درصد استفاده شد. نتایج نشان دادند که بین

۳-۳- تجزیه واریانس مدل رگرسیون

تجزیه واریانس مدل درجه‌ی دوم رگرسیون خطی چندگانه با توجه به مقادیر p -value نشان می‌دهد که تمامی عوامل مؤثر مدل که توسط روش رگرسیون گام به گام انتخاب شده‌اند، در سطح معنی داری یک درصد معنی‌دار شده‌اند. تنها عامل X_3X_4 به دلیل مقدار p -value > 0.05 از مدل درجه‌ی دوم حذف شد. علاوه بر این، نتایج نشان دادند که مقدار ضریب تبیین (R^2) و ضریب تبیین تصحیح شده (R_{adj}^2) مدل با یکدیگر برابر هستند؛ بنابراین به دلیل برابری این دو مقدار می‌توان گفت که عامل‌های مدل جهت تخمین ضریب تمرکز تنش کفایت می‌کنند؛ همچنین مدل رگرسیونی کالیبره شده توانسته است، حدود ۹۹ درصد تغییرات ضریب تمرکز تنش را به کمک عامل‌های مدل تبیین کند؛ در نتیجه بهترین شکل مدل بدین صورت انتخاب شد که نتایج آن در جدول ۶ آورده شده است.

¹ Mean

² Variance

³ Skewness

⁴ Kurtosis

نزدیک به صفر است. همچنین در هر دو مرحله کالیبراسیون مدل و تست، مقدار ضریب همبستگی بین دو مجموعه داده‌ی واقعی و پیش‌بینی شده برابر با ۰/۹۹ است؛ بنابراین می‌توان عملکرد مدل رگرسیون خطی چندگانه در مرحله تست را نیز کاملاً قابل قبول دانست. در واقع تنها در مقادیر بالای تنش مقداری انحراف دیده می‌شود، ولی در مقادیر پایین کاملاً منطبق می‌باشد.

برای ارزیابی مدل، از تمام داده‌ها به شکل تصادفی ۸۰ درصد برای تخمین ضرایب مدل و ۲۰ درصد باقی مانده نیز برای تست مدل به‌کار گرفته شد. در ادامه درصد مجموعه‌ای کالیبراسیون کاهش داده شد که نتایج آن در جدول ۸ آورده شده است. این اقدام برای بهتر نشان دادن تعمیم‌پذیری مدل رگرسیون خطی چندگانه در مقابل کاهش اندازه‌ی مجموعه داده‌های کالیبراسیون صورت پذیرفت. با بررسی نتایج مشاهده می‌شود که مقادیر میانگین خطاهای مدل، جز در اندازه ۲۰ درصد اختلاف زیادی با یکدیگر ندارند. البته این مقدار برای اندازه ۲۰ درصد مجموعه داده‌های کالیبراسیون نیز برابر با ۱/۹۸ درصد شد که رضایت‌بخش است.

طبق ارزیابی‌های انجام شده مدل رگرسیونی قابل اعتماد است؛ زیرا اولاً محاسبه ضریب رگرسیونی کاملاً وابسته به مجموعه داده‌های کالیبراسیون بوده و بهترین مجموعه داده از بین ۱۰۰ مجموعه داده کالیبراسیون انتخاب شد که نتایج قابل قبولی در هر دو مرحله کالیبراسیون و تست کسب کردند. ثانیاً با مقایسه این نتایج با مقادیر خطای مدل در حالتی که همه داده‌ها برای کالیبراسیون استفاده شدند؛ نمایانگر قابلیت تعمیم‌پذیری خوب مدل رگرسیونی است. همچنین می‌توان بیان کرد که مدل از خاصیت پایداری پیش‌بینی خوبی برخوردار است. دلیل این امر نیز پایین بودن مقدار انحراف معیار خطاها است. علاوه بر تمامی تحلیل‌های صورت گرفته نتایج با برخی مقالات نیز مقایسه شد که نتایج در جدول ۹ آمده است. نتایج برای شیشه/اپوکسی با مشخصات $E_1=47/4$ (GPa)، $E_2=16/2$ (GPa) و فولاد $G_{12}=7$ (GPa) و $v_{12}=0.26$ و $G=79/3$ (GPa) و $E=20.7$ (GPa) با $v/3=0$ گزارش شده است.

ویژگی‌های آماری توصیفی مقادیر واقعی و پیش‌بینی شده در هر دو مرحله کالیبراسیون و تست، اختلاف بسیار ناچیزی وجود دارد؛ همچنین با توجه به مقدار $p\text{-value} < 0.05$ در تمام موارد می‌توان اظهار داشت که هر دو مجموعه داده واقعی و پیش‌بینی شده از تمرکز تنش گشودگی مثلی مشابه یکدیگر هستند؛ لذا می‌توان به این نتیجه رسید که محاسبه ضرایب مدل رگرسیونی به خوبی انجام شده است.

جدول ۶- نتیجه تجزیه واریانس مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه

	DF	SS	MS	F-value	P-value
مدل	۱۳	۳۹۸/۶۹	۳۰/۶۷	۴۰۱۳۶	۰/۰۰
$x_1(\frac{E_2}{E_1})$	۱	۸۲/۹۵	۸۲/۹۵	۱۰۸۵۵۶	۰/۰۰
$x_2(\frac{E_1}{G_{12}})$	۱	۲۷/۷۲	۲۷/۷۲	۳۶۲۸۲	۰/۰۰
$x_3(v_{12})$	۱	۰/۰۳	۰/۰۳	۳۲/۵۰	۰/۰۰
$x_4(w)$	۱	۲۷۱/۱۵	۲۷۱/۱۵	۳۵۴۸۶۰	۰/۰۰
x_1x_2	۱	۰/۲۳	۰/۲۳	۲۹۵	۰/۰۰
x_1x_3	۱	۰/۰۳	۰/۰۳	۳۴/۶۱	۰/۰۰
x_1x_4	۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۱۸/۸۲	۰/۰۰
x_2x_3	۱	۰/۳۸	۰/۳۸	۵۰۲/۳۴	۰/۰۰
x_2x_4	۱	۰/۰۷	۰/۰۷	۹۰/۲۱	۰/۰۰
x_1^2	۱	۲/۲۵	۲/۲۵	۲۹۴۸/۸۸	۰/۰۰
x_2^2	۱	۰/۵۱	۰/۵۱	۶۶۳/۳۰	۰/۰۰
x_3^2	۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۱۳/۴۸	۰/۰۰
x_4^2	۱	۱۳/۳۵	۱۳/۳۵	۱۷۴۷۳	۰/۰۰
Error	۹۹۸	۰/۷۶	۰/۰۰		
Total	۱۰۱۱	۳۳۹/۴۶			

$$99R_{adj}^2 = R^2 = 0.81$$

شکل ۵ بیان می‌کند که شیب و عرض از مبدأ خط رگرسیونی ما بین دو مجموعه داده، تقریباً برابر با یک و

$$\ln\left(\frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0}\right) = 0.07 \cdot W \cdot \nu_{12} + 66 \cdot \frac{E_1}{G_{12}} + 63 \cdot \frac{E_2}{E_1} + 0.2/1 - 87/41$$

$$+ \frac{E_2}{E_1} W \cdot \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} - 28 \cdot \frac{E_2}{G_{12}} - 82/0.2$$

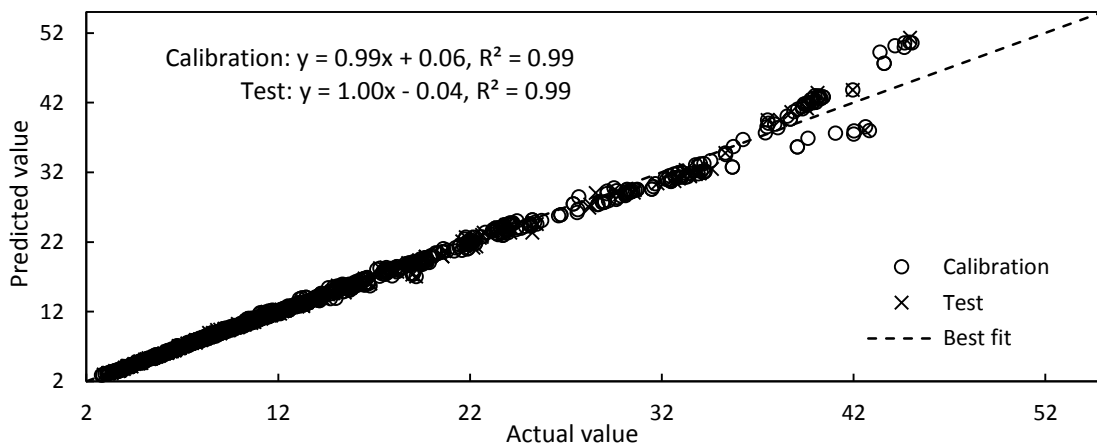
$$- \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 \cdot \frac{E_1}{G_{12}} W + 54 \cdot \frac{E_1}{G_{12}} \nu_{12} - 0.3/0.1$$

$$- 8W^2 \cdot \nu_{12}^2 - 93/9 \left(\frac{E_1}{G_{12}}\right)^2 - 55/38 (\theta - 10) \quad (6)$$

با استناد به نتایج برای محاسبه ضریب تمرکز تنش گشودگی مثلثی می‌توان به مدلی اطمینان کرد که بر پایه روش رگرسیونی استخراج شده است؛ بنابراین مدل نهایی جهت محاسبه ضریب تمرکز تنش به شکل رابطه ۶ قابل ارائه است.

جدول ۷- ارزیابی آماری عملکرد پیش بینی مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه

	کالیبراسیون				تست			
	Mean	Var.	Ske.	Kur.	Mean	Var.	Ske.	Kur.
Actual	۱۳/۷۱	۹۰/۵۱	۱/۴۲	۴/۳۰	۱۳/۷۳	۸۶/۱۶	۱/۳۰	۴/۰۴
Predicted	۱۳/۷۱	۹۲/۱۲	۱/۵۵	۵/۰۲	۱۳/۶۵	۸۵/۰۵	۱/۴۰	۴/۷۱
p-value	۰/۹۹	۰/۷۸	۰/۹۸	۰/۹۲	۰/۹۲	۰/۹۲	۰/۹۳	



شکل ۵- ارزیابی توافقی مقادیر ضریب تمرکز تنش واقعی و پیش بینی شده توسط مدل رگرسیون خطی چندگانه

جدول ۸- ارزیابی قابلیت تعمیم پذیری مدل درجه دوم رگرسیون خطی چندگانه

TS (%)		کالیبراسیون		تست		کل	
		RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE
۱۰۰						۰/۸۳	۱/۹۰
۸۰	$\bar{x} \pm std$	۰/۸۲ ± ۰/۰۲	۱/۸۹ ± ۰/۰۳	۰/۸۴ ± ۰/۱۱	۱/۹۳ ± ۰/۱۱	۰/۸۳ ± ۰/۰۱	۱/۹۰ ± ۰/۰۱
	Best	۰/۸۲	۱/۸۸	۰/۸۰	۲/۰۴	۰/۸۲	۱/۹۱
۶۰	$\bar{x} \pm std$	۰/۸۲ ± ۰/۰۳	۱/۸۹ ± ۰/۰۵	۰/۸۴ ± ۰/۰۷	۱/۹۴ ± ۰/۰۶	۰/۸۳ ± ۰/۰۲	۱/۹۱ ± ۰/۰۱
	Best	۰/۸۱	۱/۸۶	۰/۸۰	۲/۰۳	۰/۸۰	۱/۹۳
۴۰	$\bar{x} \pm std$	۰/۸۱ ± ۰/۰۶	۱/۸۹ ± ۰/۰۸	۰/۸۴ ± ۰/۰۶	۱/۹۵ ± ۰/۰۵	۰/۸۳ ± ۰/۰۲	۱/۹۱ ± ۰/۰۳
	Best	۰/۸۰	۱/۸۸	۰/۸۱	۱/۹۷	۰/۸۱	۱/۹۳
۲۰	$\bar{x} \pm std$	۰/۸۰ ± ۰/۱۰	۱/۸۷ ± ۰/۱۴	۰/۸۶ ± ۰/۰۸	۲/۰۱ ± ۰/۰۶	۰/۸۵ ± ۰/۰۵	۱/۹۸ ± ۰/۰۵
	Best	۰/۷۷	۲/۰۶	۰/۸۰	۲/۰۴	۰/۷۹	۲/۰۴

۵- علائم و نشانه‌ها

b_0	ضریب ثابت
b_{ij}	
$(i = 1 - 4,$ $j = 2 - 5,$ $i \neq j)$	اثرات درجه دوم
$(i=1-5)b_{ii}$	اثرات متقابل
c	کشیدگی گشودگی
E_1	مدول الاستیک طولی، Pa
E_2	مدول الاستیک عرضی، Pa
G_{12}	مدول برشی، Pa
m	تعداد داده‌ها
p	پارامترهای مدل
w	انحنای گشودگی
$(i=1-5)x_i$	متغیر مستقل
y	ضریب تمرکز تنش محاسبه شده از روش تحلیلی، Pa
\hat{y}	پاسخ مدل، Pa
\bar{y}	میانگین ضریب تمرکز تنش، Pa
z	تابع نگاشت
ν_{12}	نسبت پواسون
σ_θ	تنش نرمال، Pa
σ_o	تنش اعمالی، Pa
ε	خطای مدل
λ	بزرگی گشودگی

۵- مراجع

- [1] Muskhelishvili NI (1962) Some basic problems of mathematical theory of elasticity. 2nd edn. Netherlands, Noordhoff.
- [2] Lekhnitskii SG (1968) Anisotropic plates. 2nd edn. Gordon and Breach Science Publishers, NewYork.
- [3] Savin GN (1961) Stress concentration around holes. Pergamon Press, NewYork.
- [4] Daoust J, Hoa SV (1991) An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes. Compos Struct 2(19): 107-130.
- [5] Sharma DS (2011) Stress concentration around circular elliptical triangular cutouts in infinite composite plate. Proceedings of the World Congress on Engineering, London, U.K.
- [6] Sharma DS, Patel NP (2015) Moment distribution around circular elliptical triangular cutouts in

جدول ۹ مقایسه مقادیر تنش به‌دست آمده از تحقیق حاضر و مراجع [۸، ۱۲-۱۳، ۱۸-۲۰] برای گشودگی مثلثی

نام ماده	w	مرجع	مطالعه حاضر
Glass/Epoxy (CE 9000) [۱۸-۲۰، ۱۲-۱۳]	۰/۰۲	۴/۱۳۲۳	۴/۰۹۹۵
	۰/۰۶	۴/۳۱۰۲	۴/۳۱۴۶
	۰/۱	۴/۶۵۹۱	۴/۶۷۱۸
Isotropic (Steel) [۱۸-۲۰، ۱۲-۱۳]	۰/۰۴	۳/۰۷۶۹	۳/۰۵۵۹
	۰/۰۸	۳/۲۸۴۹	۳/۲۳۶۸
	۰/۱۲	۳/۶۰۸۸	۳/۵۲۷۱
Boron/Epoxy [۸]	۰/۳۳	۲۲/۰۱۰۰	۲۱/۷۹۹۹

۴- نتیجه گیری

در این مقاله سعی شد، رابطه‌ای صریح برای محاسبه تمرکز تنش برحسب خواص مکانیکی ارائه شود. این رابطه برای صفحات حاوی گشودگی مثلثی به دست آمد که تحت تنش تک‌محوری قرار گرفته‌اند. برای این منظور، ابتدا با استفاده از یک روش حل تحلیلی برپایه روش متغیر مختلط، توزیع تنش برای تعداد زیادی از صفحات دارای گشودگی محاسبه شد؛ سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه، رابطه‌ای صریح بین ضریب تمرکز تنش و خواص مکانیکی ارائه شد.

با اتمام به مطالب ذکر شده، مقادیر ضریب تمرکز تنش واقعی و پیش بینی شده توسط مدل رگرسیون خطی چندگانه تقریباً برابر با یکدیگر بوده و در آن‌ها مقدار کمی اختلاف مشاهده می‌شود؛ همچنین مقدار ضریب همبستگی بین آن دو نیز برابر با ۰/۹۹ است؛ بنابراین حل پیشنهادی ارائه شده قابل اعتماد است.

معادله به‌دست آمده این امکان را برای طراح فراهم می‌کند که با داشتن خواص مکانیکی ماده، میزان تنش را در w های مختلف محاسبه کند. با استفاده از این معادله طراح می‌تواند به‌جای انجام پروسه سنگین و محاسبات دشوار تنها با جایگذاری خواص مکانیکی و w در رابطه‌ی به‌دست آمده بیشترین مقدار تنش حول گشودگی را به‌دست آورده و نیاز خود را با توجه به محدودیت‌های طراحی ارضا کند.

- Agr. Machinery Eng (Biosystem) & Mechanization of Iran. (in Persian)
- [16] Jafari M, Bayati Chaleshtari MH (2017) Investigation of effective parameters on triangular cutout stress in finite isotropic plates. *J Struct Mech Fluid* 7(1): 35-50. (in Persian)
- [17] Moshiri Aval B, Jafari M (2017) A study of the effect of various parameters on the stress distribution in symmetri laminates with a triangular hole. *Aerospace Mech J* 13(1): 61-71. (in Persian)
- [18] Rezaeepazhand J, Jafari M (2011) Study of the effect of cutout bluntness on stress analysis of perforated plates subjected to uniaxial tensile laod. *J So Flu Mech Fall* 1(2): 27-35. (in Persian)
- [19] Rezaeepazhand J, Jafari M (2011) Study of the effect of cutout bluntness on stress analysis of perforated plates subjected to uniaxial tensile laod. *J Struct Mech Fluid* 1(2): 27-35. (in Persian)
- [20] Rezaeepazhand J, Jafari M (2008) Stress analysis of composite plates with non-circular cutout. *Key Eng Mat* 385-387.
- [21] Saad MH (2009) *Elasticity theory, applications and numerics*. Academic Press: 292.
- [22] Daniel IM, Ishai O (1994) *Engineering mechanics of composite materials*. New York, Oxford university press, 3: 34-35.
- [23] Abuefoutouh NM (1993) Preliminary design of unstiffend composite shells. *Symposium of 7th Technical Conference of ASC*: 693-786.
- [24] Sarvestani NS, Rohani A, Farzad A, Aghkhani MH (2016) Modeling of specific fuel consumption and emission parameters of compression ignition engine using nanofluid combustion experimental data. *Fuel Processing Technology* 154: 37-43.
- infinite symmetric laminated plate, *Mech Adv Mater Struct* 22: 290-297.
- [7] Mohapatra SS, Simha KRY (1998) Stress concentration around irregular holes using complex variable method. *Sadhana-Acad P Eng S* 23: 393-412.
- [8] Ukadgaonker VG, Rao DKN (1999) Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates. *Compos Struct* 45: 171-183.
- [9] Krenk S (1979) Stress concentration around holes in anisotropic sheets, *Appl Math Model* 3(2): 137-142.
- [10] Theocaris PS, Petrou L (1986) Stress distributions and intensities at corners of equilateral triangular holes. *Int J Fracture* 31: 271-289.
- [11] Kumar MM, Rajesh S, Yogesh H, Yeshaswini BR (2013) Study on the effect of stress concentration on cutout orientation of plates with various cutouts and bluntness. *Int J Mod Eng Res* 3(3): 1295-1303.
- [12] Rezaeepazhand J, Jafari M (2010) Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout. *Int J Mech Sci* 52: 96-102.
- [13] Rezaeepazhand J, Jafari M (2010) Effect of different parameters on stress distribution in anisotropic plates with triangular cutout. *AmirKabir Mech Eng J* 42(1): 19-28. (in Persian)
- [14] Jafari M, Ardalani E (2015) Analytical solution to calculate the stress distribution around triangular hole in finite isotropic plates under in-plane loading. *Modares Mech Eng* 15(5): 165-175. (in Persian)
- [15] Jafari M, Rohani A (2013) Modeling of stress concentration in the isotropic plates with triangular-shaped cutout. *The 8th National Congress on*