



بررسی تأثیر میدان مغناطیسی بر انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال درون محفظه K شکل با استفاده از روش شبکه بولتزمن

احمد رضا رحمتی^{۱*} و محمد نعمتی^۲

^۱ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

^۲ دانش آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۲۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۹/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۱/۲۸

چکیده

در کار حاضر برای اولین بار، انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال درون محفظه K شکل در حضور میدان مغناطیسی با استفاده از روش شبکه بولتزمن شبیه‌سازی شده است. دیواره‌های سمت راست و چپ محفظه در دمای ثابت سرد قرار دارند. دیواره افقی پایینی محفظه در دمای ثابت گرم است. دما روی دیواره افقی بالایی محفظه به صورت خطی تغییر می‌کند. در شبیه‌سازی صورت گرفته، تمام کمیات مربوط به میدان جریان و دما با استفاده از توابع توزیع جریان و دما محاسبه شده‌اند. تأثیر پارامترهای مختلفی نظیر عدد رینولدز (۲۰۰-۵۰)، عدد هارتمن (۶۰-۰)، نسبت ابعاد محفظه (۱-۰/۴) و کسر حجمی نانوذرات (۰/۵-۰) بر روی انتقال حرارت جابجایی ترکیبی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد، با ثابت ماندن تمامی پارامترها، افزایش نسبت ابعاد محفظه و عدد رینولدز سبب افزایش انتقال حرارت می‌شود. بعلاوه در یک عدد رینولدز و نسبت ابعاد ثابت، افزایش عدد هارتمن باعث کاهش سرعت جریان درون محفظه و انتقال حرارت می‌شود. همچنین با تغییر کسر حجمی نانوسیال، می‌توان بر روی انتقال حرارت تأثیرگذار بود.

کلمات کلیدی: روش شبکه بولتزمن؛ جابجایی ترکیبی؛ نانوسیال؛ میدان مغناطیسی؛ محفظه K شکل.

Investigation of Magnetic Field Effect on Nanofluid Mixed Convection inside Lid-Driven K-shaped Enclosure Using Lattice Boltzmann Method

A. R. Rahmati^{1,*}, M. Nemati²

¹ Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran.

² Graduated Master Student, Department of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran.

Abstract

In the present work, for the first time, mixed convection heat transfer of nanofluid in a uniform magnetic field inside a lid-driven K-shaped cavity is simulated via lattice Boltzmann method. Both left and right walls are maintained at constant cold temperature. The bottom -horizontal wall is maintained at constant hot temperature. Temperature on the top-horizontal wall is varied linearly. All quantities of both flow and temperature field are calculated by flow and temperature distribution functions. The effects of different parameters such as Reynolds number (50-200), Hartman number (0-60), aspect ratio of the K-shaped cavity (0.4-1), nanoparticle volume fraction (0-0.05) on mixed convective heat transfer are investigated. The obtained result show that for a fixed Hartman number, increase in aspect ratio and Reynolds number causes increase in heat transfer. Also in a fixed Reynolds number and aspect ratio, increasing of Hartman number decreases velocity of flow and heat transfer. In addition, changing solid volume fraction can affect heat transfer directly.

Keywords: Lattice Boltzmann Method; Mixed Convection; Nanofluid; Magnetic Field; K-shaped Enclosure.

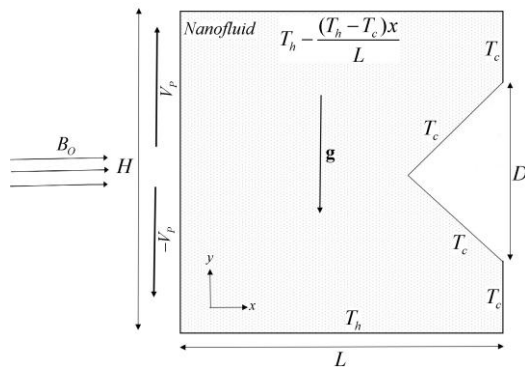
۱- مقدمه

در سال‌های اخیر روش شبکه بولتزمن در تحلیل جریان سیال به عنوان راه کارآمد جایگزین برای روش‌های مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی، رشد چشمگیری داشته است [۲] و [۱]. مزیت این روش در مقایسه با سایر روش‌های مرسوم، سهولت در اعمال شرایط مرزی، محاسبات ساده‌تر و قابلیت موازی شدن است که برای حل مسائلی با هندسه پیچیده دارای کاربرد فراوانی است [۳-۵]. مسأله انتقال حرارت جابجایی اعم از اجباری، طبیعی و ترکیبی در یک محفظه بسته به دلیل کاربردهای فراوان آن در صنعت و مهندسی مانند، خنک‌کاری قطعات الکترونیکی، تهویه ساختمان‌ها، کلکتورهای خورشیدی و رآکتورهای هسته‌ای همواره، مورد توجه محققین بوده است و کاربرد فراوانی دارد [۶]. جریان جابجایی ترکیبی درون محفظه با درپوش متحرک، از دو عامل ناشی می‌شود؛ عامل اول، جریان برشی ایجاد شده ناشی از حرکت دیواره (ها) و عامل دوم، نیروی شناوری ایجاد شده ناشی از شرایط مرزی دمایی محفظه است. با توجه به جهت حرکت دیواره (ها)، این دو عامل می‌توانند منجر به تضعیف یا تقویت یکدیگر شوند [۷]. امروزه با استفاده از محفظه‌هایی با مقاطع مختلف، به کارگیری نانوسیالات به جای سیالات معمولی و اعمال میدان مغناطیسی یکنواخت، می‌توان میزان و نحوه انتقال حرارت را کنترل کرد. سیالات مورد استفاده در انتقال حرارت جابجایی، دارای ضریب انتقال حرارت کمی هستند؛ لذا استفاده از روش مناسب جهت افزایش ضریب هدایت حرارتی سیالات می‌تواند در بهبود انتقال حرارت مؤثر باشد. با مطرح شدن نانوسیال‌ها که اغلب ترکیبی از اکسید نانوذرات فلزی با سیال‌های پایه‌ای مثل آب، روغن و اتیلن گلیکول می‌باشند، دستیابی به این امر میسر شده است [۹] و [۸]. از جمله روش‌های دیگر در کنترل انتقال حرارت، می‌توان از تأثیر میدان مغناطیسی روی جریان حاصل از جابه‌جایی نام برد [۱۰ و ۱۱].

قاسمی و امین‌الساداتی [۱۲]، جابجایی ترکیبی نانوسیال درون محفظه مثلثی شکل با دیواره متحرک در دو جهت مختلف را بررسی کردند. نتایج نشان داد، افزودن نانو ذرات در تمامی مقادیر عدد ریچاردسون و جهت حرکت دیواره‌ها، منجر به افزایش انتقال حرارت می‌شود؛ همچنین زمانی که جهت حرکت دیواره همسو با گرانش باشد، بیشترین میزان

انتقال حرارت بوجود می‌آید. نعمتی و همکاران [۱۳]، انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال در یک محفظه مربعی با درپوش متحرک را با استفاده از روش شبکه بولتزمن، مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد که افزایش کسر حجمی نانوسیال، منجر به افزایش انتقال حرارت می‌شود. بعلاوه افزایش عدد رینولدز، سبب کاهش تأثیر افزودن نانو ذرات می‌شود. رحمان‌زاده و همکاران [۱۴]، انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال درون محفظه مربعی شکل در حضور میدان مغناطیسی را به روش تفاضل محدود، مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان داد، نرخ انتقال حرارت با افزایش عدد رینولدز، افزایش و با افزایش عدد هارتمن، کاهش می‌یابد؛ همچنین میزان بهبود عملکرد انتقال حرارت نانوسیال نسبت به سیال پایه به عدد رینولدز وابسته است. اودین و همکاران [۱۵]، انتقال حرارت جابجایی ترکیبی درون محفظه مثلثی شکل در حضور میدان مغناطیسی را به روش المان محدود مورد ارزیابی قرار دادند. رحمتی و همکاران [۱۶]، انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال درون محفظه مربعی با دو درپوش متحرک را با استفاده از روش شبکه بولتزمن، مورد بررسی قرار دادند. در این شبیه‌سازی هر دو دیواره عمودی محفظه توزیع دمایی سینوسی داشتند. رابی و همکاران [۱۷]، انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال در محفظه مربعی شکل با درپوش متحرک در حضور میدان مغناطیسی را در حالتی که ضلع پایینی آن در دو حالت نیم‌دایره و مثلثی گرم قرار داشت، به روش المان محدود بررسی کردند. نتایج نشان داد که افزایش عدد ریچاردسون، کسر حجمی نانوسیال و عدد هارتمن به ترتیب باعث افزایش، افزایش و کاهش نرخ انتقال حرارت خواهد شد. بعلاوه زمانی که کف محفظه به صورت نیم‌دایره باشد، نرخ انتقال حرارت نسبت به حالتی که کف محفظه مثلثی باشد، به دلیل بیشتر بودن سطح تبادل انتقال حرارت، تا ۳۰ درصد بیشتر خواهد بود. چامخا و اسماعیل [۱۸]، تأثیر میدان مغناطیسی روی انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال درون محفظه دوزنقه شکل با دیواره متحرک را به روش عددی بررسی کردند. نتایج نشان داد که افزایش عدد هارتمن، موجب کاهش و افزایش کسر حجمی نانوسیال باعث افزایش عدد ناسلت متوسط می‌شود؛ همچنین جهت حرکت دیواره پارامتر تعیین‌کننده‌ای بر میزان انتقال حرارت است. موجمر و همکاران [۱۹]، به بررسی

حجمی نانو ذرات (۰-۰/۰۵) و نسبت ابعاد محفظه (۰/۴، ۰/۶) و (۱) بررسی شده است. لازم به ذکر است که نسبت ابعاد محفظه بصورت $AR = \frac{D}{H}$ تعریف می‌شود که D دهانه باز شدگی محفظه است.



شکل ۱- هندسه مسأله مورد بررسی: دیواره عمودی سمت چپ حالت الف) به سمت پایین و حالت و ب) به سمت بالا حرکت می‌کند.

جدول ۱- خواص ترموفیزیکی سیال پایه و نانوذرات [۲۱]

مس	آب	خواص ترموفیزیکی
-	۶/۲	Pr
۳۸۳	۴۱۷۹	$C_p(J/kgK)$
۴۰۰	۰/۶۱۳	$k(W/mK)$
$1/67 \times 10^{-5}$	$2/1 \times 10^{-4}$	$\beta (K^{-1})$
۸۹۵۴	۹۹۷/۱	$\rho (kg/m^3)$
۱۰۰	۰/۲	d(nm)

فرضیاتی که در این شبیه‌سازی لحاظ شده‌اند، به شرح زیر است:

- جریان دو بعدی است ۲- رژیم جریان آرام است ۳- سیال نیوتنی است ۴- انتقال حرارت تشعشعی و اتلاف لزجی ناچیز است ۵- از تقریب بوزینسک استفاده شده است.

۲-۲- روش حل و معادلات

شبیه‌سازی عددی مسأله توصیف شده با استفاده از روش شبکه بولتزن صورت می‌گیرد و در ادامه به جزئیات این روش اشاره شده است.

انتقال حرارت جابجایی ترکیبی درون محفظه L شکل با درپوش متحرک درون یک محیط متخلخل پرداختند.

در مطالعه حاضر اثر میدان مغناطیسی و جهت حرکت دیواره در محفظه K شکل با نسبت ابعاد مختلف حاوی نانوسیال، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این هندسه و مسأله که در مطالعات قبلی به چشم نمی‌خورد، می‌تواند شبیه‌سازی خنک‌کاری یک قطعه الکترونیکی که تحت میدان مغناطیسی ناخواسته‌ای قرار دارد باشد. در این بررسی برای بهبود انتقال حرارت از نانوسیال استفاده شده است تا بتوان تأثیر حضور میدان مغناطیسی بر کاهش انتقال حرارت را جبران کرده و بیشترین نرخ انتقال حرارت در کمترین حجم تجهیزات خنک‌کاری را ایجاد کرد [۲۰]. به این منظور تأثیر پارامترهایی از قبیل، اعداد رینولدز و هارتمن، کسر حجمی نانوذرات و نسبت ابعاد محفظه بررسی شده است تا بتوان بهترین طراحی ممکن را انجام داد.

۲- شرح و نحوه حل مسأله

در این بخش به بیان مسأله و نحوه حل آن پرداخته شده است. این بخش شامل، بیان مسأله، روش حل، نحوه اعمال شرایط مرزی، استقلال حل از شبکه در نظر گرفته شده و صحت سنجی است.

۲-۱- بیان مسأله

مطابق شکل ۱ هندسه مسأله شامل، محفظه‌ای K شکل حاوی نانوسیال با طول و عرض مساوی ($L=H$) با نسبت ابعاد مختلف است. دیواره‌های سمت چپ و راست محفظه در دمای ثابت سرد و دیواره افقی پایینی در دمای ثابت گرم قرار دارد. دیواره افقی بالایی محفظه، دارای دمای خطی است؛ همچنین یک میدان مغناطیسی یکنواخت افقی از چپ به راست اعمال می‌شود. بعلاوه دیواره عمودی سمت چپ محفظه در دو جهت مختلف با سرعت ثابت حرکت می‌کند. خواص ترموفیزیکی سیال پایه و نانو ذرات استفاده شده در جدول ۱ بیان شده است. هدف بررسی تأثیر میدان مغناطیسی روی انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال با کسر حجمی متفاوت نانو ذرات و مشخصه های حرارتی جریان بوجود آمده است. در این بررسی عدد گراشف ثابت و برابر 10^4 در نظر گرفته شده و تأثیر پارامترهایی چون عدد رینولدز (۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰)، عدد هارتمن (۶۰-۰)، کسر

۱-۲-۲- روش شبکه بولتزمن

در کار حاضر از دو تابع توزیع برای میدان جریان و دما استفاده شده است که معادلات پیوستگی، مومنتوم و انرژی را در مقیاس ماکروسکوپی ارضا می‌کنند و برای هر دو میدان آرایش شبکه D2Q9 به کار گرفته شده است. جزئیات و شکل این آرایش شبکه و مزیت‌های آن در مراجع مختلف ذکر شده است [۲۲ و ۲۳].

معادله شبکه بولتزمن با استفاده از تقریب بی-جی-کی^۱ [۲۴] با وجود نیروی خارجی برای میدان جریان و دما بترتیب به صورت روابط (۱) و (۲) نوشته می‌شود [۲۳].

$$f_i(\mathbf{x}+\mathbf{c}_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_v} [(f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) + \Delta t \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}_i] \quad (1)$$

$$g_i(\mathbf{x}+\mathbf{c}_i\Delta t, t+\Delta t) = g_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau_c} (g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (2)$$

که Δt گام زمانی شبکه، \mathbf{c}_i سرعت گسسته شبکه در جهت i ، \mathbf{F} نیروی خارجی، τ_c و τ_v بترتیب بیانگر زمان آسایش برای میدان جریان و دما است [۲۳]. f و g به ترتیب، نشان‌دهنده توابع توزیع مربوط به میدان جریان و دما است. تابع توزیع تعادلی در مدل D2Q9 برای میدان جریان و دما به ترتیب به صورت روابط (۳) و (۴) بیان می‌شوند.

$$f_i^{eq} = \omega_i \left[1 + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} - \frac{1}{2c_s^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c_s^4} \right] \quad (3)$$

$$g_i^{eq} = \omega_i T \left[1 + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})}{c_s^2} \right] \quad (4)$$

که ω_i ضریب وزنی و c_s سرعت صوت شبکه است که برابر با $\frac{c}{\sqrt{3}}$ است.

کمیت‌های ماکروسکوپی چگالی، سرعت و دما به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شوند.

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_i \mathbf{c}_i f_i, \quad T = \sum_i g_i \quad (5)$$

ضرایب وزنی و سرعت‌های گسسته به صورت رابطه (۶) تعیین می‌شوند [۲۳].

$$\omega_0 = \frac{4}{9}, \quad \omega_i = \frac{1}{9} \quad i=1,2,3,4$$

$$\omega_i = \frac{1}{36} \quad i=5,6,7,8 \quad (6)$$

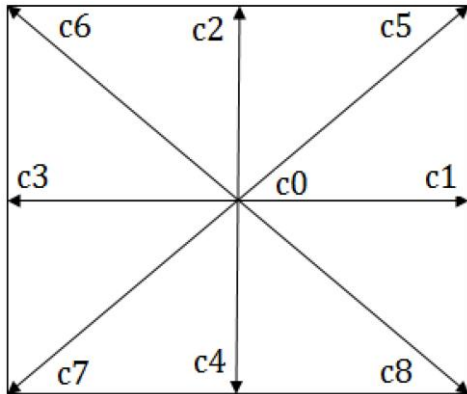
¹ Bhatnagar-Gross-Krook Approximation (BGK)

$$c_0 = 0$$

$$c_i = c \left[\cos\left(\frac{(i-1)\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{2}\right) \right] \quad i=1,2,3,4$$

$$c_i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{(i-5)\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad i=5,6,7,8 \quad (7)$$

همچنین در شکل ۲، راستای مجاز حرکت سرعت‌های گسسته برای مدل شبکه D2Q9 نشان داده شده است.



شکل ۲- بردارهای سرعت گسسته شده برای مدل D2Q9

تأثیر نیروی شناوری و نیروی مغناطیسی، به صورت عبارت چشمه وارد رابطه (۱) می‌شود که به صورت زیر است.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$$

$$\mathbf{F}_x = 3\omega_i \rho_f \chi (v \sin \zeta \cos \zeta - u \sin^2 \zeta)$$

$$\mathbf{F}_y = 3\omega_i \rho_f \chi (u \sin \zeta \cos \zeta - v \cos^2 \zeta) + 3\omega_i g(\rho \beta)_{nf} \theta$$

$$\chi = Ha^2 \left(\frac{\mu_{nf}}{H^2} \right) \quad (8)$$

که Ha عدد هارتمن، θ دمای بی بعد سیستم و ζ زاویه اعمال میدان مغناطیسی است.

زمان آسایش مربوط به میدان جریان و دما بوسیله روابط (۹) از طریق لزجت سینماتیکی ν و ضریب پخش α حرارتی حاصل می‌شوند.

$$\tau_v = \frac{\nu}{c_s^2 \Delta t} + 0.5, \quad \tau_c = \frac{\alpha}{c_s^2 \Delta t} + 0.5 \quad (9)$$

متغیرهای بی‌بعدی که در معادلات و ارائه نتایج مورد استفاده قرار گرفته‌اند به صورت رابطه (۱۰) است.

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{H}, \quad U = \frac{u}{V_p}, \quad V = \frac{v}{V_p},$$

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad Ha = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma_{nf}}{\rho_{nf} \nu_{nf}}},$$

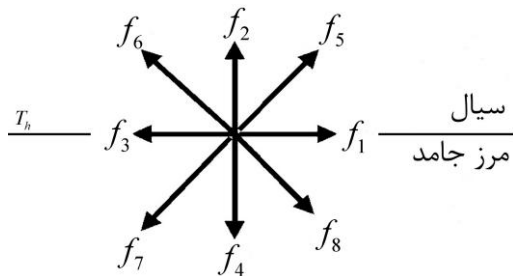
$$Gr = \sqrt{\frac{\beta_f g (T_h - T_c) H^3}{\nu_f^2}}, \quad Re = \frac{V_p H}{\nu_f}, \quad Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_f} \quad (10)$$

که در روابط فوق c یک ضریب تجربی بوده و برای نانوسیال آب-مس، $c=36000$ پیشنهاد شده است [۲۷]. d بیانگر قطر ذرات و u_s سرعت حرکت براونی ذرات و k_B ثابت بولتزمن است.

۳-۲-۲-۳- شرایط مرزی

جهت مدل نمودن شرایط مرزی از روش کمانه کردن استفاده می‌شود. این شرط مرزی را می‌توان در مورد تابع توزیع مربوط به میدان جریان به کار برد؛ ولی در مورد تابع توزیع مربوط به دما شرایط متفاوت خواهد بود. روش شبکه بولتزمن شامل دو مرحله انتشار و برخورد می‌باشد که اعمال شرایط مرزی بعد از مرحله انتشار صورت می‌پذیرد. در شکل ۳ دیواره افقی پایینی محفظه بعد از مرحله انتشار نشان داده شده است. با مشخص بودن f_4, f_7 و f_8 و با توجه به ساکن بودن مرزهای جامد برای تابع توزیع مربوط به میدان جریان رابطه (۲۰) برقرار است [۲۳]:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_4 \\ f_5 &= f_7 \\ f_6 &= f_8 \end{aligned} \quad (20)$$



شکل ۳- نحوه اعمال شرایط مرزی

در مورد تابع توزیع مربوط به میدان دما، نحوه اعمال شرایط مرزی دما ثابت روی دیواره گرم پایینی به صورت رابطه (۲۱) است [۲۳]:

$$\begin{aligned} g_2 &= (\omega_2 + \omega_4) T_h - g_4 \\ g_6 &= (\omega_6 + \omega_8) T_h - g_8 \\ g_5 &= (\omega_5 + \omega_7) T_h - g_7 \end{aligned} \quad (21)$$

۳-۲-۳- استقلال حل از شبکه حل

به منظور اطمینان از مستقل بودن نتایج از شبکه انتخابی، عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم محفظه با استفاده از

همچنین عدد ناسلت متوسط که یکی از مهمترین اعداد بی‌بعد در تعیین میزان انتقال حرارت است، به صورت رابطه زیر روی دیواره گرم تعریف می‌شود.

$$Nu_{av} = \frac{1}{L} \int_0^L - \frac{k_{nf}}{k_f} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0} dX \quad (11)$$

به منظور اطمینان از صحت عملکرد برنامه کامپیوتری حاضر در محدوده تراکم ناپذیری، مشخصه سرعت جریان برای انتقال حرارت جابجایی طبیعی $(V_{natural} = \sqrt{\beta g (T_h - T_c) H})$ و انتقال حرارت جابجایی اجباری $(V_{force} = \frac{Re v}{H})$ ، باید بسیار کوچکتر از سرعت صوت در سیال باشد. در کار حاضر، سرعت مشخصه برابر ۰/۱ سرعت صوت در نظر گرفته شده است.

۳-۲-۲- مدل و روابط به کار رفته برای نانوسیال

در مطالعه حاضر نانوسیال را به عنوان یک محیط پیوسته با تعادل گرمایی بین سیال پایه و ذرات جامد در نظر می‌گیریم. خواص نانوسیال از قبیل چگالی، ظرفیت حرارتی و ضریب انبساط حرارتی را می‌توان طبق روابط زیر محاسبه کرد [۱۱].

$$\rho_{nf} = (1-\phi)\rho_f + \phi\rho_s \quad (12)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (1-\phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_s \quad (13)$$

$$(\rho\beta)_{nf} = (1-\phi)(\rho\beta)_f + \phi(\rho\beta)_s \quad (14)$$

$$\alpha_{nf} = \frac{k_{nf}}{(\rho C_p)_{nf}} \quad (15)$$

که ϕ کسر حجمی نانو ذرات، β ضریب انبساط حرارتی، ρ چگالی و C_p ظرفیت گرمایی ویژه است و زیر نویس‌های s, f و nf به ترتیب مربوط به سیال خالص، نانو ذرات و نانو سیال می‌باشد. لزجت دینامیکی نانوسیال طبق رابطه برینکمن [۲۵] محاسبه می‌شود.

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1-\phi)^2} \quad (16)$$

همچنین برای محاسبه ضریب هدایت حرارتی نانوسیال برای دو جزء مستقل از ذرات کروی سوسپانسیون از رابطه پاتل [۲۶] به صورت روابط (۱۷) تا (۱۹) استفاده می‌شود.

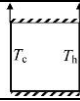
$$\frac{k_{nf}}{k_f} = 1 + \frac{k_s}{k_f} \left(1 + c Pe \right) \left(\frac{d_f}{d_s} \frac{\phi}{1-\phi} \right) \quad (17)$$

$$Pe = \frac{u_s}{d_s \alpha_s} \quad (18)$$

$$u_s = \frac{2k_B T}{\pi \mu_f d_s^2} \quad (19)$$

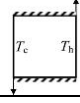
با استفاده از الگوریتم سیمپلر صورت گرفته برای محفظه‌ای مربعی مقایسه شده است که دیواره‌های افقی آن ثابت و دیواره‌های عمودی آن در جهات مختلف حرکت می‌کنند.

جدول ۳- مقایسه عدد ناسلت متوسط بین کار حاضر و تیواری و داس [۲۱] در $\phi=0.0$



Ri (Re)	تیواری و داس [۲۱]	کار حاضر	درصد اختلاف
0.1 (316.23)	۱۱/۵۴	۱۱/۹۴	۳/۴۶
1 (100)	۶/۶۵	۶/۷۹	۲/۱۱
10 (31.623)	۴/۲۵	۴/۲۹	۰/۹۴

جدول ۴- مقایسه عدد ناسلت متوسط بین کار حاضر و تیواری و داس [۲۱] در $\phi=0.0$



Ri (Re)	تیواری و داس [۲۱]	کار حاضر	درصد اختلاف
0.1 (316.23)	۳۰/۶۷	۳۱/۶۲	۳/۱۳
1 (100)	۱۷/۹۶	۱۸/۳۵	۲/۱۸
10 (31.623)	۱۰/۱۹	۱۰/۳۱	۱/۱۸

مورد دیگری که برای صحت سنجی کار حاضر در نظر گرفته شده است، تحقیقی است که توسط ساتیامورتی و چامخا [۲۸] به روش المان محدود درون محفظه مربعی شکل انجام شده است. دما در دیواره سمت چپ محفظه به صورت خطی تغییر می‌کند در حالی که دیواره‌های افقی پایینی و بالایی به ترتیب گرم و آدیاباتیک و دیواره سمت راست سرد است. و میدانی مغناطیسی بر محفظه اعمال می‌شود. در جدول ۵ و شکل ۵، مقایسه نحوه عملکرد این شبیه‌سازی به وسیله کد حاضر و مرجع در عدد رایلی 10^5 مقایسه شده است.

شبکه‌هایی با ابعاد مختلف در حضور تمامی پارامترهای تأثیرگذار بررسی می‌شود. به این منظور، کسر حجمی نانوذرات برابر 0.05 ، عدد هارتمن برابر 30 ، عدد رینولدز 100 ، نسبت ابعاد محفظه برابر 1 و حالت (الف) در نظر گرفته می‌شود. با توجه به جدول ۲ مشاهده می‌شود، اختلاف ناچیزی بین شبکه 120×120 و 140×140 وجود دارد و از همین رو شبکه 120×120 انتخاب مناسبی است؛ همچنین لازم به ذکر است که معیار همگرایی برای مطالعه حاضر، بصورت رابطه (۲۲) در نظر گرفته شده است.

$$\max \frac{|\Gamma^{n+1} - \Gamma^n|}{|\Gamma^n|} \leq 10^{-7} \quad (22)$$

در آن n نشان‌دهنده تعداد تکرار و Γ متغیر عمومی (U, V, θ) است.

جدول ۲- عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم به ازای ابعاد مختلف شبکه

Nu _{av}	ابعاد شبکه
۱۲/۱۶	۸۰×۸۰
۱۲/۵۱	۱۰۰×۱۰۰
۱۲/۸۴	۱۲۰×۱۲۰
۱۳/۰۱	۱۴۰×۱۴۰

۴-۲- صحت سنجی

یکی از الزامات شبیه‌سازی‌های عددی، تأیید صحت و اعتبار آن است. این کار با حل مسأله‌ای از تحقیقات معتبر گذشته و تطابق آن با نتایج بدست آمده صورت می‌گیرد. حال با توجه به مفاهیمی چون نانوسیال و میدان مغناطیسی از سه مرجع معتبر برای تأیید عملکرد برنامه استفاده شده است. به منظور مشاهده نحوه عملکرد برنامه کامپیوتری حاضر در مواجهه با جریان نانوسیال، در شکل ۴ مقایسه‌ای بین کار حاضر و کار قاسمی و امین‌الساداتی [۱۲] که به روش حجم محدود با استفاده از الگوریتم سیمپلر انجام گرفته است، انتقال حرارت جابجایی ترکیبی درون محفظه‌ای مثلثی شکل با دیواره عمودی متحرک، صورت گرفته است. در جدول ۳ و ۴ کار حاضر با کار تیواری و داس [۲۱] که به روش حجم محدود

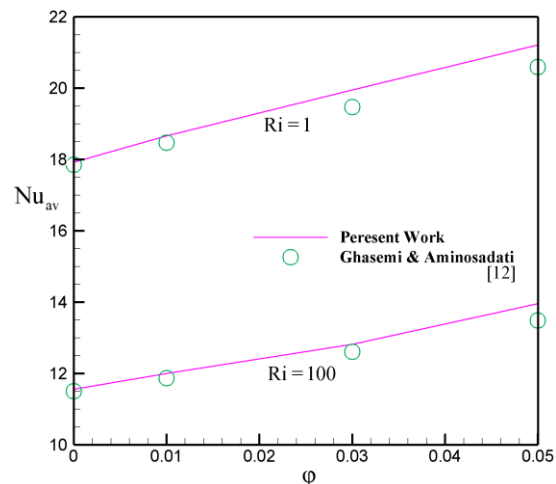
جدول ۵- مقایسه عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم بین کار حاضر و ساتیامورتی و چامخا [۲۸]

درصد اختلاف	کار حاضر	ساتیامورتی و چامخا [۲۸]	عدد هارتمن
۰/۹۸	۱۲/۱۱	۱۲/۲۳	۰
۲/۰۴	۱۲/۴۹	۱۲/۷۵	۵۰
۳/۱۱	۱۲/۷۷	۱۳/۱۸	۱۰۰

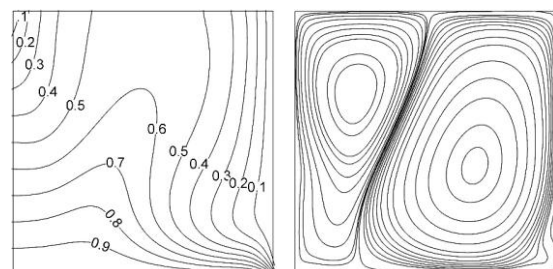
۳- نتایج

با توجه به اعتبارسنجی برنامه کامپیوتری و اطمینان از دقت نتایج بدست آمده، در این بخش نتایج حاصل از شبیه‌سازی-های صورت گرفته ارائه و بیان می‌شود. هدف بررسی تأثیر پارامترهای مؤثر از قبیل عدد رینولدز، عدد هارتمن و نسبت ابعاد محفظه روی ماهیت و عملکرد انتقال حرارت جابجایی ترکیبی و همچنین تأثیر وجود نانو ذرات روی انتقال حرارت است. در شکل ۶ خطوط جریان و همدمای به ازای مقادیر مختلف عدد هارتمن و عدد رینولدز برای حالت (الف) در $AR=1$ نشان داده شده است. بطور کلی به ازای تمامی مقادیر عدد رینولدز و عدد هارتمن، گردابه‌ای واحد و پادساعتگرد درون محفظه تشکیل می‌شود. دلیل این امر این است که سیال در مجاورت دیواره گرم سبک شده و بالا رفته و طی دیواره سرد سنگین شده و به سمت پایین حرکت می‌کند که جهت حرکت دیواره سرد این امر را تقویت می‌کند و این چرخش را بوجود می‌آورد. در $Ha=0$ و $Re=200$ علاوه بر گردابه اصلی دو گردابه با قدرت خیلی کمتر، در نزدیکی دیواره‌های مایل و دور از تأثیرات برشی ناشی از حرکت دیواره تشکیل می‌شود و این دو گردابه با اعمال میدان مغناطیسی و افزایش عدد هارتمن از بین می‌رود. همانطور که نشان داده شده است، به ازای تمامی مقادیر عدد هارتمن، افزایش عدد رینولدز سبب افزایش قدرت گردابه‌ها می‌شود؛ زیرا در این حالت تأثیر نیروی برشی وارد به سیال ناشی از حرکت دیواره بیشتر شده، نقش جابجایی اجباری در مقایسه با شناوری بیشتر می‌شود؛ همچنین دیده می‌شود، مرکز تمامی گردابه‌ها با توجه به حرکت دیواره، سمت پایین و چپ محفظه است. اعمال میدان مغناطیسی به دلیل ایجاد نیروی مخالف در برابر

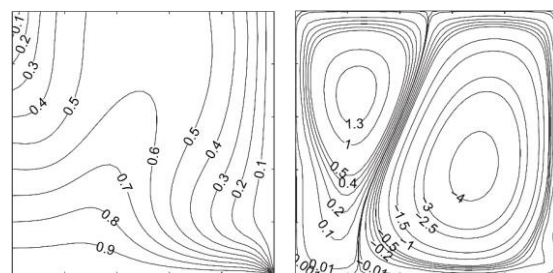
با توجه به نتایج صحت سنجی‌های صورت گرفته، مشاهده می‌شود که اطلاعات به دست آمده از برنامه کار حاضر، تطابق مناسب و قابل قبولی با کارهای انجام شده قبلی دارد.



شکل ۴- مقایسه عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم در حالتی که دیواره عمودی به سمت بالا حرکت می‌کند بین کار حاضر و قاسمی و امین‌الساداتی [۱۲]

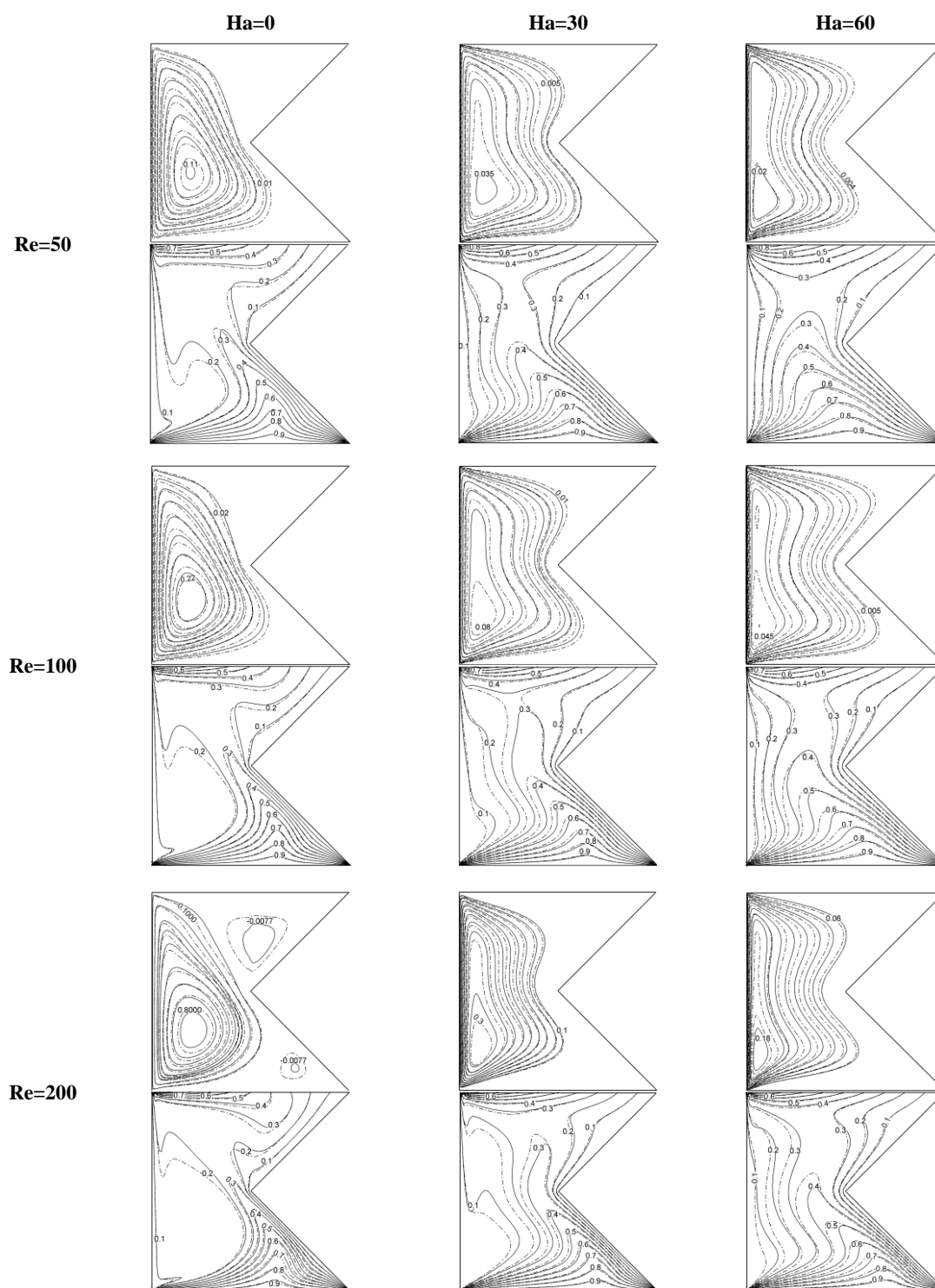


(الف)

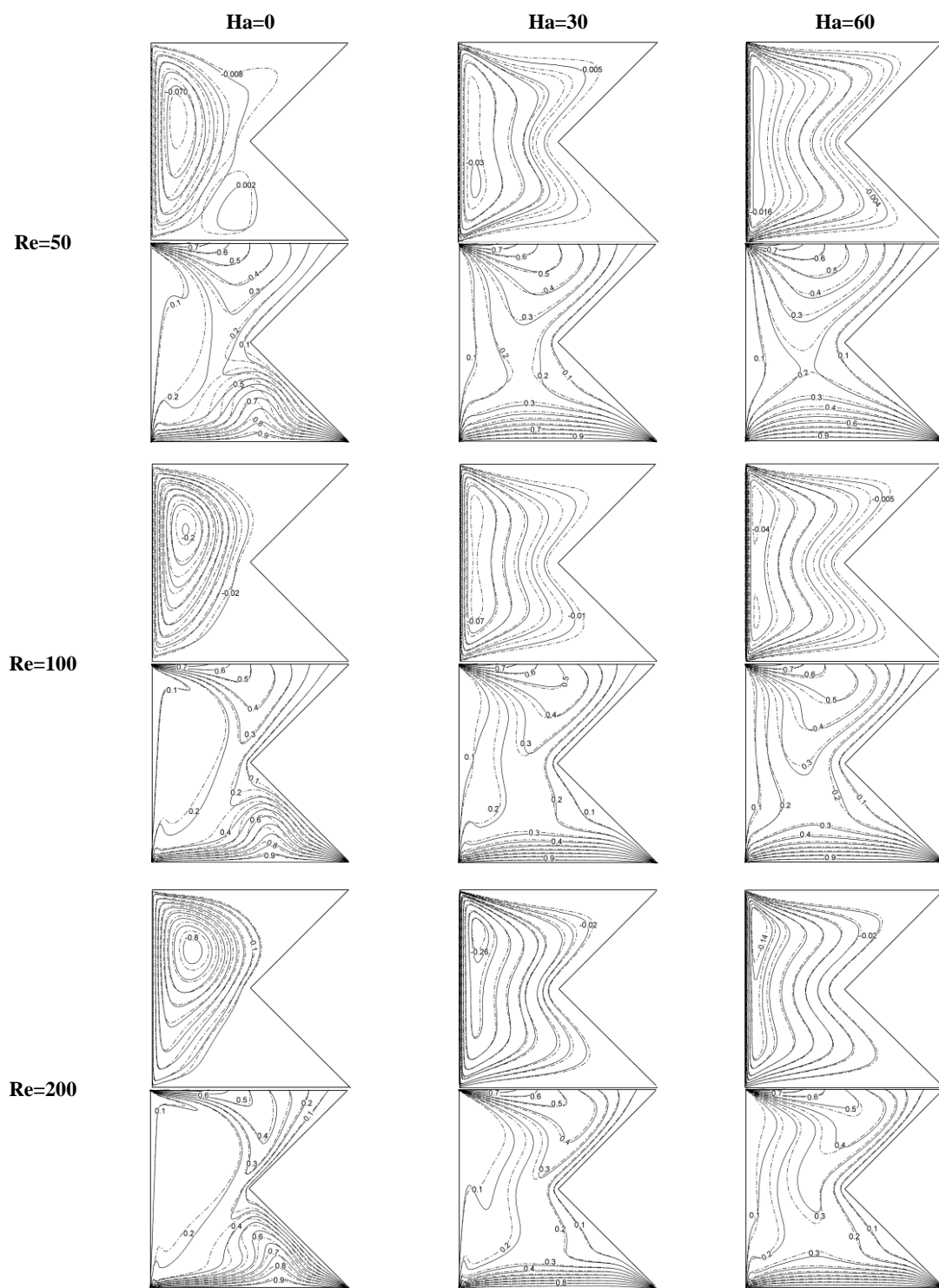


(ب)

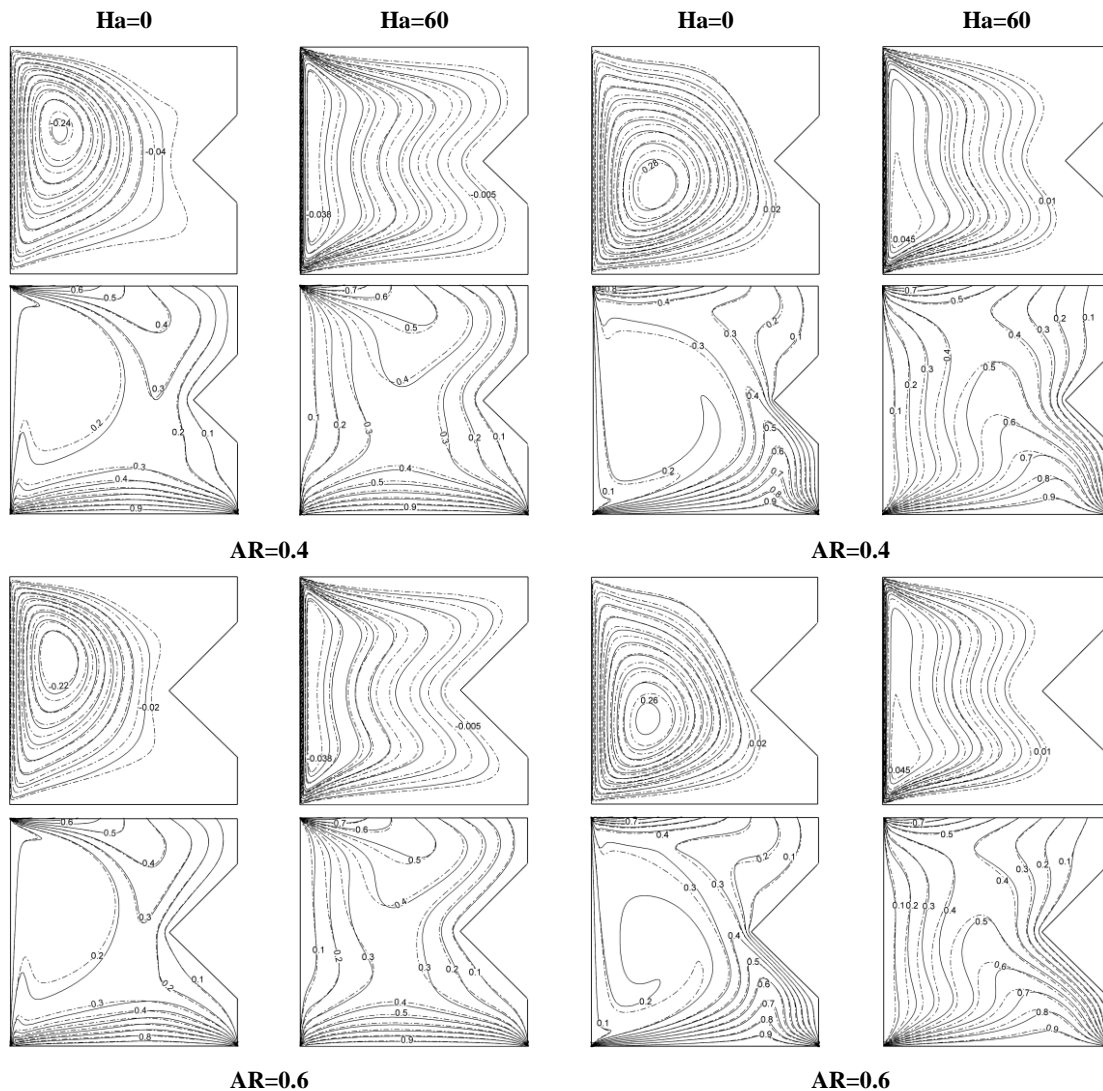
شکل ۵- مقایسه خطوط جریان و همدمای بین (الف) کار حاضر و (ب) ساتیامورتی و چامخا [۲۸] در $Ha=50$



شکل ۶- تأثیر عدد هارتمن و عدد رینولدز بر خطوط جریان (ردیف بالا) و همدمای (ردیف پایین) در حالت (الف) برای $\phi=0.05$ (---) و $\phi=0$ (-), $AR=1$



شکل ۷- تأثیر عدد هارتمن و عدد رینولدز بر خطوط جریان (ردیف بالا) و همدمای (ردیف پایین) در حالت (ب) برای $\phi=0.05$ (---) و $\phi=0$ (-), $AR=1$



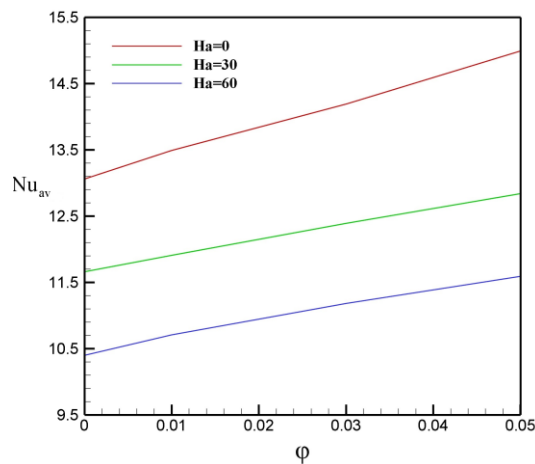
شکل ۹- تأثیر عدد هارتمن و نسبت ابعاد محفظه بر خطوط جریان (ردیف بالا) و همدمای (ردیف پایین) در حالت (ب) برای $Re=100$ ، $\phi=0$ (—) و $\phi=0.05$ (---)

شکل ۸- تأثیر عدد هارتمن و نسبت ابعاد محفظه بر خطوط جریان (ردیف بالا) و همدمای (ردیف پایین) در حالت (الف) برای $Re=100$ ، $\phi=0$ (—) و $\phi=0.05$ (---)

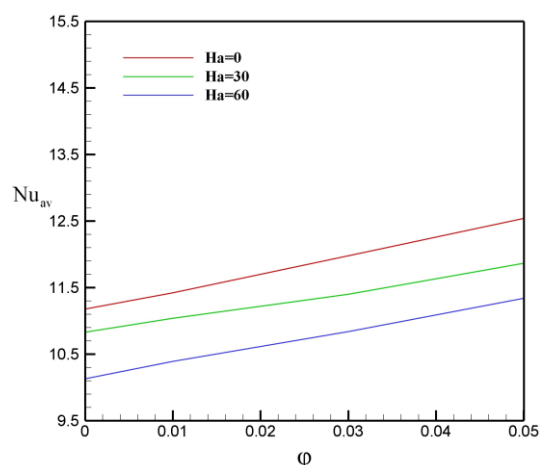
جابجایی، کمتر دیده می‌شود. تأثیر عدد رینولدز و عدد هارتمن بر خطوط جریان و همدمای در حالت (ب) برای $AR=1$ در شکل ۷ نشان داده شده است. همانطور که مشخص است، در تمامی مقادیر عدد رینولدز و هارتمن به جز عدد رینولدز ۵۰ و عدد هارتمن صفر، گردابه‌ای واحد و ساعتگرد درون محفظه شکل می‌گیرد که قدرت این گردابه‌ها با افزایش عدد رینولدز، افزایش و با افزایش عدد هارتمن کاهش می‌یابد. در

جریان، سبب کاهش سرعت داخل محفظه شده و افزایش عدد هارتمن به ازای همه مقادیر عدد رینولدز منجر به کاهش قدرت گردابه‌ها می‌شود. مشاهده می‌شود، افزایش عدد هارتمن سبب می‌شود، گردابه‌ها به سمت دیواره مایل کشیده شوند. افزایش قدرت میدان مغناطیسی از انحنای خطوط همدمای کم می‌کند و این امر نشان از تضعیف جابجایی دارد که این تأثیر در عدد رینولدز ۲۰۰ به دلیل قدرت زیاد

افزایش عدد هارتمن، سبب کاهش و افزایش کسر حجمی نانو ذرات، منجر به افزایش عدد ناسلت می‌شود. همانطور که دیده می‌شود، تأثیر افزایش عدد هارتمن در کاهش عدد ناسلت متوسط در حالت (ب)، کمتر از حالت (الف) است؛ زیرا در این حالت نیروی برشی و شناوری خلاف هم اعمال می‌شوند و تأثیر جابجایی کمتر است. به عنوان نمونه در کسر حجمی ۰/۰۵، افزایش عدد هارتمن از ۰ به ۶۰، سبب کاهش ۲۲ درصدی و ۱۰ درصدی عدد ناسلت متوسط به ترتیب برای حرکت دیواره به سمت پایین و بالا می‌شود.



شکل ۱۰- تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم به ازای $AR=1$ و $Re=100$ برای حالت (الف)



شکل ۱۱- تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم به ازای $AR=1$ و $Re=100$ برای حالت (ب)

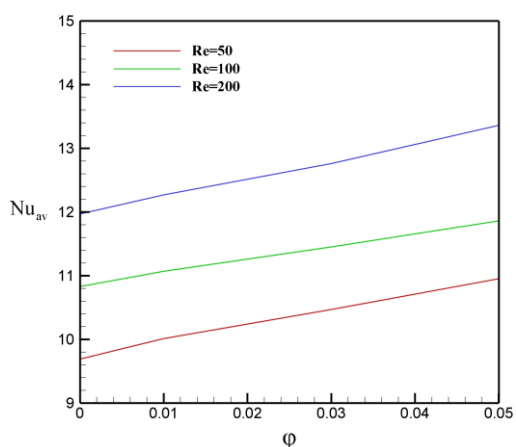
غیاب میدان مغناطیسی، مرکز گردابه‌ها در هر سه مقدار عدد رینولدز، به سمت چپ و بالای محفظه در جهت حرکت دیواره عمودی است. قدرت گردابه‌ها در این حالت در مقایسه با حالتی کمتر است که دیواره به سمت پایین حرکت می‌کند. دلیل این امر آن است که در این حالت جابجایی اجباری منجر به تضعیف عملکرد شناوری می‌شود. شکل ۸ خطوط جریان و همدمای برای نسبت ابعاد ۰/۴ و ۰/۶ برای دو مقدار عدد هارتمن ۰ و ۶۰ در عدد رینولدز ۱۰۰ برای حالت (الف) را نشان می‌دهد. در این حالت هم به ازای تمامی مقادیر عدد رینولدز و هارتمن، گردابه‌ای واحد و پادساعتگرد درون محفظه تشکیل می‌شود. با توجه به شکل‌های ۶ و ۸ مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت ابعاد، بیشینه مقدار تابع جریان کاهش می‌یابد؛ زیرا به دلیل کاهش فضای داخل محفظه، امکان ایجاد جریان با قدرت بالا از نانوسیال گرفته می‌شود؛ همچنین با افزایش عدد هارتمن، از قدرت گردابه‌ها کاسته می‌شود و خطوط همدمای به موازات دیواره‌های سرد قرار می‌گیرند که نشان از کاهش قدرت جابجایی دارد. تأثیر نسبت ابعاد و عدد هارتمن روی خطوط جریان و همدمای برای حالت (ب)، در شکل ۹ نشان داده شده است. در این حالت نیز مشاهده می‌شود که افزایش عدد هارتمن، سبب منظم تر شدن خطوط همدمای به موازات دیواره‌های سرد شده که نشان از غالب شدن پدیده هدایت حرارتی و کاهش قدرت جابجایی است. بعلاوه افزایش عدد هارتمن، سبب کشیده شدن خطوط جریان به سمت دیواره‌های مایل شده و از قدرت گردابه‌ها کم می‌نماید.

به منظور نشان دادن میزان انتقال حرارت، عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم در شکل‌های ۱۰ تا ۱۵ ارائه شده است. شکل‌های ۱۰ و ۱۱، تغییرات عدد ناسلت متوسط به ازای مقادیر مختلف عدد هارتمن و کسر حجمی نانو ذرات در $AR=1$ و عدد رینولدز ۱۰۰ برای دو جهت حرکت دیواره سمت چپ محفظه، به نمایش درآمده است. در هر دو جهت حرکت دیواره، افزایش عدد هارتمن سبب کاهش و افزایش کسر حجمی نانو ذرات منجر به افزایش عدد ناسلت می‌شود. دیده می‌شود، تأثیر افزایش عدد هارتمن در کاهش عدد ناسلت متوسط در حالت (ب)، کمتر از حالت (الف) است.

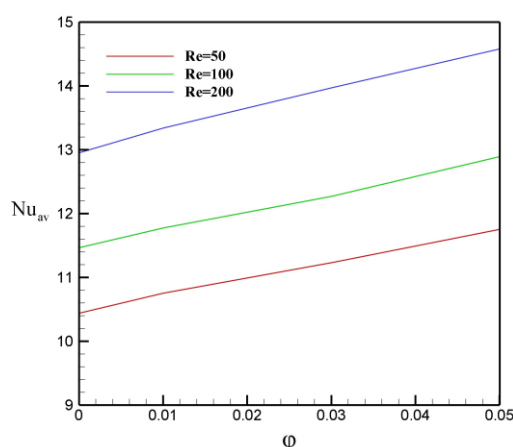
دیواره گرم، سبب افزایش عدد ناسلت متوسط در هر دو حالت حرکت دیواره می‌شود.

به منظور درکی بهتر از رفتار جریان نانوسیال درون محفظه، سرعت عمودی در بخش میانی محفظه برای مقادیر مختلف عدد هارتمن و رینولدز در نسبت ابعاد ۱ و کسر حجمی ۰/۰۵ در شکل ۱۶ و ۱۷ برای دو جهت مختلف حرکت دیواره نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش عدد هارتمن سرعت داخل محفظه کاهش می‌یابد؛ همچنین دیده می‌شود، در یک عدد هارتمن ثابت، در هر دو جهت حرکت دیواره، افزایش عدد رینولدز منجر به افزایش مقدار سرعت می‌شود که نشان از افزایش اثرات جابجایی و انتقال حرارت بیشتر دارد.

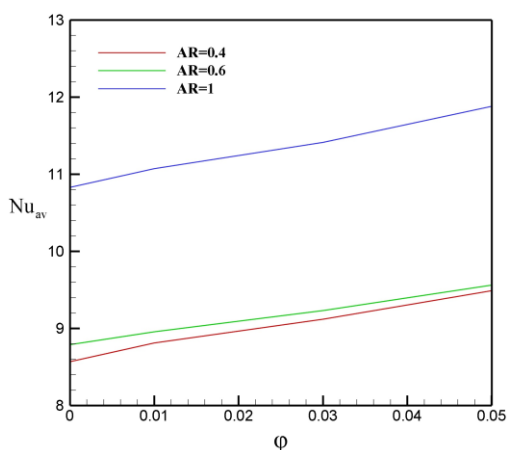
با ثابت ماندن عدد هارتمن ($Ha=30$)، تأثیر عدد رینولدز برای دو جهت حرکت دیواره و $AR=1$ به ازای تغییرات کسر حجمی نانوسیال در عدد ناسلت متوسط در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود، افزایش عدد رینولدز در هر دو جهت حرکت دیواره، سبب افزایش پیوسته عدد ناسلت می‌شود؛ زیرا افزایش عدد رینولدز، منجر به افزایش سرعت حرکت دیواره و افزایش نیروی برشی وارد بر سیال شده و اثرات جابجایی را افزایش می‌دهد. در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نیز، تأثیر نسبت ابعاد محفظه بر عدد ناسلت متوسط نشان داده شده است. افزایش نسبت ابعاد به دلیل افزایش سطح تبادل حرارت و نزدیکی بیشتر دیواره سرد به



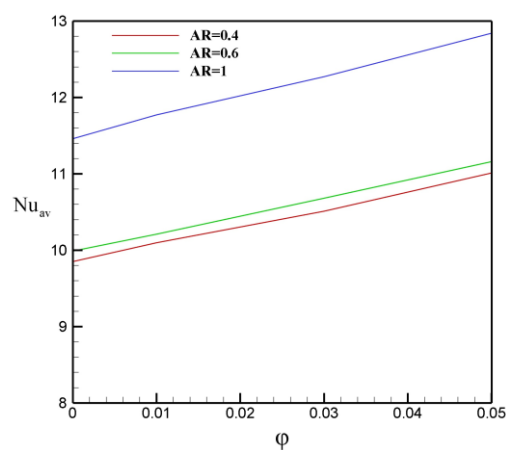
شکل ۱۳- تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم به ازای $AR=1$ و $Ha=30$ برای حالت (ب)



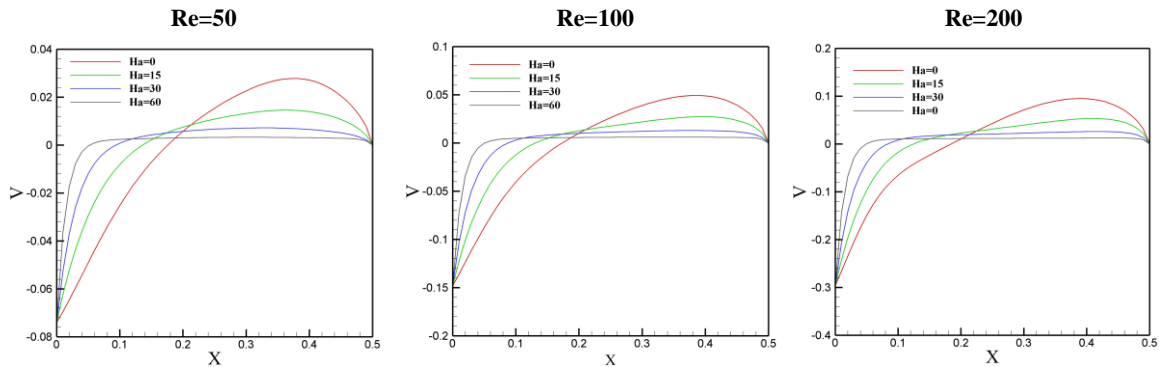
شکل ۱۲- تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم به ازای $AR=1$ و $Ha=30$ برای حالت (الف)



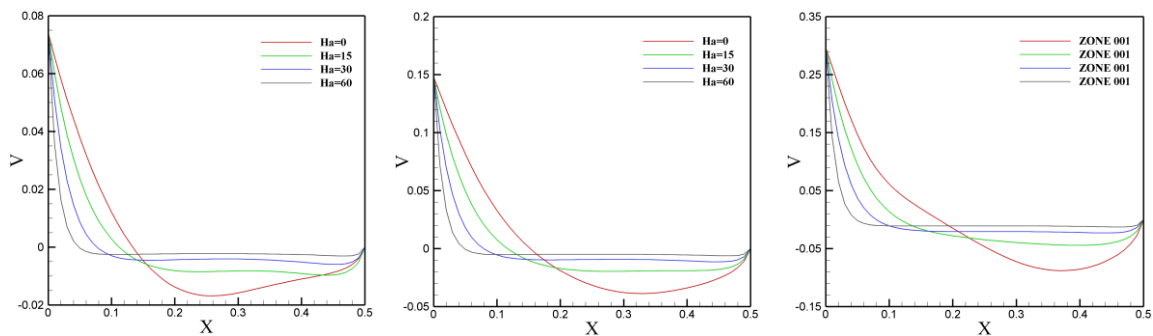
شکل ۱۵- تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم به ازای $Re=100$ و $Ha=30$ برای حالت (ب)



شکل ۱۴- تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم به ازای $Re=100$ و $Ha=30$ برای حالت (الف)



شکل ۱۶- سرعت عمودی در بخش میانی محفظه به ازای مقادیر مختلف عدد هارتمن و عدد رینولدز در $AR=1$ و $\phi=0.05$ برای حالت (الف)



شکل ۱۷- سرعت عمودی در بخش میانی محفظه به ازای مقادیر مختلف عدد هارتمن و عدد رینولدز در $AR=1$ و $\phi=0.05$ برای حالت (ب)

۴- جمع‌بندی

در کار حاضر انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال درون محفظه K شکل در حضور میدان مغناطیسی با روش شبکه‌ی بولتزمن شبیه‌سازی شد. در این مطالعه عددی، تأثیر پارامترهای مختلفی از جمله، عدد رینولدز، کسر حجمی نانوسیال، عدد هارتمن و نسبت ابعاد محفظه بررسی شد. خلاصه نتایج بدست آمده را می‌توان در چند مورد زیر ارائه نمود:

- با توجه به شبیه‌سازی صورت گرفته و اعتبارسنجی، نتایج نشان می‌دهد که روش شبکه بولتزمن، یک روش مناسب برای حل مسائل با هندسه و شرایط مرزی مختلف است.
- در کار حاضر برای اولین بار انتقال حرارت جابجایی ترکیبی نانوسیال تحت اثر میدان مغناطیسی

درون محفظه K شکل با تغییر نسبت ابعاد بررسی شد.

- نسبت ابعاد محفظه و جهت حرکت دیواره پارامترهای مهمی در تعیین مشخصات جریان و میزان انتقال حرارت هستند.
- با ثابت بودن تمام پارامترهای تأثیرگذار، افزایش عدد رینولدز به جهت تقویت اثرات جابجایی و افزایش نسبت ابعاد محفظه به دلیل بیشتر شدن سطح تبادل حرارت، منجر به افزایش انتقال حرارت می‌شود.
- در عدد رینولدز، کسر حجمی نانو سیال و نسبت ابعاد محفظه ثابت، افزایش قدرت میدان مغناطیسی به دلیل کاهش سرعت جریان درون محفظه، باعث کاهش عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم می‌شود که این امر بیانگر ضعیف‌تر

عدد پرانتل	Pr	شدن عملکرد حرارتی جابجایی با افزایش عدد هارتمن است.
عدد رینولدز	Re	
دما	T	● با ثابت بودن تمامی پارامترها، افزودن نانو ذرات باعث افزایش عدد ناسلت متوسط روی دیواره گرم می-شود.
بردار سرعت	\mathbf{u}	
بردار موقعیت	\mathbf{x}	● تأثیر افزودن نانوذرات به سیال پایه در انتقال حرارت وابسته به عدد رینولدز و عدد هارتمن است. در عدد رینولدز ۲۰۰ و $AR=1$ ، افزایش عدد هارتمن تأثیر افزودن نانو ذرات را کم تر می کند.
گام زمانی	Δt	
ضریب پخش حرارتی	α	● به ازای ثابت ماندن تمامی پارامترهای مؤثر، عدد ناسلت متوسط زمانی که دیواره عمودی سمت چپ محفظه به سمت پایین حرکت می کند (حالت الف)، نسبت به حالتی که به سمت بالا حرکت می کند (حالت ب)، بیشتر است.
ضریب انبساط حرارتی	β	
زمان آسایش میدان دما	τ_c	
زمان آسایش میدان جریان	τ_v	
لزجت سینماتیکی	ν	
چگالی	ρ	
کسر حجمی نانوذرات	ϕ	
لزجت دینامیکی	μ	
زاویه اعمال میدان مغناطیسی	ξ	
دمای بی بعد	θ	
ضریب وزنی	ω	
	بالانویس	
تعادلی	eq	
	زیرنویس ها	
متوسط	av	
سرد	c	
سیال	f	
گرم	h	
شماره لینک مدل شبکه	i	
نانوسیال	nf	
جامد	s	
	۶- مراجع	
		نسبت ابعاد AR
		اندازه میدان مغناطیسی B_0
		سرعت گسسته شبکه c_i
		سرعت صوت c_s
		گرمای ویژه در فشار ثابت C_p
		دهانه باز شدگی محفظه D
		قطر ذرات d
		نیروی خارجی F
		تابع توزیع میدان جریان f
		تابع توزیع میدان دما g
		عدد گراشف Gr
		عرض محفظه H
		عدد هارتمن Ha
		ضریب هدایت حرارتی k
		طول محفظه L
		عدد ناسلت Nu
		عدد پکله Pe

[1] Kefayati GR (2013) Lattice Boltzmann simulation of natural convection in nanofluid-filled 2D long

- [13] Nemati H, Farhadi M, Sedighi K, Fattahi E, Darzi A (2010) Lattice Boltzmann simulation of nanofluid in lid-driven cavity. *Int Commun Heat Mass Tran* 37: 1528-1534.
- [14] Rahmannedhad J, Ramezani A, Kalteh M (2013) Numerical investigation of magnetic field effects on mixed convection flow in a nanofluid-filled lid-driven cavity. *Int J Eng Tran* 26: 1213-1224.
- [15] Uddin MN, Farhana A, Alim MA (2015) Numerical study of magneto-hydrodynamic (MHD) mixed convection flow in a lid-driven triangular cavity. *J Naval Arch Marine Eng* 12: 21-32.
- [16] Rahmati AR, Roknabadi AR, Abbaszadeh M (2016) Numerical simulation of mixed convection heat transfer of nanofluid in a double lid-driven cavity using lattice Boltzmann method. *Alex Eng J* 55: 3101-3114.
- [17] Rabbi KM, Saha S, Mojumder S, Rahman M, Saidur R, Ibrahim TA (2016) Numerical investigation of pure mixed convection in a ferrofluid-filled lid-driven cavity for different heater configurations. *Alex Eng J* 55: 127-139.
- [18] Chamkha AJ, Ismael MA (2016) Magnetic field effect on mixed convection in lid-driven trapezoidal cavities filled with a Cu-water nanofluid with an aiding or opposing side wall. *J Therm Sci Eng Appl* 8: 310-319.
- [19] Mojumder S, Saha S, Rahman MR, Rahman M, Rabbi KM, Ibrahim TA (2017) Numerical study on mixed convection heat transfer in a porous L-shaped cavity. *Eng Sci Tech Int J* 20: 272-282.
- [20] Hatami N, Banari AK, Malekzadeh A, Pouranfard A (2017) The effect of magnetic field on nanofluids heat transfer through a uniformly heated horizontal tube. *Physics Letter A* 381: 510-515.
- [21] Tiwari RK, Das MK (2007) Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids. *Int J Heat Mass Tran* 50: 2002-2018.
- [22] M. Sukop, DT. Thorne, Jr (2006) *Lattice Boltzmann Modeling*. Springer.
- [23] Mohamad AA (2011) *Lattice Boltzmann method: fundamentals and engineering applications with computer codes*. Springer Science & Business Media.
- [24] Bhatnagar PL, Gross EP, Krook M (1954) A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical review* 94: 511-525.
- [25] Brinkman H (1952) The viscosity of concentrated suspensions and solutions. *J Chemical Physics* 20: 571-571.
- [26] Patel HE, Sundarajan T, Pradeep T, Dasgupta A, Dasgupta N, Das SK (2005) A micro convection enclosures at presence of magnetic field. *Theor Comput Fluid Dyn* 5: 1-19.
- [2] Li Z, Yang M, Zhang Y (2016) Lattice Boltzmann method simulation of 3-D natural convection with double MRT model. *Int J Heat Mass Tran* 94: 222-238.
- [3] Sheikholeslami M, Gorji-Bandpy M, Seyyedi S, Ganji D, Rokni HB, Soleimani S (2013) Application of LBM in simulation of natural convection in a nanofluid filled square cavity with curve boundaries. *Powder technol* 247: 87-94.
- [۴] شهریار ا (۲۰۱۶) شبیه‌سازی عددی انتقال حرارت جابجایی آزاد نانوسیال در محفظه با دیواره‌های موجی و توزیع دمای سینوسی به روش شبکه بولتزمن. *مجله مهندسی مکانیک مدرس* ۱۶(۹): ۱۴۳-۱۵۴.
- [۵] حسینی‌آباد شاپوری م، سعیدی م ح (۲۰۱۷) مدل‌سازی جابجایی آزاد نانوسیال اکسید-آلومینیوم آب درون محفظه مربعی منحنی با استفاده از روش شبکه‌ای بولتزمن. *نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر* ۵۸۰-۵۶۷: ۴۹(۳).
- [6] Ashorynejad HR, Mohamad AA, Sheikholeslami M (2013) Magnetic field effects on natural convection flow of a nanofluid in a horizontal cylindrical annulus using Lattice Boltzmann method. *Int J Therm Sci* 64: 240-250.
- [7] Ismael MA, Chamkha AJ (2015) Mixed convection in lid-driven trapezoidal cavities with an aiding or opposing side wall. *Numer Heat Tran, Part A: Appl* 68: 312-335.
- [8] Chol S (1995) Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. *ASME-Pub-Fed* 231: 99-106.
- [۹] کسایی‌پور ع، قاسمی ب، رئیسی ا (۲۰۱۴) اثر میدان مغناطیسی بر انتقال حرارات جابجایی آزاد نانوسیال آب-مس در محفظه T شکل مورب. *مجله مهندسی مکانیک مدرس* ۱۴(۱۲): ۱۷۹-۱۸۹.
- [10] Hussein AK, Ashorynejad H, Sivasankaran S, Kolsi L, Shikholeslami M, Adegun I (2016) Modeling of MHD natural convection in a square enclosure having an adiabatic square shaped body using Lattice Boltzmann Method. *Alex Eng J* 55: 203-214.
- [۱۱] رحمتی ا ر، نجار نظامی ا (۲۰۱۷) شبیه‌سازی جریان جابجایی طبیعی نانوسیال در یک محفظه شیب‌دار تحت میدان مغناطیسی به روش شبکه بولتزمن. *نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر* ۶۰۴-۵۹۵: ۴۹(۳).
- [12] Ghasemi B, Aminossadati S (2010) Mixed convection in a lid-driven triangular enclosure filled with nanofluids. *Int Commun Heat Mass Tran* 37: 1142-1148.

- [28] Sathiyamoorthy M, Chamkha A (2010) Effect of magnetic field on natural convection flow in a liquid gallium filled square cavity for linearly heated side wall (s). *Int J Therm Sci* 49: 1856-1865.
- model for thermal conductivity of nanofluids. *Prama J Phys* 65: 863-869.
- [27] Santra AK, Chakraborty N (2009) Study of heat transfer due to laminar flow of copper-water nanofluid through two isothermally heated parallel plates. *Int J Therm Sci* 48: 391-400.