



## تأثیرات شرایط مرزی دلخواه بر پاسخ ورق چندلایه کامپوزیتی تحت ضربه با جرم بزرگ و سرعت پایین

رضا پاک‌نژاد<sup>۱</sup>، فرامرز آشنای قاسمی<sup>۲\*</sup> و کرامت ملک‌زاده فرد<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

<sup>۲</sup> دانشیار مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران

<sup>۳</sup> استاد مهندسی مکانیک، گروه سازه‌های هوافضایی، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۲۹، تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۹/۲۶، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۲/۱۵

### چکیده

در این پژوهش، اثر شرایط مرزی دلخواه روی یک ورق چندلایه کامپوزیتی که تحت بار ضربه‌ای با جرم بزرگ و سرعت پایین قرار گرفته، بررسی شده است. هنگامی ضربه‌زننده جرم بزرگ تعریف می‌شود که نسبت جرم آن به جرم هدف، بزرگ‌تر از ۲ باشد. به این منظور، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، به‌عنوان میدان جابجایی ورق در نظر گرفته شده است. سپس با استفاده از روش تحلیلی بر پایه چندجمله‌ای‌های جبری مناسب و تابع وزنی گالرکین، معادلات حرکت برای چند نوع شرط مرزی مختلف حل شده است؛ همچنین، رفتار متقابل بین ضربه‌زننده و ورق مرکب به کمک یک سیستم دو درجه آزادی جرم- فنر مدل‌سازی شده است. نتایج نشان داد که شرایط مرزی اختیار شده روی فرکانس طبیعی ورق چندلایه کامپوزیتی مؤثر است. این تأثیرات در نیروی تماسی و جابجایی ورق برای تکیه‌گاه‌های گیردار نسبت به ساده و آزاد قابل ملاحظه است. پارامترهایی مانند، شرایط مرزی مختلف، جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت و شعاع ضربه‌زننده، از عوامل مهم و تأثیرگذار در بررسی پدیده ضربه و طراحی سازه‌ها است.

**کلمات کلیدی:** ضربه، ورق مرکب؛ شرایط مرزی اختیاری؛ روش گالرکین؛ مدل جرم- فنر.

## The Effects of Arbitrary Boundary Conditions on a Laminated Composite Plate Response Subjected to Large Mass & Low Velocity Impact

R. Paknejad<sup>1</sup>, F. Ashenai Ghasemi<sup>2,\*</sup>, K. Malekzadeh Fard<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Ph.D. Student, Mech. Eng., Shahid Rajaee Teacher Training University (SRRTU), Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahid Rajaee Teacher Training University (SRRTU), Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Prof., Mech. Eng., Department of Aerospace Structures, Aerospace University Complex, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.

### Abstract

In this research, the effects of arbitrary boundary conditions on a laminated composite plate response subjected to large mass and low-velocity impact has been studied. When the impactor is defined large-mass, its mass ratio to the target mass is greater than 2. For this purpose, the first-order shear deformation theory was considered as the displacement field of the composite laminated plate. Then, using the analytic method based on suitable algebraic polynomials and the Galerkin function, the motion equations for several types of different boundary conditions was solved. Also in this work, the interaction between the impactor and the composite laminated plate were modeled using a two degrees-of-freedom system, consisting of springs-masses. The results indicate that the arbitrary boundary conditions are effective on the natural frequency of the composite plate. These effects are remarkable on contact forces and displacements of the composite plate for clamped to simply support and free boundary conditions. Some of parameters like arbitrary boundary conditions, mass and velocity of the impactor in a constant impact energy level and radius of impactor are important factors affecting the impact process and the design of structures.

**Keywords:** Impact, Composite Plate, Arbitrary Boundary Conditions, Galerkin's Method, Springs-Masses Model.

## ۱- مقدمه

مواد مرکب که به دلیل خواص مناسب از جمله، مقاومت در برابر مواد شیمیایی، سبکی وزن، عدم تغییر شکل پذیری و استحکام نسبتاً مناسب، به صورت ورق‌ها و پوسته‌های الیافی، الیاف- فلز<sup>۱</sup> و پانل‌های ساندویچی<sup>۲</sup> و غیره ساخته می‌شوند، مورد علاقه صنایع مختلف هستند. پدیده برخورد اجرام خارجی با سازه‌هایی که دارای مشخصات موادی مختلفی هستند و بررسی چگونگی تغییرات آن‌ها در اثر اعمال ضربه، به‌عنوان یک ویژگی مهم در طراحی، مورد توجه صنایع مختلف از قبیل، هوافضا، خودروسازی و حتی راه و ساختمان است.

ابریت [۳-۱] مطالعات وسیع و گسترده‌ای را روی پاسخ سازه‌های کامپوزیتی به بار ضربه‌ای، در اثر تماس جرم خارجی و نیز بررسی آسیب و کاهش استحکام باقیمانده و مودهای شکست انجام داد. در این بین شرایط مرزی مورد بررسی که ممکن است در یک نوع سازه بکار گرفته شود، در تحلیل نهایی حائز اهمیت است؛ چرا که با توجه به نوع شرط مرزی، نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

وانگ و همکاران [۴]، تحلیل غیرخطی را برای ورق مرکب و ساندویچی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تحت شرایط دمایی متفاوت با شرط مرزی ساده بررسی کردند. آن‌ها معادلات حرکت را از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی استخراج نموده، تأثیرات مشخصات موادی، توزیع کسر حجمی، تغییرات دمایی، تنش اولیه، سرعت اولیه ضربه‌زننده و ضخامت رویه و هسته را روی پاسخ ضربه تحقیق کردند. سازه ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر تحت ضربه برای شرط مرزی ساده، مورد مطالعه وانگ و کیاو [۵] قرار گرفت. در ابتدا ارتعاشات آزاد به دست آمده برای تیر ساندویچی با نتایج نرم‌افزار آباکوس<sup>۳</sup> و سپس تحلیل ضربه اعمالی با نتایج حاصل از نرم‌افزار ال‌اس- داین<sup>۴</sup> مقایسه شد و نقش جرم و سرعت اولیه ضربه‌زننده، سفتی و ضخامت هسته روی پاسخ ضربه بررسی گردید.

پایگانه و همکاران [۶]، پاسخ ورق الیاف- فلز را با داشتن تکیه‌گاه ساده تحت ضربه سرعت پایین بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و سری فوریه برای بیان روابط جابه‌جایی ورق، معادلات حاکم را استخراج و مورد تحلیل قرار دادند. سپس تأثیرات جابه‌جایی لایه‌های آلومینیوم بین لایه‌های ورق چندلایه کامپوزیتی، جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت و نسبت طول به عرض ورق، روی تاریخچه نیروی تماسی ورق، تنش محوری و خیز حاصل از ضربه مطالعه کردند.

بلینگاری و وادوری [۷]، رفتار ضربه سرعت پایین برای یک ورق مربعی مرکب با گوشه‌های انحنادار تمام گیردار را با دو نوع زاویه چیدمان الیاف  $[0/90]_i$ ،  $[0/60/-60]_i$  با تعداد لایه‌های ۴، ۸ و ۱۶، به کمک آزمایش پرتاب ضربه‌زننده مطالعه کردند. میزان جذب انرژی توسط لایه‌ها و آسیب نیروی حاصل از ضربه با در نظر گرفتن زاویه چیدمان الیاف و تغییر ارتفاع ضربه‌زننده بررسی شد. عبدالله و کانت ول [۸]، ورق الیاف- فلز تمام گیردار را مورد آزمایش ضربه سرعت بالا قرار دادند. ورق مورد استفاده آن‌ها، از پلی‌پروپیلین و آلیاژهای آلومینیوم ساخته شده بود. میزان تغییرات ضخامت ورق با اضافه کردن لایه‌های کامپوزیت و آلومینیوم و انرژی جنبشی متفاوت که از تنوع سرعت ضربه‌زننده ناشی می‌شود، در آسیب حاصل از ضربه تحقیق شد.

هر و لیانگ [۹] پاسخ ورق و پوسته کامپوزیتی تحت ضربه سرعت پایین را با استفاده از نرم‌افزار المان محدود انسیس<sup>۵</sup> برای دو شرط مرزی ساده و گیردار بررسی نموده، تأثیرات اندازه مش‌بندی در پاسخ استخراجی از نرم‌افزار، سرعت ضربه‌زننده، زاویه چیدمان الیاف و شعاع پوسته در میزان نیروی تماسی و خیز ورق مورد حل عددی قرار گرفت. چان و لام [۱۰] پاسخ ورق‌های کامپوزیتی متعامد و زاویه‌دار چهارسرگیردار را تحلیل نمودند که تحت ضربه با سرعت پایین و جرم کوچک قرار گرفته بود. آن‌ها با استفاده از روابط انرژی جنبشی و پتانسیل، تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی، قانون ضربه غیرخطی هرتز و جاگذاری در معادلات لاگرانژ، روابط خود را استخراج نموده، با اعمال شرایط مرزی برای ورق سه لایه مرکب با سه نوع زاویه‌چینی

<sup>1</sup> Fiber Metal Laminates

<sup>2</sup> Sandwich Panel

<sup>3</sup> ABAQUS

<sup>4</sup> LS DYNA

<sup>5</sup> ANSYS

زارعی و همکاران [۱۴]، پاسخ دینامیکی ورق الیاف - فلز به ضربه سرعت پایین با تأثیر حرارتی را برای چند نوع شرط مرزی با استفاده از اصل همپلتون، تئوری لایه‌ها، قانون هرتز و روش حل ریتز بررسی کردند. تحقیق ایشان شامل، تأثیرات سرعت و شعاع ضربه‌زننده، شرایط مرزی ورق و دمای محیط روی ورق الیاف- فلز است. ثابت کردند که با افزایش دما، نیروی تماسی کاهش و خیز ورق افزایش می‌یابد.

ملک‌زاده و ده‌بزرگی [۱۵]، تأثیر ضربه سرعت پایین بر ورق مورب هوشمند را که با چهار نوع توزیع نانولوله‌های کربنی تقویت شده بود، برای دو شرط مرزی تمام لولا و تمام گیردار<sup>۲</sup> تحلیل نمودند. از تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی، قانون تماس غیرخطی هرتز، مدل میکرومکانیکی موری-تاناکا<sup>۳</sup> و روش المان محدود برای فرموله کردن و حل روابط استخراج شده و همچنین از نرم‌افزار آباکوس برای مقایسه و صحت نتایج به‌دست‌آمده استفاده شد. بررسی آن‌ها شامل، تأثیرات توزیع متفاوت نانولوله‌های کربنی، پارامترهای هندسی ورق و سرعت ضربه‌زننده روی پاسخ ضربه سرعت پایین بود.

کیانی و همکاران [۱۶]، پاسخ ضربه سرعت پایین یک تیر هوشمند ضخیم را برای شروط مرزی متفاوت بررسی کردند. از تئوری مرتبه سوم، تغییر شکل برشی تیر معادلات حاکم استخراج و با استفاده از روش رانگ- کوتای<sup>۴</sup> مرتبه چهارم، معادلات ارتعاش آزاد و ضربه حل گردید. نتایج به‌دست‌آمده از روش تحلیلی توسط نرم‌افزار المان محدود آباکوس مقایسه و تأثیرات کسر حجمی ماده هوشمند، سرعت، جرم و موقعیت ضربه‌زننده، شرایط مرزی متفاوت و تغییرات گرمایی محیط بر نیروی تماسی، جابه‌جایی تیر و انتقال انرژی تیر و ضربه-زننده تحقیق شد.

در این تحقیق، تأثیر شرایط مرزی مختلف روی پاسخ ورق چندلایه کامپوزیتی تحت ضربه سرعت پایین به روش تحلیلی انجام شده است. کاری که تاکنون به روش تحلیلی انجام نشده بود. ابتدا معادلات حاکم بر ورق در حالت ضربه دینامیکی به‌صورت مرتبط و کوپله با مدل جرم و فنر حل می‌گردند. سپس پاسخ ورق چند لایه مرکب با شرایط مرزی

الیاف [0/90/0] و [30/-30/30] و [30/0/30]، تأثیر نیروی تماسی یا نیروی برخورد بر ورق و ضربه‌زننده، جابجایی ورق و ضربه‌زننده و تنش‌های اصلی و برشی را نسبت به زمان بررسی و حل تحلیلی نموده و با هم مقایسه کردند.

اسلان و همکاران [۱۱]، تأثیر اعمال ضربه با سرعت پایین روی ورق کامپوزیتی شیشه- اپوکسی لایه با زاویه الیاف را به‌صورت آزمایش و حل المان محدود بررسی کردند. تست ضربه با دو ضربه‌زننده به جرم‌های کوچک و بزرگ انجام شد و نتایج کار با نرم‌افزارهای المان محدود مقایسه گردید. از سه ورق با اندازه‌های متفاوت استفاده شد که از دوسرگیردار و دو سر دیگر آزاد بودند. تحقیق آن‌ها جهت محاسبه تنش و نیروی تماسی ورق کامپوزیتی در طول زمان اعمال ضربه به همراه یک آنالیز شکست برای پیش‌بینی آغاز آسیب ضربه و تورق<sup>۱</sup> اولیه به انجام رسید. ایشان نشان دادند که روی یکی از سه ورق در نظر گرفته شده نسبت به دو ورق دیگر، نیروی تماسی بالاتر و تورق گسترده‌تری به دست می‌آید.

پاک‌نژاد و همکاران [۱۲]، با استفاده از یک روش تحلیلی به بررسی پدیده ضربه با جرم ضربه‌زننده کوچک روی ورق کامپوزیتی تمام گیردار پرداختند. ثابت کردند، پارامترهایی مانند، جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت، جرم ورق به‌عنوان هدف، زاویه چیدمان الیاف، نسبت طول به عرض ورق و فرکانس طبیعی ورق کامپوزیتی در بررسی پدیده ضربه، خیز ورق و تنش‌های ناشی از آن‌ها مؤثر است.

خلیلی و همکاران [۱۳]، پاسخ ضربه سرعت پایین ورق هوشمند را بررسی نمودند که وابسته به تغییرات دمایی و دارای شرط مرزی ساده بود. آن‌ها با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، روابط جابه‌جایی و آنالیز مدل جرم و فنر برای شرط مرزی ساده به حل مسأله پرداخته و میزان تأثیر دما و انواع کسر حجمی را روی تاریخچه نیروی تماسی، بیشینه جابه‌جایی، نیروی تماسی و تنش محوری تحقیق نمودند. نتایج ایشان نشان داد، با افزایش دما برای هر سه نوع ورق هوشمند بررسی شده (نوع S, P, E)، بیشینه نیروی ضربه‌ای زیر نقطه تماس کاهش و بیشینه جابه‌جایی زیر نقطه تماس افزایش می‌یابد.

<sup>2</sup> Fully Clamp

<sup>3</sup> Mori-Tanaka Micro-Mechanical Mode

<sup>4</sup> Rung-Kutta

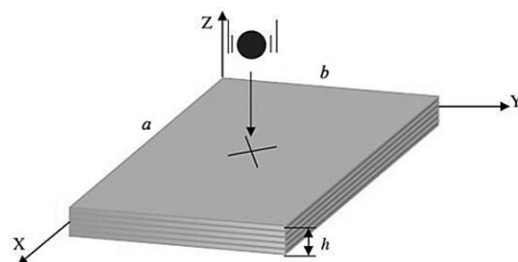
<sup>1</sup> Delamination

مختلف و دلخواه تحت ضربه با جرم بزرگ و سرعت پایین به کمک روش تابع وزنی گالرکین، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین، تأثیر شرایط مرزی، جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت و شعاع ضربه‌زننده روی نیروی تماسی و جابه‌جایی ورق مرکب مطالعه می‌شود.

## ۲- روابط پایه و معادلات حرکت

در شکل ۱ ورق ساخته شده از الیاف کربن که دارای طول  $a$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  است، در نظر گرفته می‌شود. در مدل ارائه شده شرایط و فرضیات زیر جهت تحلیل در نظر گرفته شده است:

- ۱- ورق مورد استفاده الاستیک بوده، می‌تواند ایزوتروپ یا ارتوتروپ و از جنس مواد مرکب باشد.
- ۲- تغییر مکان‌ها و چرخش‌ها کوچک فرض شده است.
- ۳- از اثرات رطوبت و دما صرف‌نظر شده است.
- ۴- از ضربه‌زننده با جرم بزرگ استفاده و از اثرات امواج برگشتی از مرزها صرف‌نظر شده است.
- ۵- ورق نازک فرض شده، ولی اثرات تغییرشکل‌های برشی نیز منظور شده است.
- ۶- تحلیل فقط شامل پاسخ برخورد اول است که حاوی انرژی بیشتر و خطرناک است.



شکل ۱- نمای ورق کامپوزیتی چندلایه با ضربه‌زننده کروی در مرکز

با توجه به دستگاه محورهای مختصات و بر اساس تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی، تغییرمکان هر نقطه از ورق در راستای سه محور  $x$ ،  $y$ ،  $z$  به‌صورت رابطه (۱) بیان می‌شود [۱۹]:

$$\begin{aligned} u(x; y; z; t) &= u_0(x; y; t) + z \phi_x(x; y; t) \\ v(x; y; z; t) &= v_0(x; y; t) + z \phi_y(x; y; t) \\ w(x; y; z; t) &= w_0(x; y; t) \end{aligned} \quad (1)$$

روابط کرنش نیز در رابطه (۲) بیان می‌شود [۱۹]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \epsilon_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون به ترتیب زیر استخراج می‌شود [۱۹]:

$$\delta \int_0^T L dt = \delta \int_0^T (U - K) dt = 0 \quad (3)$$

که در آن  $U$ ،  $K$ ،  $L$  و  $\delta$  به ترتیب انرژی کرنشی، انرژی جنبشی، لاگرانژین و تغییرات است، در روابط (۴-۵) تعریف می‌گردند [۱۹]:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^a \int_0^b \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{zz} \epsilon_{zz} \right. \\ &\quad \left. + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} \right. \\ &\quad \left. + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dz \right\} dy dx \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \rho \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dz dy dx \end{aligned} \quad (5)$$

در رابطه (۴)،  $\sigma_{xx}$ ،  $\sigma_{yy}$  و  $\sigma_{zz}$  تنش‌های نرمال،  $\tau_{xy}$ ،  $\tau_{xz}$  و  $\tau_{yz}$  تنش‌های برشی،  $\epsilon_{xx}$ ،  $\epsilon_{yy}$  و  $\epsilon_{zz}$  کرنش‌های نرمال و  $\gamma_{xy}$ ،  $\gamma_{xz}$  و  $\gamma_{yz}$  کرنش‌های برشی هستند.

بدین ترتیب می‌توان معادلات اولر-لاگرانژ را که منتج به معادلات حرکت می‌شود، به‌صورت رابطه (۶) در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \end{aligned}$$

در معادله (۹)،  $k_{sh}$  ضریب تصحیح برشی است که مقدار آن برابر با  $\pi^2/12$  و  $A_{ij}; B_{ij}; D_{ij}$ ، به ترتیب ماتریس‌های سفتی محوری، خمشی- محوری و خمشی می‌باشند که از روابط زیر به دست می‌آیند [۱۷ و ۱۸]:

$$(A_{ij}; B_{ij}; D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^k(1; z; z^2) dz \quad (12)$$

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0(z)^i dz \quad (i = 0; 1; 2) \quad (13)$$

$\rho_0$  جرم حجمی هر لایه و  $\rho$  جرم حجمی کل ورق مرکب،  $I$  ممان اینرسی،  $h$  ضخامت ورق،  $(Q_{ij})_k$  ( $i; j = 1; 2; 6$ ) مؤلفه‌های سفتی کاهش‌یافته برای حالت تنش غشایی در صفحه ( $x$  و  $y$ )،  $(Q_{ij})_k$  ( $i; j = 4; 5$ ) مؤلفه‌های سفتی برشی عرضی کاهش‌یافته می‌باشند [۱۷ و ۱۹].

معادلات حرکت به صورت زیر نتیجه‌گیری می‌شوند:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) \\ & + A_{16} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) \\ & + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + B_{16} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\ & + A_{16} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ & + A_{26} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & + A_{66} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) \\ & = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{16} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) \\ & + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) \\ & + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + B_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) \\ & + A_{12} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ & + A_{22} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta w_0: & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \delta \phi_x: & \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \\ \delta \phi_y: & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (6) \end{aligned}$$

که در آن  $N_{xy}; N_{yy}; N_{xx}$  به ترتیب نیروهای محوری و برشی،  $M_{xy}; M_{yy}; M_{xx}$  گشتاورهای خمشی و پیچشی و  $Q_y; Q_x$  نیروهای برشی عرضی در جهات  $x$  و  $y$  می‌باشند. روابط تنش- کرنش، ممان و نیرو به دلیل استفاده از فرض تنش صفحه‌ای در تئوری برشی مرتبه اول به صورت زیر بیان می‌گردند [۶ و ۱۹]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K_{sh} \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

### ۳- روابط و معادلات ارتعاش آزاد ورق

برای محاسبه نیروی تماسی حاصل از برخورد ضربه‌زننده با ورق به‌عنوان تابع هدف، باید اولین فرکانس طبیعی ورق یا به‌عبارت‌دیگر کوچک‌ترین فرکانس طبیعی در نظر گرفته شود. به‌منظور تحلیل ارتعاش آزاد، مقدار نیروی  $q$  را در معادلات حرکت ورق (رابطه ۱۶)، صفر قرار داده و توابع مناسبی برای جابجایی ورق با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده اختیار کرد.

تابع جابجایی برای ورق‌های مستطیلی به‌صورت رابطه (۱۹) حدس زده می‌شود [۲۰ و ۱۹]:

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) \quad (19)$$

در رابطه (۱۹)،  $X_m$  و  $Y_n$  را می‌توان به‌صورت توابعی از چندجمله‌ای‌های جبری، چندجمله‌ای‌های ویژه و سری‌های فوریه تعریف کرد که شرایط مرزی هندسی مسأله را ارضاء می‌کنند.

$m$ ، تعداد نیم موج‌ها در جهت  $x$  و  $n$ ، تعداد نیم موج‌ها در جهت  $y$  می‌باشند. با توجه به رابطه تابع جابجایی (۱۹)، میدان جابجایی به‌صورت رابطه (۲۰) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn}(t) \frac{\partial}{\partial x} (X_m(x)) Y_n(y) \\ v(x,y,t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N V_{mn}(t) X_n(x) \left( \frac{\partial}{\partial y} Y_n(y) \right) \\ w(x,y,t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn}(t) X_m(x) Y_n(y) \\ \psi_x(x,y,t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn}(t) \frac{\partial}{\partial x} (X_m(x)) Y_n(y) \\ \psi_y(x,y,t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn}(t) X_m(x) \left( \frac{\partial}{\partial y} Y_n(y) \right) \end{aligned} \quad (20)$$

در آن‌ها ضرایب  $A_{mn}(t)$ ،  $B_{mn}(t)$  و  $W_{mn}(t)$  وابسته به زمان بوده که به‌صورت روابط (۲۱) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= A_{mn}^0 e^{i\omega t}, B_{mn} = B_{mn}^0 e^{i\omega t}, W_{mn} = W_{mn}^0 e^{i\omega t} \\ U_{mn} &= U_{mn}^0 e^{i\omega t}, V_{mn} = V_{mn}^0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (21)$$

$A_{mn}^0$ ،  $B_{mn}^0$  و  $W_{mn}^0$  ثوابت شکل مودهای طبیعی و  $\omega$  فرکانس طبیعی بوده که محاسبه می‌گردند.

$$+A_{26} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{26} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &K_{sh} A_{55} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + K_{sh} A_{45} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ &+ K_{sh} A_{45} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \\ &+ K_{sh} A_{44} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (16)$$

$$B_{11} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)$$

$$+ B_{16} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + D_{16} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right)$$

$$+ B_{12} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$+ B_{26} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2}$$

$$+ B_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$+ D_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) - K_{sh} A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right)$$

$$- K_{sh} A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (17)$$

$$B_{16} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{26} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)$$

$$+ B_{66} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)$$

$$+ D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + D_{66} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right)$$

$$+ B_{12} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$+ B_{22} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2}$$

$$+ B_{26} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$+ D_{26} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) - K_{sh} A_{45} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right)$$

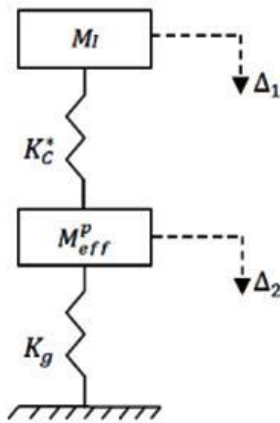
$$- K_{sh} A_{44} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) = I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn}^0 \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) \\ V_{mn}^0 X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} \\ W_{mn}^0 X_m(x) Y_n(y) \\ A_{mn}^0 \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) \\ B_{mn}^0 X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = \{0\} \quad (22)$$

تماس،  $K_c^*$  سفتی تماسی خطی شده و  $K_g$  سفتی معادل ورق می‌باشد.

پاسخ معادلات دیفرانسیل (۲۶) به صورت رابطه (۲۷) بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_1 \sin(\omega t + \phi) \\ \Delta_2 &= A_2 \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (27)$$



شکل ۲- یک مدل دو درجه آزادی جرم- فنر [۱۳، ۱۲، ۶]

جابه‌جایی ورق و ضربه‌زننده را می‌توان در لحظه زمانی  $t$  با توجه به جواب‌های عمومی معادلات (۲۶) در رابطه (۲۸) تعریف کرد:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = c_1 \vec{\varphi}^{(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + c_2 \vec{\varphi}^{(2)} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \quad (28)$$

در رابطه (۲۸)،  $\omega_1$  و  $\omega_2$  فرکانس‌های طبیعی،  $\vec{\varphi}^{(1)}$  و  $\vec{\varphi}^{(2)}$  شکل مودهای اول و دوم ورق می‌باشند. ضرایب مجهول  $C_1$  و  $C_2$  و  $\psi_1$  و  $\psi_2$  را با اعمال شرایط اولیه (۲۹) می‌توان به دست آورد:

$$\begin{cases} \Delta_1(t=0) = 0 \\ \Delta_2(t=0) = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \dot{\Delta}_1(t=0) = v_0 \\ \dot{\Delta}_2(t=0) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

$L_{ij}$  عملگرهای دیفرانسیلی هستند. برای حل معادلات دیفرانسیل ورق مرکب چندلایه، می‌توان از روش باقیمانده وزنی به شیوه توابع وزنی گالرکین به صورت رابطه (۲۳) استفاده کرد [۲۰ و ۱۹]:

$$\int_0^a \int_0^b ([L_{ij}] \{\phi\} e^{i\omega t}) \{\psi\} dy dx = \{0\} \quad (23)$$

در رابطه (۲۳) عبارت  $\{\phi\}$  بردار شکل مودهای طبیعی و  $\{\psi\}$  بردار توابع وزنی بوده که به صورت فرمول (۲۴) تعریف می‌گردند:

$$\phi = \begin{Bmatrix} U_{mn}^0 \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) \\ V_{mn}^0 X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} \\ W_{mn}^0 X_m(x) Y_n(y) \\ A_{mn}^0 \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(y) \\ B_{mn}^0 X_m(x) \frac{\partial Y_n(y)}{\partial y} \end{Bmatrix} \cdot \psi = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X_p(x)}{\partial x} Y_q(y) \\ X_p(x) \frac{\partial Y_q(y)}{\partial y} \\ X_p(x) Y_q(y) \\ \frac{\partial X_p(x)}{\partial x} Y_q(y) \\ X_p(x) \frac{\partial Y_q(y)}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (۲۴) در (۲۳) و انتگرال‌گیری از آن، معادله مقادیر ویژه به فرم رابطه (۲۵) حاصل می‌شود:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{d\} = \{0\} \quad (25)$$

$K_{ij}$  ضرایب ماتریس سفتی،  $M_{ij}$  ضرایب ماتریس جرمی و  $\{d\}$  بردار ثابت شکل مود هستند. بدین ترتیب فرکانس‌های طبیعی  $\omega$  قابل محاسبه خواهد بود.

#### ۴- روابط و معادلات ضربه اعمالی

برای تعیین نیروی ضربه‌ای اعمالی بر ورق مرکب چندلایه از یک سیستم دو درجه آزادی جرم- فنر [۱۳، ۱۲، ۶] استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} m_I \ddot{\Delta}_1 + K_c^* (\Delta_1 - \Delta_2) &= 0 \\ M_{eff}^P \ddot{\Delta}_2 + K_c^* (\Delta_2 - \Delta_1) + K_g \Delta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

در رابطه (۲۶)،  $m_I$  جرم ضربه‌زننده،  $M_{eff}^P$  جرم مؤثر ورق،  $\Delta_1$  جابه‌جایی ضربه‌زننده و  $\Delta_2$  جابه‌جایی ورق در نقطه

$$F(t) = \frac{K_c^* V}{(\psi_2 - \psi_1)} \left[ \frac{1 - \psi_2}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) - \frac{1 - \psi_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] \quad (31)$$

$$\psi_1 = \frac{K_c^*}{K_c^* - m_l \omega_1^2} \quad \text{و} \quad \psi_2 = \frac{K_c^*}{K_c^* - m_l \omega_2^2} \quad (32)$$

$$F(t) = K_c^* (\Delta_1 - \Delta_2) \quad (30)$$

در نتیجه نیروی تماسی  $F(t)$ ،  $\omega_1$ ،  $\omega_2$ ،  $\psi_1$ ،  $\psi_2$  و  $K_c^*$  از روابط (۳۱-۳۵) به دست می‌آیند [۱۲ و ۱۳]:

$$\omega_1 = \sqrt{\left( \frac{1}{2} \left( \frac{(N+1)K_c^* + K_g}{Nm_l} - \sqrt{\left( \frac{(N+1)K_c^* + K_g}{Nm_l} \right)^2 - 4 \frac{K_c^* K_g}{Nm_l}} \right) \right)} \quad (33)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\left( \frac{1}{2} \left( \frac{(N+1)K_c^* + K_g}{Nm_l} + \sqrt{\left( \frac{(N+1)K_c^* + K_g}{Nm_l} \right)^2 - 4 \frac{K_c^* K_g}{Nm_l}} \right) \right)} \quad (34)$$

$$K_c^* = \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} \left( \frac{N}{N+1} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} (V)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} (K_c)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} (m_l)^{\frac{n-1}{n+1}} \quad (35)$$

دوسرگیردار دوسر لولا، دوسر لولا یکسر گیردار یکسر آزاد و دوسرگیردار دوسر آزاد<sup>۳</sup> می‌باشند. برای فرموله کردن تابع جابه‌جایی ورق در دو جهت  $x$  و  $y$  طبق رابطه (۱۹)، باید توابعی بکار برد که شرایط هندسی ورق مستطیلی را ارضاء کند. این توابع در بیشتر موارد از سری‌های فوریه گرفته می‌شوند. در این تحقیق با استفاده از مراجع [۱۹ و ۲۰]،  $X_m$  و  $Y_n$  (جابه‌جایی بر اساس نیم‌موج‌ها در جهت  $x$  و  $y$ ) را می‌توان به صورت توابعی از چند جمله‌ای‌های جبری جدول ۱ در نظر گرفت.

در رابطه (۳۵)،  $N$  نسبت جرم مؤثر ورق کامپوزیتی به جرم ضربه‌زننده بوده که در اینجا  $1/4$  (یک‌چهارم) در نظر گرفته می‌شود [۱۲ و ۱۳]:

$$K_g = M_p \omega_{11}^2, \quad K_c = \frac{4}{3} ER^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{E} = \frac{1-v_2^2}{E_2} + \frac{1-v_1^2}{E_1} \quad (37)$$

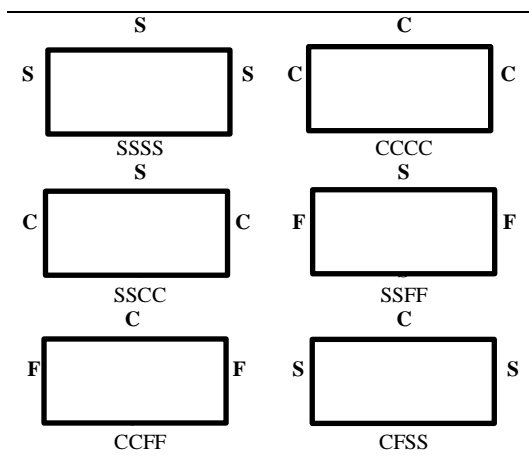
$R$  شعاع ضربه‌زننده،  $v$  ضریب پواسن و  $E$  مدول الاستیسیته بوده و اندیس‌های ۱ و ۲ به ترتیب، مربوط به ضربه‌زننده و ورق هدف است. در رابطه (۳۷) برای ورق کامپوزیت چندلایه، مقادیر  $v_2 = v_{12}$  و  $E_2 = E_{22}$  در نظر گرفته می‌شوند.  $\omega_{11}$  فرکانس طبیعی اولین مود ارتعاشی ورق است،  $M_p$  جرم کل ورق بوده که با رابطه (۳۷) محاسبه می‌گردد:

$$M_i = \int_{V_i} \rho_i(Z) dV_i = ab \int_{\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho_i(Z) dz_i \quad \text{و} \quad i = t \quad (37)$$

$\rho$  و  $t$  به ترتیب نشان دهنده جرم حجمی ماده سازنده ورق و تعداد لایه‌ها است.

### ۵- شرایط مرزی ورق کامپوزیتی

برای ورق چندلایه کامپوزیتی مورد مطالعه، از شش نوع شرط مرزی نمایش داده شده در شکل ۳ استفاده می‌شود. شرایط مرزی به ترتیب تمام گیردار<sup>۱</sup>، تمام لولا<sup>۲</sup>، دوسر لولا دوسر آزاد،



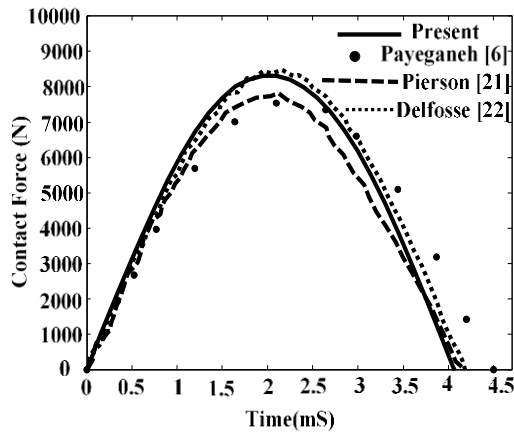
شکل ۳- شرایط مرزی ورق چندلایه کامپوزیتی

<sup>3</sup> F: Free

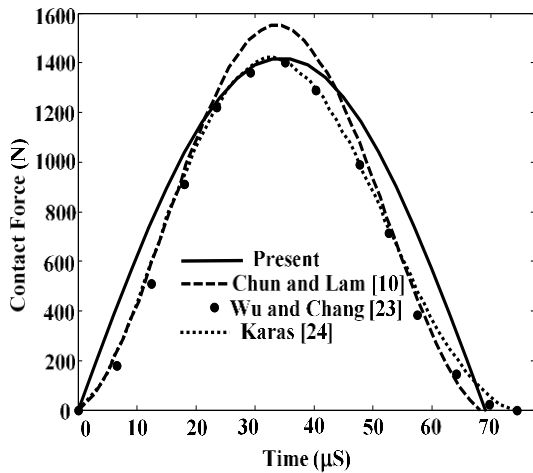
<sup>1</sup> CCCC: Fully Clamped

<sup>2</sup> SSSS: Simply Supported

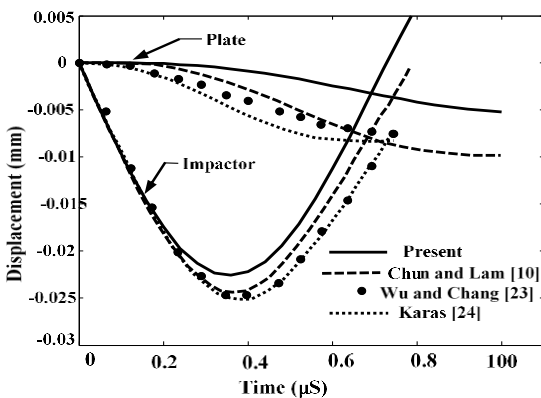




شکل ۴- مقایسه نتایج نیروی تماسی حل شده حاضر با منابع [۲۱، ۲۲ و ۲۳]



شکل ۵- مقایسه نیروی تماسی بین ورق و ضربه‌زننده در نقطه تماس



شکل ۶- مقایسه جابه‌جایی ورق و ضربه‌زننده در نقطه تماس

جدول ۱- چندجمله‌ای‌های جبری مورد استفاده در تابع جابه‌جایی بر اساس شرایط مرزی [۱۹ و ۲۰]

شرایط مرزی	چندجمله‌ای‌های جبری
SSSS	$X_m(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^m - \left(\frac{x}{a}\right)^{m+1}$ $Y_n(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^n - \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1}$
CCCC	$X_m(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{m+1} - 2\left(\frac{x}{a}\right)^{m+2} + \left(\frac{x}{a}\right)^{m+3}$ $Y_n(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{y}{b}\right)^{n+2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n+3}$
CCFF	$X_m(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{m+1} - 2\left(\frac{x}{a}\right)^{m+2} + \left(\frac{x}{a}\right)^{m+3}$ $Y_n(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$
SSCF	$X_m(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^m - \left(\frac{x}{a}\right)^{m+1}$ $Y_n(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{n+1}$

جدول ۲- مشخصات ورق کامپوزیتی و ضربه‌زننده [۲۱]

CFRP Plates, T800/TH/3900-2	
Size: 127×76.2×4.65 Millimeter	
$E_{11}=129$ GPa, $E_{22}=7.5$ GPa	مشخصات ورق کامپوزیتی
$G_{12}=G_{13}=3.5$ GPa, $G_{23}=2.6$ GPa,	
$\nu_{12}=0.33$ , $\rho=1540$ kg/m <sup>3</sup>	
Steel	
R=12.7 mm کروی, $\rho=7971$ kg/m <sup>3</sup>	مشخصات ضربه‌زننده
$m_i=6.15$ kg, $v_0=1.76$ m/s	
$E=200$ GPa, $\nu=0.3$	

در بررسی دیگری ورق فولادی مربعی با ضربه‌زننده در مرکز و همجنس ورق با شرط مرزی تمام لولا که خصوصیات فیزیکی و مکانیکی آن در جدول ۳ ذکر شده است، انتخاب و با نتایج حاصل از روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی [۱۰]، تحلیل المان محدود و حل عددی روابط استخراج شده [۲۳] و تحلیلی کاراس [۲۴]، که شامل تاریخچه نیروی تماسی، جابه‌جایی ورق و ضربه‌زننده در نقطه تماس می‌باشند، مورد مقایسه قرار گرفت (شکل‌های ۵ و ۶).

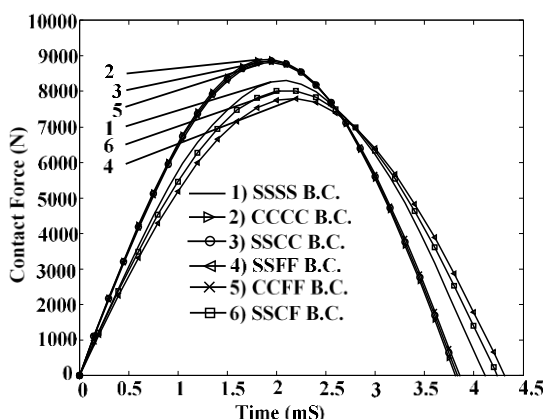
جدول ۳- مشخصات ورق کامپوزیتی و ضربه‌زننده [۱۰]

Steel	
Size of Plate: 0.2×0.2×0.008 Meter	مشخصات
$E=206$ GPa, $G=79.85$ GPa, $\nu=0.28$	ورق کامپوزیتی و
R=0.01 m کروی, $\rho=7833$ kg/m <sup>3</sup>	ضربه‌زننده
$m_i=0.0328$ kg, $v_0=1$ m/s	

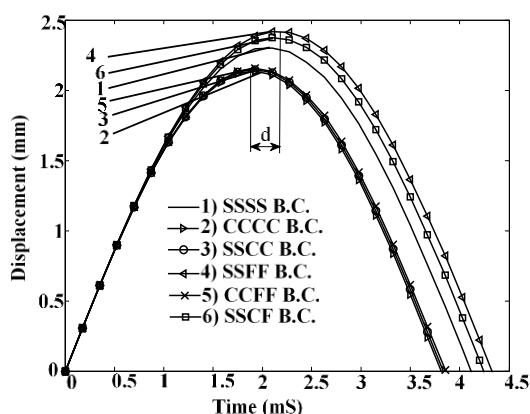
میلی‌متر بوده و به عبارت دیگر، اختلاف بین بیشترین و کمترین میزان جابه‌جایی ۱۲٪ است.

#### ۶-۲- تأثیر جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت

در این بخش تأثیر اختلاف جرم‌ها و سرعت‌های متفاوت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت ۹/۵۲۵ ژول که مقادیر آن در جدول ۴ انتخاب گردیده، روی نیروی تماسی و جابه‌جایی ورق چندلایه کامپوزیتی برای شرط مرزی تمام لولا (ساده) شکل‌های ۹ و ۱۰، شرط مرزی تمام گیردار شکل‌های ۱۱ و ۱۲ و شرایط مرزی اختیاری و متفاوت شکل‌های ۱۳ و ۱۴ مطالعه شده است.



شکل ۷- تأثیر شرایط مرزی روی نیروی تماسی ورق چندلایه کامپوزیتی



شکل ۸- تأثیر شرایط مرزی روی جابه‌جایی ورق چندلایه کامپوزیتی

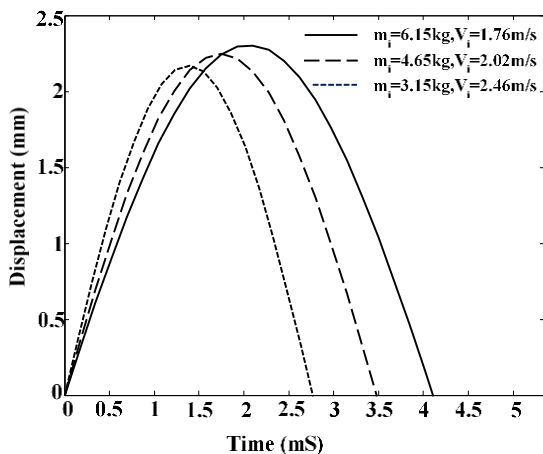
#### ۶-۱- تأثیر شرایط مرزی

شکل ۷ و ۸ به ترتیب تأثیر شرایط مرزی بیان شده در شکل ۳ و جدول ۱ را روی نیروی تماسی و جابه‌جایی مرکز ورق چندلایه کامپوزیتی نشان می‌دهد. هرچه آزادی عمل شرط تکیه‌گاهی محدودتر شود، نیروی تماسی نیز افزایش و زمان تأثیر آن کاهش می‌یابد. این بدان معنی است که گیردار کردن و مهار نمودن تکیه‌گاه، حرکت و شیب را در سه جهت صفر نموده، مانع از آزادی تغییر مکان می‌گردد. شرط مرزی گیردار سفت‌تر از ساده (لولا) و ساده سفت‌تر از آزاد است.

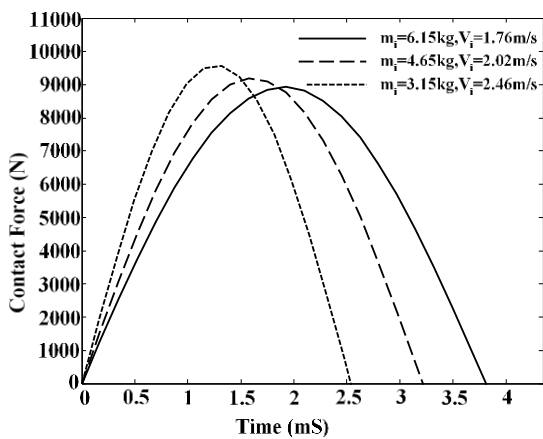
شکل ۷ بیان می‌کند که شرط مرزی تمام گیردار (نمودار ۲)، دارای بالاترین مقدار نیروی تماسی و بعد از آن به ترتیب شرط دوسرگیردار دوسر لولا (نمودار ۳)، دوسرگیردار دوسر آزاد (نمودار ۵)، تمام لولا (ساده) (نمودار ۱)، دوسر لولا یکسر گیردار یکسر آزاد (نمودار ۶) و در نهایت شرط مرزی دوسر لولا دوسر آزاد (نمودار ۴)، کمترین مقدار نیروی تماسی و بالاترین زمان تأثیر نیرو را دارد، شماره نمودارهای مربوطه روی شکل مشخص گردیده است. این اختلاف به دلیل افزایش مقادیر سفتی خمشی، محوری و خمشی-محوری و به دنبال آن افزایش فرکانس طبیعی ورق و در نتیجه بالا رفتن نیروی تماسی در ورق‌های با شرایط مرزی گیردار یعنی سفت شده نسبت به سایر شرایط مرزی است. از بعد کمی نیز قابل بررسی است. برای شرط مرزی تمام گیردار مقدار نیروی تماسی محاسبه شده با اطلاعات جدول ۲، ۸۹۲۱ نیوتن و برای شرط دوسر لولا دوسر آزاد، ۷۸۳۷ نیوتن است که در نتیجه اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار نیروی تماسی ۱۲/۱۵٪ می‌شود.

عکس این حالت برای جابه‌جایی ورق اتفاق می‌افتد. در شکل ۸ هر چه شرایط تکیه‌گاهی به دلیل مهار کامل ورق سفت‌تر باشد، جابه‌جایی مرکز ورق کمتر بوده تا جایی که در شرط مرزی تمام گیردار، کمترین مقدار جابه‌جایی و کوتاه‌ترین زمان تأثیر نیرو مشاهده می‌شود. در حالی که برای شرط تکیه‌گاهی دوسر لولا دوسر آزاد، بیشترین مقدار جابه‌جایی و بالاترین زمان تأثیر نیرو وجود دارد. از لحاظ مقداری، میزان جابه‌جایی زیر نقطه تماس برای شرط مرزی تمام گیردار ۲/۱۳ میلی‌متر و برای شرط مرزی دوسر لولا دوسر آزاد ۲/۴۲

در جدول ۵ و شکل‌های ۱۳ و ۱۴ تأثیرات شرایط اعمال ضربه برای سه حالت تعریف شده در جدول ۴ و شرایط مرزی انتخاب شده در شکل ۳ و جدول ۱ روی نیروی تماسی و جابه‌جایی ورق در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت (۹/۵۲۵ ژول) بررسی گردید. در جدول ۵، بیشترین نیروی تماسی و بالاترین جابه‌جایی مرکز ورق (زیر نقطه تماس ضربه‌زننده با هدف) با ترتیب کاهش مقادیر بیان شده است.



شکل ۱۰- تأثیر جرم و سرعت متفاوت ضربه‌زننده در مقدار انرژی جنبشی ثابت (۹/۵۲۵ ژول) روی جابه‌جایی ورق چندلایه کامپوزیتی با شرط مرزی تمام ساده

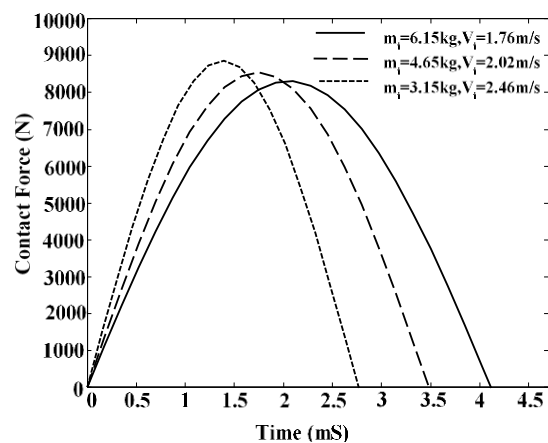


شکل ۱۱- تأثیر جرم و سرعت متفاوت ضربه‌زننده در مقدار انرژی جنبشی ثابت (۹/۵۲۵ ژول) روی نیروی تماسی ورق چندلایه کامپوزیتی با شرط مرزی تمام گیردار

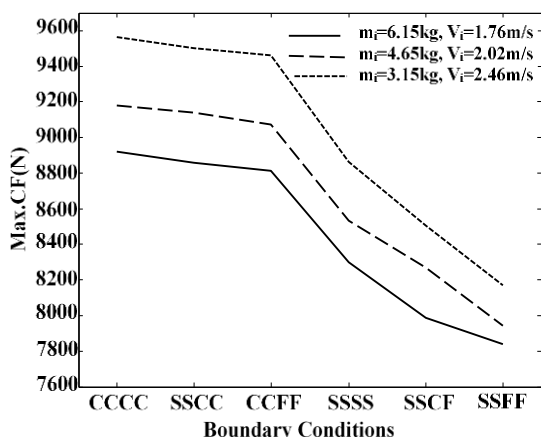
جدول ۴- جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت (۹/۵۲۵ ژول)

شرایط اعمال ضربه	جرم ضربه‌زننده (kg)	سرعت ضربه‌زننده ( $ms^{-1}$ )
۱	۶/۱۵	۱/۷۶
۲	۴/۶۵	۲/۰۲۴
۳	۳/۱۵	۲/۴۶

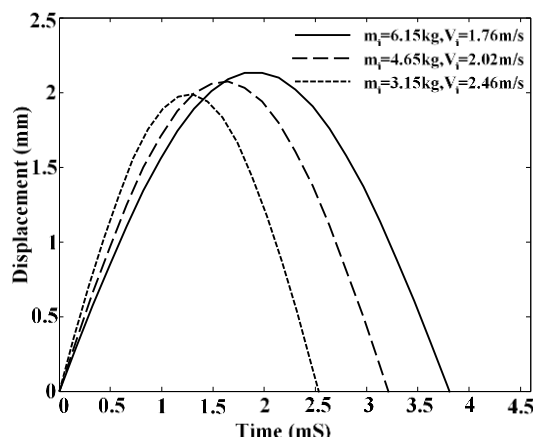
در شکل‌های ۹ و ۱۱ با کاهش جرم و افزایش سرعت ضربه‌زننده برای دو شرط مرزی تمام لولا و تمام گیردار، نیروی تماسی افزایش می‌یابد و این به دلیل توان دوم سرعت در رابطه انرژی جنبشی ضربه‌زننده در لحظه برخورد است؛ لیکن در شکل‌های ۱۰ و ۱۲ با افزایش جرم و کاهش سرعت ضربه‌زننده، جابه‌جایی مرکز ورق زیاد خواهد شد؛ این در حالی است که زمان تأثیر نیرو در هر دو حالت کاهش یافته و در زمان کوتاه‌تری به صفر می‌رسد. با توجه به مقادیر انتخاب شده برای جرم و سرعت ضربه‌زننده در جدول ۴ می‌توان دریافت که در شرایط اعمال ضربه و بررسی نیروی تماسی، سرعت نقش مهم‌تری نسبت به جرم داشته، اما برای جابه‌جایی مرکز ورق، جرم بزرگ‌تر تأثیر بیشتری نسبت به سرعت دارد.



شکل ۹- تأثیر جرم و سرعت متفاوت ضربه‌زننده در مقدار انرژی جنبشی ثابت (۹/۵۲۵ ژول) روی نیروی تماسی ورق چندلایه کامپوزیتی با شرط مرزی تمام ساده



شکل ۱۳- تأثیر جرم و سرعت متفاوت ضربه‌زننده در مقدار انرژی جنبشی ثابت (۹/۵۲۵ ژول) روی نیروی تماسی ورق چندلایه کامپوزیتی با شرایط مرزی اختیاری



شکل ۱۴- تأثیر جرم و سرعت متفاوت ضربه‌زننده در مقدار انرژی جنبشی ثابت (۹/۵۲۵ ژول) روی جابه‌جایی ورق چندلایه کامپوزیتی با شرط مرزی تمام گیردار

جدول ۵- شرایط اعمال ضربه با توجه به شرط مرزی اعمالی روی نیروی تماسی و جابه‌جایی ورق چندلایه کامپوزیتی در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت (۹/۵۲۵ ژول)

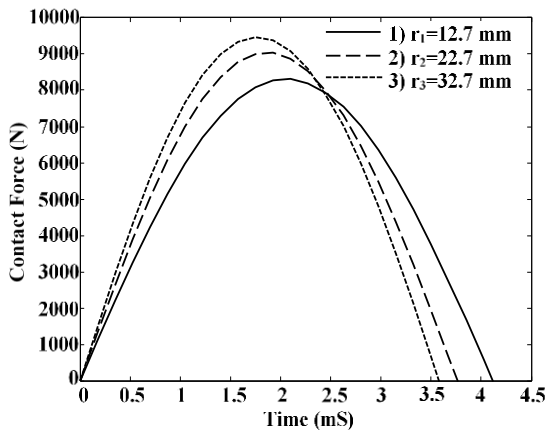
شرایط اعمال ضربه	شرایط مرزی	نیروی تماسی (نیوتن)	جابه‌جایی مرکز ورق (میلی‌متر)
۱	CCCC	۸۹۲۱	۲/۱۳
	SSCC	۸۸۵۸	۲/۱۵
	CCFF	۸۸۱۵	۲/۲۱
	SSSS	۸۳۰۱	۲/۳
	SSCF	۷۹۸۸	۲/۳۸
	SSFF	۷۸۳۷	۲/۴۲
۲	CCCC	۹۱۷۸	۲/۰۷
	SSCC	۹۱۳۷	۲/۱
	CCFF	۹۰۷۲	۲/۱۶
	SSSS	۸۵۳۲	۲/۲۵
	SSCF	۸۲۶۶	۲/۳۲
	SSFF	۷۹۴۲	۲/۳۸
۳	CCCC	۹۵۶۳	۱/۹
	SSCC	۹۵۰۱	۱/۹۵
	CCFF	۹۴۶۰	۲
	SSSS	۸۸۶۲	۲/۱۷
	SSCF	۸۵۰۶	۲/۲۴
	SSFF	۸۱۶۹	۲/۳۱

نتایج تأیید می‌کند که بیشترین مقدار نیروی تماسی و کمترین میزان جابه‌جایی برای ورق چند لایه مرکب، مربوط به شرط مرزی تمام گیردار و کمترین نیروی تماسی و بیشترین جابه‌جایی مربوط به شرط مرزی دوسر لولا دوسر آزاد است.

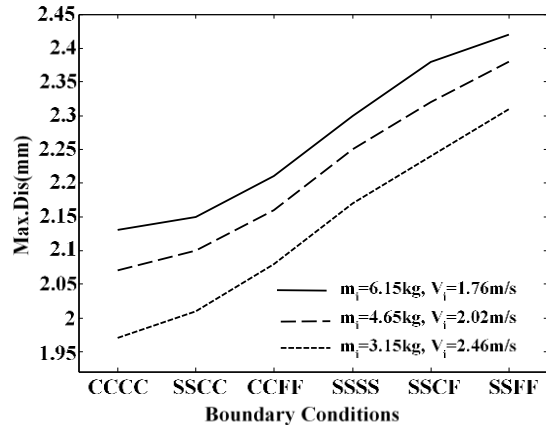
با توجه به اینکه سرعت ضربه‌زننده تأثیر بیشتری نسبت به جرم آن در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت در تعیین تاریخچه نیروی تماسی دارد، اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار نیروی تماسی در شرایط ۱ الی ۳ به ترتیب، ۱۲/۱۵٪، ۱۳/۴۷٪ و ۱۴/۲۹٪ بوده و نیز به علت اینکه جرم ضربه‌زننده عامل مؤثرتری نسبت به سرعت برای جابه‌جایی زیر نقطه تماس در هدف (ورق چندلایه کامپوزیتی) است، این اختلاف به ترتیب ۱۲٪، ۱۳/۰۲٪ و ۱۷/۷۵٪ است.

### ۳-۶- تأثیر شعاع ضربه‌زننده و تنش اعمالی

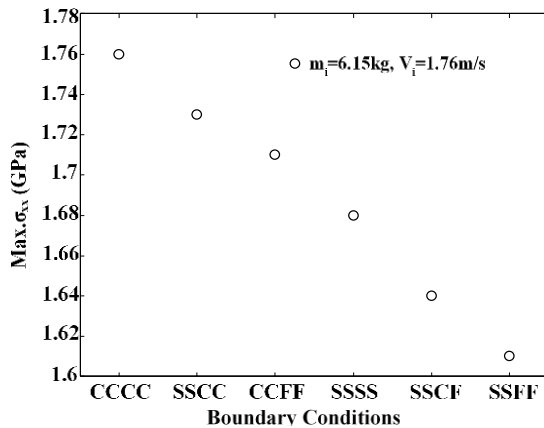
در شکل ۱۵، تأثیر افزایش شعاع ضربه‌زننده روی نیروی تماسی ورق چندلایه کامپوزیتی بررسی شده است. همانطوری که در نمودارها مشاهده می‌شود، با افزایش شعاع ضربه‌زننده، حجم و در نتیجه جرم آن بالا رفته، میزان نیروی تماسی بر ورق زیاد و زمان تأثیر نیرو کاهش می‌یابد. برای ضربه‌زننده با شعاع‌های ۱۲/۷ میلی‌متر، ۲۲/۷ میلی‌متر و ۳۲/۷ میلی‌متر، به ترتیب نیروی تماسی ۸۳۰۱ نیوتن، ۹۰۲۶ نیوتن و ۹۴۶۶ نیوتن به دست آمده و اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار ۱۲/۳٪ است.



شکل ۱۵- تأثیر افزایش شعاع ضربه‌زننده روی نیروی تماسی ورق چندلایه کامپوزیتی



شکل ۱۴- تأثیر جرم و سرعت متفاوت ضربه‌زننده در مقدار انرژی جنبشی ثابت (۹/۵۲۵ ژول) روی جابه‌جایی ورق چندلایه کامپوزیتی با شرایط مرزی اختیاری



شکل ۱۶- تنش در ورق چندلایه کامپوزیتی بر اساس شرایط مرزی

شکل ۱۶ مقدار تنش محوری اعمالی بر اثر ضربه با سرعت پایین بر ورق چندلایه کامپوزیتی بر اساس شرایط مرزی اختیاری نمایش داده شده است. از آنجایی که میزان تنش وارده بر ورق با نیروی تماسی حاصل از برخورد عرضی متناسب است، بیشترین اندازه تنش مربوط به بالاترین مقدار نیروی برخورد یعنی شرط مرزی تمام گیردار بوده و کمترین مقدار تنش برای پایین‌ترین میزان نیروی تماسی در شرط مرزی دوسر لولا دوسر آزاد است.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این تحقیق پاسخ ورق چندلایه کامپوزیتی با شرایط مرزی مختلف و دلخواه تحت ضربه با جرم بزرگ و سرعت پایین به کمک روش تابع وزنی گالرکین، استفاده از چندجمله‌ای‌های جبری و مدل جرم و فنر به‌دست‌آمده است. سپس تأثیر شرایط مرزی، جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت و شعاع ضربه‌زننده روی نیروی تماسی و خیز ورق مرکب مطالعه و نتایج زیر به‌دست آمد:

۱- ارائه یک روش قدرتمند تحلیلی برای شرایط مرزی مختلف است که می‌تواند در مباحث طراحی بهینه مورد استفاده قرار گیرد. نتایج برای شرایط مرزی مختلف از نظر طراحی در مقابل ضربه نیز بسیار ارزشمند است. مثلاً در شرایط مرزی دو سر لولا و دو لبه مقابل آزاد، زمان ضربه بیشتر و نیروی ضربه کمتر است. این موضوع

از نظر طراحی و واماندگی می‌تواند دارای بازه امنیت بیشتری باشد.

۲- شرط مرزی تمام گیردار، دارای بالاترین مقدار نیروی تماسی و کمترین میزان جابه‌جایی مرکز ورق است. در حالی که شرط تکیه‌گاهی دوسر لولا دوسر آزاد، کمترین مقدار نیروی تماسی و بالاترین میزان جابه‌جایی را دارا است. اختلاف بین دو شرط مرزی بیان شده بالا برای تاریخچه نیروی تماسی ۱۲/۱۵٪ و برای جابه‌جایی مرکز ورق ۱۲٪ محاسبه شد. دلیل این تغییرات، فرکانس‌های طبیعی متفاوت به‌دست‌آمده برای شرایط مرزی اختیار شده بوده و در محاسبات مربوط به نیروی تماسی و جابه‌جایی ورق کامپوزیتی تأثیر مستقیم و بسزایی دارد.

- [9] Her SC, Liang YC (2004) The finite element analysis of composite laminates and shell structures subjected to low velocity impact. *Compos Struct* 66: 277-285.
- [10] Chun L, and Lam KY (1998) Dynamic response of fully-clamped laminated composite plates subjected low-velocity impact of a Mass method. *Int J Solids Struct* 35(11): 963-979.
- [11] Aslan Z, Karakuzu R, Okutan B (2003) The response of laminated composite plates under low-velocity impact loading. *Compos Struct* (59)1: 119-127.
- [12] Paknejad R, and Ashenai Ghasemi F, Malekzadeh Fard K (2014) Response of fully-clamped composite laminated plate subjected to low-velocity impact using Galerkin method. *Modares Mechanical Engineering* 14(1): 1-6. (in Persian)
- [13] Khalili SMR, Malekzadeh Fard K, Veysi Gorgabad A (2013) Low velocity transverse impact response of functionally graded plates with temperature dependent properties. *Compos Struct* 96: 64-74.
- [14] Zarei H, and Fallah M, Minak G, Bisadi H, Daneshmehr AR (2016) Low velocity impact analysis of fiber metal laminates (FMLs) in thermal environments with various boundary conditions. *Compos Struct* 149: 170-183.
- [15] Malekzadeh P, Dehbozorgi M (2016) Low velocity impact analysis of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite skew plates. *Compos Struct* 140: 728-748.
- [16] Kiani Y, Sadighi M, Jedari Salami S, Eslami MR (2013) Low velocity impact response of thick FGM beams with general boundary conditions in thermal field. *Compos Struct* 104: 293-303.
- [17] Mindlin RD (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J Appl Mech Trans ASME* 18: 31-38.
- [18] Withney JM, Pagano NJ (1970) Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *J Appl Mech Trans ASME* 37(4): 1031-1036.
- [19] Reddy JN (2004) *Mechanics of laminated composite plates and shells*. 2nd edn. United States of America, CRC Press.
- [20] Reddy JN (2007) *Theory and analysis of elastic plate and shells*. Second edn. Taylor & Francis.
- [21] Pierson MO, Vaziri R (1996) Analytical solution for low-velocity impact response of composite plates. *AAIA J* 34(8): 1633-1640.
- [22] Delfosse D, Vaziri R, Pierson MO, Poursartip A (1993) Analysis of the non-penetrating impact behavior of CFRP laminates. In: *Proceeding of the 9th International Conference on Composite Materials* (Madrid, Spain), Cambridge, England, UK: Woodhead Publishing 5: 366-373.
- ۳- در اثر تغییرات سرعت و جرم ضربه‌زننده برای یک مقدار انرژی جنبشی ثابت، سرعت ضربه‌زننده در میزان نیروی تماسی اعمالی بر ورق به دلیل تأثیر توان دوم سرعت در انرژی جنبشی، اهمیت بیشتری داشته، در حالی که جرم ضربه‌زننده در جابه‌جایی زیر نقطه تماس ورق ارجحیت دارد. این افزایش سرعت از ۱/۷۶ به ۲/۴۶ متر بر ثانیه و کاهش جرم از ۶/۱۵ به ۳/۱۵ کیلوگرم اختلاف نیروی تماسی را از ۱۲/۱۵٪ به ۱۴/۲۹٪ و جابه‌جایی زیر نقطه تماس را از ۱۲٪ به ۱۷/۷۵٪ تغییر می‌دهد.
- ۴- هرچه میزان شعاع ضربه‌زننده بیشتر باشد، به دلیل افزایش حجم و جرم گوی کروی به‌عنوان برخوردکننده، مقدار نیروی تماسی اعمال‌شده بر ورق افزایش می‌یابد که در این تحقیق، بیشترین و کمترین میزان نیروی تماسی اختلاف ۱۲/۳٪ را در پی دارد.
- ۵- تنش اعمالی بر ورق که متناسب با نیروی ضربه اعمالی است، برای شرط مرزی تمام‌گیردار بیشترین مقدار و برای شرط دوسر لولا دوسر آزاد کمترین مقدار را داراست.

#### ۸- مراجع

- [1] Abrate S (1991) Impact on laminated composites. *Appl Mech Rev* 44(4): 155-190.
- [2] Abrate S (1994) Impact on laminated composites: recent advance. *Appl Mech Rev* 47(11): 517-544.
- [3] Abrate S (2001) Modeling of impacts on composite structures. *Compos Struct* 51(2): 129-138.
- [4] Wang Z, and Xu J, Qiao P (2014) Nonlinear low-velocity impact analysis of temperature-dependent nanotube-reinforced composite plates. *Compos Struct* 108: 423-434.
- [5] Yang M, Qiao P (2005) Higher-order impact modeling of sandwich structures with flexible core. *Int J Solids Struct* 42: 5460-5490.
- [6] Payeganeh GH, Ashenai Ghasemi F, Malekzadeh K (2010) Dynamic response of fiber-metal laminates (FMLs) subjected to low-velocity impact. *Thin-Walled Struct* 48(1): 62-70.
- [7] Belingardi G, Vadori R (2003) Influence of the laminate thickness in low velocity impact behavior of composite material plate. *Compos Struct* 61: 27-38.
- [8] Abdullah MR, Cantwell WJ (2006) The impact resistance of polypropylene-based fibre-metal laminates *Compos Sci Technol* 66: 1682-1693.

[24] Karas K (1939) Platten unter seitlichem Stoss. Ingenieur Archiv 10(4): 237-250.

[23] Wu His-Yung T, and Chang Fu-Kuo (1989) Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact. Compu Struct 31(3): 453-466.