



بررسی رفتار ارتعاشی سیستم روتور-یاتاقان پیوسته تحت عیوب مختلف نابالانسی

روح‌اله نوروزی^۱، منصور رفیعیان^{۲*} و حسین دلایلی^۳

^۱ کارشناسی ارشد، دانشگاه یزد، دانشکده مهندسی مکانیک

^۲ دانشیار، دانشگاه یزد، دانشکده مهندسی مکانیک

^۳ استادیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، دانشکده مهندسی مکانیک

طرح پژوهشی، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۸/۱۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۱۰/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۶/۲۹

چکیده

یک سیستم شامل روتور نرم، تعدادی یاتاقان و چند جرم نابالانس که هر یک دارای موقعیت طولی، زاویه فاز و شعاع خاصی است، مدل می‌شوند تا به کمک آن‌ها امکان بررسی عملکرد انواع متعارف نابالانسی میسر گردد که در مراجع به صورت تجربی به رفتار آنها اشاره شده است. در این تحقیق، اثر مکان قرارگیری دیسک‌ها و همچنین اثر اختلاف فاز جرم‌های نابالانس بر دامنه پاسخ برای یک سیستم روتور-یاتاقان، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. بدین منظور، پس از معرفی یک مدل برای روتور، عبارت‌های انرژی جنبشی و پتانسیل آن طبق تئوری رایلی تهیه و ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی با استفاده از روش مودهای فرضی استخراج می‌گردند. آنگاه معادلات حاصله با روش عددی حل می‌شوند. سپس با حل مثال‌های مختلف، ترکیبات مختلفی از تعداد دیسک، جرم نابالانس و فاز آن‌ها، مورد بررسی قرار می‌گیرد. مثال‌ها نشان می‌دهند که مدل تهیه شده در این تحقیق، به خوبی می‌تواند انواع متعارف نابالانسی را مدل کند و رفتار روتور را در هر حالت پیش‌بینی نماید. همچنین نتایج نشان می‌دهند که اختلاف فاز بین نابالانسی‌ها، اثر مهمی بر شکل ارتعاش نقاط مختلف شافت دارد، در حالی که تعداد دیسک و مقدار نابالانسی، بیشتر روی دامنه ارتعاش اثر دارد.

کلمات کلیدی: روتور نرم؛ نابالانسی؛ تحلیل ارتعاشی؛ زاویه فاز.

Vibration Analysis of Continuous Rotor-Bearing System under Various Defects of Unbalances

R. Norouzi¹, M. Rafeeyan^{2,*}, H. Dalayeli³

¹ Master. Graduate, Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

² Assoc. Prof., Mech. Eng., Yazd Univ., Yazd, Iran.

³ Assis. Prof., Mech. Eng., Malek-Ashtar Univ., Esfahan, Iran.

Abstract

A system including a flexible rotor, a number of bearings and several mass unbalances whose axial positions, phase angles and radius are arbitrary is modeled in order to study the performance of all common unbalances. In this study, the effect of this position and phase angle of unbalances on the rotor-bearing system is synthesized. For this, a rotor model with arbitrary condition is introduced at first. Then, based on Riley theory, potential and kinetic energy terms are written and stiffness, gyroscopic, damping and mass matrices are derived using assumed mode method. Next, these governing equations are solved numerically. Some examples with various combinations of disc numbers, unbalances and their phase are synthesized. The examples verify the model and its proposed technique of solution. The results show the accuracy of modeling various kind of unbalances and the ability of this model to predicting the vibration behavior of the rotor in a complex combination of disc number and unbalances. The results also show the phase angle of the unbalances affect the vibration pattern while disc numbers and mass of unbalances affect on its amplitude.

Keywords: Flexible Rotor; Unbalance; Phase Angle; Vibration Analysis.

۱- مقدمه

نابالانسی جرمی رایج‌ترین عامل ارتعاشات در ماشین دوار است. نابالانسی روتور، شرایطی است که توزیع نابرابر جرمی در جهت شعاعی و در هر موقعیت محوری سیستم روتور به وجود می‌آید، بنابراین در شرایط نابالانسی، خط مرکز جرم روتور بر محور دوران منطبق نیست [۱]. بنابر این تعریف، نیروی نابالانسی می‌تواند در هر نقطه‌ای از محور شافت موجود باشد. علاوه بر این نیروی نقاط مختلف، می‌توانند نسبت به یکدیگر دارای اختلاف فاز نیز باشند. نابالانسی‌ها انواع مختلفی دارند که مهندسان روتور برای رفع آن نیاز به درک نحوه عملکرد آنها دارند. در بیشتر مراجع، این رفتارها براساس تجارب عملی مطرح شده‌اند.

استودلا در سال ۱۹۲۴ برای اولین بار دینامیک شافت الاستیک به همراه چند دیسک دوار را مورد بررسی قرار داد [۲]. در سال ۱۹۳۴ تیرل، تئوری بالانس دوصفحه‌ای استودلا را به کار برد و روشی برای تأثیر ضرایب بالانس روتورهای صلب منتشر کرد [۳]. اوسان جان در سال ۱۹۹۸، به بررسی ارتباط جرم اصلاحی و نیروی یاتاقان در روتور صلب پرداخت. وی با در نظرگیری دو جرم نابالانس با زاویه فاز متفاوت، به بیان کمی جرم اصلاحی در ترم‌هایی از هندسه روتور، فاصله یاتاقان‌ها و موقعیت دو صفحه از یاتاقان‌ها پرداخت [۴]. در سال ۲۰۰۶ الکساندر-ژیوتو، به تحلیل دینامیکی یک روتور عمودی ناپیوسته سوار بر لولا و یک تکیه‌گاه الاستیک و دارای نابالانسی استاتیکی، دینامیکی و کوپل پرداخت [۵]. در سال ۲۰۰۸ ونهيو، به تحلیل پایداری حرکت سیستم روتور-یاتاقان انعطاف‌پذیر ناپیوسته با دو دیسک نابالانس پرداخت. وی دریافت که برای سیستم روتور-یاتاقان با دو دیسک نابالانس که دارای اختلاف فاز با یکدیگرند، پاسخ در محدوده وسیعی متغیر خواهد بود [۶]. خدائی در سال ۲۰۱۲، به محاسبه اتلاف انرژی ناشی از عیوب ناهمراستایی و نابالانسی در یک روتور صلب پرداخت و عنوان کرد که میزان اتلاف انرژی تابعی از میزان ناهمراستایی محورها، نابالانسی روتور و سرعت دورانی سیستم است [۷]. در سال ۲۰۱۳ هیوو، به بررسی اثرات اختلاف فاز نابالانسی دو دیسک بر پایداری فیلم روغن در سیستم روتور-یاتاقان پرداخت. وی یک مدل جرم متمرکز ۲۰ درجه آزادی از روتور با دو دیسک را در نظر گرفته و توجه خود را بر اثرات اختلاف

فاز نابالانسی دو دیسک بر شروع ناپایداری و پاسخ‌های غیرخطی سیستم روتور-یاتاقان بنا گذارد [۸].

در این تحقیق، هدف بررسی مکان قرارگیری دیسک‌ها و همچنین مکان و زوایای فاز اجرام نابالانس بر دامنه و فاز ارتعاش در نقاط مختلف شافت در یک روتور پیوسته با یک یا چند دیسک و چند جرم نابالانس است. برای این منظور، از تئوری تیر ریلی استفاده و عبارت‌های انرژی هر قسمت از سیستم استخراج و با استفاده از روش مودهای فرضی، پاسخ روتور مورد بررسی قرار می‌گیرد. آنگاه اثر انواع نابالانسی روی یک شافت انعطاف‌پذیر مطالعه می‌شود. نتایج حاصل شده می‌تواند برای تشخیص و رفع عیب انواع مختلفی از نابالانسی روی یک شافت انعطاف‌پذیر با یک یا چند دیسک، مورد استفاده قرار گیرد و برای شناخت بهتر رفتار یک روتور انعطاف‌پذیر تحت انواع متفاوتی از نابالانسی و در نتیجه تشخیص نوع عیب ایجاد شده در سیستم مفید واقع گردد.

۲- سیستم روتور یاتاقان با شرایط دلخواه

مدلی از روتور همانند شکل ۱ را در نظر بگیرید. در این مدل تعداد دیسک و یاتاقان و محل قرارگیری آن‌ها و همچنین تعداد جرم نابالانس با شعاع، مقدار، زاویه فاز و محل قرارگیری متفاوت، به‌صورت کاملاً دلخواه و متغیر خواهد بود. در این مدل، شافت انعطاف‌پذیر و پیوسته و تمامی دیسک‌ها صلب هستند. فنرها و میرایی‌ها، نماینده سختی و میرایی موجود در یاتاقان‌ها بوده که در دو راستای افقی و عمودی، دارای درجه آزادی لازم هستند.

۳- عبارت‌های انرژی سیستم روتور-یاتاقان

فرض شود که یک مدل پیچیده از روتور با تعداد دلخواهی دیسک، جرم نابالانس و یاتاقان با محل قرارگیری دلخواه و سوار بر شافت انعطاف‌پذیر پیوسته مدنظر است. انرژی جنبشی یک دیسک صلب سوار بر شافت انعطاف‌پذیر را می‌توان به‌صورت نشان داده شده در رابطه‌ی (۱) نوشت.

در این رابطه ترم آخر، بیانگر اثرات ژيروسکوپی (کریولیس) دیسک خواهد بود. همچنین انرژی جنبشی شافت انعطاف‌پذیر، به‌صورت رابطه (۲) قابل بیان است. در این رابطه انتگرال اول، بیان کلاسیک انرژی جنبشی شافت در خمش، انتگرال دوم، بیانگر اثرات ثانویه اینرسی دورانی و

$$T_{U_n} \cong m_{U_n} \Omega d_{U_n} (\dot{u} \cos(\Omega t + \varphi_{U_n}) - \dot{w} \sin(\Omega t + \varphi_{U_n})) \Big|_{y=y_{U_n}} \quad (5)$$

با گذشت از ترم‌های غیرخطی و فرض متقارن بودن سطح مقطع شافت، انرژی کرنشی شافت به صورت رابطه (۶) به دست می‌آید [۹]. انرژی کرنشی و اتلافی هر یک از یاتاقان‌ها نیز با فرض فنریت و میرایی خطی و ضرایب فنریت و میرایی متقاطع صفر، به ترتیب به صورت روابط (۷) و (۸) بیان می‌گردند.

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \int_A \left[\left(\frac{d\theta_x}{dy} \right)^2 + \left(\frac{d\theta_z}{dy} \right)^2 \right] dA dy \quad (6)$$

$$U_{B_n} = \frac{1}{2} K_{U_n} u^2 + \frac{1}{2} K_{W_n} w^2 \Big|_{y=y_{B_n}} \quad (7)$$

$$D_{B_n} = \frac{1}{2} C_{U_n} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} C_{W_n} \dot{w}^2 \Big|_{y=y_{B_n}} \quad (8)$$

۴- معادلات کلی روتور

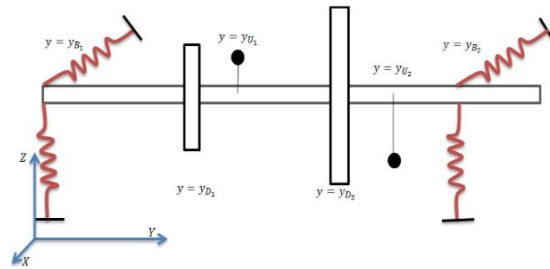
بدیهی است که با استفاده از عبارت‌های انرژی به دست آمده و جایگذاری آن‌ها در معادلات لاگرانژ یا اصل هامیلتون و انجام عملیات جبری زیاد، به معادلات حاکم و دقیق می‌رسیم که پیچیدگی حل آن‌ها، نیاز به استفاده از روش‌های تقریبی را توجیه می‌کند. پس می‌توانیم با منطق دیگری روند کار را بهتر جلو ببریم. از آنجا که پاسخ‌های روتور در هر نقطه و زمانی مقادیر توابع u و w هستند، به جای استفاده از روش مودهای فرضی در پایان، از ابتدا مقادیر این دو تابع را با استفاده از روش مودهای فرضی به صورت روابط (۹) و (۱۰) در نظر می‌گیریم.

$$u(y, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(y) \eta_i(t) \quad (9)$$

$$w(y, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(y) \xi_i(t) \quad (10)$$

در این روابط $\phi_i(y)$ و $\psi_i(y)$ توابع معلوم و $\eta_i(t)$ و $\xi_i(t)$ توابع مجهولی از زمان و n تعداد توابع آزمایشی هستند، با جایگذاری روابط اخیر در روابط انرژی، ماتریس‌های تقریبی جرم، سختی و میرایی سیستم تولید و دستگاه معادلات (۱۱) حاصل می‌شود.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = [F] \quad (11)$$



شکل ۱- یک مدل فیزیکی از سیستم روتور-یاتاقان

انتگرال آخری، ناشی از اثرات ژيروسکوپی شافت است [۹]. برای این مدل، با فرض وجود چند دیسک صلب در فواصل مختلفی از سر شافت روی آن، انرژی جنبشی هر یک از دیسک‌ها به صورت نشان داده شده در رابطه (۳) قابل بیان هستند. شایان ذکر است که در روابط زیر $\theta_x = \frac{dw}{dy}$ و $\theta_z = -\frac{du}{dy}$ خواهد بود.

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{I_{dx}}{2} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) + I_{dy} \Omega \dot{\theta}_z \theta_x \quad (1)$$

$$T_s = \int_0^L \frac{\rho A}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \int_0^L \frac{\rho I}{2} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) dy + 2 \int_0^L \rho I \Omega \dot{\theta}_z \theta_x dy \quad (2)$$

$$T_{D_n} = \frac{1}{2} M_{D_n} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{I_{dx_n}}{2} (\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) + I_{dy_n} \Omega \dot{\theta}_z \theta_x \Big|_{y=y_{D_n}} \quad (3)$$

انرژی موجود در جرم نابالانس، به صورت انرژی جنبشی T_u خواهد بود. فرض شود که این جرم کوچک در صفحه‌ای عمود بر محور y باقی مانده، موقعیت آن در طول محور ثابت است. با فرض دوران پادساعتگرد روتور، تغییر مکان جرم نابالانس در راستای محورهای x و z به ترتیب به صورت، $u + d_U \sin \Omega t$ و $w + d_U \cos \Omega t$ ، و در راستای y ثابت خواهد بود؛ در نتیجه انرژی جنبشی جرم نابالانس، به صورت نشان داده شده در رابطه (۴) بیان می‌شود [۱۰]؛ بنابراین برای یک سیستم روتور-یاتاقان با چند جرم نابالانس که هر یک با زاویه‌ی فاز φ_{U_n} از خط افق و در فاصله $y = y_{U_n}$ از سر شافت قرار دارند، انرژی جنبش به فرم رابطه (۵) بیان می‌شود.

$$T_U \cong m_U \Omega d_U (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (4)$$

چند دیسک صلب در نقاط مختلف شافت، به صورت نشان داده شده در روابط (۱۶) و (۱۷) خواهند بود.

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \phi_i \phi_j dy + \int_0^L \rho A \psi_i \psi_j dy + \int_0^L \rho I \frac{d\psi_i}{dy} \frac{d\psi_j}{dy} dy + \int_0^L \rho I \frac{d\phi_i}{dy} \frac{d\phi_j}{dy} dy + M_{D_n} \phi_i \phi_j \Big|_{y=y_{D_n}} + M_{D_n} \psi_i \psi_j \Big|_{y=y_{D_n}} + I_{dx_n} \phi_i \phi_j \Big|_{y=y_{D_n}} + I_{dx_n} \psi_i \psi_j \Big|_{y=y_{D_n}} \quad (16)$$

$$k_{ij} = \int_A \int_0^L EI \frac{d^2 \psi_i}{dy^2} \frac{d^2 \psi_j}{dy^2} dA dy + \int_A \int_0^L EI \frac{d^2 \phi_i}{dy^2} \frac{d^2 \phi_j}{dy^2} dA dy + (K_{u_n} \phi_i \phi_j + K_{w_n} \psi_i \psi_j) \Big|_{y=y_{B_n}} \quad (17)$$

۲-۴- ماتریس میرایی و ژيروسکوپی

ترم سوم در روابط (۲) و (۳)، مربوط به اثرات ژيروسکوپی و رابطه (۸)، مربوط به اثرات دمپینگ در سیستم است؛ بنابراین، عبارت‌های هر یک از ماتریس‌های ژيروسکوپی بیان شده در رابطه (۱۳) و میرایی به صورت نشان داده شده در روابط (۱۸) تا (۲۰) خواهند بود.

$$G_{ij}^s = 2\Omega \int_0^L \rho I \frac{d\phi_i}{dy} \frac{d\psi_j}{dy} dy \quad (18)$$

$$G_{ij}^d = \Omega I_{dy} \frac{d\phi_i}{dy} \frac{d\psi_j}{dy} \Big|_{y=y_{D_n}} \quad (19)$$

$$c_{ij} = (C_{u_n} \phi_i \phi_j + C_{w_n} \psi_i \psi_j) \Big|_{y=y_{B_n}} \quad (20)$$

۳-۴- بردار نیرو

با توجه به رابطه (۵)، انرژی حاصل از نیروی نابالانسی را می‌توان به صورت جملاتی از انرژی جنبشی نشان داد. این دو عبارت که به صورت یک انرژی جنبشی خارجی وارد شده بر سیستم خود را ظاهر کرده‌اند را می‌توان به صورت یک نیروی خارجی اعمالی بر سیستم در نظر گرفت. با اعمال اصل هامیلتون بر رابطه (۵)، دورابطه به فرم (۲۱-۲۲) به دست می‌آیند.

در این رابطه بردار $\{q\}$ ، یک بردار $2n \times 1$ است که به صورت رابطه (۱۲) تعریف می‌شود؛ همچنین ماتریس میرایی هر دو اثر ژيروسکوپی و میرایی را به فرم معادله (۱۳) شامل می‌شود. در رابطه زیر، ماتریس $[C]$ مربوط به میرایی سیستم، $[G^d]$ ماتریس ژيروسکوپیک مربوط به دیسک و $[G^s]$ ماتریس ژيروسکوپیک، مربوط به شافت است [۱۱]. استخراج هر یک از ماتریس‌های بیان شده در رابطه (۱۱) با استفاده از روش مودهای فرضی در ادامه آورده شده‌اند.

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{\eta_i(t)\} \\ \{\xi_i(t)\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$[D] = [C] + [G] = \begin{bmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] + [G^d + G^s] \\ [C_{21}] - [G^d + G^s] & [C_{22}] \end{bmatrix} \quad (13)$$

۴-۱- استخراج ماتریس‌های جرم و سختی

طبق روش مودهای فرضی می‌توان مجموعه‌ای از توابع آزمایشی همانند آنچه در روابط (۹) و (۱۰) آمده است را برای راستاهای مورد مطالعه، در نظر گرفت. در این روابط، $\phi_i(y)$ و $\psi_i(y)$ توابع آزمایشی مورد قبول معلوم هستند که می‌توانند مجموعه‌ای از مودشپ‌های فرض شده، چند جمله‌ای‌ها و یا حتی توابع ویژه باشند.

در رابطه (۱۴) خارج قسمت راییلی آورده شده است. در این رابطه، π_{max} و T^*_{max} بیان‌گر ماکزیمم انرژی کرنشی و جنبشی سیستم می‌باشند. با مینیمم شدن خارج قسمت راییلی، رابطه (۱۵) حاصل می‌شود که در آن مقادیر ویژه خواهند بود. ریشه‌های این مقادیر ویژه، نشان‌دهنده فرکانس‌های طبیعی و هر یک از $\{q^{(i)}\}$ بردارهای ضرایب ریتز خواهند بود [۱۲] که تعداد آن‌ها برابر $2n$ است.

$$R = \omega^2 = \frac{\pi_{max}}{T^*_{max}} \quad (14)$$

$$|[K] - \lambda_i^{(2n)} [M]| \{q^{(i)}\} = \vec{0} \quad (15)$$

با دقت در روابط (۲) و (۳) روشن است که در این روابط دو ترم اول، دارای توان‌های زوج و ترم سوم، دارای توانی فرد از تغییرات توابع شیب بر حسب زمان است؛ بنابراین با توجه به ماهیت روش مودهای فرضی، ترم‌های اول و دوم این روابط تشکیل دهنده T^*_{max} و مجموع روابط (۶) و (۷)، تشکیل دهنده π_{max} خواهند بود؛ بنابراین عبارت‌های هر یک از ماتریس‌های جرم و سختی برای یک سیستم روتور-یاتاقان با

۵- حل مثال و بررسی روش

برای بررسی صحت مدل سازی انجام شده، روش حل مسئله و کدنویسی انجام شده در نرم افزار متلب، دو مثال در این بخش آورده شده است و صحت نتایج به دست آمده در این تحقیق با نتایج به دست آمده در مراجع دیگر، مورد ارزیابی قرار می گیرد.

۵-۱- مثال ۱

در این مثال هدف تعیین فرکانس های طبیعی یک روتور ساده شامل، شافت بدون جرم، دیسک سنگین مستقر در مرکز شافت و یاتاقان هایی با سختی $K = 1 \times 10^{10} \text{ N/m}$ است. خواص این مدل، در جدول ۱ آورده شده است. روتور با مشخصات معرفی شده در جدول ۱، تحلیل و چهار فرکانس طبیعی اول آن با آنچه در مرجع [۱۳] آمده است، مورد مقایسه قرار گرفته و نتایج حاصله در جدول ۲ آورده شده اند.

جدول ۱- خصوصیات جرمی و هندسی داده شده [۱۳]

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
طول شافت	۱/۲ (m)	ضریب پواسون	۰/۳
قطر شافت	۰/۰۴(m)	جرم	۱۲۰/۰۷۲(kg)
مدول یانگ	(N/m ²) ۲/۱×۱۰ ^{۱۱}	اینرسی قطبی	۳/۶۹۳۲(kgm ²)
دانسیته	۷۸۰۰(kg/m ³)	ممان اینرسی	۷/۳۵۴۴(kgm ²)

جدول ۲- مقایسه فرکانس های طبیعی نتیجه شده از این تحقیق با فرکانس طبیعی به دست آمده با مرجع [۱۳]. بر

حسب هر تزر

مود	مرجع [۱۳]	تحقیق حاضر	درصد انحراف
اول	۱۲/۱۲	۱۲/۱۰	۰/۱۶
دوم	۴۱/۹۹	۴۴/۱۰	۴/۷
سوم	۳۵۲/۳	۳۵۷/۷	۱/۵
چهارم	۳۵۲/۳	۳۸۳/۷	۷/۹

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T_{u_n}}{\partial u} \delta u dt = \int_{t_1}^{t_2} (m_{U_n} \Omega^2 d_{U_n} \sin(\Omega t + \varphi_{U_n})) \delta u dt \quad (21)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T_{w_n}}{\partial w} \delta w dt = \int_{t_1}^{t_2} (m_{U_n} \Omega^2 d_{U_n} \cos(\Omega t + \varphi_{U_n})) \delta w dt \quad (22)$$

بنابراین انتگراند این روابط به ترتیب، نیروهای خارجی حاصل از نابالانسی در جهات w و u خواهند بود. از طرفی با توجه به اینکه جرم نابالانس ممکن است در هر فاصله ای از سر شافت قرار داشته باشد، ماتریس تشکیل دهنده نیروی خارجی متأثر از مکان قرارگیری آن خواهد بود؛ بنابراین نیروی خارجی وارد بر سیستم به صورت رابطه (۲۳) است که در آن $\{F_u\}$ و $\{F_w\}$ ، به صورت روابط (۲۴) و (۲۵) خواهند بود.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_u\} \\ \{F_w\} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

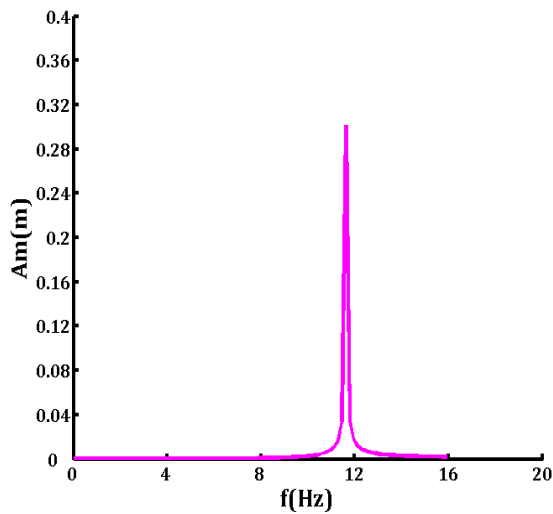
$$\{F_u\} = \begin{Bmatrix} \phi_1(y_{U_n}) \\ \phi_2(y_{U_n}) \\ \vdots \\ \phi_n(y_{U_n}) \end{Bmatrix} m_{U_n} \Omega^2 d_{U_n} \sin(\Omega t + \varphi_{U_n}) \quad (24)$$

$$\{F_w\} = \begin{Bmatrix} \psi_1(y_{U_n}) \\ \psi_2(y_{U_n}) \\ \vdots \\ \psi_n(y_{U_n}) \end{Bmatrix} m_{U_n} \Omega^2 d_{U_n} \cos(\Omega t + \varphi_{U_n}) \quad (25)$$

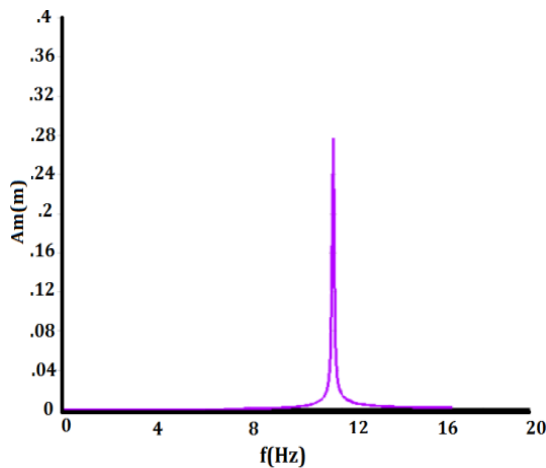
۴-۴- انتخاب توابع آزمایشی

در این تحقیق، فرض بر این بوده است که یک روتور شامل، یک یا دو دیسک در میانه یا اطراف میانه شافت، یک یا چند جرم نابالانس و دو یاتاقان در دو طرف شافت آن مورد تحلیل قرار گیرد؛ بنابراین با توجه به مدل روتور و شرایط مرزی حاکم بر مسئله، از توابع آزمایشی داده شده در رابطه (۲۶) برای هر دو راستای ارتعاشات افقی و عمودی روتور استفاده گردیده است.

$$\phi_i(y) = \begin{cases} i = 1 & 1 \\ i \geq 2 & \left(\frac{2}{L}\left(y - \frac{L}{2}\right)\right)^{i-1} \end{cases} \quad (26)$$



شکل ۲- نمودار تابع پاسخ فرکانسی مرکز روتور



شکل ۳- نمودار تابع پاسخ فرکانسی مرکز روتور [۱۲]

جدول ۴- خصوصیات جرمی و هندسی مدل مورد مطالعه

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
طول شافت	۱/۲ (m)	جرم نابالانس	۰/۰۱ (kg)
قطر شافت	۰/۰۴ (m)	شعاع دیسک	۰/۲۴ (m)
مدول یانگ	(N/m^2) $۲/۱ \times 10^{11}$	شعاع نابالانسی	۰/۲ (m)
دانسیته	$۷۸۰۰ (kg/m^3)$	سختی یاتاقانها	(N/m) ۱×10^8

گفتنی است که نتایج موجود در مرجع مذکور با استفاده از روش المان محدود و نرم‌افزار انسیس و با در نظر گرفتن ۱۹ المان برای شافت و جرم متمرکز دیسک، در مرکز شافت به دست آمده است. مقایسه نتایج حاصله با نتایج روش المان محدود، صحت محاسبات انجام شده را به خوبی نشان می‌دهد.

۲-۵- مثال ۲

برای بررسی پاسخ اجباری سیستم، در این مثال پاسخ فرکانسی روتور موجود در مثال ۱ با فرض لنگی $m/0.01$ برای دیسک، مدنظر قرار می‌گیرد. سختی هر یک از یاتاقانها، برابر $4 KN/mm$ و میرایی آنها، برابر $2000 N-s/m$ فرض می‌شود.

برای یافتن پاسخ روتور به این بار نابالانس، پاسخ هارمونیک برای محدوده سرعت دورانی صفر تا هزار دور بر دقیقه محاسبه گردیده است. نمودار تابع پاسخ فرکانسی روتور برای محل دیسک، در شکل ۲ ترسیم گردیده که تطابق خوبی با نمودار آورده شده در شکل ۳ از مرجع [۱۳] دارد. علاوه بر آن ماکزیمم تغییر مکان روتور و همچنین سرعت بحرانی روتور در جدول ۳ آورده شده و مورد مقایسه قرار گرفته است.

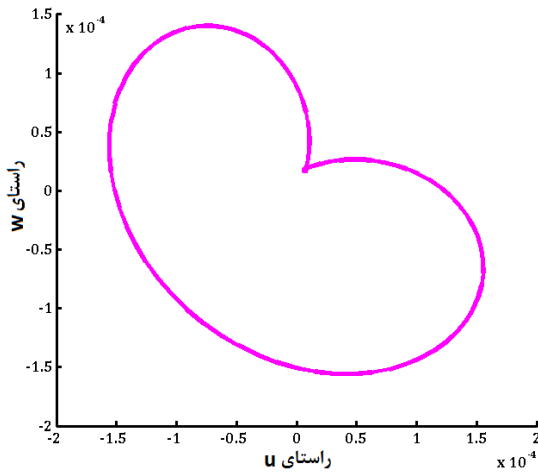
۶- رفتار روتور با چند دیسک و جرم نابالانس

در این قسمت یک سیستم روتور-یاتاقان با شافت انعطاف‌پذیر، یک دیسک صلب در میانه و دو یاتاقان در دو انتهای آن مد نظر است. این سیستم که دارای تحریک نابالانسی است، از نظر پیچشی و محوری صلب بوده، دارای ارتعاشات عرضی است. مشخصات هندسی و خصوصیات جرمی مدل مورد نظر، در جدول ۴ داده شده است.

جدول ۳- مقایسه‌ی سرعت بحرانی و ماکزیمم تغییر مکان

نتیجه شده از این تحقیق با مرجع [۱۳]

پاسخ روتور	مرجع [۱۳]	تحقیق حاضر	درصد انحراف
سرعت بحرانی (دور بر دقیقه)	۶۹۵/۵۲	۶۹۷/۱۹	۰/۲
ماکزیمم تغییر مکان روتور (متر)	۰/۳۰۳۸	۰/۳۰۱۴	۰/۸

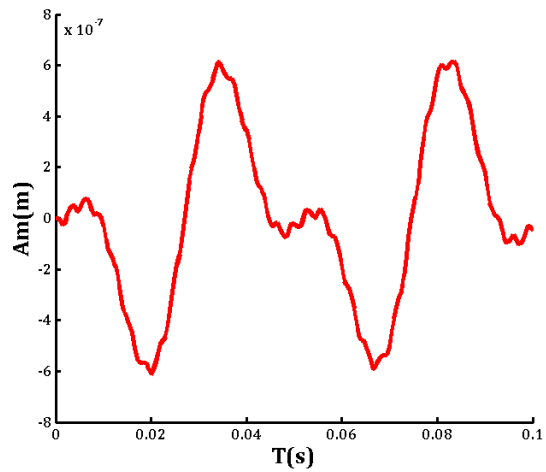


شکل ۷- منحنی خط مسیر روتور برای نقطه میانی شافت

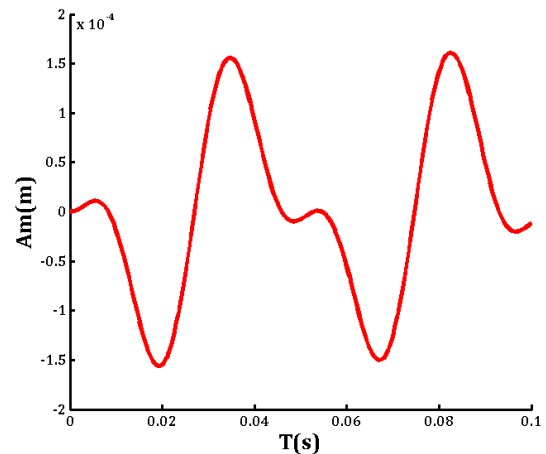
روتور مورد نظر که شامل یک نابالانسی استاتیکی است، مورد تحلیل قرار گرفته و پاسخ‌های زمانی روتور برای نقاط ابتدایی و میانی شافت در شکل‌های ۴ و ۵ آورده شده‌اند. در شکل‌های ۶ و ۷ نیز، منحنی‌های خط مسیر روتور برای این نقاط آورده شده است. پاسخ‌های زمانی و منحنی خط مسیر برای نقطه انتهایی نیز، شبیه نقطه ابتدایی است؛ همچنین منحنی‌های در راستای w شبیه راستای u است، فقط به اندازه ۹۰ درجه اختلاف فاز دارند.

۶-۱- بررسی اثر جابجایی نابالانسی در طول شافت

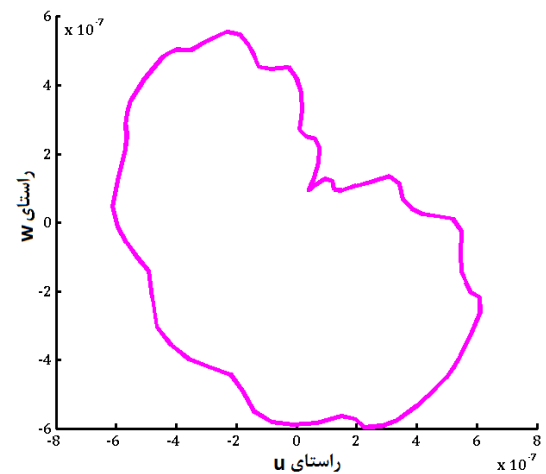
طبق تعریف، در یک روتور صلب نابالانسی استاتیکی هنگامی رخ می‌دهد که محور اصلی جرم موازی با محور شافت جابه‌جا شود. در این نوع نابالانسی، نقطه سنگین در همان صفحه‌ای است که مرکز جرم روتور قرار دارد. در حالتی که محور اصلی، محور شافت را در نقطه‌ای غیر از مرکز جرم قطع کند، وضعیت نابالانسی شبه‌استاتیکی به وجود می‌آید. از نقطه نظر تعریف، مهمترین تفاوت نابالانسی شبه‌استاتیکی با نابالانسی استاتیکی در این است که محور اصلی دیگر با محور شافت موازی نیست. از نظر عملی، نابالانسی شبه‌استاتیکی همچنان یک مسئله بالانس تک صفحه‌ای است، با این تفاوت ساده که نابالانسی در صفحه‌ای قرار دارد که شامل مرکز جرم نیست [۱۴].



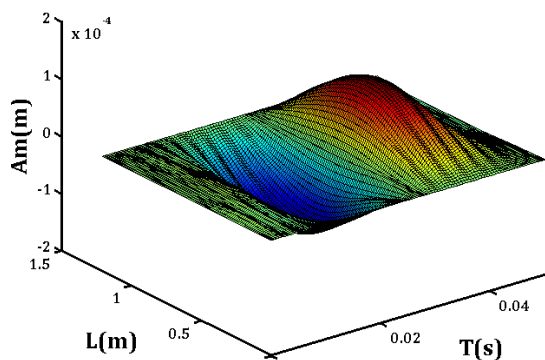
شکل ۴- پاسخ زمانی روتور در راستای u برای نقطه ابتدایی شافت



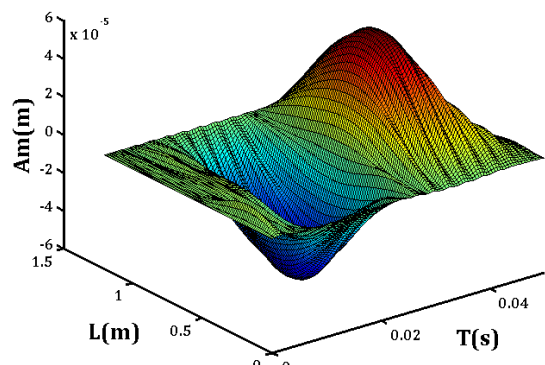
شکل ۵- پاسخ زمانی روتور در راستای u برای نقطه میانی شافت



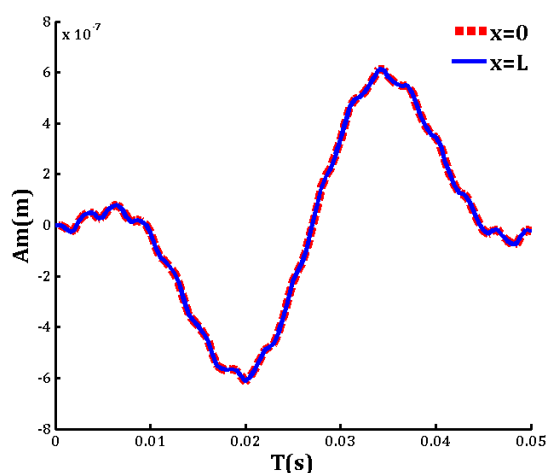
شکل ۶- منحنی خط مسیر روتور برای نقطه ابتدایی شافت



شکل ۹- نمودار سه بعدی تغییرات دامنه ارتعاش روتور برای جرم نابالانس در ۰/۲۵ طول شافت از سر شافت در راستای u

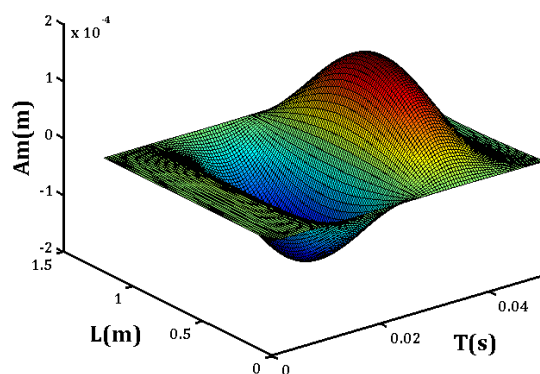


شکل ۱۰- نمودار سه بعدی تغییرات دامنه ارتعاش روتور با جرم نابالانس در ۰/۱۲۵ طول شافت از سر شافت در راستای u



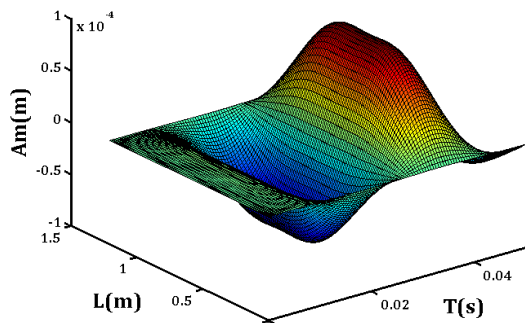
شکل ۱۱- پاسخ زمانی روتور به نابالانسی استاتیکی در راستای u

در این بخش موقعیت نابالانسی موجود در مجموعه روتور در طول شافت تغییر داده می‌شود. در حقیقت دامنه و فاز پاسخ در یک روتور شامل نابالانسی استاتیکی با یک روتور شامل نابالانسی شبه استاتیکی، مورد بررسی و مقایسه قرار می‌گیرد. برای این منظور موقعیت جرم نابالانس در مرکز روتور و در دو فاصله متفاوت ۰/۲۵ و ۰/۱۲۵ طول شافت از سر شافت، مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. برای سه حالت فوق نمودار سه بعدی تغییرات دامنه ارتعاش بر حسب متغیرهای زمان و مکان، در شکل‌های ۸ تا ۱۰ آورده شده‌اند. با دقت در شکل‌ها واضح است که با تغییر موقعیت جرم نابالانس در طول شافت، موقعیت ماکزیمم دامنه ارتعاش جابه‌جا خواهد شد. همچنین برای بررسی فاز پاسخ در یاتاقان‌های روتور، پاسخ‌های زمانی در راستای u این نقاط برای نابالانسی استاتیکی و شبه استاتیکی با جرم نابالانس در فاصله ۰/۲۵ و ۰/۱۲۵ طول شافت از سر شافت در شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ آورده شده است. این نمودارها نشان می‌دهند که در نابالانسی استاتیکی، دامنه و فاز پاسخ در دو یاتاقان برابر است. این حقیقت با رفتار روتور صلب نیز همخوانی دارد؛ همچنین واضح است که در نابالانسی شبه استاتیکی دامنه و فاز پاسخ در یاتاقان‌ها نیز، تابعی از فاصله جرم نابالانس از مرکز روتور خواهد بود، به طوری که هرچه جرم نابالانس از مرکز جرم روتور فاصله بگیرد، اختلاف دامنه و فاز در دو یاتاقان بیشتر خواهد شد.

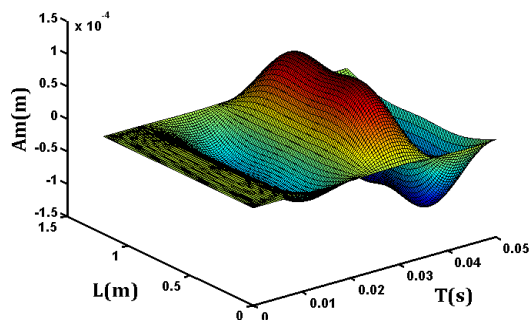


شکل ۸- نمودار سه بعدی تغییرات دامنه ارتعاش روتور شامل نابالانسی استاتیکی در راستای u

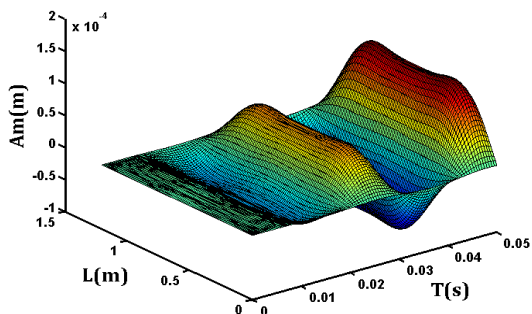
قرارگیری مرکز جرم روتور و جرم نابالانس است، دارای تقارن بوده و مقدار بیشتری دارد؛ همچنین روشن است که با افزایش فاصله بین دو دیسک، محدوده گسترده‌تری از طول شافت به حدود حداکثر دامنه ارتعاش می‌رسند. نتیجه حاصل شده در حالی است که مرکز جرم روتور در تمامی موارد مورد آزمایش ثابت بوده است. این مهم، به خوبی بیان‌گر تأثیر محل قرارگیری دیسک‌ها بر پاسخ روتور است.



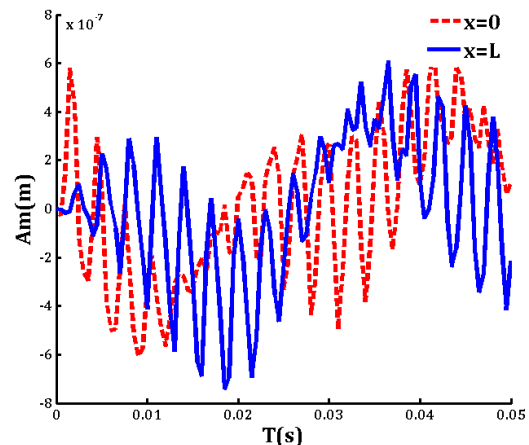
شکل ۱۴- نمودار سه‌بعدی تغییرات دامنه ارتعاش روتور با دو دیسک در فاصله ۰/۴ و ۰/۶ از سر شافت در راستای u



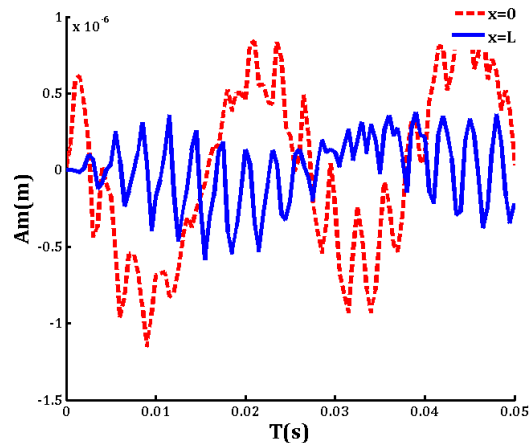
شکل ۱۵- نمودار سه‌بعدی تغییرات دامنه ارتعاش روتور با دو دیسک در فاصله ۰/۳۲۵ و ۰/۶۷۵ از سر شافت در راستای u



شکل ۱۶- نمودار سه‌بعدی تغییرات دامنه ارتعاش روتور با دو دیسک در فاصله ۰/۲۵ و ۰/۷۵ از سر شافت در راستای u



شکل ۱۲- پاسخ زمانی نقاط ابتدایی و انتهایی روتور به نابالانسی شبه استاتیکی در فاصله ۰/۲۵ طول شافت، در راستای u

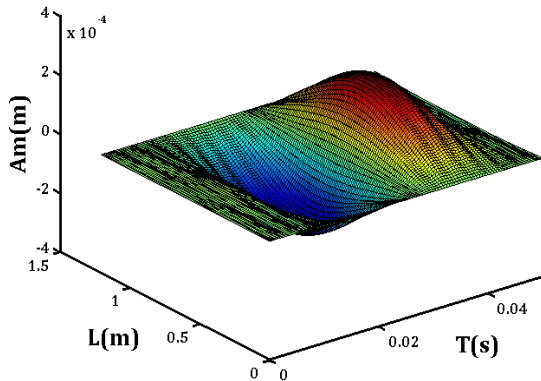


شکل ۱۳- پاسخ زمانی نقاط ابتدایی و انتهایی روتور به نابالانسی شبه استاتیکی در فاصله ۰/۱۲۵ طول شافت، در راستای u

۲-۶ روتور با دو دیسک و نابالانسی استاتیکی

در این بخش از روتور قسمت، قبل استفاده شده است با این تفاوت که به جای یک دیسک صلب در وسط، از دو دیسک با همان ابعاد و در مکان‌های مختلفی در طول شافت استفاده می‌شود. این دو دیسک، هر بار یکی در فاصله ۰/۴، ۰/۳۲۵ و ۰/۲۵ طول شافت و دیگری به صورت متقارن در طرف دیگر شافت قرار گرفته‌اند. نمودارهای سه بعدی تغییرات دامنه ارتعاش برای فواصل مذکور برای جهت u ، در شکل‌های ۱۴ تا ۱۶ آورده شده‌اند.

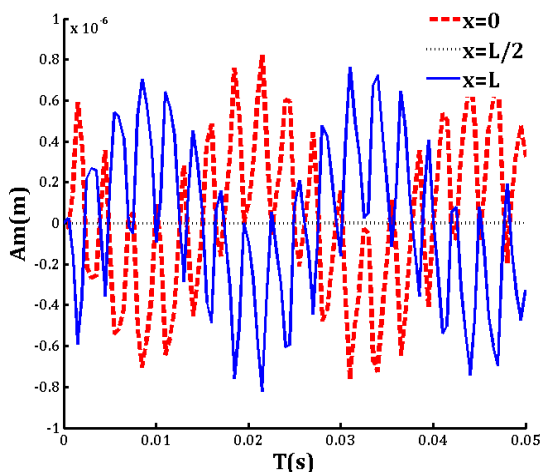
با توجه به شکل‌های ترسیمی واضح است که در این حالت، دامنه ارتعاش دو طرف شافت نسبت به مرکز که محل



شکل ۱۹- نمودار سه بعدی تغییرات دامنه‌ی ارتعاش روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس هم‌فاز در راستای u

۴-۶- روتور شامل یک دیسک و نابالانسی کوپلی

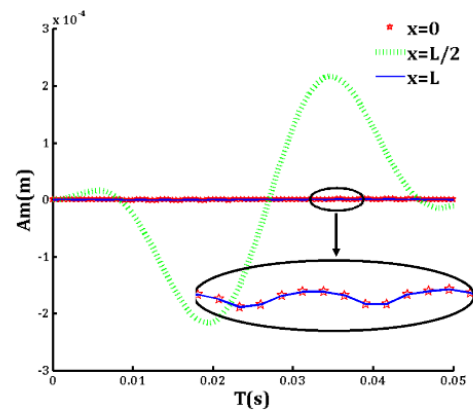
نابالانسی کوپلی هنگامی پیش می‌آید که محور اصلی جرم، محور اصلی شافت را در مرکز شافت قطع کند. در نابالانسی کوپلی، دو جرم نابالانس با اختلاف زاویه 180° درجه نسبت به هم و در دو طرف مرکز جرم شافت قرار دارند. در نابالانسی کوپلی یک روتور صلب، دامنه ارتعاش با فاز مخالف در دو یاتاقان حداکثر و در میانه شافت برابر صفر است [۱۴]. برای بررسی این نوع از نابالانسی بر روتور انعطاف‌پذیر، فرض می‌شود که در روتور ذکر شده در بخش ۳-۶، دو جرم نابالانس با 180° درجه اختلاف فاز باشند. در شکل ۲۰ پاسخ زمانی این روتور در راستای u و در شکل‌های ۲۱ و ۲۲، نمودارهای سه بعدی تغییرات دامنه ارتعاش آورده شده است.



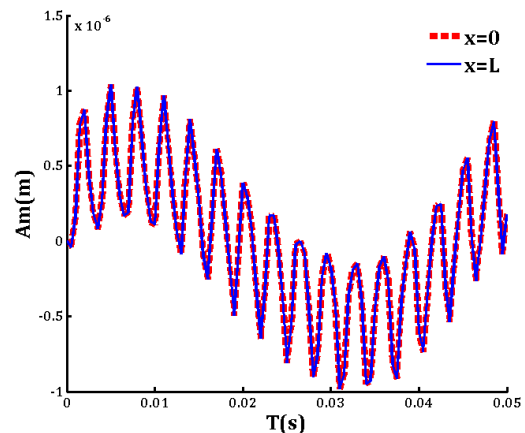
شکل ۲۰- پاسخ زمانی روتور شامل یک دیسک و نابالانسی کوپلی در راستای u

۳-۶- روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس هم‌فاز

در این بخش فرض بر این است که در روتور بخش ۳-۶، به جای یک جرم نابالانس در وسط، از دو جرم هم‌فاز با همان شعاع و میزان و در فواصل مختلفی از طول شافت استفاده شده باشد. اجرام نابالانس در فاصله $1/4$ و $3/4$ طول شافت، از سر شافت قرار گرفته‌اند. در شکل‌های ۱۷ و ۱۸، نمودار پاسخ زمانی در راستای u این روتور ترسیم شده است. با بررسی پاسخ‌های زمانی در نقاط مختلف روتور روشن می‌شود که فاز پاسخ بین نقاط ابتدایی و انتهایی شافت برابر بوده، ماکزیمم تغییر مکان شافت مربوط به نقطه میانی آن است. در شکل ۱۹ نیز، نمودار سه بعدی تغییرات دامنه ارتعاش روتور آورده شده است. نتیجه حاصل شده در این بخش، با نتیجه به دست آمده در بخش ۲-۶، قابل تأمل و مقایسه است.

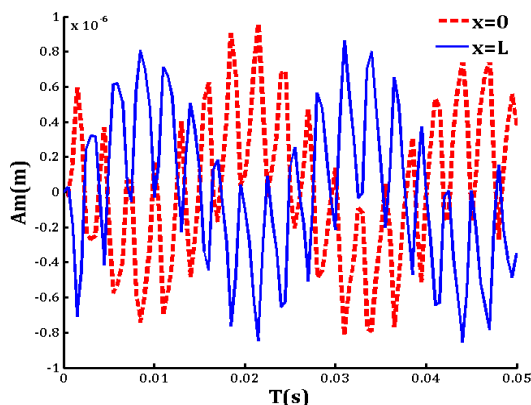


شکل ۱۷- پاسخ زمانی روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس هم‌فاز در نقاط مختلف شافت در راستای u



شکل ۱۸- پاسخ زمانی روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس هم‌فاز در نقاط ابتدایی و انتهایی شافت در راستای u

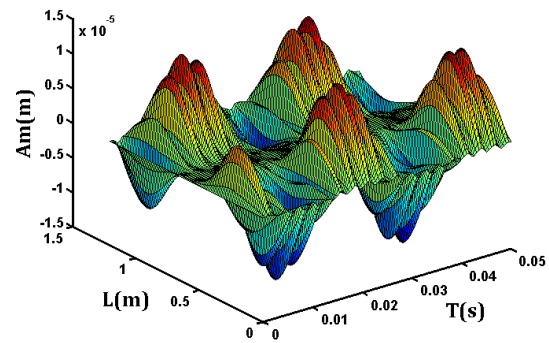
راستای u ترسیم شده است. در این شکل با ترسیم پاسخ‌های زمانی روشن گردید که دامنه پاسخ در نقاط ابتدا و انتهایی شافت، دارای اختلاف فازی بین صفر تا 180° درجه خواهد بود. در بررسی مقادیر مختلفی از جرم نابالانس دوم، روشن گردید که هرچه مقدار جرم نابالانس دوم به جرم نابالانس اول نزدیک‌تر باشد، اختلاف فاز پاسخ در دو یاتاقان به 180° درجه نزدیک‌تر و نسبت دامنه ارتعاش در دو یاتاقان به میانه شافت عدد بزرگتری خواهد بود. در شکل ۲۴، نمودارهای سه‌بعدی تغییرات دامنه‌ی ارتعاش بر حسب مکان و زمان برای راستای u آورده شده است. با توجه به نمودارهای ترسیمی روشن شد که در نابالانسی دینامیکی بر خلاف نابالانسی کوپلی، دامنه ارتعاش شافت در نقطه میانی آن برابر صفر نخواهد بود. با بررسی ضرایب مختلفی از جرم نابالانس دوم روشن گردید که زمانی که اختلاف سنگینی بین دو جرم نابالانس کم باشد، دامنه ارتعاش روتور در نقطه‌ای به غیر از مرکز شافت، به صفر نزدیک خواهد بود.



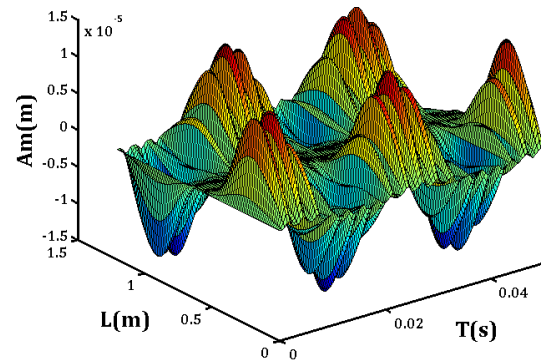
شکل ۲۳- پاسخ زمانی روتور با یک دیسک و نابالانسی دینامیکی، جرم نابالانس دوم $1/2$ برابر جرم اول در راستای u

این در حالی است که زمانی که اختلاف دو جرم نابالانس زیاد باشد، دامنه ارتعاش در طول شافت غیر صفر بوده، با افزایش این اختلاف، رفتاری شبیه به نابالانسی شبه استاتیکی از روتور دیده خواهد شد. برای درک بهتر مطلب، در شکل‌های ۲۵ و ۲۶ نمودارهای سه‌بعدی تغییرات دامنه ارتعاش در راستای u ، برای جرم نابالانس دوم برابر با ضرایب متفاوت $1/5$ و 2 برابر جرم نابالانس اول آورده شده است. شایان ذکر است که رفتار بیان شده، تابعی از فاصله بین دو جرم نابالانس نیز خواهد بود.

نمودارها نشان می‌دهند که دامنه پاسخ در یاتاقان‌ها بزرگ بوده، اما حداکثر نخواهد بود و این نقاط دارای اختلاف فاز 180° با یکدیگر هستند؛ همچنین واضح است که دامنه ارتعاش در نقطه میانی شافت، برابر صفر است.



شکل ۲۱- نمودار سه‌بعدی تغییرات دامنه‌ی ارتعاش روتور شامل یک دیسک و نابالانسی کوپلی در راستای u

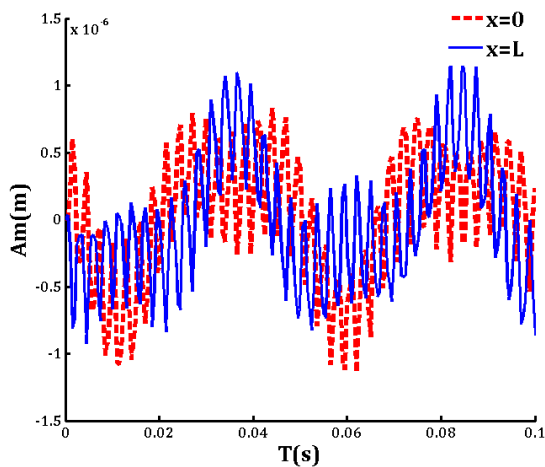


شکل ۲۲- نمودار سه‌بعدی تغییرات دامنه‌ی ارتعاش روتور شامل یک دیسک و نابالانسی کوپلی در راستای w

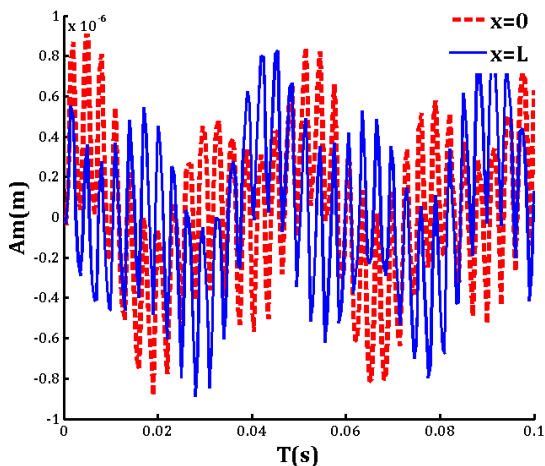
۵-۶- روتور شامل یک دیسک و نابالانسی دینامیکی متداول‌ترین نوع نابالانسی در سیستم‌های دوار، نابالانسی دینامیکی است. این نوع از نابالانسی، ترکیبی از نابالانسی‌های کوپلی و استاتیکی با درجات متغیر است. در این حالت، محور جرمی اصلی و خط مرکزی شافت دوار، نه بر هم منطبق‌اند و نه تماسی با هم دارند [۱۴].

برای بررسی این نوع از نابالانسی در روتور انعطاف‌پذیر، فرض می‌شود که در روتور ذکر شده در بخش ۴-۶، علاوه بر 180° درجه اختلاف فاز در دو جرم نابالانس، یکی از جرم‌های نابالانس دارای سنگینی $1/2$ برابر دیگری باشد. در شکل ۲۳، نمودار پاسخ زمانی این روتور در یاتاقان‌های دو طرف برای

در این شکل با ترسیم پاسخ‌های زمانی در نقاط ابتدایی و انتهایی روتور روشن گردیده است که در این راستا این نقاط علاوه بر داشتن اختلاف فاز ۹۰ درجه‌ای با یکدیگر، دارای حالت آینه‌ای نیز نسبت به خط افق خواهند بود؛ همچنین روشن است که دامنه ارتعاش روتور در هر دو طرف شافت، یکسان خواهد بود. در شکل ۲۸ نیز، پاسخ زمانی نقاط مختلف این روتور در راستای w ترسیم شده است.



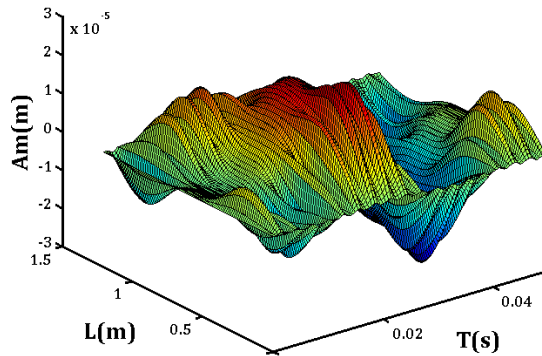
شکل ۲۷- پاسخ زمانی روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس با اختلاف فاز ۹۰ درجه در نقاط مختلف شافت در راستای u



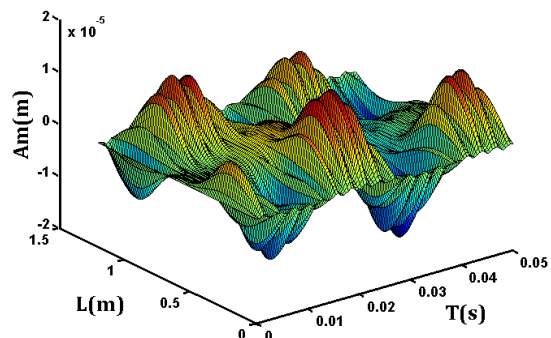
شکل ۲۸- پاسخ زمانی روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس با اختلاف فاز ۹۰ درجه در نقاط مختلف شافت در راستای w

۶-۶- روتور شامل یک دیسک و دو جرم نابالانس با اختلاف فاز ۹۰ درجه

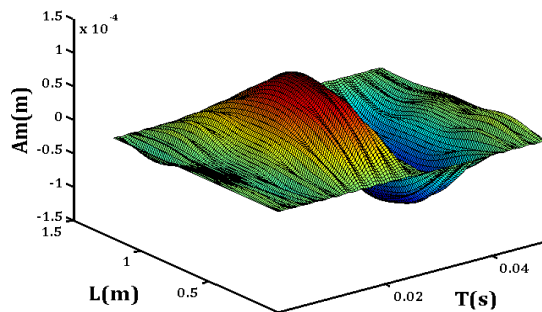
در این بخش فرض می‌شود که اختلاف فاز دو جرم نابالانس در روتور ذکر شده در بخش ۶-۴، برابر ۹۰ درجه باشد. در شکل ۲۷، پاسخ زمانی نقاط مختلف این روتور در راستای u ترسیم شده است.



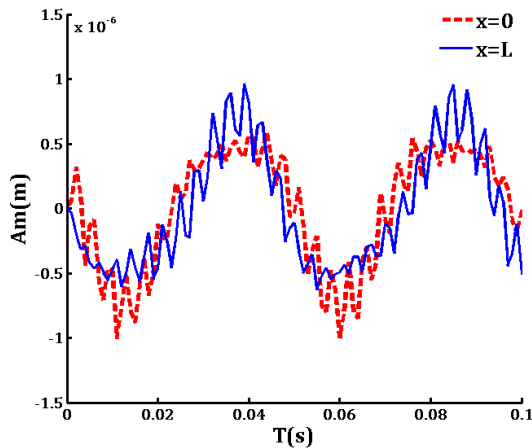
شکل ۲۴- روتور شامل یک دیسک و نابالانسی دینامیکی، جرم نابالانس دوم ۱/۲ برابر جرم اول در راستای u



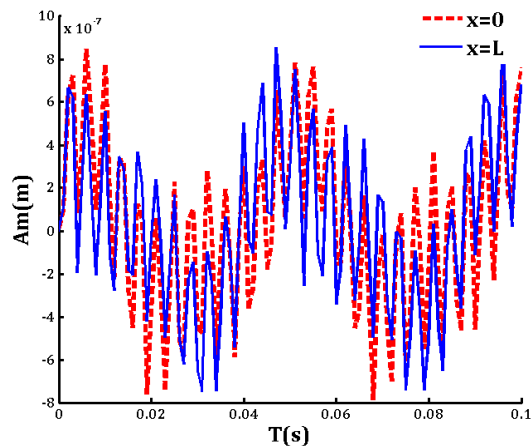
شکل ۲۵- روتور شامل یک دیسک و نابالانسی دینامیکی، جرم نابالانس دوم ۱/۵ برابر جرم اول در راستای u



شکل ۲۶- روتور شامل یک دیسک و نابالانسی دینامیکی، جرم نابالانس دوم ۲ برابر جرم اول در راستای u

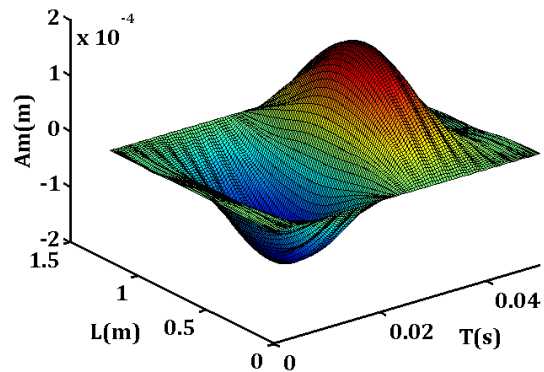


شکل ۳۱- پاسخ زمانی روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس با اختلاف فاز ۴۵ درجه در نقاط مختلف شافت در راستای u

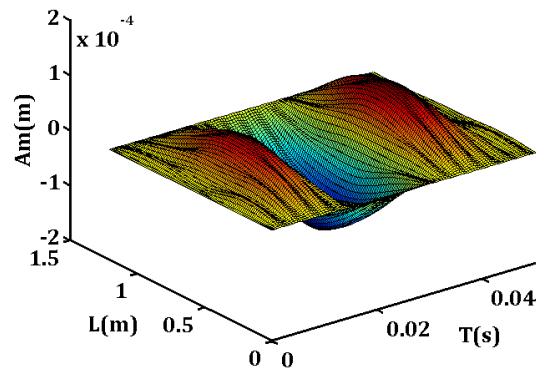


شکل ۳۲- پاسخ زمانی روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس

با اختلاف فاز ۴۵ درجه در نقاط مختلف شافت در راستای w این روتور در راستای u و w ترسیم شده است. در این اشکال روشن گردیده است که در این حالت نیز در راستای u این نقاط علاوه بر داشتن اختلاف فاز ۹۰ درجه‌ای با یکدیگر، دارای حالت آینه‌ای نیز نسبت به خط افق خواهند بود و دامنه ارتعاشات روتور در هر دو طرف شافت یکسان است؛ همچنین واضح است که در راستای w نیز مانند بخش قبل، نقاط ابتدایی و انتهایی روتور با یکدیگر دارای حالت آینه‌ای نسبت به یک خط عمود در میانه هر دور کامل خواهند بود. با ترسیم و مشاهده نمودارهای سه‌بعدی ارتعاش روشن شده است که در این حالت نیز همانند بخش قبل، دامنه ارتعاش در میانه شافت در دو راستای u و w مشابه نخواهد بود.



شکل ۲۹- نمودار سه‌بعدی تغییرات دامنه‌ی ارتعاش روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس با اختلاف فاز ۹۰ درجه در راستای u



شکل ۳۰- نمودار سه‌بعدی تغییرات دامنه‌ی ارتعاش روتور با یک دیسک و دو جرم نابالانس با اختلاف فاز ۹۰ درجه در راستای w

در این شکل روشن گردیده است که در این راستا این نقاط با یکدیگر دارای حالت آینه‌ای نسبت به یک خط عمود در میانه هر دور کامل خواهند بود. در شکل‌های ۲۹ و ۳۰، نمودارهای سه‌بعدی تغییرات دامنه ارتعاش برای دو راستای u و w آورده شده است. با دقت در نمودارهای ترسیمی روشن است که دامنه ارتعاش در میانه شافت در دو راستای u و w در این حالت رفتار مشابهی نخواهد داشت.

۶-۷- روتور شامل یک دیسک و دو جرم نابالانس با اختلاف فاز ۴۵ درجه

در این قسمت فرض می‌شود که اختلاف فاز دو جرم نابالانس در روتور ذکر شده در بخش ۴-۶، برابر ۴۵ درجه باشد. در شکل‌های ۳۱ و ۳۲ به ترتیب، پاسخ‌های زمانی نقاط مختلف

۷- نتیجه گیری

در این تحقیق یک سیستم روتور یاتاقان شامل، یک یا دو دیسک صلب و دارای انواع متفاوتی از نابالانسی، مورد مطالعه قرار گرفت. حالت‌های مختلفی از چینش دیسک و جرم نابالانس بررسی شد و روی دامنه و فاز پاسخ بحث گردید. بررسی‌های انجام شده نشان داد که موقعیت قرارگیری دیسک و جرم نابالانس روی شافت، می‌تواند سهم بسزایی در دامنه ارتعاشات نقاط مختلف شافت داشته باشد. علاوه بر آن، برای یک سیستم روتور یاتاقان انعطاف‌پذیر با چند جرم نابالانس، اختلاف فاز اجرام نابالانس با یکدیگر، تعیین کننده غالب رفتار ارتعاشی روتور خواهد بود.

در بررسی یک روتور شامل، نابالانسی استاتیکی و دو دیسک صلب روشن گردید که با توجه به فاصله دیسک‌ها از مرکز جرم روتور دامنه ارتعاش در طول شافت، به شدت تابعی از موقعیت دیسک‌ها خواهد بود. مطالعات روی نابالانسی شبه استاتیکی نشان داد که هر چه جرم نابالانس از مرکز جرم روتور دورتر گردد، اختلاف دامنه و فاز در دو یاتاقان بیشتر خواهد بود. در نابالانسی کوپلی مشاهده گردید که دامنه پاسخ در یاتاقان‌ها بزرگ بوده، این نقاط دارای اختلاف فاز ۱۸۰ درجه نسبت به یکدیگر هستند، در حالی که دامنه ارتعاش در نقطه میانی شافت برابر صفر است. بررسی نابالانسی دینامیکی نیز نشان داد که هرچه سنگینی دو جرم نابالانس به یکدیگر نزدیک‌تر باشد، اختلاف فاز پاسخ در دو یاتاقان به ۱۸۰ درجه نزدیک‌تر و نسبت دامنه ارتعاش در دو یاتاقان به میانه شافت، عدد بزرگتری خواهد بود. همچنین زمانی که اختلاف سنگینی بین دو جرم نابالانس کم باشد، دامنه ارتعاش روتور در نقطه‌ای به غیر از مرکز شافت به صفر نزدیک خواهد بود؛ در زمانی که اختلاف دو جرم نابالانس زیاد باشد، دامنه ارتعاش در طول شافت غیر صفر بوده، با افزایش این اختلاف، رفتاری شبیه به نابالانسی شبه استاتیکی از روتور دیده خواهد شد. برای دو جرم نابالانس با اختلاف فاز ۹۰ و ۴۵ درجه، پاسخ در دو یاتاقان در راستای u علاوه بر داشتن اختلاف فاز ۹۰ درجه‌ای با یکدیگر، دارای حالت آینه‌ای نیز نسبت به خط افق خواهند بود، در حالی که در راستای w نقاط ابتدایی و انتهایی روتور، دارای حالت آینه‌ای نسبت به یک خط عمود در میانه‌هر دور کامل با یکدیگر خواهند بود.

۸- علائم

سطح مقطع شافت (m^2)	A
دامنه ارتعاش (m)	A_m
میرایی یاتاقان در راستای u ($N.s/m$)	C_u
میرایی یاتاقان در راستای w ($N.s/m$)	C_w
شعاع نابالانسی (m)	d_U
مدول یانگ (GPa)	E
فرکانس (Hz)	f
سختی یاتاقان در راستای u (N/m)	K_u
سختی یاتاقان در راستای w (N/m)	K_w
طول شافت (m)	L
جرم دیسک (Kg)	M_D
جرم نابالانس (Kg)	m_U
شعاع شافت (m)	R
ممان سطح شافت (m^4)	I
ممان اینرسی دیسک، حول محور عمود بر شافت ($Kg.m^2$)	I_{dx}
ممان قطبی دیسک، حول محور شافت ($Kg.m^2$)	I_{dy}
زمان (s)	T
تغییر مکان در راستای افقی (m)	u
تغییر مکان در راستای عمودی (m)	w
علائم یونانی	
دانسیته شافت (Kg/m^3)	ρ
سرعت زاویه‌ای روتور (rad/s)	Ω
زاویه فاز جرم نابالانس (rad)	φ_U
زیرنویس‌ها	
مربوط به یاتاقان	B
مربوط به دیسک	D
شمارنده دیسک، یاتاقان و جرم نابالانس	n
مربوط به جرم نابالانس	U

۹- مراجع

- [1] Muszynska A (2005) Rotordynamics. CRC press, Taylor& Francis Group, LLC.
- [2] Tiwari R (2008) A brief history and state of the art of rotordynamics. Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology Guwahati 781039.

- bearing system. *Mech Syst Signal Process*, In Press.
- [9] Shad MR (2011) Modelling and analysis of nonlinear dynamic behaviour of rotors. PhD Thesis, University of Toulouse.
- [10] Atepor L (2008) Vibration analysis and intelligent control of flexible rotor systems using smart materials. PhD Thesis, University of Glasgow.
- [11] Choi BL, Park JM (1986) Finite element analysis of rotor bearing systems using a modal transformation matrix. *J Sound Vib* 111(3): 441-456.
- [12] Rao S (2007) *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons.
- [13] Srikrishnanivas D (2012) Rotor dynamic analysis of RM12 jet engine rotor using Ansys. Master's Degree Thesis, Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden.
- [14] Victor W (1995) *Machinery vibration: Balancing*. McGraw-Hill.
- [3] Vance J, Zeidan F, Murphy B (2010) *Machinery vibration and rotordynamics*. John Wiley & Sons, Inc, Published in Canada.
- [4] Jun OS (1999) Relation between correction masses and bearing forces in a rigid rotor. *KSME Int J* 13(11): 791-797.
- [5] Zhivotov AY, Zhivotov YG (2006) Dynamics of vertical rotor with arbitrary arrangement of static and moment unbalances. in 7th IFToMM-International Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, September 25-28.
- [6] Wenhui X, Yougang T, Yushu Ch (2008) Analysis of motion stability of the flexible rotor-bearing system with two unbalanced disks. *J Sound Vib* 310: 381-393.
- [7] Khodaei ME, Rafeeyan M, Ebrahimi S (2012) Energy loss calculation due to misalignment and unbalance in coupling-disk system. *Modares Mechanical Engineering* 12(3): 156-162. (In Persian)
- [8] Ma H (2013) Effects of eccentric phase difference between two discs on oil-film instability in a rotor-