مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۶/ دوره ۷/ شماره ۴/ صفحه ۳۴-۲۵

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2017.4785.2210

دانشگاه صنعتی شاهرود

ارتعاشات آزاد و جابه‌جایی استاتیکی میکرو ورق با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته

آرش کاظمی[۱]، رامین وطن خواه[۲،*] و مهرداد فرید[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

[۲] استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

[۳] استاد، مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۶/۲۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۷/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۹/۰۸

چکیده

در مطالعه حاضر، مدل‌سازی میکرو ورق با لایه‌های پیزوالکتریک، بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته صورت گرفته است. اضافه شدن تنها یک پارامتر به منظور لحاظ کردن اثر اندازه سیستم در نظریه تنش کوپل بهبود یافته، یکی از مزیت‌های این نظریه نسبت به دیگر نظریه‌های غیرکلاسیک مکانیک محیط پیوسته است که استفاده از آن را بسیار آسان تر کرده است و در عین حال می‌تواند مدل‌سازی دقیق‌تری را در مقایسه با نظریه کلاسیک مکانیک محیط پیوسته از سیستم‌های با ابعاد میکرو به دست دهد. مدل سازی لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از نظریه پیزوالکتریسیته خطی انجام شده است و با توجه به ضخامت کم لایه‌های پیزوالکتریک میدان الکتریکی در این لایه‌ها ثابت فرض شده است. معادله حرکت و شرایط مرزی حاکم بر سیستم به کمک اصل همیلتون بدست آورده شده است. معادله حرکت با روش اجزای محدود حل شده، اثر پارامتر اندازه و لایه‌های پیزوالکتریک بر ارتعاش آزاد و جابه‌جایی استاتیکی میکرو ورق بررسی شده است.

کلمات کلیدی: ارتعاشات آزاد؛ میکرو ورق؛ تنش کوپل بهبود یافته؛ مواد پیزوالکتریک؛ روش اجزای محدود.

Free Vibration and Static Deflection of a Micro-Plate with Piezoelectric Layers Using Modified Couple Stress Theory

A. Kazemi[1], R.Vatankhah[2,*], M. Farid[3]

[1] MSc student, Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran.

[2] Assis. Prof., Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran.

[3] Full Prof., Mech. Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran.

Abstract

In this study, a size-dependent modeling of micro plate with piezoelectric layers based on classical plate theory using modified couple stress theory is developed in this paper. Introducing only one material length scale parameter in modified couple stress theory to take into account the size effect of the system is one of the main advantage of this theory over other nonclassical continuum mechanics theories. Also, this theory is able to predict and interpret the size-dependent static and dynamic behavior of micro-scale structures with more accuracy and precision in comparison to classical continuum mechanics theory. The piezoelectric layers are modeled according to linear piezoelectricity theory and due to small thickness, the electric field is assumed to be constant over the layers. The equation of motion and its corresponding boundary conditions are derived using Hamilton principle. The equation of motion is solved numerically using finite element method and the effect of material length scale parameter and piezoelectric layers on free vibration and static deflection of micro-plate are investigated.

Keywords: Micro-Plate; Modified Couple Stress Theory; Piezoelectric Material; Finite Element Method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۷۱۳۶۱۳۳۲۴۸؛ فکس: ۰۷۱۳۶۴۷۳۵۳۳

آدرس پست الکترونیک: rvatankhah@shirazu.ac.ir

۱- مقدمه

میکرو تیرها و میکرو ورق‌ها، از اجزای اصلی در سیستم‌های الکترومکانیکی در ابعاد میکرو هستند و به میزان وسیعی در سنسورها و همچنین به عنوان سیستم تحریک در قطعات الکترومکانیکی، مورد استفاده قرار می‌گیرند[۱-۲]. اثر اندازه در این سیستم‌ها، دارای اهمیت زیادی است و باید در تحلیل های صورت گرفته در این حوزه لحاظ شود[۳-۶]. نظریه‌های کلاسیک در حوزه میکرو تیرها و میکرو ورق‌ها، به‌دلیل عدم وجود پارامتر اثر اندازه قادر به لحاظ کردن این اثر نیستند. طی سال‌های اخیر نظریه‌های مختلفی از جمله، نظریه کلاسیک تنش کوپل[۷-۸]، نظریه گرادیان کرنشی[۳،۹] و نظریه تنش کوپل بهبود یافته[۱۰] بمنظور لحاظ کردن اثر اندازه ارائه شده است. اضافه شدن تنها یک پارامتر در نظریه تنش کوپل بهبود یافته، بمنظور لحاظ کردن اثر اندازه سیستم، یکی از مزیت‌های این نظریه است که استفاده از آن را بسیار آسان تر کرده است. مدل‌سازی سیستم‌ها در ابعاد میکرو در حوزه میکروتیرها، توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است و مقالات زیادی با مدل سازی میکرو تیرها طی سال‌های اخیر به چاپ رسیده است[۱۱-۱۵]. در حوزه میکرو ورق‌ها، مطالعات کمتری صورت گرفته است که در اینجا به تعدادی از آن‌ها اشاره خواهد شد، تسیتاس[۱۶] از مدل کیرشهف برای آنالیز استاتیکی میکرو ورق با نظریه تنش کوپل بهبود یافته استفاده کرد و با حل معادلات حرکت حاکم بر سیستم، اثر پارامتر اندازه بر جابه‌جایی استاتیکی در میکرو ورق‌ها را بررسی کرد. ونگ[۱۷] با در نظر گرفتن مدل ورق کیرشهف و همچنین لحاظ کردن اثر انرژی سطحی، به بررسی پدیده ناپایداری فروکشیدگی در میکرو ورق‌ها پرداخت. اصغری[۱۸] مدل ورق کیرشهف همراه با اثر غیر خطی هندسی را با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته، مورد بررسی قرار داد. راکو، فریرا و ردی[۱۹] ، با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته و روش بدون مش، پاسخ استاتیکی برای میکرو ورق با تکیه گاه گیردار و ساده را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول در ورق بدست آوردند. شات[۲۰] با استفاده از یک مدل جدید کیرشهف و نظریه تنش کوپل بهبود یافته، رفتار خمشی یک میکرو ورق در ابعاد نانو با در نظر گرفتن اثر انرژی سطحی را بررسی کرد. جمعه‌زاده [۲۱] با در نظر گرفتن مدل ورق کیرشهف اثر پارامتر اندازه بر فرکانس طبیعی میکرو ورق‌های مستطیلی و دایره ای را مطالعه کرد. ونگ[۲۲] با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته، یک الگوریتم برای ارتعاش آزاد در میکرو ورق‌های دایره‌ای نامقارن خطی و غیرخطی ارائه کرد. تائی[۲۳] با در نظر گرفتن مدل میندلین و با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته، مدل خطی و غیر خطی برای میکرو ورق‌های مستطیلی ارائه کرد.

مواد پیزو الکتریک بدلیل خواص مناسب مکانیکی و الکتریکی و همچنین قابلیت بالا در تبدیل انرژی الکتریکی به مکانیکی و برعکس، به میزان زیادی در سیستم‌های الکترومکانیکی در ابعاد میکرو مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله این موارد می‌توان به استفاده در سیستم‌های ذخیره اطلاعات[۲۴]، سیستم‌های خنک کننده[۲۵]، ذخیره سازی انرژی[۲۶] و کنترل اغتشاش و ارتعاشات[۲۷] اشاره کرد. تحلیل استاتیکی و دینامیکی مواد پیزوالکتریک، توسط تعدادی از محققان صورت گرفته است[۲۸-۲۹]. طی سال‌های اخیر استفاده از مواد پیزوالکتریک به صورت لایه‌های متصل به مواد دیگر در سیستم‌های با ابعاد بزرگ به‌منظور کنترل ارتعاشات، مورد توجه قرار گرفته است[۳۰-۳۲]. استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک در سیستم‌های با ابعاد میکرو نیز، دارای اهمیت زیادی است. کالت[۳۳] از لایه‌های پیزوالکتریک برای کنترل تیر اویلر-برنولی استفاده کرد. رضازاده[۳۴] با استفاده از لایه های پیزوالکتریک و مدل تیر اولر-برنولی، اثر مواد پیزوالکتریک بر پدیده فروکشیدگی را بررسی کرد. مدل سازی‌های دیگری نیز با استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک در میکرو تیرها صورت گرفته است[۳۵-۳۶]همانگونه که گفته شد، استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک در سیستم‌ها در ابعاد میکرو، دارای اهمیت زیادی است؛ اما مدل‌سازی میکرو ورق با لایه‌های پیزوالکتریک به میزان کمی صورت گرفته است و با توجه به جستجوهای انجام شده توسط نویسنده، مدل سازی میکرو ورق با لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته تا به امروز صورت نگرفته است. از این رو در مطالعه حاضر با استفاده از مدل ورق کیرشهف و نظریه تنش کوپل بهبود یافته، مدل میکرو ورق با لایه‌های پیزوالکتریک ساخته خواهد شد و سپس معادله حرکت حاکم بر سیستم با استفاده از اصل همیلتون بدست خواهد آمد. معادله بدست آمده با روش

اجزای محدود حل شده، اثر پارامتر اندازه و لایه‌های پیزوالکتریک بر ارتعاش آزاد و جابجایی استاتیکی یک میکرو ورق با تکیه گاه ساده بررسی خواهد شد.

۲- نظریه تنش کوپل بهبود یافته

بر اساس نظریه تنش کوپل بهبود یافته، انرژی کرنشی ناشی از خمش، تابعی از کرنش و انحنا در جسم است[۱۰]. تغییرات انرژی کرنشی در یک جسم الاستیک خطی، به صورت رابطه (۱) نوشته می‌شود [۱۰].

$$\delta U=\int_{\Omega}(\sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}+m_{ij}\delta\chi_{ij})d\Omega \tag{۱}$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش، $\boldsymbol{\varepsilon}$ تانسور کرنش، $\mathbf{m}$ جزء انحرافی در تانسور تنش کوپل و $\boldsymbol{\chi}$ تانسور متقارن انحنا است که به صورت روابط (۲-۵) تعریف می‌شوند [۱۰]

$$\sigma_{ij}=\lambda \boldsymbol{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{۲}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}((\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})_{\boldsymbol{ij}}+(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})_{\boldsymbol{ij}}^{T}) \tag{۳}$$

$$\chi_{ij}=\frac{1}{2}((\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{ij}}+(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta})_{\boldsymbol{ij}}^{T}) \tag{۴}$$

$$m_{ij}=2\mu l^2\chi_{ij}=\beta\chi_{ij} \tag{۵}$$

که λ و μ ثابت‌های لامه، $\boldsymbol{u}$ بردار جابجایی، l پارامتر اندازه ماده و $\boldsymbol{\theta}$ بردار چرخش است که به صورت رابطه (۶) بیان می‌شود [۱۰]

$$\boldsymbol{\theta}=\frac{1}{2}curl(\mathbf{u}) \tag{۶}$$

همانطور که از روابط مشخص است، با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته تنها متغیر l، به ثابت‌های لامه در مدل سازی اضافه خواهد شد.

۳- مدل سازی ورق کیرشهف بر اساس نظریه تنش کوپل بهبودیافته

در شکل ۱ نمای یک میکرو ورق به طول L، عرض H، چگالی ρ، ضخامت $2h$ و ضریب الاسیسیته E با لایه‌های پیزوالکتریک نشان داده شده است. طول و عرض لایه‌های پیزوالکتریک، برابر با ابعاد ورق در نظر گرفته شده، ولی ضخامت لایه‌های پیزو الکتریک، بسیار کمتر از ضخامت ورق در نظر گرفته شده است. محور x در راستای طول و محور y در راستای عرض ورق و منطبق بر صفحه میانی در نظر گرفته شده‌اند؛ همچنین جابجایی عرضی ورق به سمت پایین مثبت در نظر گرفته شده است. مطابق با مدل ورق کیرشهف، جابجایی در راستاهای مختلف ورق به صورت روابط (۷-۹) نوشته می‌شود [۳۷].

$$u=-z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial x} \tag{۷}$$

$$v=-z\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y} \tag{۸}$$

$$w(x,y,z,t)=w(x,y,t) \tag{۹}$$

که u، v و w به‌ترتیب، جابه‌جایی در راستای x، y و z هستند. برای میکرو ورق‌ها در حالت کرنش‌های کوچک، مولفه‌های کرنش مربوط به معادله (۷) تا (۹) به صورت روابط (۱۰-۱۲) نوشته می‌شوند [۳۷].

$$\varepsilon_{11}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{۱۰}$$

$$\varepsilon_{22}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{۱۱}$$

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{۱۲}$$

مولفه‌های غیر صفر در روابط (۵) و (۶) نیز به صورت روابط (۱۳-۱۷) نوشته می‌شود.

$$\theta_1=\frac{\partial w}{\partial y} \tag{۱۳}$$

$$\theta_2=-\frac{\partial w}{\partial x} \tag{۱۴}$$

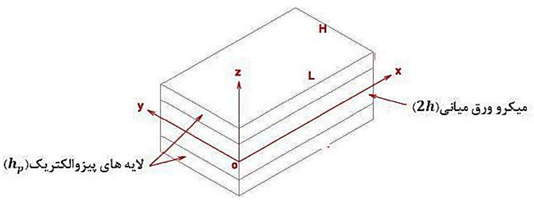
$$\chi_{11}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{۱۵}$$

$$\chi_{12}=\chi_{21}=\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \tag{۱۶}$$

$$\chi_{22}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{۱۷}$$

معادله حرکت و شرایط مرزی برای میکرو ورق، به کمک اصل همیلتون بدست خواهد آمد. اصل همیلتون به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود[۳۸].

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta(K.E)-\delta U+\delta W)dt=0 \tag{۱۸}$$



شکل ۱- نمای میکرو ورق با لایه‌های پیزوالکتریک

که در آن $\delta K.E$ تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنشی و δW کار مجازی نیروهای خارجی است. انرژی جنبشی در میکرو ورق را به شکل رابطه (۱۹) می‌توان نوشت.

$$K.E=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho\left[(\dot{u})^2+(\dot{v})^2+(\dot{w})^2\right]d\Omega \qquad (۱۹)$$

با جایگذاری بجای u و v از روابط (۷) و (۸) تغییرات اول انرژی جنبشی به صورت رابطه (۲۰) نوشته خواهد شد.

$$\delta(K.E)=\int_{\Omega}\rho\left[\dot{u}\delta\dot{u}+\dot{v}\delta\dot{v}+\dot{w}\delta\dot{w}\right]d\Omega$$
$$=\iint\left[m_0\dot{w}\delta\dot{w}+I\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\delta\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{w}}{\partial y}\delta\frac{\partial\dot{w}}{\partial y}\right)\right]dA \qquad (۲۰)$$

که m_0 و I به صورت روابط (۲۱-۲۲) تعریف می‌شوند.

$$m_0=\int_{-h}^{h}\rho\,dz \qquad (۲۱)$$

$$I=\int_{-h}^{h}\rho z^2\,dz \qquad (۲۲)$$

با در نظر گرفتن بار گسترده عرضی (q) وارد بر میکرو ورق، کار مجازی این نیرو به شکل رابطه (۲۳) نوشته خواهد شد.

$$\delta W=\iint_{A}-q\delta w\,dA \qquad (۲۳)$$

تغییر انرژی کرنشی مجازی در میکرو ورق بر اساس نظریه تنش کوپل بهبود یافته با رابطه (۲۴) نوشته خواهد شد.

$$\delta U=\int_{\Omega}[\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}+2\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}+\sigma_{22}\delta\varepsilon_{22}+ m_{11}\delta\chi_{11}+m_{22}\delta\chi_{22}+2m_{12}\delta\chi_{12}]\,d\Omega \qquad (۲۴)$$

تنش‌های برآیند در میکرو ورق با رابطه (۲۵-۲۶) تعریف می‌شوند.

$$M_{ij}^{m}=\int_{-h}^{h}m_{ij}\,dz+\int_{-h-h_p}^{h}{m_{ij}}^{p}\,dz+\int_{h}^{h+h_p}{m_{ij}}^{p}\,dz \qquad (۲۵)$$

$$M_{ij}=\int_{-h}^{h}z\sigma_{ij}\,dz+\int_{-h-h_p}^{-h}z{\sigma_{ij}}^{p}\,dz+\int_{h}^{h+h_p}z{\sigma_{ij}}^{p}\,dz\ \ ,(ij=11,12,22) \qquad (۲۶)$$

با استفاده از تعریف تنش‌های برآیند، تغییر اول انرژی پتاسیل به صورت رابطه (۲۷) نوشته خواهد شد.

$$\delta U=\iint_{A}\Big[-M_{11}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}-2M_{12}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}- M_{22}\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}+(M_{11}^{m}-M_{22}^{m})\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}+ M_{12}^{m}\Big(\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\Big)\Big]dA \qquad (۲۷)$$

روابط متشکله برای یک ماده پیزوالکتریک خطی پولاریزه شده در راستای z ، با رابطه (۲۸) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{zz}\\ \sigma_{zy}\end{bmatrix}= \begin{bmatrix}\overline{c_{11}} & \overline{c_{12}} & 0 & 0 & 0\\ \overline{c_{12}} & \overline{c_{22}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\overline{c_{11}}-\overline{c_{22}}) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k^2\overline{c_{55}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & k^2\overline{c_{55}}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{zz}\\ \gamma_{zy}\end{bmatrix} -\begin{bmatrix}0 & 0 & e_{31}\\ 0 & 0 & e_{31}\\ 0 & 0 & 0\\ -e_{15} & 0 & 0\\ 0 & -e_{15} & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

که در آن $\overline{c_{ij}}$، e_{ijk} و E_i به ترتیب، ضرائب الاستیسیته، گذردهی الکتریکی و مولفه‌های میدان الکتریکی هستند. با توجه به ضخامت کم لایه‌های پیزوالکتریک، میدان الکتریکی در لایه‌های پیزوالکتریک ثابت و برابر با $\frac{V_p}{h_p}$ در نظرگرفته خواهد شد که V_p ولتاژ اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک و h_p ضخامت لایه پیزوالکتریک است. انرژی کرنشی ناشی از ترم الکتریکی ماده پیزوالکتریک به صورت رابطه (۲۹) بدست خواهد آمد.

$$\delta U^{p}=\iint -e_{31}V_p\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\delta\frac{\partial w}{\partial y}\right)dA \qquad (۲۹)$$

با قرار دادن معادلات (۲۰)، (۲۳)، (۲۷) و (۲۹) در معادله (۱۸)، معادله حاکم بر سیستم به شکل رابطه (۳۰) نوشته خواهد شد.

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2(M_{11}^{m}-M_{22}^{m})}{\partial x\partial y} -\frac{\partial^2 M_{12}^{m}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 M_{12}^{m}}{\partial x^2}+e_{31}V_p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) =m_0\ddot{w}-I\left(\frac{\partial^2\ddot{w}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\ddot{w}}{\partial y^2}\right)+p \qquad (۳۰)$$

و شرایط مرزی به شکل روابط (۳۱-۳۳) خواهند بود.

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x}n_1+2\frac{\partial M_{12}}{\partial x}n_2+\frac{\partial M_{22}}{\partial y}n_2 -\frac{\partial(M_{11}^{m}-M_{22}^{m})}{\partial x}n_2-\frac{\partial M_{12}^{m}}{\partial y}n_2 +\frac{\partial M_{12}^{m}}{\partial x}n_1-e_{31}V_p\frac{\partial w}{\partial x}--e_{31}V_p\frac{\partial w}{\partial y} +I\left(n_1\frac{\partial\delta\ddot{w}}{\partial x}+n_2\frac{\partial\delta\ddot{w}}{\partial y}\right)=0-\ \ or\ \delta w=0 \qquad (۳۱)$$

$$-M_{11}n_1-M_{12}^{m}n_1=0\ or-\frac{\partial\delta w}{\partial x}=0 \qquad (۳۲)$$

$$-2M_{12}n_1 - M_{22}\frac{\partial \delta w}{\partial y}n_2 + (M_{11}^m - M_{22}^m)n_1$$
$$+M_{12}^m n_2 = 0 \; - \; or \; \frac{\partial \delta w}{\partial y} = 0 \qquad (۳۳)$$

برای راحتی در حل معادله حاکم، کمیت‌های زیر به‌منظور بی بعد سازی معادله حاکم معرفی می‌شوند.

$$\bar x = \frac{x}{L},\ \bar y = \frac{y}{L},\ \bar w = \frac{w}{h},\ \bar E_{11} = \frac{\bar c_{11}}{E}$$
$$\bar E_{12} = \frac{\bar c_{12}}{E},\ \bar h = \frac{h}{h_p},\ \psi_c = \left(\frac{l}{h_p}\right)^2,$$
$$\bar\eta = \frac{\mu}{E}\ \bar J = \left(\frac{h}{L}\right)^2,\ \bar\eta_p = \frac{\mu_p}{E},$$
$$\bar k = \left(1+\bar h\right)^3 - \bar h^3, \bar q = \left(\frac{h_p}{L}\right)^2,$$
$$\tau^2 = \frac{3\rho h L^4}{Eh_p{}^3} + \frac{3\rho_p h_p L^4}{Eh_p{}^3},\ \bar V = \frac{V_p \bar e_{13}}{Eh_p},$$
$$\bar p = \frac{3L^4 p}{2Eh_p{}^3 h},\ \bar I = \bar J\frac{\rho h L^4}{Eh_p{}^3} + \bar q\frac{\rho_p h_p L^4}{Eh_p{}^3}, \qquad (۳۴)$$

معادله (۳۰) بر حسب متغیرهای بی بعد به صورت رابطه (۳۵) نوشته خواهد شد.

$$\frac{\partial^2 \bar M_{11}}{\partial \bar x^2} + 2\frac{\partial^2 \bar M_{12}}{\partial \bar x\partial \bar y} + \frac{\partial^2 \bar M_{22}}{\partial \bar y^2} - \frac{\partial^2(\bar M_{11}^m - \bar M_{22}^m)}{\partial \bar x\partial \bar y}$$
$$-\frac{\partial^2 \bar M_{12}^m}{\partial \bar y^2} + \frac{\partial^2 \bar M_{12}^m}{\partial \bar x^2} + \frac{3\bar V}{\bar q}\left(\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x^2} + \frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar y^2}\right)$$
$$= \ddot{\bar w} - \bar I\left(\frac{\partial^2 \ddot{\bar w}}{\partial \bar x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{\bar w}}{\partial \bar y^2}\right) + \bar p \qquad (۳۵)$$

تنش‌های برآیند بی بعد در معادله (۳۵)، به صورت روابط (۳۶-۴۰) تعریف می‌شوند.

$$\bar M_{11} = \bar R_{11}\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x^2} + \bar R_{22}\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar y^2} \qquad (۳۶)$$

$$\bar M_{11} = +\bar R_{22}\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x^2} + \bar R_{11}\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar y^2} \qquad (۳۷)$$

$$2\bar M_{12} = \bar R_{12}\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x\partial \bar y} \qquad (۳۸)$$

$$\bar M_{11}^m - \bar M_{22}^m = \bar R^m{}_{12}\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x\partial \bar y} \qquad (۳۹)$$

$$\bar M_{12}^m = \bar R^m{}_{66}\left(\frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar y^2} - \frac{\partial^2 \bar w}{\partial \bar x^2}\right) \qquad (۴۰)$$

که ثابت‌های $\bar R_{11}$، $\bar R_{22}$، $\bar R_{12}$ و $\bar R^m{}_{12}$ به صورت روابط (۴۱-۴۵) بیان می‌شوند.

$$\bar R_{11} = \frac{\bar h^3}{1-\upsilon^2} + \bar E_{11}\bar k \qquad (۴۱)$$

$$\bar R_{22} = \frac{\upsilon\bar h^3}{1-\upsilon^2} + \bar E_{12}\bar k \qquad (۴۲)$$

$$\bar R_{12} = \frac{2\bar h^3}{1+\upsilon} + 2(\bar E_{11} - \bar E_{12})\bar k \qquad (۴۳)$$

$$\bar R^m{}_{12} = 12\bar\eta\psi_c\bar h + 12\bar\eta_p\psi_p \qquad (۴۴)$$

$$\bar R^m{}_{66} = 3\bar\eta\psi_c\bar h + 6\bar\eta_p\psi_p \qquad (۴۵)$$

۴- مدل اجزای محدود

برای حل معادله (۳۵) به روش اجزای محدود می‌بایست فرم ضعیف شده معادله (۳۵) روی یک المان ساخته شود. با در نظر گرفتن H به عنوان تابع تست، فرم ضعیف شده معادله (۳۵) به‌صورت رابطه (۴۶) نوشته خواهد شد.

$$\iint_{\Omega_e}\Big[\bar M_{11}\frac{\partial^2 H}{\partial \bar x^2} + \bar M_{22}\frac{\partial^2 H}{\partial \bar y^2} - 2\bar M_{12}\frac{\partial^2 H}{\partial \bar x\partial \bar y} - (\bar M_{11}^m - \bar M_{22}^m)\frac{\partial^2 H}{\partial \bar x\partial \bar y} - \bar M_{12}^m\frac{\partial^2 H}{\partial \bar y^2} + \bar M_{12}^m\frac{\partial^2 H}{\partial \bar x^2} + \frac{3\bar V}{\bar q}\left(\frac{\partial H}{\partial \bar x}\frac{\partial \bar w}{\partial \bar x} + \frac{\partial H}{\partial \bar y}\frac{\partial \bar w}{\partial \bar y}\right) - H\ddot{\bar w} + \bar I\left(\frac{\partial H}{\partial \bar x}\frac{\partial \ddot{\bar w}}{\partial \bar x} + \frac{\partial H}{\partial \bar y}\frac{\partial \ddot{\bar w}}{\partial \bar y}\right) - H\bar p\Big]d\Omega_e + \oint_{\Gamma_e}\Big[H\Big(\frac{\partial \bar M_{11}}{\partial \bar x}n_x + \frac{\partial \bar M_{22}}{\partial \bar y}n_y - 2\frac{\partial \bar M_{12}}{\partial \bar y}n_y - \frac{\partial(\bar M_{11}^m - \bar M_{22}^m)}{\partial \bar y}n_x - \frac{\partial \bar M_{12}^m}{\partial \bar y}n_y + \frac{\partial \bar M_{12}^m}{\partial \bar x}n_x + \bar I\Big(\frac{\partial \ddot{\bar w}}{\partial \bar x}n_x + \frac{\partial \ddot{\bar w}}{\partial \bar y}n_y\Big)\Big) + \frac{\partial H}{\partial \bar x}\left(-\bar M_{11}n_x + (\bar M_{11}^m - \bar M_{22}^m)n_y - \bar M_{12}^m n_x\right) + \frac{\partial H}{\partial \bar y}\left(-\bar M_{22}n_y + \bar M_{12}^m n_y\right)\Big]d\Gamma_e \qquad (۴۶)$$

در روش اجزای محدود تابع تست را می‌توان مطابق با معادله (۴۷) برحسب مقادیر گره ای و توابع شکل مناسب بیان کرد.

$$H(x,y) = \Delta_i\psi^e{}_i(x,y) \qquad (۴۷)$$

از معادله (۴۶) مشخص می‌شود که توابع شکل می‌بایست تا مشتقات مرتبه دوم پیوسته باشند، بر این اساس توابع شکل مستطیلی غیر همنوا با سه درجه آزادی در هرگره انتخاب شده است[۳۹].

$$\psi_i^e = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(2+\xi\xi_i+\eta\eta_i-\xi^2-\eta^2), i = 1,4,7,10$$
$$\psi_i^e = \frac{1}{8}\xi_i(\xi\xi_i-1)(1+\eta\eta_i)(1+\xi\xi_i)^2, i = 2,5,8,11$$
$$\psi_i^e = \frac{1}{8}\eta_i(\eta\eta_i-1)(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)^2, i = 3,6,9,12 \qquad (۴۸)$$

(ξ_i,η_i) دستگاه مختصات محلی است که در مرکز المان مستطیلی به طول a و عرض b قرار گرفته است. ξ و η به صورت رابطه (۴۹) تعریف می‌شوند.

$$\eta = \frac{y-y_c}{b},\ \xi = \frac{x-x_c}{a} \qquad (۴۹)$$

معادلات حرکت حاکم بر سیستم برای یک المان به شکل رابطه (۵۰) خواهد بود.

$$[M]^e[\ddot{\bar w}]^e + [K]^e[\bar w]^e = [F]^e \qquad (۵۰)$$

که مولفه‌های ماتریسی سختی، ماتریس جرم و بردار نیرو بـه صورت روابط (۵۱-۵۳) نوشته می‌شوند.

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} [(\bar{R}_{11} + \bar{R}^{m}{}_{66}) \frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial \bar{x}^2} + (\bar{R}_{11} - \bar{R}^{m}{}_{66}) \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial \bar{y}^2} + (\bar{R}_{22} - \bar{R}^{m}{}_{66}) \left(\frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial \bar{x}^2} \right) + (\bar{R}_{12} + \bar{R}^{m}{}_{12}) \left(\frac{\partial^2 \psi_i^e}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \psi_j^e}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right) + \frac{3\,\bar{V}}{\bar{q}} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \bar{y}} \right)] d\Omega \qquad (۵۱)$$

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} [\psi_i^e \psi_j^e - \bar{I} \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial \bar{y}} \right)] d\Omega \qquad (۵۲)$$

$$F_i = \iint_{\Omega} (\bar{p}) d\Omega \qquad (۵۳)$$

۵- حل عددی و نتایج

۵-۱- ارتعاش آزاد

به منظور اعتبارسنجی مدل استفاده شده در مقاله حاضر، چهار فرکانس طبیعی اول بی بعد شده بدون در نظر گرفتن لایه‌های پیزوالکتریک با معادله (۵۴) استفاده شده توسط رائو [۴۰] مقایسه شده است و نتایج در جدول ۱ ارائه شده است. برای مش‌بندی از المان‌های مربعی به طول ۰/۲ استفاده شده است. برای بررسی همگرایی حل عددی انجام شده، تغییرات نسبت فرکانس اصلی در نظریه تنش کوپل بهبود یافته، به فرکانس اصلی در نظریه کلاسیک به ازای تعداد المان‌های مختلف در شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که مشخص است، نتایج برای شبکه بندی با ۵ المان روی هر ضلع به همگرایی رسیده است. مشخصات هندسی و خواص مکانیکی مدل، در جدول ۲ ارائه شده است.

$$\omega_{mn} = \pi^2 [m^2 + (\frac{L}{H}) n^2] \qquad (۵۴)$$

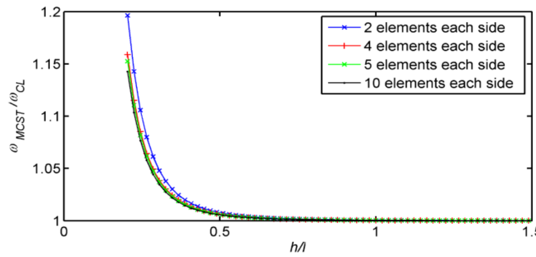
برای بررسی اثر پارامتر اندازه بر سیستم، نسبت $\frac{\omega_{MCST}}{\omega_{CL}}$ در ولتاژ ۱-، ۰ و ۳+ ولت به ازای مقادیر مختلف پارامتر اندازه در شکل ۳، ۴ و ۵ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۳ دیده می‌شود، در ولتاژهای منفی پارامتر اندازه دارای تاثیر بیشتری است و همچنین با افزایش ولتاژ، از تاثیر پارامتر اندازه بر نسبت $\frac{\omega_{MCST}}{\omega_{CL}}$ کاهش می‌یابد.

جدول ۱- مقایسه چهار فرکانس طبیعی اول بی بعد شده با معادله(۵۴) [۴۰]

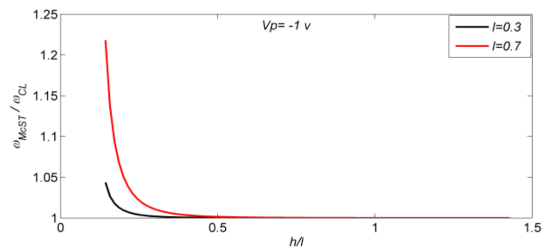
$\frac{L}{H}$		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
		SSSS			
۱	مدل حاظر	۱۹/۳۷۸	۴۹/۱۶۳	۴۹/۳۴۹	۷۶/۴۲۶
	معادله (۵۷)	۱۹/۳۷۹	۴۹/۳۴۸	۴۹/۳۴۸	۷۸/۹۵۶
۰/۵	مدل حاظر	۱۲/۵۱۱	۱۹/۸۸۲	۳۲/۳۱۰	۴۳/۲۹۷
	معادله (۵۷)	۱۲/۳۷۷	۱۹/۷۳۲	۳۲/۰۷۴	۴۱/۱۹۱
۰/۱	مدل حاظر	۱۰/۴۲۳	۱۰/۷۰۳	۱۱/۱۸۷	۱۱/۸۷۲
	معادله (۵۷)	۹/۹۶۸	۱۰/۲۴۶	۱۰/۷۵۷	۱۱/۴۴۸

جدول ۲- مشخصات هندسی و خواص مکانیکی

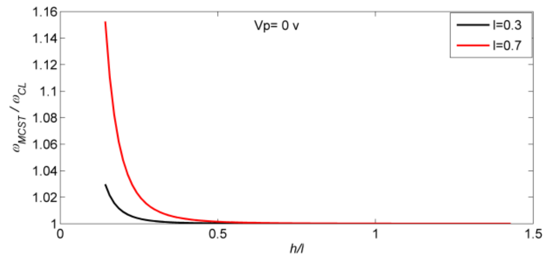
	ورق	لایه های پیزوالکتریک
عرض(μm)	۱۰۰	۱۰۰
طول(μm)	۱۰۰	۱۰۰
ضخامت (μm)	۳	۰/۰۱
ضریب الاسیسته(Gpa)	۱۶۹	–
نسبت پواسون	۰/۳	۰/۳
چگالی(kg/m^3)	۲۳۲۰	۵۷۰۰
$\bar{e}_{31}(cm^{-2})$	-	-۴/۱
$\bar{c}_{11}(Gpa)$	-	۱۳۲
$\bar{c}_{12}(Gpa)$	-	۷۱



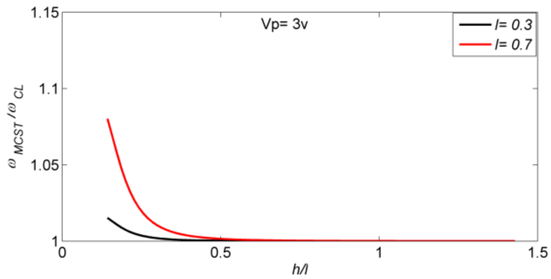
شکل ۲- تغیرات نسبت فرکانس طبیعی اصلی نظریه تنش کوپل بهبود یافته به نظریه کلاسیک



شکل ۳- تغییرات نسبت $\frac{\omega_{MCST}}{\omega_{CL}}$ نسبت به $\frac{h}{l}$ با اختلاف پتاسیل ۱- در لایه‌های پیزوالکتریک(V_p=-1 v)



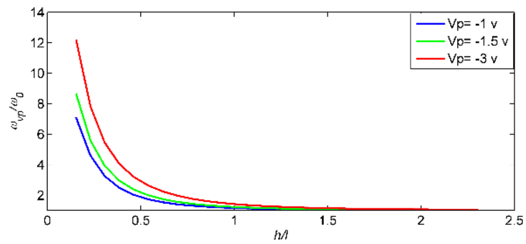
شکل ۴- تغییرات نسبت $\frac{\omega_{MCST}}{\omega_{CL}}$ نسبت به $\frac{h}{l}$ با اختلاف پتاسیل صفر در لایه‌های پیزوالکتریک(V_p=0 v)



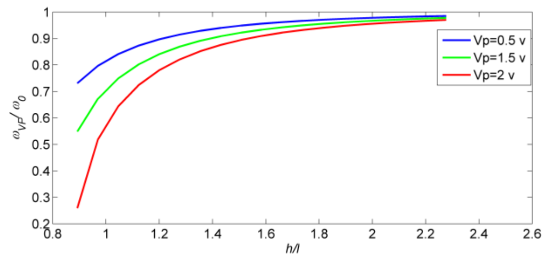
شکل ۵- تغییرات نسبت $\frac{\omega_{MCST}}{\omega_{CL}}$ نسبت به $\frac{h}{l}$ با اختلاف پتاسیل ۳+ در لایه‌های پیزوالکتریک(V_p=+3v)

به منظور بررسی اثر ولتاژ اعمالی بر لایه‌های پیزوالکتریک، تغییرات نسب فرکانس طبیعی اصلی در ولتاژهای مختلف، به فرکانس طبیعی در ولتاژ صفر($\frac{\omega_{vp}}{\omega_0}$) به ازای ولتاژهای مختلف در شکل ۶ و ۷ نشان داده شده است. (ω_0 فرکانس طبیعی اصلی به ازای ولتاژ V=0 است). در ولتاژهای منفی با کاهش اختلاف پتاسیل در لایه‌های پیزوالکتریک، فرکانس طبیعی اصلی کاهش می‌یابد و همانطور که در شکل ۶ مشخص است، این کاهش تا $\frac{h}{l} = 1.5$ صورت می‌گیرد و در نسبت $\frac{h}{l}$ بزرگتر، کاهش اختلاف پتاسیل تاثیری بر فرکانس طبیعی اصلی نخواهد داشت. در ولتاژهای مثبت با افزایش اختلاف پتاسیل در لایه‌های پیزوالکتریک، فرکانس طبیعی اصلی کاهش می‌یابد و همانطور که در شکل ۷ مشخص است، این کاهش تا $\frac{h}{l} = 3$ صورت می‌گیرد و در نسبت $\frac{h}{l}$ بزرگتر، افزایش اختلاف پتاسیل تاثیری بر فرکانس طبیعی اصلی نخواهد داشت.

در جدول ۳ و ۴ نسبت چهار فرکانس طبیعی اول با اختلاف پتانسیل‌های مختلف در لایه‌های پیزوالکتریک، نسب به فرکانس طبیعی به ازای اختلاف پتاسیل صفر در لایه‌های پیزوالکتریک برای ورق با اندازه‌های متفاوت آورده شده است



شکل ۶- تغییرات $\frac{\omega_{vp}}{\omega_0}$ نسبت به $\frac{h}{l}$ به ازای ولتاژ منفی اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک(l =.65)



شکل ۷-تغییرات $\frac{\omega_{vp}}{\omega_0}$ نسبت به $\frac{h}{l}$ به ازای ولتاژ مثبت اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک(l =.65)

و نشان می‌دهد که اثر ولتاژ اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک در ورق با نسبت طول به عرض ۰/۵، بیشتر از ورق مربعی است.

۵-۲- جابجایی استاتیکی

به منظور بررسی اثر لایه‌های پیزوالکتریک بر جابجایی میکرو ورق، تغییرات نسبت $\frac{w}{h}$ برای صفحه میانی ورق و در وسط ورق($y = \frac{H}{2}$) تحت بار گسترده خارجی و به ازای اختلاف پتاسیل‌های مختلف، مورد بررسی قرار گرفته است. مقدار $\bar{p} = 10$ در نظر گرفته شده است. در شکل ۸، جابه‌جایی صفحه میانی در ولتاژ صفر به ازای مقادیر مختلف پارامتر اندازه رسم شده است و نشان می‌دهد که با افزایش مقدار پارامتر اندازه، جابه‌جایی صفحه میانی میکرو ورق کاهش می یابد.

در شکل ۹، جابه‌جایی صفحه میانی به ازای اختلاف پتانسل های منفی رسم شده است و نشان می‌دهد که با کاهش اختلاف پتانسیل اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک، جابه‌جایی در صفحه میانی کاهش می‌یابد. در واقع در این حالت اثر الکتریکی ماده پیزوالکتریک، باعث کشیدگی در ورق شده، سختی ورق را افزایش می‌دهد. در شکل ۱۰،

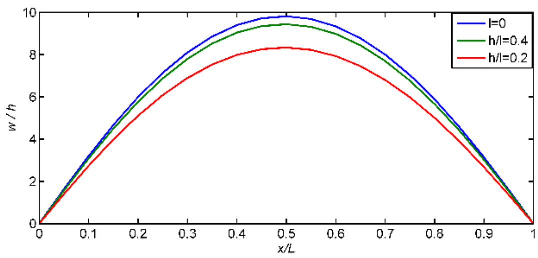
جابه‌جایی صفحه میانی به ازای اختلاف پتانسل‌های مثبت رسم شده است و نشان می‌دهد که با افزایش اختلاف پتانسیل اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک، جابه‌جایی در صفحه میانی افزایش می‌یابد. در واقع در این حالت اثر الکتریکی ماده پیزوالکتریک، باعث فشردگی در ورق می‌شود و سختی ورق را کاهش می دهد.

جدول ۳- نسبت مقادیر فرکانس طبیعی در ولتاژهای منفی به فرکانس طبیعی در ولتاژ صفر در لایه‌های پیزوالکتریک($\frac{h}{l} = 1.5$)

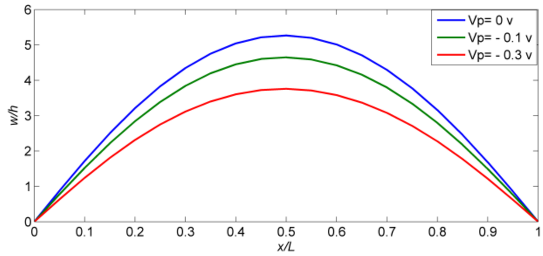
$\frac{L}{H}$	V_p	$\frac{(\omega_1)_{V_p}}{(\omega_1)_0}$	$\frac{(\omega_2)_{V_p}}{(\omega_2)_0}$	$\frac{(\omega_3)_{V_p}}{(\omega_3)_0}$	$\frac{(\omega_4)_{V_p}}{(\omega_4)_0}$
	-۱	۱/۰۴۵۹	۱/۰۱۸۸	۱/۰۱۸۵	۱/۰۱۲۶
۱	-۲	۱/۰۶۸۱	۱/۰۲۸۸	۱/۰۲۷۷	۱/۰۱۸۸
	-۳	۱/۱۳۲۱	۱/۰۵۵۳	۱/۰۵۴۷	۱/۰۳۷۴
	-۱	۱/۰۶۹۳	۱/۰۴۴۶	۱/۰۲۸۰	۱/۰۲۰۶
۰/۵	-۲	۱/۱۰۲۴	۱/۰۶۶۲	۱/۰۴۱۸	۱/۰۳۰
	-۳	۱/۱۹۶۰	۱/۱۲۸۶	۱/۰۸۱۹	۱/۰۶۰۶

جدول ۴- نسبت مقادیر فرکانس طبیعی در ولتاژهای مثبت به فرکانس طبیعی در ولتاژ صفر در لایه‌های پیزوالکتریک ($\frac{h}{l} = 1.5$)

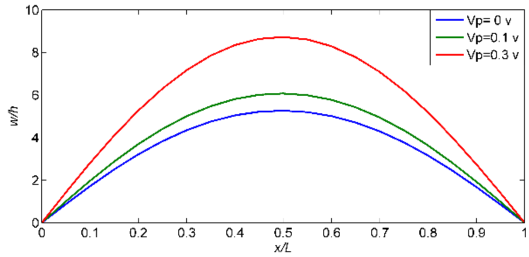
$\frac{L}{H}$	V_p	$\frac{(\omega_1)_{V_p}}{(\omega_1)_0}$	$\frac{(\omega_2)_{V_p}}{(\omega_2)_0}$	$\frac{(\omega_3)_{V_p}}{(\omega_3)_0}$	$\frac{(\omega_4)_{V_p}}{(\omega_4)_0}$
	۰/۵	۰/۹۵۱۸	۰/۹۸۰۸	۰/۹۸۱۰	۰/۹۸۷۲
۱	۱/۵	۰/۹۲۶۸	۰/۹۷۱۰	۰/۹۷۱۴	۰/۹۸۰۷
	۲	۰/۹۰۱۱	۰/۹۶۱۲	۰/۹۶۱۸	۰/۹۷۴۲
	۰/۵	۰/۹۲۵۴	۰/۹۵۳۲	۰/۹۷۱۱	۰/۹۷۸۹
۰/۵	۱/۵	۰/۸۸۵۷	۰/۹۲۸۲	۰/۹۵۶۳	۰/۹۶۸۲
	۲	۰/۸۴۴۲	۰/۹۰۴۰	۰/۹۴۱۳	۰/۹۵۷۴



شکل ۸- جابه‌جایی صفحه میانی میکرو ورق به ازای مقادیر مختلف l



شکل ۹- تغییرات $\frac{w}{h}$ به ازای ولتاژ منفی اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک($l = 0.25$)



شکل ۱۰- تغییرات $\frac{w}{h}$ به ازای ولتاژ مثبت اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک($l = 0.25$)

۶- نتیجه گیری

هدف اصلی در مطالعه حاضر، بررسی اثر لایه‌های پیزوالکتریک بر ارتعاش آزاد و جابه‌جایی استاتیکی در میکرو ورق‌ها با لحاظ کردن اثر اندازه بوده است. برای مدل‌سازی از مدل ورق کیرشهف استفاده شده، انرژی ناشی از تغییر فرم با استفاده از نظریه تنش کوپل بهبود یافته بدست آورده شده است. لایه‌های پیزوالکتریک با ضخامت کم در نظر گرفته شده است و مطابق با نظریه پیزوالکتریسته خطی، مدل‌سازی شده‌اند. معادله حرکت حاکم بر سیستم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده، با حل عددی به روش اجزای محدود ارتعاشات آزاد و جابه‌جایی استاتیکی در میکرو ورق با لایه‌های پیزوالکتریک، مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل از مطالعه حاضر به صورت زیر ارائه می‌شوند.

- اثر پارامتر اندازه در اختلاف پتاسیل‌های منفی بیشتر از اختلاف پتاسیل‌های مثبت است و با کاهش اختلاف پتانسیل اثر پارامتر اندازه بر فرکانس طبیعی میکرو ورق افزایش می‌یابد.
- در ولتاژهای منفی با کاهش ولتاژ اعمالی به لایه های پیزوالکتریک مقدار($\frac{\omega_{vp}}{\omega_0}$) کاهش می‌یابد و

با افزایش نسبت $\frac{h}{l}$ به میزان مشخصی (۱.۵) کاهش ولتاژ اعمالی به لایه‌های پیزو الکتریک تاثیری بر فرکانس طبیعی نخواهد داشت.

- در ولتاژهای مثبت با افزایش ولتاژ اعمالی به لایه های پیزوالکتریک مقدار($\frac{\omega_{vp}}{\omega_0}$) کاهش می‌یابد و با افزایش نسبت $\frac{h}{l}$ به میزان مشخصی (۳) افزایش ولتاژ اعمالی به لایه‌های پیزو الکتریک تاثیری بر فرکانس طبیعی نخواهد داشت.
- تاثیر ولتاژ اعمالی به لایه‌های پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی در میکرو ورق با نسبت طول به عرض ۰/۵ بیشتر از میکرو ورق مربعی است.
- با افزایش مقدار پارامتر اندازه، جابه‌جایی میکرو ورق کاهش می‌یابد.
- اعمال اختلاف پتانسیل منفی به لایه‌های پیزوالکتریک، جابه‌جایی استاتیکی میکرو ورق را کاهش می‌دهد و با کاهش ولتاژ اعمالی، جابه‌جایی میکرو ورق کوچکتر می‌شود. با اعمال اختلاف پتانسیل مثبت به لایه‌های پیزوالکتریک، جابه‌جایی استاتیکی میکرو ورق افزایش می‌یابد و با افزایش ولتاژ اعمالی، جابه‌جایی میکرو ورق بزرگتر می‌شود.

۷- مراجع

[1] Elwespoek M, Wiegerink R (2001) Mechanical micro sensors. Springer, Berlin.

[2] Varadan VM, Vinoy KJ, Jose KA (2003) RF MEMS and their applications. Wiley, New York.

[3] Lam DCC, Yang F, Chong ACM, Wang J, Tong P (2003) Experiments and theory in strain gradient elasticity. J Mech Phys Solids 51(8):1477-508.

[4] Liu D, He Y, Tang X, Ding H, Hu P, Cao P (2012) Size effects in the torsion of micro- scale copper wires: experiment and analysis. Scr Mater 66(6): 406-409.

[5] Liu D, He Y, Dunstan DJ, Zhang B, Gan Z, Hu P, Ding H (2013) An ominous plasticity in the cyclic torsion of micron scale metallic wires. Phys Rev Lett 110(24): 244301.

[6] Tang C, Alici G (2011) Evaluation of length-scale effects for mechanical behavior of micro-and nanocantilevers II. Experimental verification of deflection models using atomic force microscopy. J Phys D ApplPhys 44(33): 335502.

[7] Toupin RA (1962) Elastic materials with couple-stresses. Arch Ration Mech Anal 11(1): 385-414.

[8] Mindlin RD, Tiersten HF (1962) Effects of couple-stresses in linear elasticity. ArchRation MechAnal 11(1): 415-448.

[9] Mindlin RD (1964) Micro-structure in linear elasticity. Arch Ration Mech Anal 16(1): 51-78.

[10] Yang F, Chong ACM, Lam DCC, Tong P(2002) Couple stress based strain gradient theory for elasticity. Int J Solids Struct 39(10): 2731-2743.

[11] Salamat-talab M, Nateghi A, Torabi J (2012) Static and dynamic analysis of third-order shear deformation FG micro beam based on modified couple stress theory. Int J Mech Sci 57 :63-73.

[12] Vatankhah R, Kahrobaiyan MK (2016) Investigation of size-dependency in free-vibration of micro-resonators based on the strain gradient theory. Lat Am J Solids Struct 13.

[13] Akgöz B, Civalek Ö (2014) A new trigonometric beam model for buckling of strain gradient microbeams. Int J Mech Sci 81: 88-94.

[14] Darijani H, Mohammadabadi H (2014) A new deformation beam theory for static and dynamic analysis of microbeams. Int J Mech Sci 89: 31-39.

[15] Vatankhah R, Najafi A, Salariehb H, Alasty A (2013) Boundary stabilization of non-classical micro-scale beams. Appl Math Model 37: 8709-8724.

[16] Tsiatas GC (2009) A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory. Int J Solids Struct 46: 2757-2764.

[17] Wang KF, Kitamura T, Wang B (2015) Nonlinear pull in instability and free vibration of micro/ nano scale plates with surface energy–A modified couple stress theory model. Int J Mech Sci 99: 288-296.

[18] Asghari M (2012) Geometrically nonlinear micro-plate for formulation based on the modified couple stress theory. Int J Eng Sci 51: 292-309.

[19] Roque CMC, Ferreira AJM, Reddy JN (2013) Analysis of Mindlin micro plates with a modified couple stress theory and a meshless method. Appl Math Model 37: 4626-4633

[20] Shaat M, Mahmoud FF, Gao XL, Faheem AF (2014) Size-dependent bending analysis of Kirchhoff nano-plates based on a modified couple-stress theory including surface effects. Int J Mech Sci 79: 31-37.

[21] Jomehzadeh E, Noori HR, Saidi AR (2011) The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory. Physica E 43: 877-883.

[22] Wang Y-G, Lin W-H, Liu N (2013) Large amplitude free vibration of size-dependent circular micro plates based on the modified couple stress theory. Int J Mech Sci 71: 51-57.

[23] Thai HT, Choi DH (2013) Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory. Compos Struct 95:142–53.

[23] Sumali H, Meissner K, Cudney H.H, (2001) A piezoelectric array for sensing vibration modal coordinates. Sensors and Actuators A 93: 123-131.

[24] Wu T (2003) Modeling and design of a novel cooling device for microelectronics using piezoelectric resonating beams. PhD Thesis Department of Mechanical and Aerospace Engineering, North Carolina State University.

[25] Cortes DH, Datta SK, Mukdadi OM (2010) Elastic guided wave propagation in aperiodic array of multi-layered piezoelectric plates with finite cross-sections. Ultrasonics 50: 347-356.

[26] Casadei F, Dozio L, Ruzzene M, Cunefare KA (2010) Periodic shunted arrays for the control of noise radiation in an enclosure. J Sound Vib 329 3632-3646.

[28] Wang J, Yang J (2000) Higher order theories of piezoelectric plates and applications. Reprinted from Appl Mech Rev 53(4): 87-99.

[29] Batra RC, Vidoli S (2002) Higher order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle. AIAA J 40(1): 91-104.

[30] Chen JY, Chen HL, Pan E, Heyliger PR (2007) Modal analysis of magneto-electro-elastic plates using the state-vector approach. J Sound Vib 304: 722-734.

[31] Edery-Azulay L, Abramovich H (2008) Piezo laminated plates—highly accurate solutions based on the extended Kantorovich method. Compos Struct 84: 241-247.

[32] Ebrahimi F, Rastgoo A, Atai AA (2009) A theoretical analysis of smart moderately Thick shear deformable annular functionally graded plate. Eur J Mech A Solids 28: 262-273.

[33] Collet M, Walter V, Delobelle P (2003) Active damping of a micro-cantilever piezo composite beam. J Sound Vibration 260: 453-476.

[34] Rezazadeh G, Tahmasebi A, Zubstov M (2006) Application of piezoelectric layers in electrostatic MEM actuators: controlling of pull-in voltage. Microsyst Technol 12: 1163-1170.

[35] Raeisifard H, NikkhahBahrami M, Yousefi-Koma A, RaeisiFard H (2014) Static characterization and pull-in voltage of a micro-switch under both electrostatic and piezoelectric excitations. Eur J Mech A Solids 44: 116e124.

[36] Xiaoa Y, Wanga B, Zhou S (2015) Pull-in voltage analysis of electrostatically actuated MEMS with piezoelectric layers: A size-dependent model. Mech Res Commun 66: 7-14.

[37] Reddy JN (2007) Theory and analysis of elastic plates and shells. 2nd edn. Taylor& Francis, Philadel-phia.

[38] Reddy JN (2002) Energy principles and variational methods in applied mechanics. John Wiley & Sons, New York.

[39] Reddy JN (2006) An introduction to the finite element method. McGraw Hill, Singapore.

[40] Rao SS (2007) Vibration of continuous systems. John Wiley & Sons, USA.