



کنترل مقاوم تطبیقی پرواز هماهنگ ماهواره‌ها در مدار بیضوی با خروج از مرکز بزرگ

مریم ملک زاده^{۱*}، عادل ربیعی^۲ و مجید آب نیلی^۳

^۱ استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان

^۲ کارشناسی ارشد طراحی کاربردی، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان

^۳ کارشناسی ارشد مکانیک، مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۱/۳۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۸/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۲۷

چکیده

در مقاله حاضر به موضوع طراحی کنترلر مقاوم برای پرواز هماهنگ ماهواره‌ها پرداخته می‌شود. در این راستا، دو نمونه از کنترلر مود لغزشی مرتبه بالا برای پرواز هماهنگ غیرخطی ماهواره‌ها در حالت دنبال کردن رهبر طراحی می‌شود. از کنترلر مود لغزشی فوق پیشی، برای کاهش چترینگ و کنترلر ترمینال غیر تکین بدلیل رهیابی به پاسخ دقیق در زمان محدود استفاده می‌شود. در طراحی هر دو کنترلر، محدودیت عملگرها در نظر گرفته می‌شود.

برای کاهش تلاش‌های کنترلی، از ضرایب متغیر با زمان تطبیقی استفاده شده است. در این حالت ضرایب کنترلرهای مقاوم بسته به میزان خطا، با شرایط تطبیق می‌یابند. هر دو کنترلر تطبیقی فوق پیشی و ترمینال غیر تکین روی پروژه فضایی پروبا ۳ شبیه‌سازی و عملکرد کنترلرها در کنترل پرواز هماهنگ در مانورهایی با خروج از مرکز بزرگ با در نظر گرفتن نامعینی در حضور اغتشاش J_2 بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: الگوریتم رهبر-پیرو؛ پروبا ۳؛ فوق پیشی تطبیقی؛ ترمینال غیر تکین.

Robust Adaptive Control of the Spacecraft Formation Flying in High Eccentricity Elliptical Orbit

M. Malekzadeh^{1,*}, A. Rabieci², M. Abnili³

¹ Assist. Prof., Mech. Eng., Univ. of Isfahan., Isfahan, Iran.

² MSc. Student, Mech. Eng., Univ. of Isfahan., Isfahan, Iran.

³ MSc. Student, Mech. Eng., Univ. of Isfahan., Isfahan, Iran.

Abstract

In this paper, the issue of robust control of the spacecraft formation flying will be discussed. For this purpose two high order sliding mode controller (HOSMC) are designed for nonlinear spacecraft formation flying in leader-follower structure. The SMC- super twisting algorithm is applied due to chattering reduction and so SMC-nonsingular terminal is applied due to finite time convergence. In the design of both controllers, the actuator saturations is considered.

To reduce the control effort, the adaptive gains are applied. The gains of robust controllers are adapted due to the error measurement or conditions. Both adaptive super twisting and terminal sliding mode are proposed on the PROBA-3 Space mission. The controllers' performances are examined in formation flying maneuvers with large eccentricity considering uncertainty and J_2 disturbance.

Keywords: leader-follower algorithm; PROBA-3; adaptive super twisting; nonsingular terminal sliding mode.

۱- مقدمه

فناوری پرواز هماهنگ، در دهه اخیر به صورت گسترده مورد توجه سازمان‌های بزرگ فضایی قرار گرفته است. انجام ماموریت یا ماموریت‌های خاص توسط دو یا چند ماهواره در یک آرایش مشخص، پرواز هماهنگ نامیده می‌شود. برای انجام یک ماموریت بزرگ و پیچیده فضایی، نیاز به طراحی و ساخت ماهواره‌هایی غول پیکر است که مراحل طراحی، ساخت، ارسال و نگهداری آن در فضا با دشواری‌های فراوانی روبه‌رو است. برای رفع مشکلات این‌گونه ماموریت‌ها، بار عملیاتی یک ماهواره بزرگ و پیچیده را بین دو یا چند ماهواره تقسیم می‌کنند و از بحث پرواز هماهنگ در فضا جهت انجام ماموریت استفاده می‌شود [۱].

از مزایای انجام پرواز هماهنگ می‌توان به:

۱- طراحی ساده‌تر ماهواره‌ها ۲- ساخت مطمئن و کم هزینه‌تر ۳- پرتاب سریع ماهواره‌های یک آرایش ۴- عدم توقف کلی یک ماموریت به دلیل از کار افتادگی یکی از ماهواره‌ها و مهمترین مزیت این فناوری ۵- قابلیت اطمینان و انعطاف پذیری در پروژه‌های فضایی اشاره کرد.

مرسوم‌ترین نوع انجام پرواز هماهنگ، روش دنبال کردن رهبر^۱ است که در این روش ماهواره رهبر در مدار مرجع کنترل شده T سایر ماهواره‌ها در نقش پیرو موقعیت خود را با توجه به فرمان‌های کنترلی دریافتی از ماهواره رهبر تنظیم کرده، مسیر نسبی مطلوب را دنبال می‌کنند [۱]. اجرای عملی پرواز هماهنگ T بستگی کامل به کنترل آرایش فضایی ماهواره‌های حاضر در پرواز هماهنگ دارد تا هر ماهواره در مسیر مطلوب تعریف شده حرکت کند.

از جمله کاربردهای متداول این فناوری مانیوتورینگ زمین و اتمسفر اطراف آن، زمین سنجی، تصویربرداری از رخدادهای فضایی و تعمیرات و نگهداری ماهواره‌ها در مدار است [۲].

در سال‌های اخیر پژوهش‌های متعددی جهت کنترل الگوریتم‌های مختلف پرواز هماهنگ ارائه شده است. دسته وسیعی از این مقالات، معطوف به کنترل الگوریتم دنبال کردن رهبر توسط کنترلرهای مقاوم است. مبنای طراحی کنترلرهای مقاوم بر اساس کنترل سیستم در حضور

نامعینی‌ها است؛ به گونه‌ای که رفتار سیستم قابل قبول باشد. از مرسوم‌ترین کنترلرهای مقاوم، می‌توان به کنترلرهای مود لغزشی اشاره کرد.

از مزایای کنترلرهای مود لغزشی می‌توان به:

۱- مقاوم بودن به عدم قطعیت‌ها (ساختاری و غیر ساختاری) و اغتشاشات خارجی ۲- زمان نشست و میزان فراجهدش مناسب برای سیستم‌های مکانیکی معمول ۳- سادگی طراحی و پیاده‌سازی است.

از معایب کنترلرهای مود لغزشی، می‌توان به وجود پدیده مخرب چترینگ، پاسخ نهایی غیر دقیق، عدم همگرایی در زمان محدود اشاره کرد. در روند طراحی کنترلرهای مودلغزشی در عمل، محدودیت فرکانس بالای سوئیچینگ برای عملگرها و وجود نامعینی‌ها در سیستم، باعث می‌گردد حالت‌های سیستم روی سطح لغزش باقی نمانند و در اطراف آن شروع به نوسان کنند، این نوسانات را در اصطلاح چترینگ می‌گویند که معمولاً یک پدیده مخرب برای سیستم‌های مکانیکی است. این پدیده ممکن است، باعث افزایش تلاش کنترلی و تحریک دینامیک‌های مدل نشده با فرکانس بالای سیستم و در برخی از موارد خاص، حتی ناپایداری سیستم نیز بشود؛ هم‌چنین حساسیت به نویز زمانی خود را نشان می‌دهد که حالات سیستم بسیار به صفر نزدیک باشند. جهت غلبه بر این معایب، هم‌زمان با حفظ خواص مود لغزشی مرتبه اول، می‌توان از روش‌های متفاوتی بهره برد.

در مرجع [۳]، برای کنترل پرواز گروهی ماهواره‌های زمین خورشید، از ترکیب کنترلر مود لغزشی با روش گام به عقب استفاده شده است؛ همچنین ترکیب مود لغزشی- تطبیقی-فازی برای کنترل پرواز هماهنگ ماهواره رهبر پیرو به کار گرفته شده است [۴].

در این روش‌ها علیرغم کاهش چترینگ، کارایی کنترلر کاهش می‌یابد. راهکار دیگر جهت غلبه بر این معایب، استفاده از کنترلرهای مود لغزشی مرتبه بالا (مرتبه دو) است [۵]. از روش‌های پرکاربرد مود لغزشی مرتبه دو می‌توان، به الگوریتم پیچشی^۲، الگوریتم زیر بهینه^۳، الگوریتم

² Twisting Algorithm

³ Suboptimal Algorithm

¹ Leader - Follower Structure

از مزایای کنترلرهای مود لغزشی ترمینال می توان به:

الف) تضمین همگرایی سیستم در زمان محدود

ب) پاسخ سریع و دقیق با توجه به تعریف سطوح لغزشی غیرخطی

ج) پیاده سازی ساده تر نسبت به سایر کنترلرهای مود لغزشی تعمیم یافته به دلیل عدم پیچیدگی در تعریف سطح لغزش و قانون کنترل اشاره کرد. در این روش، سطح لغزش به صورت تابع غیرخطی تعریف می شود. عیب بزرگ این روش کنترلی زمانی خود را نشان می دهد که هدف کنترل سیستم در حوالی نقطه یا نقاط تکین باشد.

روش کنترلی ترمینال غیرتکین برای پرواز گروهی ماهواره ها در ساختار نمودار ارتباطی^۲ [۱۰]، سیستم های چند عاملی^۴ با یک رهبر و سه پیرو [۱۱] استفاده شده است که در مرجع اخیر از شبکه عصبی برای محاسبه ضرایب استفاده می شود. روش ترمینال سریع، برای مجموعه ماهواره های تحت نقص عملگر [۱۲] و کنترلر ترکیبی ترمینال سریع-غیر تکین- تطبیقی، برای تغییر ساختار مجموعه^۵ ماهواره ها استفاده شده است [۱۳]. در [۱۴] از کنترلر ترمینال سریع تطبیقی برای پرواز گروهی ماهواره ها در ساختار توپولوژی نمودار^۶ به کار گرفته شده است.

مقاله حاضر، به طراحی و مقایسه عملکرد دو کنترلر فوق پیچشی تطبیقی و ترمینال غیر تکین در پرواز هماهنگ ماهواره ها در حالت دنبال کردن رهبر پرداخته است. برای این منظور، از اطلاعات مداری و فیزیکی پروژه فضایی پروبا-۳^۷ در مدار بیضوی با خروج از مرکز بزرگ استفاده شده است. در طراحی هر دو کنترلر محدودیت عملگرها در نظر گرفته شده است.

در بخش ۲، معادلات غیرخطی دینامیک پرواز هماهنگ ماهواره ها در حالت دنبال کردن رهبر استخراج می شود. معرفی پروژه فضایی پروبا-۳ و نحوه انجام پرواز هماهنگ، موضوعی است که در بخش ۳ به آن پرداخته می شود. بخش ۴ مقاله، به طراحی کنترلرهای مود لغزشی فوق

شبه پیوسته^۱ و الگوریتم فوق پیچشی^۲ اشاره کرد. در الگوریتم های مذکور، به مشتقات بالای سطح لغزش نیاز است؛ ولی الگوریتم فوق پیچشی با همان داده های مورد نیاز جهت طراحی مود لغزشی کلاسیک، طراحی و پیاده سازی می شود. تفاوت عمده این روش با کنترلرهای مود لغزشی مرتبه اول، در تعریف قانون کنترلی است. در الگوریتم فوق پیچشی در کنار استفاده از سطح لغزش در قانون کنترل از انتگرال سطح لغزش نیز استفاده می شود که این امر موجب کاهش شدید در میزان چترینگ می شود [۶].

این الگوریتم نخستین بار توسط فریدمن در سال ۲۰۰۲ ارائه گردید [۶]. از جمله مثال هایی که در آن کنترلر مود لغزشی مرتبه دوم استفاده شده است، می توان به مقایسه بین الگوریتم پیچشی و فوق پیچشی و پیاده سازی آن روی سیستم تعلیق قطار [۷]، استفاده از الگوریتم فوق پیچشی و تعیین ضرائب کنترلر به کمک اصول کنترل تطبیقی جهت کنترل میزان نفوذ مواد در غشای پلیمری [۸] اشاره کرد. با توجه به مطالعات صورت گرفته، این الگوریتم تا به حال برای پرواز هماهنگ ماهواره ها طراحی نشده است.

در این روش، ضرائب کنترلی با استفاده از محدوده اغتشاش طراحی می شوند. با استفاده از روش کنترلی فوق پیچشی تطبیقی، ضرائب بسته به پاسخ سیستم تغییر می کنند؛ لذا با انتخاب ضرائب کوچکتر می توان به هدف مطلوب رسید که منتج به تلاش کنترلی کمتری می شود. در روش فوق پیچشی تطبیقی برای انتخاب ضرائب کنترلی، نیازی به شناخت محدوده اغتشاش نمی باشد.

در این مقاله، الگوریتم فوق پیچشی تطبیقی روی پرواز هماهنگ ماهواره ها پیاده سازی می شود.

موضوع دیگری که موجب تعمیم روش های طراحی کنترلرهای مود لغزشی گردید، عملکرد نامطلوب کنترلرهای مود لغزشی مرتبه اول برای سیستم هایی با دینامیک پیچیده است. جهت بهبود پاسخ های بدست آمده از کنترلرهای مود لغزشی مرتبه اول برای سیستم های پیچیده، نظیر زمان نشست سریع و همگرایی در زمان محدود، در سال ۱۹۹۴ مان روش کنترل مود لغزشی ترمینال را ارائه کرد [۹].

¹ Communication Graph

² Multi Agent Systems

³ Formation Reconfiguration

⁴ Graph Topology

⁵ Project for On-Board Autonomy 3 (PROBA-3)

¹ Quasi-Continuous Control Algorithm

² Super Twisting Algorithm

R_f معادله غیرخطی حرکت نسبی ماهواره‌ها از رابطه اوپلر، بدست می‌آید:

$$\ddot{\rho} + 2\bar{\omega} \times \dot{\rho} + \ddot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} \times \bar{\rho} = f_f - f \quad (2)$$

که در رابطه (۲)، $f_f \in \mathcal{R}^3$ ، سرعت زاویه‌ای ماهواره رهبر و $f \in \mathcal{R}^3$ به ترتیب، نیروهای خارجی وارده بر ماهواره‌های پیرو و رهبر است.

با جایگذاری ρ از رابطه (۱) در رابطه (۲)، هنگامی که تنها نیروی خارجی اعمالی به مجموعه ماهواره‌ها از سوی میدان گرانش مرکزی زمین باشد (مساله دو جسم)، معادله دینامیکی پرواز هماهنگ ماهواره‌ها با در نظر گرفتن اثر خروج از مرکز بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{\theta}\dot{y} + \ddot{\theta}y + \dot{\theta}^2x - \frac{\mu(R+x)}{\{(R+x)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad + \frac{\mu}{R^2} + f_{d,x} + \frac{f_x}{m} \\ \ddot{y} &= -2\dot{\theta}\dot{x} - \ddot{\theta}x + \dot{\theta}^2x \\ &\quad - \frac{\mu y}{\{(R+x)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} + f_{d,y} + \frac{f_y}{m} \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{\{(R+x)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} + f_{d,z} + \frac{f_z}{m} \end{aligned} \quad (3)$$

در معادلات فوق θ و $\dot{\theta} = \omega$ به ترتیب، عرض جغرافیایی و سرعت زاویه‌ای ماهواره رهبر، $\mu = GM_e$ ثابت گرانش زمین، $F = [f_x \ f_y \ f_z]^T \in \mathcal{R}^3$ بردارهای ورودی کنترل و $f = [f_{d,x} \ f_{d,y} \ f_{d,z}]^T \in \mathcal{R}^3$ بیانگر بردار عدم قطعیت‌ها نظیر، خطای ناشی از مدل سازی، عوامل غیرخطی و اغتشاشات است. مقادیر R و $\dot{\theta}$ برای ماهواره رهبر عبارت است از [۱۵]:

$$\dot{\theta} = \frac{n(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos v} \quad (4)$$

در رابطه (۴)، a نیم قطر بزرگ مدار گردش ماهواره رهبر، e خروج از مرکز مدار، v زاویه آنومالی حقیقی و $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ فرکانس طبیعی مدار مرجع است.

با توجه به استفاده از مدل مرجع پروبا-۳ جهت انجام شبیه‌سازی‌ها، متغیر v به صورت یک متغیر مستقل جهت تعیین موقعیت ماهواره‌ها کاربرد پیدا می‌کند؛ بنابراین رابطه (۳) به صورت زیر تغییر شکل می‌دهد [۱۵]. لازم به ذکر است که قبل از بازنویسی معادلات مشتقات پارامترهای مختلف بر حسب v به صورت روابط (۵-۷) محاسبه می‌شود.

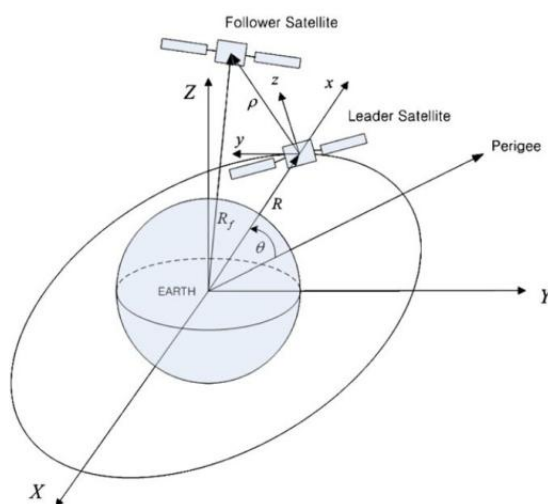
پیچشی و کنترلر مود لغزشی ترمینال غیر تکین معطوف شده است. بخش ۵، مربوط به اعتبار سنجی کنترلرهای طراحی شده است که نحوه عملکرد آن با کنترل دینامیک غیرخطی پرواز هماهنگ تعیین می‌شود و در نهایت نتیجه‌گیری‌های حاصل از این مقاله بیان می‌شود.

۲- معادلات دینامیکی غیرخطی پرواز هماهنگ

در این مطالعه، معادلات غیر خطی ۳ درجه آزادی پرواز هماهنگ برای بیان دینامیک سیستم در نظر گرفته شده است. با استفاده از معادلات مکانی هیل در دستگاه افقی محلی-عمودی محلی و بیان معادلات بر اساس پارامترهای کپلر (پارامترهای اصلی مدار)، معادلات دینامیکی پرواز هماهنگ بدست می‌آید.

در شکل ۱، دستگاه افقی محلی - عمودی محلی نشان داده شده است. در این شکل راستای x راستای شعاعی، راستای y در راستای مسیر حرکت ماهواره رهبر و راستای z بر اساس یک دستگاه راست‌گرد تعیین می‌شود (راستای z راستای مومنوم زاویه ای وارده بر ماهواره رهبر است). در این شکل هم چنین دستگاه مختصات زمین مرکز دیده می‌شود. بر طبق این مختصات فاصله ماهواره رهبر R و مختصات ماهواره پیرو نسبت به ماهواره رهبر عبارتست از [۱۵]:

$$\rho = [x \ y \ z]^T \in \mathcal{R}^3 \quad (1)$$



شکل ۱- دستگاه افقی محلی - عمودی محلی [۱۶]

کران بالای F باشد که در آن F تابع مثبت است. جهت استخراج اطلاعات بیشتر به مرجع [۱۷] مراجعه شود.

۳- معرفی پروژه فضایی پروبا-۳

پروژه فضایی پروبا-۳ پروژه‌های تحقیقاتی - راهبردی ساخت آژانس فضایی اتحادیه اروپا است که در سال ۲۰۱۶ به فضا پرتاب می‌شود. این پروژه، اولین پرواز گروهی مستقل و خودگردان آژانس فضایی اتحادیه اروپا به شمار می‌رود که از دو ماهواره تشکیل شده است. این پروژه کنار تحقق کنترل دقیق و خودگردان پرواز هماهنگ، وظیفه تصویر برداری و مطالعه از خورشید را نیز بر عهده دارد.

ماهواره پیرو در پروژه پروبا-۳، به نام پنهان کننده شناخته می‌شود. دلیل این نام گذاری، شیوه عکس برداری تعریف شده برای ماهواره رهبر است که از آن به عنوان عکس برداری در سایه نام برده می‌شود. وظیفه ماهواره پیرو، ایجاد سایه روی ماهواره رهبر است. این شیوه عکس برداری، به دلیل لنز حساس به کار رفته در ماهواره رهبر است. بسته به کیفیت عکسی که ماهواره رهبر از حلقه نورانی دور خورشید تهیه می‌کند، فاصله ماهواره پیرو از ۲۵ تا ۲۵۰ متر متغیر است [۱۸]. در شبیه‌سازی مربوط به این پروژه در این پایان نامه مانورهای مطلوب هر راستا به طور میانگین ۷۵ متر در نظر گرفته شده است. در مراجع دقت کنترلی برای مانورهای مطلوب بین ماهواره‌های رهبر و پیرو، یک میلی‌متر بیان شده است.

از دیگر اهدافی که پروژه پروبا-۳ دنبال می‌کند، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد [۱۹]:

- الف) اعتبار سنجی مقدار کارایی الگوریتم کنترلی برای هدایت و راهبری پرواز گروهی ماهواره‌ها
 - ب) تکامل سیستم‌های اندازه‌گیری و فاصله سنجی برای پرواز گروهی ماهواره‌ها
 - ج) گسترش سیستم‌های کنترل خودکار و مقاوم جهت پرواز گروهی ماهواره‌ها
 - د) مطالعات جهت پیشرفت نحوه پیاده‌سازی الگوریتم-های پرواز هماهنگ ماهواره‌ها در فضا
- س) ارتقاء عملکرد عکس برداری در سایه از خورشید
و) آزمایش و رصد مانورهای ماهواره‌ها در مدارهای بالا با خروج از مرکز بزرگ

$$\dot{(\cdot)} = (\cdot)' \dot{\theta} \quad (5)$$

$$\ddot{(\cdot)} = (\cdot)'' \dot{\theta}^2 + \dot{\theta} \ddot{\theta} \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \dot{v} = \frac{\sqrt{\mu p}}{R^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos v)^2 \quad (7)$$

$p = a(1 - e^2)$

با در نظر گرفتن این نکته که $|\bar{R}| \ll |\bar{p}|$ رابطه (۳) به صورت رابطه (۸) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} x' + 2y' + \frac{3 + e \cos v}{1 + e \cos v} x \\ &\quad - \frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} y + \frac{(1 - e^2)^3}{n^2(1 + e \cos v)^4} \frac{F_x}{m} + f_{d,x} \\ y'' &= -2x' + \frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} y' + \frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} x \\ &\quad + \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} y + \frac{(1 - e^2)^3}{n^2(1 + e \cos v)^4} \frac{F_y}{m} + f_{d,y} \\ z'' &= \frac{2e \sin v}{1 + e \cos v} z' + \frac{1}{1 + e \cos v} z \\ &\quad + \frac{(1 - e^2)^3}{n^2(1 + e \cos v)^4} \frac{F_z}{m} + f_{d,z} \end{aligned} \quad (8)$$

معادلات پرواز هماهنگ ماهواره‌ها در الگوریتم دنبال کردن رهبر را می‌توان به فرم همراه معادلات مرتبه دوم بازنویسی کرد. که در آن $\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = f(X) + g(X)u(t) + w(t) \end{cases}$ بردار $X = [X_1 \ X_2]^T = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ بردار حالات سیستم و $w(t)$ بردار اغتشاشات خارجی است. توابع f و g با توجه به رابطه (۸) تعیین می‌شود.

وجود عدم قطعیت‌ها در مدل‌سازی دینامیکی امری اجتناب ناپذیر است. از این رو عدم قطعیت‌ها برای هر کدام از بخش‌های معادله فوق را می‌توان با رابطه (۹) شرح داد:

$$\begin{aligned} f(X) &= \hat{f}(X) + \Delta f(X) \\ g(X) &= \hat{g}(X) + \Delta g(X) \end{aligned} \quad (9)$$

که در رابطه (۹)، $\hat{f}(X)$ و $\hat{g}(X)$ به ترتیب بخش‌های اندازه‌گیری شده و $\Delta f(X)$ و $\Delta g(X)$ عدم قطعیت‌های مربوط به $f(X)$ و $g(X)$ است. با فرض کران‌داری برای عدم قطعیت‌ها، نامساوی‌های (۱۰-۱۱) برقرار است.

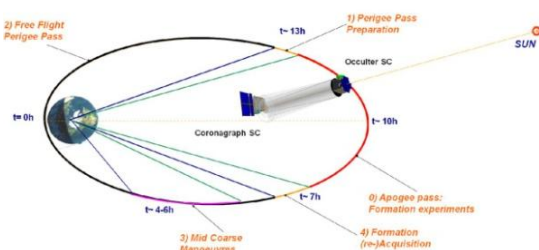
$$|\Delta f(X)| < F \quad (10)$$

$$\delta^{-1} \leq \frac{\hat{g}(X)}{g(X)} \leq \delta, \quad \delta > 1 \quad (11)$$

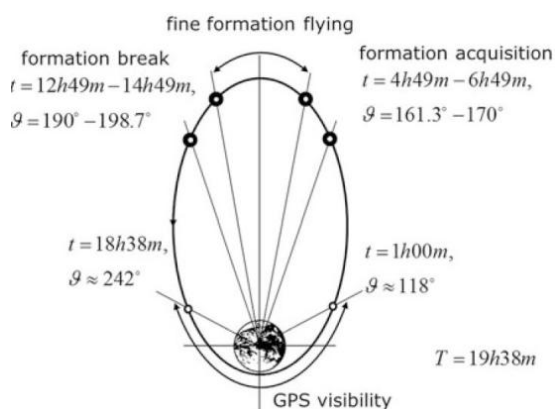
که در روابط فوق $\hat{g}(X)$ و $g(X)$ به ازای تمامی مقادیر حالت-ها مثبت هستند؛ همچنین بخش نامعین $f(X)$ محدود به

زیاد) پدیده چترینگ، کنترلی با کارایی بالا و مقاوم در برابر نامعینی‌ها و اغتشاشات خارجی به دست می‌دهد [۲۳].
معادلات دینامیکی پرواز هماهنگ ماهواره در فرم همراه را به صورت رابطه (۱۲) در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= f(X) + g(X)u + w(t) \end{aligned} \quad (12)$$



شکل ۲- نحوه انجام پرواز هماهنگ پرواز پروبا-۳ [۲۰]



شکل ۳- ریز زمانی و موقعیت ماهواره‌های پروبا-۳ [۱۹]

جدول ۱- مشخصات مداری و جزئیات فیزیکی ماهواره‌های

پروژه پروبا-۳ [۲۱]		
ماهواره	مشخصات مداری (پارامترهای کپلر)	مشخصات اینرسی
رهبر	$a = 37040.16 \text{ km}$ $e = 0.8062$ $i = 23.4393$ $\Omega = 160.4623$ $v = 0$	$m = 475 \text{ kg}$ $I = \text{diag}$ $[79, 272, 274]$ kg.m^2 $m = 275 \text{ kg}$
	$r = 150 \text{ m}$	
پیرو	$\dot{\rho} = [0, 0, 0]^T$	$I = \text{diag}$ $[59, 160, 180]$ kg.m^2

ه) تکامل و گسترش فناوری‌های به کار رفته در پروژه مانند کنترل به وسیله نیروی پیشران برای یک سیستم ۶ درجه آزادی.

برای انتخاب مدار گردش این پروژه فضایی نیز مواردی نظیر، میزان آشفته‌گی مداری در مدارهای مختلف، مدت زمان قرارگیری لنز ماهواره رهبر در مقابل خورشید و نیروی پیشران لازم جهت حرکت و کنترل ماهواره مد نظر قرار گرفته است. در مورد چگونگی انتخاب مدار به [۱۹] مراجعه شود.

به طور کلی مدار قرارگیری پروژه پروبا-۳ به سه قسمت تقسیم می‌شود:

۱- ناحیه‌ای نزدیک نقطه اوج که در آن لزوم شکل‌گیری پرواز هماهنگ دقیق جهت عکس برداری دقیق و محافظت از لنز تلسکوپ احساس می‌شود.

۲- ناحیه‌ای حوالی نقطه حضیض که ماهواره‌ها در آن به صورت آزادانه پرواز می‌کنند.

۳- ناحیه‌ای حفاصل نقطه حضیض تا نقطه اوج که در آن با پردازش و بازیابی موقعیت، ماهواره‌ها به محدوده‌ی انجام پرواز هماهنگ دقیق نزدیک می‌شوند.

اطلاعات مداری پروژه پروبا-۳ بر حسب پارامترهای کپلر (به فهرست علائم مراجعه شود) و همچنین مشخصات فیزیکی ماهواره‌های رهبر و پیرو به شرح جدول زیر است [۳۷].

۴- طراحی کنترلرهای مود لغزشی فوق پیچشی و مود لغزشی ترمینال غیر تکین

الف) طراحی کنترلر مود لغزشی فوق پیچشی

تمامی الگوریتم‌های مود لغزشی مرتبه دو موجود، نیاز به اندازه‌گیری مشتق زمانی سطح لغزش \dot{s} و یا علامت آن $\text{sign}(\dot{s})$ دارند. به عبارت دیگر، برای رسیدن به $\dot{s} = \ddot{s} = 0$ ، هر دوی \dot{s} و \ddot{s} نیاز به محاسبه و اندازه‌گیری دارند، البته در برخی موارد با طراحی یک تخمین‌گر می‌توان مقادیر \dot{s} را تخمین زد [۲۲]. به هر حال، الگوریتم فوق پیچشی می‌تواند جایگزین خوبی برای مود لغزش کلاسیک باشد که با استفاده از همان اطلاعات اندازه‌گیری و بدون نیاز به محاسبه یا تخمین \dot{s} ، علاوه بر حذف (یا کاهش بسیار

با توجه به متغیرهای کمکی رابطه (۱۶) را می‌توان به صورت به فرم اسکالر (۱۸) نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1i} &= -k_{1i} |z_{1i}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_{1i}) + z_{2i} \\ \dot{z}_{2i} &= -k_{2i} \text{sign}(z_{1i}) + \rho_i(t), i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (18)$$

معادله فوق، فرم استاندارد الگوریتم فوق پیچشی همراه با عبارت آشفتگی ρ است.

جهت اثبات پایداری کنترلرهای مود لغزشی، از روش اثبات لیاپانوف استفاده می‌شود.

جهت سهولت در اثبات پایداری از فرم استاندارد الگوریتم فوق پیچشی به صورت رابطه (۱۹) استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 |z_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1) + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -k_2 \text{sign}(z_1) + \rho_i(t, z) \end{aligned} \quad (19)$$

همانطور که گفته شد، هدف از طراحی این کنترلر، صفر کردن s و \dot{s} در زمان محدود است که با توجه به رابطه کمکی (۱۷) به وضوح می‌توان دید، این امر با اثبات پایداری معادله فوق حول نقطه تعادل $(z_1, z_2) = (0, 0)$ امکان پذیر است.

برای این منظور تابع لیاپانوف (۲۰) را در نظر بگیرید [۲۴]:

$$V = \xi^T P \xi \quad (20)$$

که $\xi = [|z_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1) \quad z_2]^T = [\xi_1 \quad \xi_2]^T$ و P یک ماتریس مثبت معین است.

باید توجه کرد که $V(\xi, t)$ در تمام نقاط به جز $z_1 = 0$ پیوسته و مشتق پذیر است. در واقع، زمانی که $z_1 \neq 0$ ، \dot{V} موجود و منفی معین است. به هر حال، زمانی که $z_1 = 0$ ، \dot{V} باشد، قبل از رسیدن به نقطه تعادل $(0, 0)$ ، (z_1, z_2) حل سیستم (۱۹) خط $z_1 = 0$ را قطع می‌کند. این بدین معنی است که مشتق تابع لیاپانوف پیشنهادی تقریباً همه جا موجود است تا وقتی که $V(\xi, t)$ تا رسیدن سیستم به نقطه تعادل کاهش یابد. علاوه بر این، این تابع لیاپانوف مثبت معین و به طور شعاعی کران دار است.

$$\lambda_{\min}(P) \|\xi\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P) \|\xi\|^2 \quad (21)$$

که در آن $\|\xi\|_2^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ ، معرف اندازه (نرم) اقلیدسی ξ است. یک روش مناسب جهت تشکیل ماتریس مثبت معین و مقارن P ، استفاده از معادله نامساوی ماتریس خطی^۱ به صورت زیر است [۲۴]:

می‌توان با کنترلی مناسب حالات X_1 را به مقادیر مطلوب آن $X_1^d = [x^d \quad y^d \quad z^d]^T$ سوق داد برای این منظور فرضیات زیر نیاز است:

الف) تمامی حالات سیستم قابل اندازه‌گیری و تخمین هستند.

ب) مقادیر مطلوب و مشتقات اول آنها کراندار می‌باشند.
پ) اغتشاشات خارجی و مشتق اول آنها محدود و کراندار هستند و در نامساوی (۱۳) صدق می‌کنند.

$$|w(t)| < L \quad (13)$$

سطح لغزش به صورت رابطه (۱۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$s = \dot{e} + \lambda e \quad (14)$$

که در آن $e = X_1 - X_1^d$ و $\dot{e} = \dot{X}_1 - \dot{X}_1^d$ ماتریس مثبت معین $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ است.

بر اساس این تعاریف الگوریتم کنترل مودلغزشی فوق پیچشی پیشنهادی به صورت رابطه (۱۵) خواهد بود [۲۴]:

$$\begin{aligned} u &= g^{-1}(\dot{X}_1^d - \lambda \dot{e} - k_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) \\ &\quad - k_2 \int_0^t \text{sign}(s(\tau)) d\tau - f(X)) \end{aligned} \quad (15)$$

که در قانون کنترل فوق (۱۵) ماتریس ضرایب $\begin{cases} k_1 = \text{diag}(k_{11}, k_{12}, k_{13}) \\ k_2 = \text{diag}(k_{21}, k_{22}, k_{23}) \end{cases}$ ضرایب طراحی کنترلر هستند که در ادامه با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف محاسبه می‌شوند.

دینامیک خطای حلقه بسته به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{e} + \lambda \dot{e} \\ &= \left(-\ddot{X}_1^d + f(X) + g(X)u + w(t) \right) + \lambda \dot{e} \\ &= \left(-\ddot{X}_1^d + f(X) + \dot{X}_1^d - \lambda \dot{e} - k_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) \right. \\ &\quad \left. - k_2 \int_0^t \text{sign}(s(\tau)) d\tau - f(X) + w(t) \right) + \lambda \dot{e} \\ &= -k_1 |s|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(s) - k_2 \int_0^t \text{sign}(s(\tau)) d\tau \\ &\quad - f(X) + w(t) \end{aligned} \quad (16)$$

حال متغیر کمکی Z و ρ را با رابطه (۱۷) در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} z_{1i} &= s_i \\ z_{2i} &= -k_{2i} \int_0^t \text{sign}(s(\tau)) d\tau + w_i(t), i = 1, 2, 3 \\ \dot{w}_i &= \rho_i(t) \end{aligned} \quad (17)$$

^۱ Linear Matrix Inequality (LMI)

با تشکیل $G(j\omega)$ و گرفتن مشتق از آن نسبت به ω و برابر صفر قرار دادن آن، مقدار ماکزیمم $|G(j\omega)|$ به صورت رابطه (۲۷) به دست خواهد آمد:

$$\max_{\omega} |G(j\omega)| < \frac{1}{k_2} \quad \text{if } k_1^2 > 4k_2 \quad (27)$$

با استفاده از دو رابطه آخر، می‌توان نتیجه گرفت که محدوده k_1 و k_2 به صورت رابطه (۲۸) است:

$$\begin{cases} k_2 > L \\ k_1^2 > 4k_2 \end{cases} \quad (28)$$

حال با محاسبه این کران‌ها برای ضرایب، برای صحت این شرایط، باید \dot{V} منفی شود، یعنی:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi) &= \frac{1}{|\xi_1|} [\xi \tilde{\rho}]^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} [\xi \tilde{\rho}] \\ &\leq \frac{1}{|\xi_1|} \left\{ [\xi \tilde{\rho}]^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} [\xi \tilde{\rho}] + \omega(\tilde{\rho}, \xi) \right\} \\ &\leq \frac{1}{|\xi_1|} [\xi \tilde{\rho}]^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + L^2 C^T C & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} [\xi \tilde{\rho}] \\ &\leq \frac{1}{|\xi_1|} [\xi \tilde{\rho}]^T \\ &\quad \begin{bmatrix} A^T P + PA + \varepsilon P - \varepsilon P + L^2 C^T C & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} [\xi \tilde{\rho}] \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{|\xi_1|} \xi^T P \xi \end{aligned}$$

و در نهایت رابطه (۲۹) به دست خواهد آمد:

$$\dot{V} \leq -\frac{\varepsilon}{|\xi_1|} \xi^T P \xi = -\frac{\varepsilon}{|\xi_1|} V \quad (29)$$

با استفاده از رابطه (۲۱)، نامساوی (۳۰) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} |\xi_1| \leq \|\xi\|_2 \leq -\frac{V^{\frac{1}{2}}(\xi)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}} \\ \Rightarrow \dot{V} \leq -\alpha V^{\frac{1}{2}}(\xi) \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن $\alpha = \varepsilon \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}$ و ε یک عدد مثبت کوچک است.

بنابراین \dot{V} همواره منفی باقی می‌ماند؛ بنابراین شرط فوق همگرایی زمان محدود $z = [z_1 \ z_2]^T$ به صفر را تضمین می‌کند.

با توجه به رابطه (۲۸)، برای انتخاب محدوده ضرایب کنترلی، نیاز به آگاهی از محدوده اغتشاش است؛ همچنین به دلیل ثابت بودن ضرایب برای پاسخ‌های زمان محدود، نیاز به انتخاب ضریب بزرگ است که منتج به تلاش کنترلی بزرگ می‌شود. به همین دلیل در روش کنترلی فوق پیش‌بینی تطبیقی، ضرایب کنترلی بسته به پاسخ تغییر می‌کنند. در این صورت می‌توان مقدار اولیه ضرایب را کوچک انتخاب کرد، لذا ماکزیمم تلاش کنترلی کوچکتری مصرف می‌شود. ضرایب

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \varepsilon P + L^T C^T C & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

که در رابطه فوق:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}k_1 & \frac{1}{2} \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$$

ضرایب k_1 و k_2 اعدادی مثبت هستند.

با استفاده از بردار ξ_1 ، رابطه (۱۹) به صورت رابطه (۲۳) نوشته خواهد شد:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{1}{|\xi_1|} (A\xi + B\tilde{\rho}(t)) \quad (23)$$

در آن عبارت آشفتگی انتقال یافته $\tilde{\rho}(t, \xi) = |\xi_1| \rho(t, z)$ مساوی $|\tilde{\rho}| \leq L|\xi_1|$ را ارضا می‌کند که از آن می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\omega(\tilde{\rho}, \xi) = -\tilde{\rho}^2(t, \xi) + L^2 \xi_1^2 \quad (24)$$

با استفاده از معیار نایکوئیست، نامساوی ماتریس خطی برقرار است اگر و تنها اگر دیاگرام نایکوئیست تابع تبدیل شامل یک دایره در مبدأ با شعاع L باشد [۲۵].

$$G(S) = C(SI - A)^{-1}B = \frac{\frac{1}{2}}{S^2 + \frac{1}{2}k_1 S + \frac{1}{2}k_2}$$

به دلیل اینکه ضرایب k_1 و k_2 اعدادی مثبت هستند، واضح است که سیستم (A, B, C) کنترل‌پذیر و مشاهده‌پذیر است؛ بنابراین به جای استفاده از معیار نایکوئیست، با استفاده از قضیه ارائه شده در [۲۶]، شرایط طراحی ضرایب k_1 و k_2 برای برقراری نامساوی (۲۲) به دست خواهد آمد. در آن قضیه نشان داده شده است که نامساوی ماتریس خطی (۲۲) انجام پذیر است، اگر و تنها اگر سیستم خطی $H(S) = LC(SI - A)^T B$ غیر قابل توسعه باشد^۱، یعنی:

$$\max_{\omega} |H(j\omega)| < 1 \quad (25)$$

این شرط موجب برقراری شرط زیر خواهد شد:

$$\max_{\omega} |G(j\omega)| < \frac{1}{L} \quad (26)$$

که

$$G(S) = C(SI - A)^{-1}B = \frac{\frac{1}{2}}{S^2 + \frac{1}{2}k_1 S + \frac{1}{2}k_2}$$

است.

^۱ Nonexpansive

که در رابطه فوق $0 < \eta$ و $2 < \frac{p}{q} < 1$ است؛ همچنین مقدار L از رابطه (۱۳) بدست می‌آید.

جهت اثبات پایداری کنترلر طراحی شده از تئوری اثبات لیاپانوف استفاده می‌شود. برای این منظور تابع لیاپانوف $V = \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}s^T s$ لحاظ می‌شود.

جهت اثبات ساده‌تر پایداری، مسئله از حالت ردیابی مقادیر مطلوب^۱ به تنظیم حالات به مبدأ^۲ تغییر شکل داده می‌شود. همچنین جهت برگردان مسئله تنظیم به ردیابی از قضیه‌ی انتقال محورها استفاده می‌شود. با توجه به این توضیحات مقادیر خطا و مشتق خطا $\begin{cases} e \rightarrow X_1 \\ \dot{e} \rightarrow X_2 \end{cases}$ جایگزین بردار حالت سیستم می‌شود. مقدار \dot{s} برابر است با [۲۹]:

$$\dot{s} = \dot{X}_1 + \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} X_2 \dot{X}_2 \quad (۳۴)$$

با توجه به $\dot{X}_2 = f(X) + g(X)u + w(t)$ و قرار دادن u (قانون کنترل) از رابطه (۳۳) و ساده سازی (۳۴) مقدار \dot{s} به شکل زیر خواهد بود:

$$\dot{s} = \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} X_2^{\frac{p}{q}-1} (w(t) - (L + \eta) \text{sign}(s)) \quad (۳۵)$$

بنابراین مقدار \dot{V} برابر است با:

$$\dot{V} = s \dot{s} = \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} X_2^{\frac{p}{q}-1} (s w(t) - (L + \eta) |s|) \quad (۳۶)$$

نظر به اینکه $2 < \frac{p}{q} < 1$ بنابراین $1 < \frac{p}{q} - 1 < 1$ همچنین مقادیر p و q ($p > q$) هر دو مقادیر فرد و مثبت هستند پس:

$$X_2^{\frac{p}{q}-1} > 0 \text{ when } X_2 \neq 0 \quad (۳۷)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \dot{s} \leq \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} X_2^{\frac{p}{q}-1} (-\eta |s|) \\ &= -\frac{1}{\beta} \frac{p}{q} X_2^{\frac{p}{q}-1} \eta |s| = -\eta' |s| \end{aligned} \quad (۳۸)$$

$$\eta' = \frac{1}{\beta} \frac{p}{q} X_2^{\frac{p}{q}-1} \eta > 0 \text{ when } X_2 \neq 0 \quad (۳۹)$$

همانگونه که مشاهده می‌شود، شرط لیاپانوف برقرار است و سیستم تحت اثر کنترلر طراحی شده پایدار مجانبی و شرط رسیدن حالات سیستم به مقدار صفر در زمان محدود را تضمین می‌کند.

کنترلی فوق پیچشی تطبیقی از رابطه (۳۱) بدست می‌آید [۲۳]:

$$\dot{k}_1 = \begin{cases} \omega_1 \sqrt{\frac{\gamma_1}{2}} \text{sign}(|s| - \mu) & \text{if } k_1 \geq \alpha_m \\ \eta & \text{if } k_1 < \alpha_m \end{cases} \quad (۳۱)$$

که ω_1 ، γ_1 و η ثوابت اختیاری مثبت هستند و α_m یک ثابت اختیاری مثبت کوچک است. در این روش، طراح می‌تواند با انتخاب ضرایب، پاسخ را نسبت به سطح لغزش محدود نماید.

ب) طراحی کنترلر مود لغزشی ترمینال غیر تکین

همانگونه که بیان گردید، کنترلرهای مود لغزشی ترمینال جهت کنترل سیستم‌هایی با دینامیک پیچیده به کار می‌رود. در دینامیک‌های پیچیده به دلیل عدم داشتن اطلاعات دقیق از حالات سیستم، معمولاً نامعینی‌هایی در دینامیک مدل شده سیستم وارد می‌شود. یکی از مزایای ویژه کنترلرهای مود لغزشی ترمینال، مقاوم بودن به نامعینی‌ها است [۲۷]. جهت بهره جستن همزمان از خواص ویژه کنترلرهای مود لغزشی ترمینال نظیر، زمان نشست مناسب و مقاومت به نامعینی‌ها و رفع ایراد بزرگ کنترلرهای ترمینال استاندارد (کنترل سیستم در حوالی نقطه یا نقاط تکین)، روش کنترل مود لغزشی ترمینال تکین مورد استفاده قرار گرفت [۲۸].

با در نظر گرفتن معادلات دینامیکی پرواز هماهنگ در فرم همراه، هدف طراحی کنترلر مناسب است که حالات X_1 را به مقادیر مطلوب $X_1^d = [x^d \ y^d \ z^d]^T$ سوق دهد، سطح لغزش با رابطه (۳۲) تعریف می‌شود [۲۸]:

$$s = e + \frac{1}{\beta} \dot{e}^q \quad (۳۲)$$

که در تعریف سطح لغزش $\beta > 0$ و مقادیر p و q ($p > q$) هر دو مقادیر فرد و مثبت هستند.

قانون کنترل مود لغزشی ترمینال غیر تکین ارائه شده توسط فنگ عبارت است از:

$$u = -g^{-1}(X) \left[f(X) + \beta \frac{q}{p} e^{2-\frac{p}{q}} + (L + \eta) \text{sign}(s) \right] \quad (۳۳)$$

^۱ Tracking Problem

^۲ Regulating Problem

۵- شبیه‌سازی

در این بخش به اعتبارسنجی کنترلرهای طراحی شده پرداخته می‌شود. از این رو پاسخ‌های بدست آمده از کنترلر مودلغزشی مرتبه دوم فوق پیچشی تطبیقی، با کنترلر مودلغزشی ترمینال غیر تکین با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

جهت انجام شبیه‌سازی از داده‌های پروژه فضایی پروبا-۳ استفاده شده است. در گزارشاتی که آژانس فضایی اتحادیه اروپا جهت بیان مشخصات تکمیلی پروژه پروبا-۳ ارائه کرده است، دقت انجام مانور این ماهواره‌ها در حدود یک میلیمتر بیان شده است که در انجام این شبیه‌سازی‌ها لحاظ شده است [۱۸]. میزان مانورهای لحاظ شده برای راستاهای مختلف در این مقاله مقادیر نسبتاً بزرگی است که عبارتند از:

$$[x \ y \ z]^T = [70 \ 80 \ 90]^T (m)$$

در انجام شبیه‌سازی‌ها اغتشاشات مداری لحاظ شده است میزان بزرگی اغتشاشات مداری بر حسب فاصله از زمین به صورت ارائه شده در شکل ۴ است [۳۰].

همانگونه که مشاهده می‌شود، بزرگترین اغتشاش اعمالی بر مجموعه ماهواره‌ها اغتشاش مربوط به عدم کروی بودن زمین (J_2) است. بزرگی شتاب ناشی از اغتشاش J_2 با توجه به مقادیر قرار گرفته در جدول (۱) از روابط (۴۰-۴۲) بدست می‌آید [۳۱]:

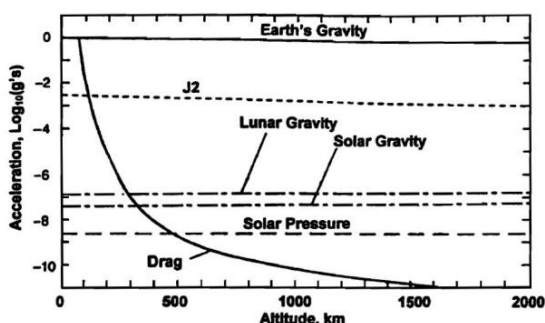
$$f_x = \frac{3\mu J_2 R^2}{2r^4} (3\sin^2 i \sin^2 \gamma - 1) \quad (40)$$

$$f_y = -\frac{3\mu J_2 R^2}{2r^4} \sin^2 i \sin 2\gamma \quad (41)$$

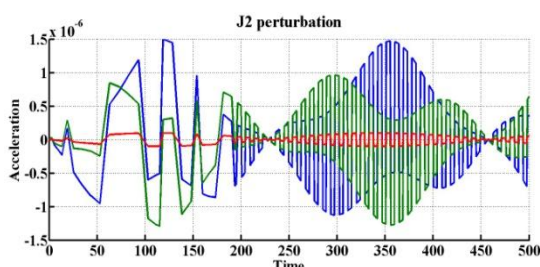
$$f_z = -\frac{3\mu J_2 R^2}{2r^4} \sin^2 i \sin \gamma \quad (42)$$

که در روابط فوق J_2 ضریب مرتبه دوم یکنواختی پتانسیل جاذبه زمین است و بزرگی آن $J_2 = 0.0010826$ است. r فاصله ماهواره مورد نظر در هر لحظه تا مرکز زمین، $\gamma = \nu + \Omega$ طول جغرافیایی حقیقی و R شعاع متوسط زمین است. بنابر موقعیت قرارگیری ماهواره رهبر، دیاگرام شتاب ناشی از اغتشاش J_2 در یک دوره تناوب گردش ماهواره رهبر به صورت زیر است.

با توجه به شکل ۵ مقدار $L = 10^{-5}$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین جهت نشان دادن میزان مقاومت کنترلرهای مودلغزشی فوق پیچشی و مودلغزشی ترمینال به عدم قطعیت‌ها، برای کاهش چترینگ، در رابطه (۱۵) تابع $sign$ با تابع زیر جایگزین شده است:



شکل ۴- میزان اغتشاشات مداری بر حسب فاصله از سطح زمین [۳۰]



شکل ۵- میزان بزرگی اغتشاش J_2 در موقعیت انجام پرواز هماهنگ ماهواره‌های پروژه پروبا-۳

$$sat(e) =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } (500e > 1) \\ -1 & \text{if } (500e < -1) \\ 500e & \text{if } -1 < 500e < 1 \end{cases}$$

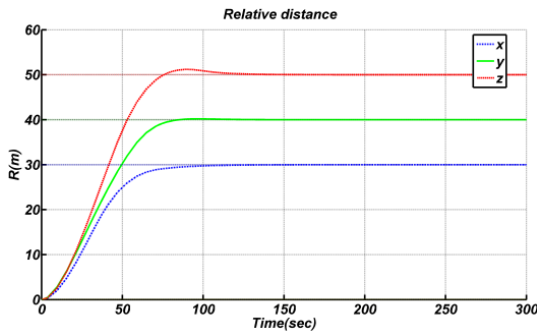
با توجه به محدودیت تراسترهای یونی استفاده شده تلاش کنترلی بایستی در محدوده زیر باشد [۲۸]:

$$|F| < 20N$$

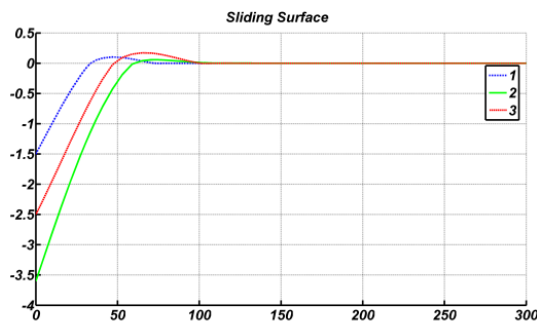
برای بررسی دقیقتر عملکرد کنترلرها به ورودی سیستم یک اغتشاش شامل، ترم سینوسی، ضربه، ثابت و گوسی اعمال شده است. با شبیه‌سازی‌های متعدد مشاهده می‌شود که روش کنترلی ترمینال غیرتکین، زمان نشست کوچکتر و تلاش کنترلی کمتری دارد؛ ولی نسبت به اغتشاش ثابت و ماندگار، مقاومت کمتری نشان می‌دهد. در اغتشاش گاوسی هر دو کنترلر عملکرد مشابهی دارند.

در جدول ۲، مشخصات پاسخ سیستم در شرایط معین و نامعین (شامل اغتشاش و عدم قطعیت در جرم ماهواره پیرو) به کنترلرهای فوق پیچشی تطبیقی و ترمینال غیر تکین نشان داده شده است:

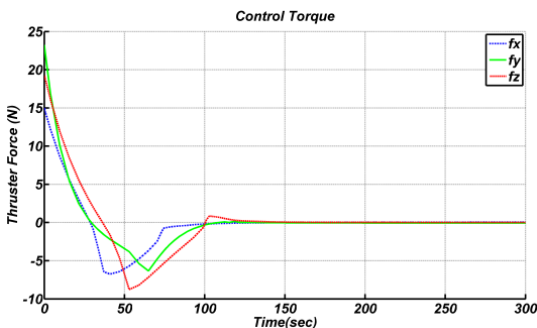
$k_1 = \text{diag} \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.035 \\ 0.04 \end{bmatrix}, \lambda = \text{diag} \begin{bmatrix} 0.0005 \\ 0.00055 \\ 0.00055 \end{bmatrix},$
 $\omega_1 = 0.001, \gamma_1 = 0.1, \eta = I(3), \varepsilon = 0.00025,$
 $\alpha_m = 0.01$
 در شکل‌های ۶ تا ۸، به ترتیب موقعیت ماهواره پیرو نسبت به رهبر، سطح لغزش و تلاش کنترلی با در نظر گرفتن ۲۰٪ عدم قطعیت روی جرم ماهواره پیرو و اغتشاش J_2 نشان داده شده است.



شکل ۶- ردیابی مقادیر مطلوب (STA)



شکل ۷- خط سیر سطوح لغزش (STA)



شکل ۸- ورودی‌های کنترلی سیستم (STA)

جدول ۲- عملکرد کنترلرها در شرایط نرمال و نامعین

کنترل کننده	t_s	F_{max}	Chatter
ترمینال غیر تکین (نرمال)	۱۰۰	۱۰	٪۲۰
ترمینال غیر تکین (نامعین)	۱۱۰	۱۲	٪۴۰
فوق پیچشی (نرمال)	۱۵۰	۲۵	قابل صرفنظر
فوق پیچشی (نامعین)	۱۵۰	۲۵	قابل صرفنظر
فوق پیچشی تطبیقی (نامعین)	۱۵۰	۲۰	قابل صرفنظر

همانگونه که از داده‌های جدول مشخص است، روش ترمینال زمان نشست کوچکتر و تلاش کنترلی کمتری دارد، ولی دارای چترینگ است. با توجه به بزرگ بودن محدوده چترینگ، در انتهای مانور ورودی کنترلی دقیقاً صفر نمی‌شود و عملگرها روشن می‌باشند که یکی از معایب روش ترمینال است.

الف) کنترلر مود لغزشی فوق پیچشی تطبیقی

طبق قانون کنترلی مربوط به کنترلر مود لغزشی مرتبه دو فوق پیچشی (رابطه (۱۵))، تعیین مقادیر k_1 و k_2 مورد نیاز است. مقادیر k_1 و k_2 با توجه به مقدار δ و رابطه (۲۸) تعیین می‌شود.

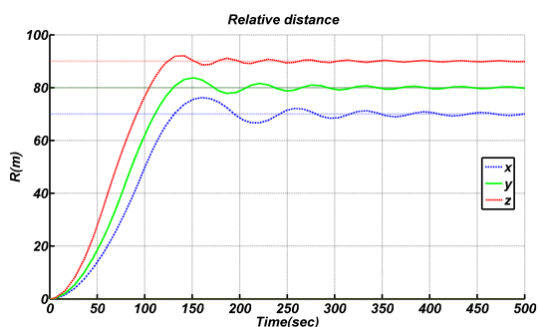
با تغییر ضرائب طراحی کنترلر مرتبه دوم فوق پیچشی، کیفیت جواب‌های حاصله از کنترلر تغییر می‌کند. با کاهش مقادیر k_1 و k_2 زمان نشست و تلاش کنترلی ماندگار افزایش و ماکزیمم تلاش کنترلی در سیستم کاهش می‌یابد. مشابه همین موارد برای λ مشاهده می‌شود.

ضرائب کنترلی به گونه ای انتخاب شده اند که کنترلر بهترین کارایی را داشته باشد و تلاش کنترلی در محدوده مجاز خود باشد. در این مقاله، ضرائب انتخاب شده برای کنترلر فوق پیچشی عبارتند از:

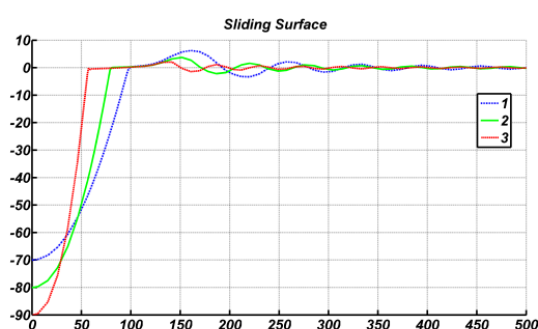
$$k_1 = \text{diag} \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.035 \\ 0.04 \end{bmatrix}, k_2 = \text{diag} \begin{bmatrix} 0.0003 \\ 0.0003 \\ 0.0003 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = [0.025 \quad 0.035 \quad 0.03]$$

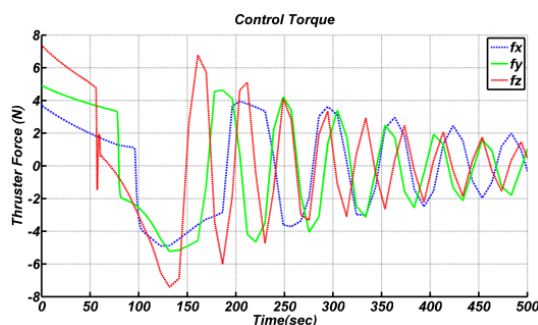
در کنترلر فوق پیچشی تطبیقی، افزایش بهره‌های ω_1 ، γ_1 و η منتج به کاهش زمان نشست و افزایش ماکزیمم تلاش کنترلی می‌شود. ضرائب انتخاب شده در شبیه سازی ها عبارتند از:



شکل ۹- ردیابی مقادیر مطلوب (NSTSMC)



شکل ۱۰- خط سیر سطوح لغزش (NSTSMC)



شکل ۱۱- ورودی‌های کنترلی سیستم (NSTSMC)

با مقایسه شکل‌های (۶ و ۹)، مشاهده می‌شود که در این حالت، روش فوق پیشگی در زمان نشست کوتاه تر و با ماکزیمم تلاش کنترلی بزرگتری (شکل ۸ و ۱۱) پاسخ می‌دهد. پاسخ سیستم به شدت به انتخاب ضرایب وابسته است. می‌توان ضرایب را به گونه‌ای انتخاب کرد که پاسخ دارای چترینگ کمتر ولی تلاش کنترلی یا زمان نشست بزرگتر شود و با افزایش نامعینی‌ها چترینگ افزایش می‌یابد.

همانگونه که از شکل ۶ مشاهده می‌شود، ماهواره پیرو در زمان کمتر از ۱۵۰ ثانیه در موقعیت مطلوب قرار می‌گیرد. تلاش کنترلی کمتر از ۲۰ نیوتن است (شکل ۸).

ب) کنترلر مود لغزشی ترمینال غیر تکین

در کنترلر ترمینال غیر تکین، علاوه بر ضرایب طراحی کنترلر مرتبه توانی سطح لغزش نیز، به طور ویژه‌ای حائز اهمیت است. با نزدیک شدن نسبت مرتبه توانی سطح لغزش (p/q) به ۲ جواب‌های حاصل از کنترلر، با افزایش زمان نشست و کاهش تلاش کنترلی مواجه می‌شود. اثر کاهش β روی پاسخ‌ها به شرح زیر است:

- ۱- افزایش کران چترینگ
 - ۲- تاثیر بسیار کمی در افزایش تلاش کنترلی
 - ۳- کاهش زمان نشست سیستم و کاهش میزان فراجش پاسخ‌ها
- در مورد تغییرات نیز می‌توان به نکات زیر اشاره کرد:
- ۱- کاهش η باعث ناپایداری جواب‌ها می‌شود ۲- اثر افزایش η باعث:

الف) کاهش میزان فراجش پاسخ و کاهش زمان نشست سیستم

ب) افزایش چشم‌گیر تلاش کنترلی

ج) افزایش کران چترینگ

برای تعیین مقادیر p و q از رابطه (۴۳) استفاده شده است.

$$p = 2q - 1, q = 2n + 1, n \in \mathbb{N} \quad (43)$$

پاسخ سیستم به کنترلر ترمینال غیر تکین با در نظر گرفتن ۲۰٪ نامعینی روی جرم ماهواره پیرو و در شرایط حضور اغتشاش J_2 در شکل‌های ۹ تا ۱۱ نشان داده شده است. ضرایب کنترلی انتخاب شده عبارتند از:

$$\beta = [0.01 \quad 0.04 \quad 0.05], \eta = [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1]$$

$$n = 1 \Rightarrow q = 3, p = 5 \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{5}{3}$$

برای امکان پیاده‌سازی عملی و کاهش چترینگ در روش ترمینال غیر تکین، در رابطه (۳۳)، تابع تانژانت هایپربولیک جایگزین تابع $sign$ شده است. به همین دلیل همانگونه که در شکل ۱۱ مشخص است، چترینگ کاهش یافته است ولی کارایی کنترلر نیز ضعیف‌تر شده و زمان نشست افزایش می‌یابد.

ضریب طراحی کنترلر فوق پیچشی	K
ضریب طراحی کنترلر ترمینال غیر تکین	p
ضریب طراحی کنترلر ترمینال غیر تکین	q
ضریب مرتبه دوم یکنواختی پتانسیل جاذبه زمین	J_2

علائم یونانی

عرض جغرافیایی ماهواره رهبر	θ
سرعت زاویه‌ای ماهواره رهبر	$\dot{\theta} = \omega$
زاویه آنومالی حقیقی	ν
زاویه آرگومان حضیض	ω
ثابت گرانش زمین ($N.m^2.Kg^{-1}$)	μ
بردار موقعیت مکانی دستگاه LVLH	ρ
ضریب سطح لغزش در کنترلر فوق پیچشی	λ
ضریب سطح لغزش در کنترلر ترمینال غیر تکین	β
ضریب طراحی کنترلر ترمینال غیر تکین	η
طول جغرافیایی حقیقی	γ

بالا نویس

بیانگر مقدار مطلوب سیستم	d
--------------------------	-----

زیر نویس

نمایانگر ماهواره پیرو	f
نمایانگر ماهواره رهبر	c

۸- مراجع

- [1] Daniel PS, Fred YH, Scott RP (2004) A Survey of spacecraft formation flying guidance and control (Part II): Control. ACC Conference. Boston. Massachusetts. 2976-2985.
- [2] Rabiei A, Malekzadeh M, Abnili M (2015) A nonlinear predictive PID Controller design for spacecraft formation flying control. Modares Mech Eng 15(3): 313-321. (In Persian)
- [3] Wang F, Liu M, Jin R, Li Z (2016) Adaptive back stepping controller and sliding mode controller design for formation flight in Sun-Earth L 2 point. Aerosp Sci Technol 55: 409-418.
- [4] Nair RR, Behera L, Kumar V, Jamshidi M (2015). Multisatellite formation control for remote sensing applications using artificial potential field and adaptive fuzzy sliding mode control. IEEE Syst J 9(2): 508-518.
- [5] Christopher E, Enric FC, Leonid F (2006) Advances in variable structure and sliding mode control. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

با مقایسه پاسخ های تلاش کنترلی (۸ و ۱۱)، در روش ترمینال بعد از انتهای مانور، ورودی کنترلی دقیقاً صفر نشده است و عملگرها روشن می باشند.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله موضوع کنترل پرواز هماهنگ ماهواره‌ها در حالت دنبال کردن رهبر، مورد بررسی قرار گرفته، دو نمونه از کنترلرهای مود لغزشی درجه بالا (کنترلر مود لغزشی مرتبه دو به کمک الگوریتم فوق پیچشی و کنترلر مود لغزشی ترمینال غیر تکین)، جهت ردیابی مقادیر مطلوب برای مدارهای بیضوی با خروج از مرکز بزرگ طراحی شده است. برای کاهش تلاش کنترلی، ضرایب الگوریتم فوق پیچشی از الگوریتم تطبیقی محاسبه می شوند. جهت انجام شبیه‌سازی‌ها، از معادلات غیرخطی حالت دنبال کردن رهبر و داده‌های فیزیکی - مداری پروژه فضایی پروبا-۳ استفاده شده است. با شبیه‌سازی‌های متعدد مشاهده می‌شود که روش ترمینال، زمان نشست کوچکتر و تلاش کنترلی کمتری دارد، ولی نسبت به اغتشاش ثابت و ماندگار مقاومت کمتری دارد. در اغتشاش گاوسی هر دو کنترلر عملکرد مشابهی دارند. در مقایسه کلی دو کنترلر، عملکرد مناسبتر الگوریتم فوق پیچشی در حذف چترینگ و مقاومت سیستم مشاهده می‌شود.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

ثابت جهانی گرانش ($N.m^2.Kg^{-2}$)	G
جرم زمین	M_e
بردار ورودی کنترل (N)	F
بردار عدم قطعیت‌ها	f
موقعیت شعاعی ماهواره رهبر	R
نیم قطر بزرگ گردش ماهواره رهبر	a
خروج از مرکز	e
فرکانس طبیعی مدار مرجع	n
کران بالای مشتق اول اغتشاشات	L
سطح لغزش	s
بردار حالت سیستم	X
خطای سیستم ($X - X^d$)	e

- [20] Llorente JS, Agenjo A, Carrascosa C, Negueruela C, Mestreau-Garreau A, Cropp A, Santovincenzo A (2013) PROBA-3: Precise formation flying demonstration mission. *Acta Astronautica* (82): 38-46.
- [21] Mattia Z (2011) Coupled orbital and attitude SDRE control system for spacecraft formation flying. MS. Thesis, Polytechnic Di Milano.
- [22] Chutiphon P, Alan SIZ, May LT (2010) Quasi-continuous higher order sliding mode controllers for spacecraft attitude tracking maneuvers. *IEEE Trans Ind Electron* 57(4): 1436-1444.
- [23] Yuri Sh, Christopher E, Leonid F, Arie L (2014) Sliding mode control and observation. Springer Science and Business Media, New York.
- [24] Derafa L, Benallegue A, Fridman L (2012) Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV. *J Franklin Ins* 349(5): 685-699.
- [25] Moreno JA (2009) A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. in *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, CCE, 2009 6th Int. Conf.* pp. 1-6.
- [26] Stephen B, Laurent EGH, Eric F, Venkataramanan B (1994) Linear matrix inequalities in system and control theory. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia.
- [27] Hao L, Lihua D, Zhong S (2011) Adaptive nonsingular fast terminal sliding mode control for electromechanical actuator. *Int J Sys Sci* 42(1): 1-15.
- [28] Jinkun L, Xinhua W (2012) Advanced sliding mode control for mechanical systems: design, analysis and MATLAB simulation. 1st edn. Tsinghua University Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [29] Chanidapha S, Chutiphon P (2013) Finite-time convergent sliding mode controllers for robot manipulators. *Appl Mathematical Sci* 63(7): 3141-3154.
- [30] Charles DB (2002) Elements of spacecraft design. 1st edn. American Institute of Aeronautics and Astronautics. Inc. Reston. Virginia.
- [31] Katsuhiko Y, Masaya K (2012) New state transition matrix for formation flying in J_2 perturbed elliptic orbits *J Guid Control Dyn* 35(2): 536-547.
- [6] Delprat S, Ferreira A, Loza D (2014) High order sliding mode control for hybrid vehicle stability. *Int J Sys Sci* 45(5): 1202-1212
- [7] Giorgio B, Alessandro P, Elisabetta P, Elio U (2003) A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems, *Int J Control* 79(6): 875-892.
- [8] Imad M, Fayez Sh A, Salah L, Maxime W (2015) Comparison of robust and adaptive second order sliding mode control in PEMFC air-feed systems. *Int J Hydrogen Energy* 15(5): 1-14.
- [9] Feng Y, Han X, Wang Y, Yu X (2007) Second-order terminal sliding mode control of uncertain multivariable systems. *Int J Control* 80(6): 856-862.
- [10] Zhao LW, Hua CC (2014) Finite-time consensus tracking of second-order multi-agent systems via nonsingular TSM. *Nonlinear dyn* 75(1-2): 311-318.
- [11] He X, Wang Q, Yu W (2015) Finite-time distributed cooperative attitude tracking control for multiple rigid spacecraft. *Appl Math Comput* 256: 724-734.
- [12] Huang X, Yan, Y, Zhou Y, Hao D (2016) Fast terminal sliding mode control of under actuated spacecraft formation reconfiguration. *J Aerosp Eng* 04016020.
- [13] Zhou N, Xia Y (2015) Coordination control design for formation reconfiguration of multiple spacecraft. *IET Control Theory* 9(15): 2222-2231.
- [14] Zhou N, Xia Y, Wang M, Fu M (2015) Finite-time attitude control of multiple rigid spacecraft using terminal sliding mode. *Int J Robust Nonlinear Control* 25(12): 1862-1876.
- [15] Jonghee B, Youdan K (2013) Spacecraft formation reconfiguration using impulsive control input. *Int J Aeronaut Space Sci* 14(2): 183-192.
- [16] Jonghee B, Youdan K (2012) Adaptive controller design for spacecraft formation flying using sliding mode controller and neural networks. *J Franklin Inst* (349): 578-603.
- [17] Terry A, Srinivas V, Pini G, Jonathan H, Louis B (2010) Spacecraft formation flying: dynamics, control and navigation. 1st edn. Butterworth-Heinemann Elsevier Oxford.
- [18] Markus L, Agnes MG (2013) Formation flying and mission design for Proba-3. *Acta Astronautica* 82: (137-145).
- [19] Jerzy S (2015) Aerospace Robotics II. Springer International Publishing Switzerland.