مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۶/ دوره ۷/ شماره ۲/ صفحه ۱۰۹-۹۳

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/JSFM.2017.3445.1952

بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال

یونس انصاریان[۱،*] و علی اصغر جعفری[۲]

[۱] کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

[۲] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۷/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۱۲/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۳/۲۷

چکیده

در این مقاله ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با مایع داخلی و با شرایط مرزی دو سر ساده بررسی شده است. پوسته از کامپوزیت چند لایه تشکیل شده است. برای حل معادلات حاکم بر پوسته، از تئوری برشی مرتبه اول استفاده می‌شود. روابط کرنش-تغییر مکان و انحناء-تغییر مکان بر مبنای تقریب اول لاو نوشته شده است، فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال، از روش انرژی و بر اساس اصل انرژی پتانسیل کمینه محاسبه شده است. سیال ایده‌آل فرض شده است. بر مبنای معادلات و روابطی که از حل تحلیلی بدست آمده‌اند، یک کد کامپیوتری به زبان متلب به منظور به دست آوردن جواب برای تحلیل ارتعاشات پوسته نوشته شده است. برای بررسی دقت نتایج به دست آمده، پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در نرم افزار آباکوس مدلسازی شده، آنالیز مودال در مورد آن انجام شده است؛ همچنین اثر پارامترهای مختلف از جمله وجود سیال، چگالی و ارتفاع سیال، زاویه الیاف و برخی پارامترهای هندسی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته در دو حالت پوسته خالی و محتوی سیال بررسی شده است. پاسخ دینامیکی گذرای پوسته محتوی سیال، تحت بار ضربه‌ای جانبی بر اساس روش جمع مودها به دست آمده است. در پایان اثر بارگذاری پایا و فرکانس تحریک بر ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال بررسی شده است.

کلمات کلیدی: پوسته استوانه‌ای؛ ارتعاشات اجباری؛ تئوری برشی مرتبه اول.

Investigation of Free and Forced Vibration of a Composite Circular Cylindrical Shell with Internal Fluid

Y. Ansaryan[1], A. A. Jafari[2]

[1] MS.c, Mech. Eng., K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

[2] Prof., Mech. Eng., K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

Abstract

The present study was aimed at investigating the vibration of composite cylindrical shell filled with internal liquid with simple two-headed boundary conditions. The shell was composed of multilayer composite. First-order shear theory was employed to solve the governing equations of the shell. First love’s approximation theory was utilized to write strain-displacement and curvature-displacement equations. Natural frequencies of the composite cylindrical shell filled with fluid were calculated using minimum potential energy principle. The fluid was supposed to be ideal. According to the equations that were obtained through analytical solution, a computerized code was written using MATLAB software in order to achieve an answer for analyzing the vibrations of the shell. In order to make sure about the precision of the results, the composite cylindrical shell was modelled in Abacus Software, and modal analysis was carried out for it. Moreover, the effect of different parameters such as presence of fluid, the density and height of the fluid, the orientation of the fibers, and some geometrical parameters on the natural frequencies of the shell were investigated in empty and filled states of the shell. The transient dynamic response of the composite cylindrical shells filled with internal liquid that was under lateral impulse loadwas calculated through the principle of mode superposition. Finally, the effect of stable load and motivation frequency on the vibrations of the composite cylindrical shell was examined.

Keywords: Cylindrical Shell; Forced Vibration; First-Order Shear Theory.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۴۲۷۶۹۴۱۲؛ فکس: ۰۴۴۴۶۴۳۷۵۲۰

آدرس پست الکترونیک: yunes_k68@yahoo.com

۱- مقدمه

بسیاری از موارد مهندسی مانند، صنایع پتروشیمی، تجهیزات پروسه‌های شیمیایی، صنایع تولید نیرو، انتقال آب و... نیازمند مخازن و لوله‌هایی جهت ذخیره‌سازی و انتقال مایعات است. این گونه موارد، نیاز به مطالعه درباره مخازن و پوسته‌های استوانه‌ای را آشکار می‌کند.

در زمینه ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی، تحقیقات متعددی صورت گرفته است. لام و لوی[۱]، اثر شرایط مرزی را برای یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چرخشی جدار نازک با استفاده از تئوری لاو و روش گالرکین بررسی کردند. جعفری و همکاران [۲]، ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی خالی را تحت بار ضربه‌ای شعاعی و یک بار فشاری محوری (کمتر از بار بحرانی)، مورد بررسی قرار داده‌اند و اثر پارامترهای مختلف مانند، زاویه‌ی الیاف و بار محوری و برخی مشخصات فیزیکی را روی پاسخ دینامیکی بررسی نمودند. تورانی و لاکیس [۳]، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای انیزوتروپیک را که در تماس با مایع غیر تراکم پذیر و غیر ویسکوز قرار دارد، بر پایه تئوری بهبود یافته پوسته که اثرات برش عرضی و اینرسی چرخشی را به حساب آورده مورد مطالعه قرار دادند. گوناوان و همکاران [۴]، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای حاوی سیال را که روی پایه‌های الاستیک قرار داشت، از روش نیمه تحلیلی المان محدود بررسی کردند. ناحیه سیال، توسط تئوری پتانسیل جریان شرح داده شده است. فشار هیدرودینامیک اعمال شده بر پوسته از شرایط کوپل دینامیکی ساختار- سیال بدست می‌آید. جم و نیکجو [۵]، ارتعاشات آزاد و کمانش یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با سیال درونی را بررسی کردند. از روش ریلی-ریتز برای حل مسأله استفاده کردند و اثر پارامترهای مختلف از جمله، اثر تقویت کننده‌ها را بر فرکانس‌های طبیعی بررسی کردند که در آن سیال به صورت ایده‌آل و تراکم ناپذیر فرض شده است.

در این پژوهش، روابط مربوط به پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال، بر اساس تئوری برشی مرتبه اول پوسته‌ها بیان شده‌اند. برای نوشتن روابط کرنش- تغییر مکان و انحنا- تغییر مکان، از تئوری تقریب اول لاو استفاده شده است. برای بدست آوردن معادلات فرکانسی از روش ریلی – ریتز استفاده شده است. در ابتدا ارتعاشات آزاد پوسته‌های کامپوزیتی محتوی سیال مورد بررسی قرار گرفته، فرکانس های طبیعی و شکل مودها استخراج می‌شوند و سپس در ادامه پاسخ دینامیکی گذرای پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی تکیه گاه دوسر ساده تحت بار ضربه‌ای جانبی بدست خواهند آمد. برای بررسی درستی نتایج علاوه بر مقایسه با کارهای انجام شده قبلی، تحلیل المان محدود آباکوس نیز انجام می‌گیرد. در ادامه اثر برخی پارامترهای مهم بر فرکانس‌های طبیعی پوسته و همچنین اثر آن‌ها بر پاسخ دینامیکی گذرای پوسته، مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

در این جا به برخی از نوآوری‌های این مقاله اشاره می‌شود:

ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با سیال درونی بررسی می‌شود که موضوع جدیدی است.

تأثیر بار خارجی از جمله، بار ضربه‌ای و بار سینوسی بر ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال، مورد بررسی قرار می‌گیرد که پیشتر مورد مطالعه قرار نگرفته است.

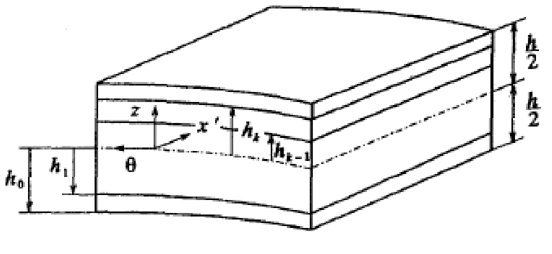
اثر چگالی و ارتفاع سیال درون پوسته و زاویه‌ی الیاف، بر فرکانس‌های طبیعی مسأله و پاسخ گذرای سیستم بررسی می‌شود.

تأثیر پارامترهای فیزیکی از جمله، اثر نسبت طول به شعاع پوسته و همچنین اثر نسبت شعاع به ضخامت پوسته بر پاسخ ارتعاشی سیستم، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

اثر مقدار فرکانس تحریک بر دامنه نوسانات پوسته (ماکزیمم جابجایی) در حالت بارگذاری پایا بررسی می‌شود.

۲- روابط حاکم بر پوسته‌های کامپوزیتی لایه‌ای

شکل ۱ ساختار لایه‌های یک پوسته کامپوزیتی با ضخامت h و دارای k لایه را مشخص می‌کند.



شکل ۱- چیدمان لایه های پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی

۲-۱- انرژی کرنشی پوسته

انرژی کرنشی پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۱) محاسبه می‌شود [۵، ۶]:

$$U_{\text{shell}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L}[\sigma][\varepsilon]Rdxd\theta \tag{۱}$$

روابط تنش– کرنش مربوط، عبارتند از:

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\varepsilon\} \tag{۲}$$

که $\{\sigma\}$ مؤلفه‌های تنش و $\{\varepsilon\}$ مؤلفه‌های کرنش می‌باشند و $[\bar{Q}]$ ماتریس سفتی تبدیل یافته کاهش یافته است و به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$[\bar{Q}_{ij}] = [T]^{-1}[Q_{ij}][T] \quad (i,j = 1,\ldots,6) \tag{۳}$$

T ماتریس تبدیل بین مختصات اصلی ماده و مختصات پوسته است؛ در رابطه (۳)،$[Q]$ ماتریس سفتی است که برای یک ماده ارتوتروپیک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \tag{۴}$$

Q_{ij}ها برابر با رابطه (۵) است:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\ ,\ \ Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}\ ,\ \ Q_{66} = G_{12}$$
$$Q_{44} = G_{23}\ ,Q_{55} = G_{13} \tag{۵}$$

در روابط بالا E_1 و E_2، مدول‌های الاستیک هر لایه در جهات اصلی G_{12}، G_{23} و G_{13} مدول‌های برشی و ν_{12} و ν_{21} ضرایب پواسون هستند.

مولفه‌های میدان کرنش مطابق با تئوری تقریب اول لاو به صورت توابع خطی از مختصه ضخامت z به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شوند [۷]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^0 \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^0 + zk_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^0 + 2zk_{x\theta}^0 \\ \varepsilon_{xz} &= \gamma_{xz}^0 \\ \varepsilon_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0 \end{aligned} \tag{۶}$$

که در این روابط ε_x و ε_θ به ترتیب، کرنش‌ها در جهت‌های محوری و محیطی و $\varepsilon_{x\theta}$، ε_{xz} و $\varepsilon_{\theta z}$، کرنش‌های برشی در فاصله z از سطح میانی می‌باشند. ε_x^0، ε_θ^0، $\gamma_{x\theta}^0$، γ_{xz}^0 و $\gamma_{\theta z}^0$ کرنش‌های سطح میانی و k_x^0 وk_θ^0 و $k_{x\theta}^0$، انحناهای سطح میانی می‌باشند و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول به صورت رابطه (۷) تعریف می‌شوند[۸، ۹]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial v_0}{\partial \theta} + \dfrac{w_0}{R} \\ \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial u_0}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} k_x^0 \\ k_\theta^0 \\ k_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial \psi_x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \psi_\theta}{\partial x} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_\theta + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial w_0}{\partial \theta} - \dfrac{v_0}{R} \\ \psi_x + \dfrac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{۷}$$

که در این روابط u_0، v_0 و w_0 به ترتیب، مؤلفه‌های تغییر مکان لایه میانی پوسته در جهت‌های طولی، محیطی و شعاعی می‌باشند و ψ_x و ψ_θ به ترتیب، شیب در صفحه‌x-z و شیب در صفحه‌ی z-θ می‌باشند.

میدان جابجایی پوسته استوانه‌ای در تئوری برشی مرتبه اول پوسته‌ها در رابطه (۸) بیان شده است[۹]:

$$\begin{aligned} u(x,\theta,z) &= u_0(x,\theta) + z\psi_x(x,\theta) \\ v(x,\theta,z) &= v_0(x,\theta) + z\psi_\theta(x,\theta) \\ w(x,\theta,z) &= w_0(x,\theta) \end{aligned} \tag{۸}$$

پس از جاگذاری روابط، معادله انرژی کرنشی پوسته به صورت رابطه (۹) به دست می‌آید:

$$U_{\text{shell}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L}[\varepsilon]^T[S][\varepsilon]Rdxd\theta \tag{۹}$$

که در آن بردار کرنش $[\varepsilon]$ است و به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود:

$$[\varepsilon]^{\mathrm{T}} = \{\varepsilon_x^0\ \ \varepsilon_\theta^0\ \ \gamma_{x\theta}^0\ \ k_x^0\ \ k_\theta^0\ \ k_{x\theta}^0\ \ \gamma_{\theta z}^0\ \ \gamma_{xz}^0\} \tag{۱۰}$$

همچنین در رابطه (۹)، [S] ماتریس سفتی است و به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود:

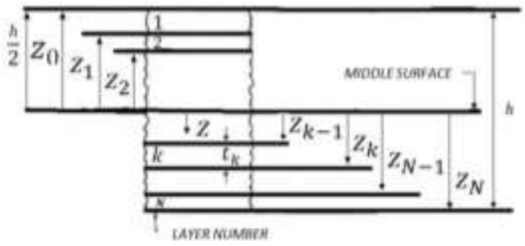
$$[S] = \begin{bmatrix} A_{3\times3} & B_{3\times3} & [0]_{3\times2} \\ B_{3\times3} & D_{3\times3} & [0]_{3\times2} \\ [0]_{2\times3} & [0]_{2\times3} & H_{2\times2} \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

در رابطه فوق، A_{ij} سفتی کششی، B_{ij} سفتی پیچشی، D_{ij} سفتی خمشی و H_{ij} سفتی برشی می‌باشند که برای پوسته‌ای که از چندین لایه ارتوتروپیک تشکیل شده باشد، سفتی‌ها به صورت رابطه (۱۲) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left[\bar{Q}_{ij}\right]_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \left[\bar{Q}_{ij}\right]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \left[\bar{Q}_{ij}\right]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{cases}$$

$$H_{ij} = \frac{5}{4}\sum_{k=1}^{N} \left[\bar{Q}_{ij}\right]_k \left(z_k - z_{k-1} - \frac{4}{3}(z_k^3 - z_{k-1}^3)\frac{1}{h^2}\right) \qquad (۱۲)$$

در این روابط z_k و z_{k-1} فاصله بین سطح داخلی و خارجی لایه k ام است که در شکل ۲ نشان داده شده است. N تعداد لایه‌های پوسته و $\left[\bar{Q}_{ij}\right]_k$ ماتریس سفتی دوران یافته لایه kام می است. شکل ۲ چیدمان لایه‌های یک لمینیت را نشان می‌دهد.



شکل ۲- چیدمان لایه‌های یک لمینیت

۲-۲- انرژی جنبشی پوسته

انرژی جنبشی برای کل پوسته را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$T_{\text{shell}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^L \left\{\bar{\rho}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right] + 2Q\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial t}\right)\right] + I\left[\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial t}\right)^2\right]\right\} R dx d\theta \qquad (۱۳)$$

که در آن:

$$\begin{cases} \bar{\rho} = \sum_{k=1}^{n}\int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^k dz = \sum_{k=1}^{n} \rho^k (z_k - z_{k-1}) \\ Q = \sum_{k=1}^{n}\int_{z_{k-1}}^{z_k} z\rho^k dz = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ I = \sum_{k=1}^{n}\int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2\rho^k dz = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \rho^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{cases} \qquad (۱۴)$$

۲-۳- شرایط مرزی

شرط مرزی مورد مطالعه در این پژوهش، شرط دو سر ساده است. برای ارضای این شرط باید روابط (۱۵) برقرار باشند:

$$w = v = \psi_x = 0 \qquad \text{at} \ldots x = 0, L \qquad (۱۵)$$

با استفاده از روابط ذکر شده برای تکیه‌گاه دو سر ساده در تئوری برشی مرتبه اول، مولفه‌های تغییر مکان لایه میانی پوسته بصورت رابطه (۱۶) فرض می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{m=1}\sum_{n=0} A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos(n\theta)\,T_{mn}(t) \\ v_0 &= \sum_{m=1}\sum_{n=0} B_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin(n\theta)\,T_{mn}(t) \\ w_0 &= \sum_{m=1}\sum_{n=0} C_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos(n\theta)\,T_{mn}(t) \\ \psi_x &= \sum_{m=1}\sum_{n=0} D_{mn}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos(n\theta)\,T_{mn}(t) \\ \psi_\theta &= \sum_{m=1}\sum_{n=0} E_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin(n\theta)\,T_{mn}(t) \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در آن m تعداد نیم موج‌های طولی، n تعداد نیم موج‌های محیطی، x,θ نیز مختصات در دستگاه استوانه‌ای و t زمان هستند و A_{mn}، B_{mn}، C_{mn}، D_{mn} و E_{mn} ضرایب ثابت شکل مود هستند. $T_{mn}(t)$ تابع زمانی ارتعاش است.

۲-۴- بررسی اثر سیال

برای بررسی تاثیر مایع درونی بر ارتعاشات پوسته، باید ابتدا با استفاده از یک مدل ریاضی به تحلیل برهم کنش جامد و سیال در سطح تماس این دو پرداخت. مدل ریاضی مذکور بر اساس فرضیات ذیل استوار است[۸ و ۱۰]:

جریان سیال از نوع جریان پتانسیل است.

سیال ایده‌آل است؛ یعنی غیر ویسکوز و تراکم ناپذیر است.

جابجایی‌ها کوچک‌اند، بنابراین می‌توان از تئوری خطی استفاده کرد.

سرعت سیال در راستای محور استوانه برابر با صفر است.

از اثرات موج‌های سطحی سیال صرف نظر شده است.

از اثرات فشار هیدرواستاتیک نیز صرف نظر شده است.

با توجه به فرض اول که جریان سیال، جریان پتانسیل فرض شده است، می‌توان تابع پتانسیل سرعت در دستگاه مختصات استوانه‌ای را به شکل رابطه (۱۷) بیان کرد:

$$\nabla^2\Phi = 0$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (۱۷)$$

که در آن Φ تابع پتانسیل سرعت سیال است. x مولفه محوری، θ مولفه محیطی و r مولفه شعاعی در دستگاه استوانه‌ای هستند.

برای بدست آوردن اثرات سیال، باید شرایط مرزی تاثیرات متقابل سیال و جامد در معادلات سیال اعمال شود. بدین منظور با توجه به این امر که در نقطه تماس سیال با پوسته، سیال نمی‌تواند در پوسته فرو رود و همیشه تماس دائمی بین سطح داخلی پوسته و لایه پیرامونی سیال وجود دارد، بنابراین سرعت شعاعی سیال با سرعت شعاعی پوسته در نقطه تماس این دو، مقداری یکسان است. این فرضیات را می‌توان با عبارات (۱۸) بیان کرد:

$$V_{r|r=R} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=R} = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{r=R} \quad (۱۸)$$

که در آن w همان جابجایی شعاعی پوسته است که در رابطه (۱۶) بیان شد. برای حل معادله دیفرانسیل تابع پتانسیل سرعت، می‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده کرد. بنابراین پتانسیل سرعت را به صورت ضرب دو تابع (۱۹) در نظر می‌گیریم:

$$Q(x,\theta,r,t) = R(r)S(x,\theta,t) \quad (۱۹)$$

با توجه به رابطه (۱۸) داریم:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=R} = \left(\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)_{r=R} S$$

$$S = \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{r=R}}{\left(\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)_{r=R}} \quad (۲۰)$$

و با جاگذاری رابطه (۱۹) در (۱۷) و ساده سازی‌های لازم، رابطه (۲۱) بدست می‌آید:

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + r\frac{dR(r)}{dr} - R(r)\left[\left(\frac{m\pi r}{L}\right)^2 + n^2\right] = 0 \quad (۲۱)$$

برای پوسته‌ای که در معرض مایع درونی قرار دارد، ضریب *R(r)* در رابطه (۲۱) همواره منفی است:

$$R(r) = A\,I_n\left(\frac{m\pi r}{L}\right) + BK_n\left(\frac{m\pi r}{L}\right) \quad (۲۲)$$

برای استوانه پرشده از مایع، ثابت B باید برابر صفر قرار داده شود؛ زیرا که تابع در مرکز استوانه (r=0) تکین است. با جاگذاری رابطه (۲۲) و (۲۰) در رابطه (۱۹)، تابع پتانسیل سیال به صورت رابطه (۲۳) بدست می‌آید:

$$\Phi = \frac{I_n\left(\frac{m\pi r}{L}\right)}{I_n'\left(\frac{m\pi R}{L}\right)} \times (C_{mn}i\omega)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos(n\theta)\,e^{i\omega t} \quad (۲۳)$$

بنابراین انرژی جنبشی مایع عبارت از رابطه (۲۴) است:

$$T_{\text{fl}} = \left(\frac{\rho_{\text{fl}}}{2}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{H}(\Phi\Phi_{,r})_{r=R}R\,d\theta dx \quad (۲۴)$$

که در آن H ارتفاع سیال درون پوسته و ρ_{fl} چگالی سیال است که در اینجا ثابت فرض شده است.

با غیر قابل تراکم در نظر گرفتن سیال و همچنین چشم پوشی از اثرات موج‌های سطحی، انرژی پتانسیل سیال برابر صفر خواهد بود.

۲-۵- ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال

در ارتعاشات آزاد تابع زمانی در روابط مربوط به جابجایی‌ها، رابطه (۱۶) به صورت هارمونیک فرض می‌شود:

$$T_{mn}(t) = e^{iw_{mn}t}\ ,\ i = \sqrt{-1} \quad (۲۵)$$

تابع انرژی کلی پوسته به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شود:

$$\Pi = T_{\text{fl}} + T_{\text{shell}} - U_{\text{shell}} + W \quad (۲۶)$$

در آن W انرژی پتانسیل مربوط به کار انجام شده روی پوسته است که ناشی از بارگذاری خارجی است و در بخش مربوط به تحلیل ارتعاشات اجباری معرفی می‌شود. با استفاده از رابطه ریلی-ریتز داریم:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\{\Delta\}_{mn}} = 0 \quad (۲۷)$$

که در آن:

$$\{\Delta\}_{mn} = \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} \quad (۲۸)$$

برای شرایط مرزی دو سر ساده رابطه ریلی-ریتز، به معادله (۲۹) تبدیل می‌شود:

$$([K]_{mn} - \omega_{mn}^2[M]_{mn})\{\Delta\}_{mn} = 0 \quad (۲۹)$$

که در آن $\{\Delta\}_{mn}$ بردار ضرایب شکل مود، $[M]_{mn}$ ماتریس جرم و $[K]_{mn}$ ماتریس سفتی سازه هستند. عناصر ماتریس‌های $[M]_{mn}$ و $[K]_{mn}$ در پیوست الف آمده است. از معادله فوق رابطه فرکانس‌های طبیعی پوسته به صورت رابطه (۳۰) به دست می‌آید:

$$\beta_1\omega^{10}+\beta_2\omega^8+\beta_3\omega^6 +\beta_4\omega^4+\beta_5\omega^2+\beta_6=0 \quad (۳۰)$$

۲-۶- ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال

باتوجه به اینکه انرژی پتانسیل جریان سیال صفر است، لذا سیال اثر خود را به صورت انرژی جنبشی در روابط ارتعاشات (چه آزاد و چه اجباری) نشان می‌دهد با این تفاوت که تابع زمانی در ارتعاشات اجباری مجهول بوده، بایستی محاسبه گردد.

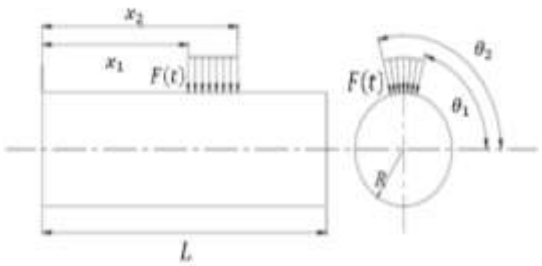
در بیشتر موارد بارگذاری روی سازه‌های پوسته‌ای، از نوع بارگذاری با زمان محدود است. آزمایشات نشان می‌دهد که بسیاری از سازه‌های کامپوزیتی در برابر بارهای ضربه‌ای ضعیف هستند. اعمال یک بار ضربه‌ای کوچک ممکن است، سبب جابجایی بزرگ و کاهش در استحکام سازه کامپوزیتی گردد. در این مقاله فرض می‌شود که پوسته فقط در جهت شعاعی تحریک می‌شود که این بار به صورت فشار یکنواخت بر سطح مورد نظر وارد می‌شود. در شکل ۳، نحوه اعمال بار نشان داده شده است.

با فرض شرایط مرزی دو سر ساده برای پوسته استوانه‌ای، تابع بارگذاری به صورت رابطه (۳۱) ساده می‌شود. ضریب P_{mn} در رابطه (۳۲) محاسبه شده است.

$$q\left(x,\theta,t\right)=G\left(x,\theta\right)F(t) =\sum_{m=1}\sum_{n=0}P_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos(n\theta)\,F(t) \quad (۳۱)$$

$$P_{m0}=\frac{1}{m\pi^2}\left[\cos\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right)-\cos\left(\frac{m\pi x_1}{L}\right)\right]\times(\theta_2-\theta_1) \qquad n=0$$

$$P_{mn}=\frac{2}{mn\pi^2}\left[\cos\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right)-\cos\left(\frac{m\pi x_1}{L}\right)\right]\times[\sin(n\theta_2)-\sin(n\theta_1)] \quad n>0 \quad (۳۲)$$



شکل ۳- نوع بارگذاری به کار رفته

توزیع بار را به صورت متقارن در وسط پوسته در نظر می‌گیریم. بخش وابسته به زمان تابع بارگذاری، $F_{mn}(t)$ می‌تواند به صورت یک بار هارمونیک فرض شود. در اینجا بخش وابسته به زمان بارگذاری به صورت انتگرال کانولوشن درنظر گرفته می‌شود:

$$F_{mn}(\mathrm{t})=\int_0^t F(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)d\tau \quad (۳۳)$$

در این رابطه $F(\tau)$ بار به کار رفته واقعی است و ω_{mn} همان فرکانس‌های زاویه‌ای طبیعی پوسته برای شکل مود (m,n) است و τ نیز، یک متغیر زمانی است. مقدار انتگرال کانولوشن با توجه به نوع پالس محاسبه می‌شود. مقادیر انتگرال کانولوشن برای پالس‌سینوسی در روابط (۳۴)، آمده است.

$$F(t)=\begin{cases}F_0\sin\left(\frac{\pi t}{t_1}\right) & 0\le t\le t_1\\ 0 & t>t_1\end{cases} \quad (۳۴)$$

انرژی پتانسیل ناشی از تحریک خارجی را به صورت رابطه (۳۵) تعریف می‌کنیم:

$$W=\int_0^L\int_0^{2\pi}q(x,\theta,t)\,w(x,\theta,t)Rd\theta dx \quad (۳۵)$$

با جاگذاری توابع جابجایی و بار وارده در رابطه (۳۵) و قرار دادن آن در معادله‌ی ریلی-ریتز، معادلات به دست آمده به صورت رابطه (۳۶) خواهد بود:

$$[M']_{mn}\{\Delta'\}_{mn}\ddot{T}_{mn}(t) +[K']_{mn}\{\Delta'\}_{mn}T_{mn}(t) =[Q]_{mn}F(t) \quad (۳۶)$$

طرف دوم معادله دیفرانسیل فوق، تابع هارمونیک پیوسته‌ای نیست و معادلات به یکدیگر کوپله نمی‌باشند، لذا جهت حل از آنالیز مودال استفاده می‌کنیم و با استفاده از شکل مودهای نرمالایز شده، معادلات را به پنج معادله غیر

کوپله تبدیل می‌کنیم. برای این منظور طرفین رابطه (۳۶) را در $\{\Delta'\}_{mn}^{T}$ ضرب می‌کنیم:

$$[I]\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 [I] T_{mn}(t) = [N]_{mn} F(t)$$
$$, \quad [N]_{mn} = \{\Delta'\}_{mn}^{T} [Q]_{mn} \qquad (۳۷)$$

با استفاده از روابط تبدیل لاپلاس و لاپلاس معکوس، تابع زمانی مربوط به ارتعاشات اجباری به صورت رابطه (۳۶) به دست می‌آید:

$$T_{mn}(\mathrm{t}) = \frac{N_{mn}}{\omega_{mn}} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \qquad (۳۸)$$

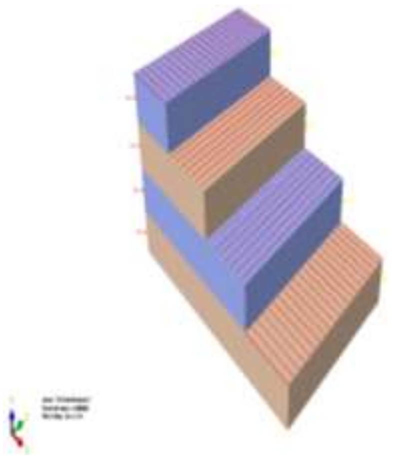
که در آن رابطه (۳۹) را داریم:

$$[N]_{mn} = \{\Delta\}_{mn}^{\mathrm{T}} \left[0 \;\; 0 \;\; \frac{\pi R L}{2} P_{mn} \;\; 0 \;\; 0\right]_{mn}^{\mathrm{T}} \qquad (۳۹)$$

۲-۷- مدل سازی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی حاوی سیال در نرم افزار ABAQUS

برای بررسی صحت جواب‌های به دست آمده از تحلیل‌های ارتعاشات آزاد و اجباری، پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در نرم افزار ABAQUS مدلسازی شده، آنالیز مودال در مورد آن انجام شده است. پوسته استوانه‌ای به صورت المان *Shell* در نرم افزار مدل شده است و برای مدل کردن سیال از المان‌های آکوستیک استفاده شده است که علاوه بر چگالی به مدول بالک سیال نیز نیاز است. جهت تحلیل بهتر و دقیق‌تر توسط نرم‌افزار، پوسته استوانه‌ای توسط ۲۹۷۴۴ المان مش‌بندی شده است. شکل ۴، مدلسازی چیدمان لایه‌ها در نرم افزار برای المان *Shell* را برای یک استوانه با لایه‌چینی [۰/۹۰/۹۰/۰] نشان داده شده است. شماره گذاری لایه‌ها به ترتیب از لایه داخلی (لایه شماره یک) تا لایه بیرونی (آخرین لایه) انجام می‌شود. برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی از روش *Frequency* و به منظور انجام آنالیز مودال توسط نرم‌افزار، از روش *Modal dynamics* استفاده شده است. نمونه مدل پوسته دو سر ساده مدل شده در نرم افزار المان محدود برای انجام تحلیل ارتعاشی، در شکل ۵ نشان داده شده است.

بر مبنای معادلات و روابط ذکر شده، یک کد کامپیوتری به زبان *Matlab* به منظور به دست آوردن جواب برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال تهیه شده است که ورودی‌ها، قابلیت‌های تحلیل و خروجی‌های آن به شرح زیر است.



شکل ۴- مدلسازی چیدمان لایه‌ها در ABAQUS

شکل ۵- نمونه‌ی مدل پوسته با سیال داخلی مورد استفاده در نرم افزار

- **ورودی‌های کد کامپیوتری برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری:**

  - خواص هندسی پوسته (شعاع، طول، ضخامت)
  - خواص کامپوزیت چندلایه (تعداد لایه‌ها، چیدمان لایه‌ها و همچنین جنس هر لایه، زاویه هر لایه و ضخامت هر لایه)
  - محل و ابعاد ناحیه اعمال بار در روی سطح پوسته (در مورد تحلیل ارتعاشات اجباری)
  - تعیین نوع و مقدار بار وارده بر حسب زمان (در مورد تحلیل ارتعاشات اجباری)

- **قابلیت‌های تحلیل کد کامپیوتری برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری :**
  - تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال با شرایط مرزی دو سر ساده
  - تحلیل ارتعاشات اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال دو سر ساده تحت بار ضربه‌ای جانبی (و با قابلیت تغییر نوع بارگذاری)
- **خروجی‌های کد کامپیوتری برای تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری:**
  - فرکانس‌های طبیعی شعاعی، خمشی، پیچشی و طولی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال
  - پاسخ زمانی تغییر مکان پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال دو سر ساده در جهات مختلف (x ،θ ،z) و در تمام نقاط روی سطح

۳- نتایج

۳-۱- بررسی فرکانس‌های طبیعی و اثر پارامترهای مختلف روی آن

خواص مربوط به پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در جدول ۱ نشان داده شده است. سیال مورد استفاده آب با چگالی $1000\ kg/m^3$ است؛ همچنین پوسته دارای طول ۳ متر، شعاع ۰/۵ متر و ضخامت ۴ میلی‌متر است. در همه موارد از ماده شماره ۱ و با لایه چینی [۰/۹۰/۹۰/۰] استفاده شده، مگر در مواردی که اشاره شده است.

در جدول ۲ فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی خالی با نتایج مرجع [۱۱] مقایسه شده است. در جدول ۳ نیز فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در دو حالت پر و خالی به دست آمده، با نتایج حاصل از آباکوس مقایسه شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود، نتایج خیلی به هم نزدیک‌اند.

۳-۱-۱- اثر سیال بر فرکانس های طبیعی

شکل ۶ فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی را در دو حالت خالی و پر از سیال نشان می‌دهد.

همان طور که ملاحظه می‌شود، در هر دو حالت افزایش موج محیطی پس از فرکانس پایه، باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. این امر به این خاطر است که تغییر موج محیطی به صورت همزمان هم بر ماتریس جرم و هم ماتریس سفتی سازه اثر می‌گذارد و هر چه موج محیطی بیشتر می-شود، تاثیر آن بر ماتریس سفتی، بیشتر از اثر آن بر ماتریس

جدول ۱- خواص مواد مورد استفاده [۱۱]

شماره ماده	نام ماده	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)	ν_{12}	$\rho\ (\frac{Kg}{m^3})$
۱	کربن/اپوکسی	۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۲	۷/۱۲	۲/۵	۰/۲۸	۱۶۰۰
۲	کربن/اپوکسی	۱۷۲/۳۶۹	۶/۸۹۵	۳/۴۴۸	۳/۴۴۸	۱/۳۷	۰/۲۵	۱۶۰۳/۰۳

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی *(Hz)* برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی خالی دارای تکیه‌گاه دو سر ساده، ماده شماره ۱، لایه چینی ۹۰/۰/۹۰ ، h=2 mm , L=6 m , R=1 m ، m=1

n	۱	۲	۳	۴	۵
روش حاضر	۶۱/۰۵	۲۴/۰۲	۱۲/۱۳	۸/۳۴	۸/۸۳
مرجع [۱۱]	۶۰/۲۶	۲۳/۶۴	۱۲/۰۳	۸/۳۵	۸/۸۷
تفاوت (٪)	۱/۲۹	۱/۵۸	۰/۸۲	۰/۳۶	۰/۴۵

جدول ۳- مقایسه فرکانس‌های طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی (در ردیف‌های اول پوسته خالی است)

n	۱	۲	۳	۴	۵
روش حاضر	۲۲۱/۴۸	۱۱۱/۳۷	۶۷	۶۲/۸۷	۸۴/۵۳
	۳۶/۰۶	۱۹/۸۶	۱۳/۶۴	۱۴/۳۳	۲۱/۱۷
آباکوس	۲۱۹/۸۱	۱۰۹/۵۷	۶۵/۶۵	۶۲/۰۲	۸۴/۳
	۳۵/۵۵	۱۹/۰۸	۱۳/۰۹	۱۳/۹	۲۰/۸۹
تفاوت (٪)	۰/۷۵	۱/۶۲	۲/۰۱	۱/۳۵	۰/۲۷
	۱/۴۱	۳/۹	۴/۰۳	۳	۱/۳۲

جرم است و لذا در nهای بالاتر، فرکانس افزایش می‌یابد. علاوه بر این نمودار نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی پوسته پر از سیال، کمتر از پوسته خالی است. وجود سیال، باعث افزایش جرم مودال می‌شود، در حالی که سفتی سازه ثابت می‌ماند، بنابراین فرکانس‌های طبیعی نسبت به حالت پوسته خالی کاهش می‌یابند. همان طور که مشاهده می‌شود در موج محیطی کم اثر سیال

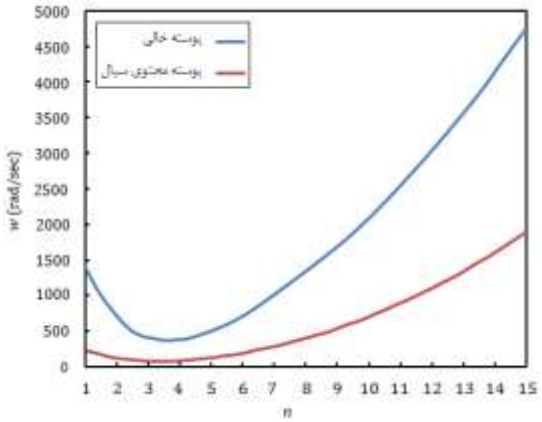
بر فرکانس‌های پوسته کمتر است و با افزایش تعداد موج محیطی، اثر سیال بیشتر می‌شود. با توجه به معادله مشخصه پوسته حاوی سیال و همچنین روابط بیان شده در پیوست الف، وجود سیال به صورت یک جمله اضافه در یکی از درایه‌های ماتریس جرم اثر خود را نشان می‌دهد و هرچه موج محیطی n افزایش یابد، این جمله مقدار بزرگتری به خود گرفته، درنتیجه نمودار فرکانس طبیعی بر حسب n با شیب کمتری (نسبت به حالت پوسته خالی) روند صعودی خود را ادامه می‌دهد.

لازم به ذکر است، در اینجا فرکانس‌های طبیعی برای نیم موج‌های محیطی از (n=1) تا (n=15) و به ازای نیم موج طولی (m=1) برای دو حالت پوسته پر و خالی محاسبه شده است. همچنین سیال مورد استفاده آب با چگالی ۱۰۰۰kg/m³ است.

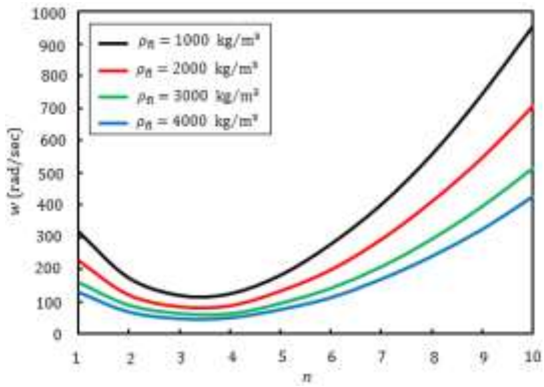
۳-۱-۲- اثر چگالی سیال روی فرکانس های طبیعی

شکل ۷ فرکانس‌های طبیعی را برای پوسته کامپوزیتی با سیال درونی با چگالی‌های مختلف نشان می‌دهد. همان طور که ملاحظه می‌شود، با افزایش چگالی مایع درونی، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. از آنجا که با افزایش چگالی سیال، جرم مودال افزایش یافته حال آنکه سفتی مودال ثابت می‌ماند، این امر قابل پیش‌بینی بود. اثر چگالی سیال در موج محیطی نزدیک به فرکانس پایه (n=3) کم می‌شود و به دنبال آن هر چه تعداد موج محیطی افزایش می‌یابد، اثر چگالی سیال هم بیشتر می‌شود.

لازم به ذکر است، کاهش فرکانس طبیعی در اثر وجود سیال داخلی به دلیل افزایش جرم مودال سیستم است و حتی در برخی از تحقیقات گذشته، سیال را به صورت یک جرم اضافی روی پوسته مدل کرده‌اند و از این طریق اثر آن را بر ارتعاشات نشان داده‌اند؛ همچنین از آنجا که رابطه بین



شکل ۶- اثر سیال داخلی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی



شکل ۷- اثر چگالی سیال بر فرکانس‌های طبیعی پوسته m=1

امواج محیطی (n) و فرکانس‌های طبیعی در معادله مشخصه سیستم به صورت غیر خطی است، لذا با تغییرات مرتب موج محیطی، فرکانس‌ها هم به همان نسبت کم و زیاد نخواهند شد. مثلا در شکل شماره ۷ اگر در n=5 با دو برابر شدن چگالی سیال، فرکانس طبیعی به اندازه ۳۰ واحد کم می‌شود، لزومی ندارد در n=10 هم فرکانس طبیعی با دو برابر شدن چگالی به همین مقدار تغییر کند.

۳-۱-۳- اثر ارتفاع سیال درونی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته

اگر پوسته را به صورت عمودی فرض کنیم، می‌توانیم عمق سیال را تغییر داده، اثر آن را بر فرکانس‌های طبیعی مشاهده کنیم. شکل ۸ فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ای را نشان می‌دهد که به تدریج از سیال پر شده است. همان طور که مشاهده

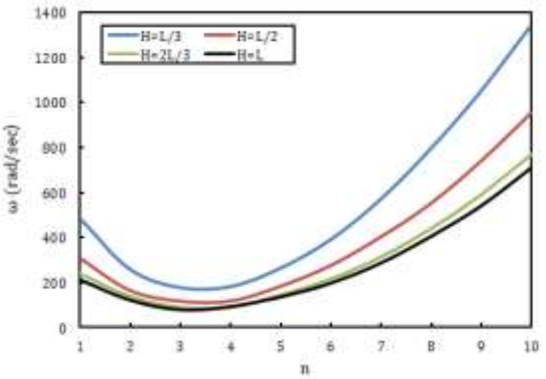
می‌کنید، افزایش ارتفاع سیال درون پوسته، منجر به کاهش شدید فرکانس‌های طبیعی پوسته می‌شود، به گونه‌ای که فرکانس‌های طبیعی پوسته در حالتی که عمق سیال برابر L/3 است، تقریبا دو برابر حالتی است که پوسته از سیال پر شده باشد.

۳-۱-۴- اثر زاویه‌ی الیاف بر فرکانس‌های طبیعی پوسته

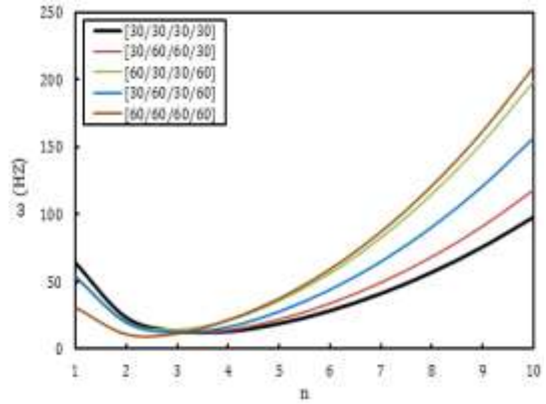
زاویه الیاف هر لایه، یکی از عوامل مؤثر بر رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی است. در شکل ۹، اثر زاویه الیاف روی فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال نشان داده شده است. در همه موارد تعداد لایه‌ها برابر و ضخامت ثابت است. همان طور که ملاحظه می‌شود، در موج محیطی متناظر با فرکانس پایه و امواج محیطی قبل از آن، اثر زاویه الیاف روی فرکانس کم است و با افزایش تعداد موج محیطی، این اثر بیشتر می‌شود؛ همچنین فرکانس‌های طبیعی برای مودهای بعد از مود پایه در حالت لایه چینی [۶۰/۶۰/۶۰/۶۰]، بالاترین مقدار را در بین لایه چینی‌های مختلف به خود اختصاص داده‌اند.

۳-۱-۵-اثر پارامترهای هندسی بر فرکانس‌های طبیعی پوسته

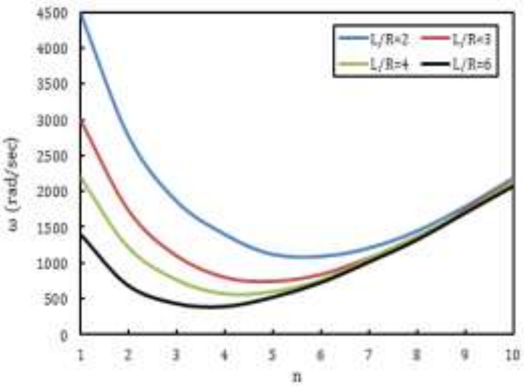
پارامترهای هندسی مانند نسبت طول به شعاع (L/R) و نسبت ضخامت به شعاع (h/R)، روی فرکانس‌های طبیعی پوسته تأثیر می‌گذارند. در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ به ترتیب، اثر نسبت طول به شعاع روی فرکانس‌های طبیعی پوسته خالی و محتوی سیال بررسی شده است. همان طور که در شکل‌ها مشخص است، با افزایش تعداد موج محیطی، اثر نسبت طول به شعاع روی فرکانس‌های طبیعی پوسته کاهش می‌یابد. در موج محیطی پایین با افزایش طول پوسته (افزایش نسبت طول به شعاع)، فرکانس کاهش می‌یابد؛ به طوریکه برای پوسته پر از سیال در $n=1$ با دو برابر شدن طول پوسته، فرکانس حدود ۶۶٪ کاهش می‌یابد در حالیکه در $n=10$، تغییر در فرکانس بسیار ناچیز است. لازم به ذکر است، اگرچه اثر افزایش نسبت طول به شعاع بر فرکانس‌های طبیعی پوسته خالی و پر از سیال مشابه هم است، اما اثر آن بر پوسته پر بیشتر است، به طوری که در $n=1$ با دو برابر شدن طول پوسته فرکانس طبیعی در حالتی که پوسته خالی است، ۵۲٪ کاهش می‌یابد و در حالتی که پوسته پر باشد، ۶۶٪ کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۸- اثر ارتفاع سیال درون پوسته بر فرکانس‌های طبیعی، m=1

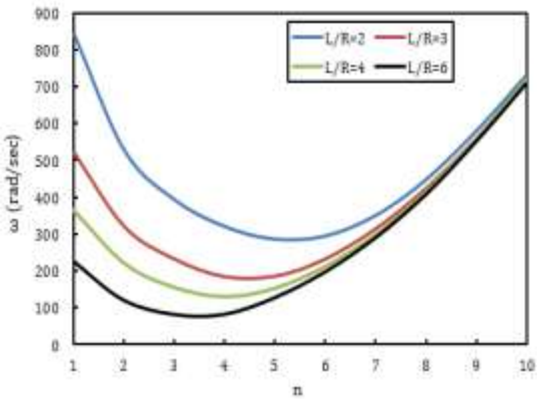


شکل ۹- اثر زاویه‌ی الیاف روی فرکانس‌های طبیعی پوسته کامپوزیتی حاوی سیال

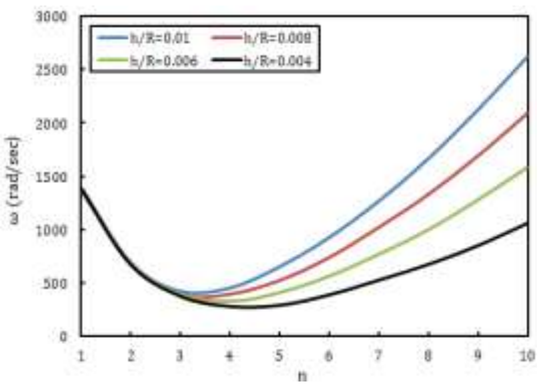


شکل ۱۰- اثر نسبت طول به شعاع بر فرکانس‌های طبیعی پوسته خالی

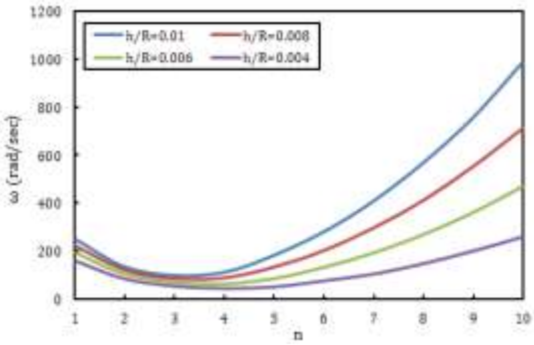
در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ به ترتیب، اثر نسبت ضخامت به شعاع روی فرکانس‌های طبیعی پوسته خالی و پر از سیال بررسی شده است. با افزایش تعداد موج محیطی، تأثیر ضخامت روی فرکانس افزایش می‌یابد. به طوریکه برای پوسته پر در n=10، با دو برابر شدن ضخامت، فرکانس طبیعی بیشتر از دو و نیم برابر می‌شود و برای پوسته خالی در n=10 با دو برابر شدن ضخامت، فرکانس طبیعی حدود دو برابر می‌شود. هرچه مقدار n بالاتر رود، اثر افزایش ضخامت نیز بیشتر می‌شود. همانطور که در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ ملاحظه می‌شود، اثر تغییر ضخامت بر فرکانس‌های طبیعی پوسته حاوی سیال، بیشتر از پوسته خالی است.



شکل ۱۱- اثر نسبت طول به شعاع بر فرکانس‌های طبیعی پوسته‌ی حاوی سیال



شکل ۱۲- اثر نسبت ضخامت به شعاع بر فرکانس‌های طبیعی پوسته خالی



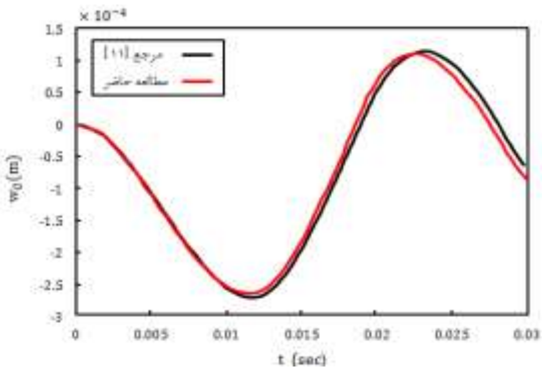
شکل ۱۳- اثر نسبت ضخامت به شعاع بر فرکانس‌های طبیعی پوسته حاوی سیال

۳-۲- بررسی ارتعاشات اجباری و پاسخ زمانی پوسته

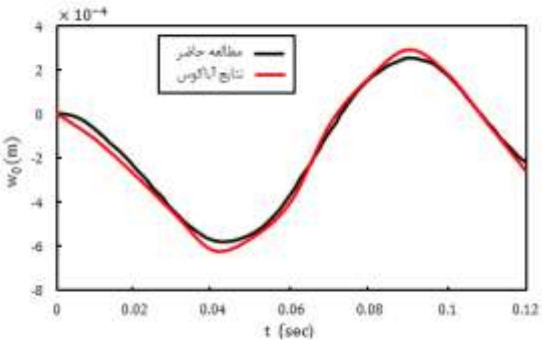
در بررسی ارتعاشات اجباری، تعداد m و n هایی که در نظر گرفته می‌شود، باید به حدی باشد که به جواب همگرا شویم. تعداد مودهای در نظر گرفته شده $(m \times n)$ برای بدست آوردن جواب (30×20) است. مختصات محل اعمال بار و مختصات نقطه‌ای روی پوسته که پاسخ زمانی در آن محاسبه می‌شود، در موقعیت $(x = L/2\ .\ \theta = 0)$ قرار دارد و سطح اعمال بار برابر $2l_1 \times 2l_2 = 20 \times 50\mathrm{cm}^2$ و نوع پالس سینوسی و شدت بار برابر $F_0 = -3000\ \mathrm{Pa}$ است، همچنین مدت زمان اعمال بار ضربه‌ای، از زمان صفر تا زمان t_1 مساوی با پریود طبیعی سازه[1] (یعنی معکوس فرکانس پایه بر حسب هرتز) در نظر گرفته شده است، بجز در مواردی که قید شده باشد. به منظور بررسی صحت مدل و نتایج به دست آمده از تحلیل ارتعاشات اجباری، در شکل ۱۴ جواب به دست آمده برای یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی خالی تحت بارگذاری گذرا از روش حاضر، با جواب مرجع [۱۱] مقایسه شده است.

در شکل ۱۵ نیز جواب به دست آمده برای یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی پر شده از سیال تحت بارگذاری گذرا از روش حاضر، با نرم افزار آباکوس مقایسه شده است. در هر دو شکل مدت زمان اعمال بار ضربه‌ای، از زمان صفر تا زمان t_1 مساوی با پریود طبیعی سازه در نظر گرفته شده است.

[1] Natural Period (N.P.)



شکل ۱۴- مقایسه پاسخ زمانی (جابجایی شعاعی) پوسته خالی، ماده شماره ۲، لایه چینی [۹۰/۰/۰/۹۰]، R=0.5 m L=4 m h=3 mm، نوع پالس سینوسی، محل اعمال بار $2l_1 \times 2l_2 = 31.4 \times 40\text{cm}^2$، F_0=-1000 Pa



شکل ۱۵- مقایسه پاسخ زمانی (جابجایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی حاوی سیال

۳-۲-۱- پدیده ضربان

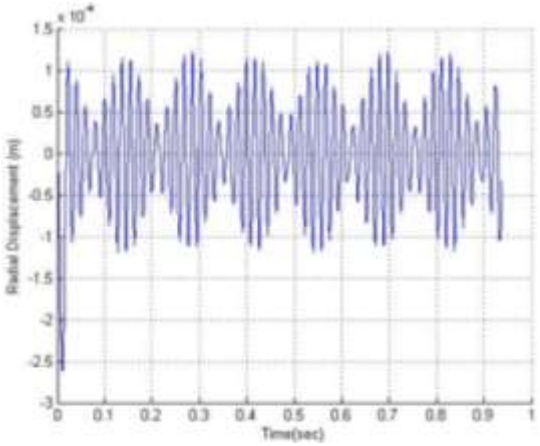
در اثر اعمال بار ضربه‌ای به پوسته، پدیده ضربان اتفاق می‌افتد. پدیده ضربان، نوعی نوسان است که در آن دامنه نوسان ابتدا افزایش می‌یابد، سپس به طور منظم کاهش می‌یابد و این افزایش و کاهش بطور متناوب ادامه می‌یابد. اگر نمودار تغییرات دامنه ارتعاش در جهت شعاعی را تا زمان‌های خیلی بزرگ‌تر از پریود طبیعی پوسته رسم کنیم، قادر به مشاهده این پدیده خواهیم بود. این کار در شکل ۱۶ برای پوسته مورد بررسی در شکل ۱۴ انجام شده است.

۳-۲-۲- پاسخ در حوزه فرکانسی پوسته با استفاده از تبدیل فوریه

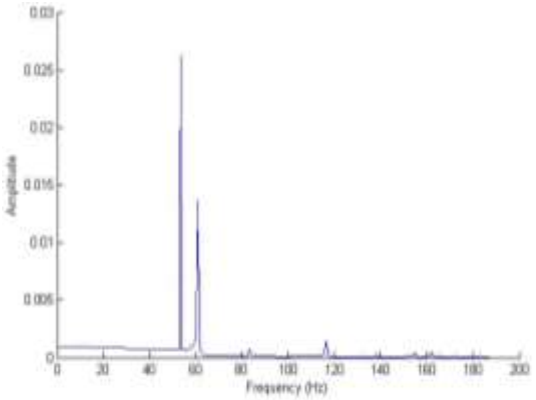
گاهی اوقات پی بردن به مقدار فرکانس‌های پاسخ از روی نمودار پاسخ زمانی یک سیستم ارتعاشی، مشکل است. با استفاده از تبدیل فوریه، می‌توان پاسخ سیستم ارتعاشی را از حوزه زمان، به حوزه فرکانس برده، درباره فرکانس‌های پاسخ سیستم اظهار نظر کرد. شکل ۱۷، پاسخ در حوزه فرکانس را برای پوسته خالی مورد بررسی در شکل ۱۶ نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود، فرکانس تحریک شده غالب، برابر ۵۳ هرتز است. فرکانس‌های طبیعی این پوسته به ازای تعداد نیم موج‌های طولی مساوی یک بر حسب تعداد موج محیطی، در شکل ۱۸ نشان داده شده است. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود، فرکانس طبیعی پایه این پوسته برابر ۳۷/ ۵۳ هرتز است که در m=۱ و n=۳ اتفاق می‌افتد. در واقع با اعمال بار ضربه‌ای، فرکانس طبیعی پایه پوسته از سایر فرکانس‌های طبیعی بیشتر تحریک می‌شود؛ بطوریکه می‌توان اثر بقیه فرکانس‌ها را در مقایسه با اثر فرکانس پایه، روی پاسخ زمانی ناچیز برشمرد.

۳-۲-۳- اثر سیال بر پاسخ زمانی پوسته

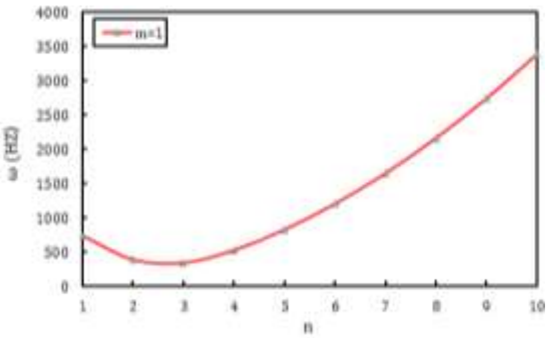
شکل ۱۹ پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی به بارگذاری گذرا را در دو حالت خالی و پر از سیال نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود، وجود سیال باعث کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود. از آنجا که حضور سیال درون پوسته باعث افزایش جرم کلی سازه می‌شود، لذا ماکزیمم جابجایی پوسته پر از سیال کمتر از پوسته خالی است؛ همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که وجود سیال، باعث به تأخیر افتادن ماکزیمم جابجایی پاسخ پوسته نیز می‌شود.



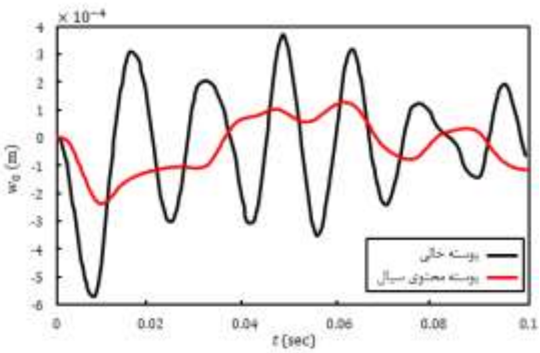
شکل ۱۶- نمایش پدیده‌ی ضربان در پاسخ زمانی پوسته مورد بررسی در شکل ۱۴



شکل ۱۷- پاسخ در حوزه‌ی فرکانس (FFT) پوسته شکل ۱۶



شکل ۱۸- فرکانس‌های طبیعی پوسته مورد بررسی در شکل ۱۶



شکل ۱۹- پاسخ زمانی (جابجایی شعاعی) پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی در دو حالت پر و خالی، t_1=0.01 sec

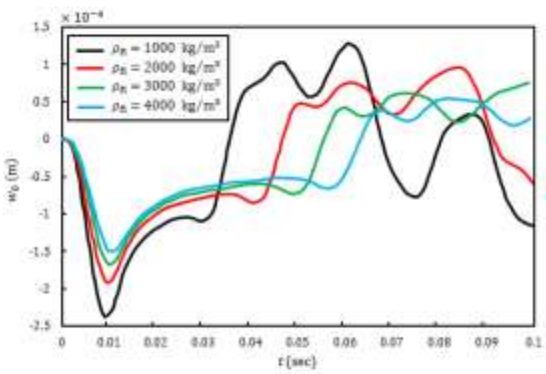
۳-۲-۴- اثر چگالی سیال

در شکل ۲۰، پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی حاوی سیال برای چگالی‌های مختلف سیال نشان داده شده است. افزایش چگالی سیال، باعث افزایش جرم کلی می‌شود، لذا افزایش چگالی سیال، باعث کاهش مقدار ماکزیمم جاجایی پوسته می‌شود. با افزایش چگالی سیال، پاسخ زمانی پوسته کندتر می‌شود و به عبارتی ماکزیمم جابجایی دیرتر اتفاق می‌افتد. همان طور که ملاحظه می‌شود، با دو برابر شدن چگالی سیال، مقدار ماکزیمم جابجایی حدود ۲۰٪ کاهش می‌یابد.

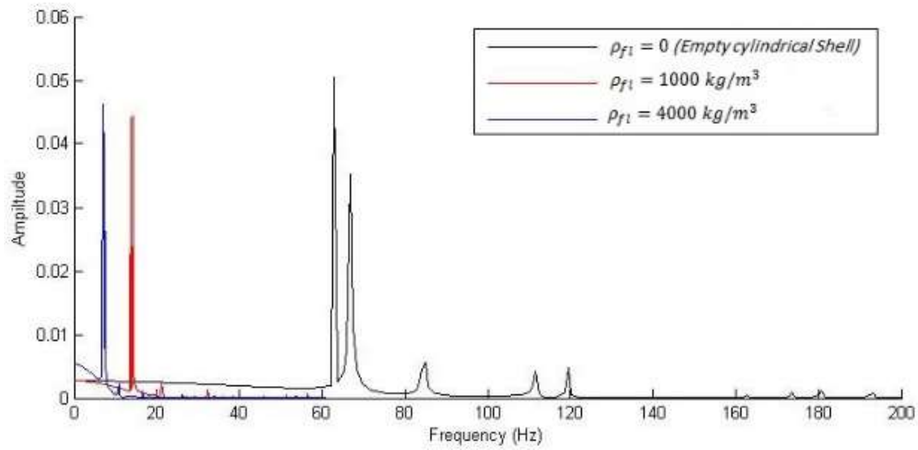
با بررسی ارتعاشات آزاد پوسته‌های بررسی شده در این دو شکل، فرکانس پایه برای پوسته خالی ۶۲/۸۹ هرتز، برای پوسته حاوی سیال با چگالی ۱۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب، ۱۳/۶۴ هرتز و برای پوسته حاوی سیال با چگالی ۴۰۰۰ کیلوگرم بر مکعب، برابر ۶/۹۲ هرتز است. شکل ۲۱، پاسخ در حوزه فرکانس را برای پوسته مورد بررسی در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ نشان می‌دهد و ملاحظه می‌شود که فرکانس‌های پایه در هر مورد، بیشترین تحریک را داشته‌اند.

۳-۲-۵- بارگذاری پایا

در برخی از موارد بار گذاری ممکن است، به صورت پایا باشد؛ یعنی بار وارد شده زمان طولانی بر پوسته اعمال می‌شود. برای دو بارگذاری پله‌ای و سینوسی این موضوع مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به شکل ۲۲ پس از اینکه بار در لحظه صفر بطور ناگهانی به مقدار F_0 می‌رسد و تا زمان بی‌نهایت روی پوسته باقی می‌ماند، در این حالت پوسته پس از چند نوسان به حالت پایدار در می‌آید و سپس با همان فرکانس طبیعی به ارتعاش خود ادامه می‌دهد با این تفاوت که دیگر حول نقطه صفر ارتعاش نمی‌کند و همیشه حول یک مقدار ثابت نوسان دارد. این مقدار در واقع باید همان خیز استاتیکی



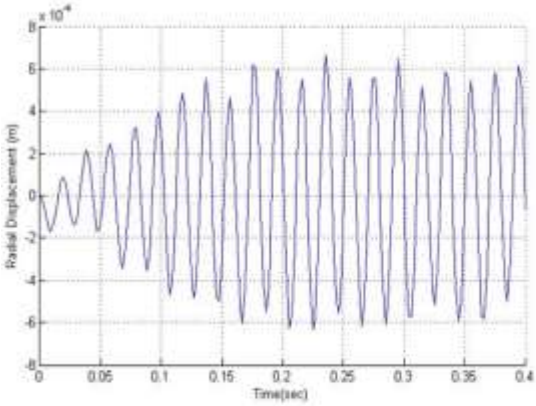
شکل ۲۰- اثر چگالی سیال بر پاسخ زمانی پوسته، t_1=0.01 sec



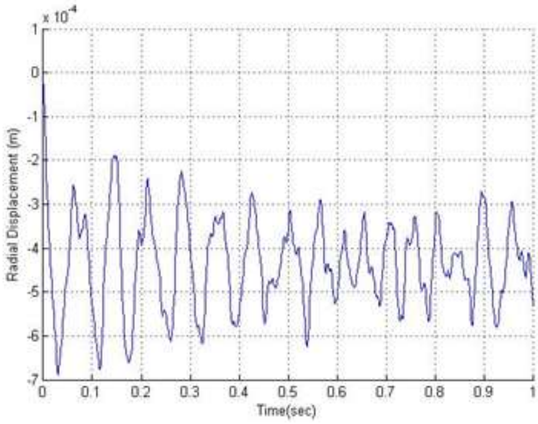
شکل ۲۱- پاسخ در حوزه‌ی فرکانس (FFT) پوسته استوانه‌ای شکل‌های ۱۹ و ۲۰، t_1=natural period

پوسته در اثر اعمال بار ثابت F_0 باشد. در شکل ۲۲، این مقدار برای پوسته با مشخصات ذکر شده تقریبا برابر ۰/۴۵ میلی متر است. این مقدار برای پوسته فوق با بار مذکور توسط نرم افزار ABAQUS محاسبه شده، مقدار دقیق آن برابر /۴۶۵۹. به دست آمده است.

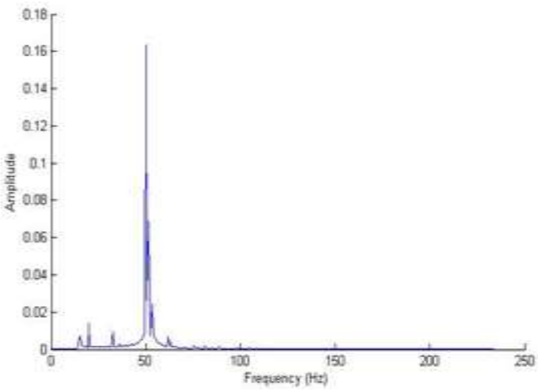
در شکل ۲۳ پاسخ پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی حاوی سیال به یک بار سینوسی ماندگار با فرکانس بار ۵۰ هرتز نشان داده شده است. صورت تبدیل یافته پاسخ از حوزه‌ی زمان به حوزه فرکانس برای همین پوسته در شکل ۲۴ نشان داده شده است. با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که فرکانس غالب در پاسخ ارتعاشی پوسته، برابر ۵۰ هرتز است که در حقیقت همان فرکانس بار خارجی است.



شکل ۲۳- پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی حاوی سیال، لایه چینی [۰/۹۰/۰/۹۰]، نوع پالس سینوسی پایا



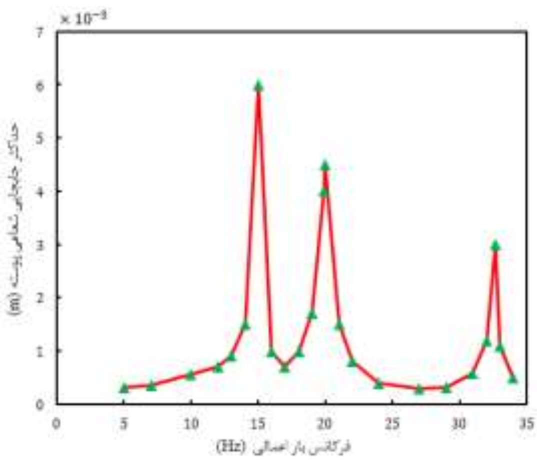
شکل ۲۲- پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی حاوی سیال، نوع پالس پله‌ای



شکل ۲۴- پاسخ در حوزه‌ی فرکانس برای پوسته مورد بررسی در شکل ۲۳

۳-۲-۶- تأثیر فرکانس بار روی دامنه‌ی نوسانات پوسته

یکی از اصول اساسی در ارتعاشات اجباری سیستم‌ها، افزایش ناگهانی دامنه ارتعاشات اجباری در محدوده فرکانس‌های طبیعی است. بدیهی است که این افزایش دامنه در فرکانس‌هایی رخ می‌دهد که مود طبیعی آن فرکانس بوسیله بارگذاری اعمال شده تحریک گردد. در شکل ۲۵، نمودار دامنه (ماکزیمم جابجایی) بر حسب فرکانس بار اعمالی نشان داده شده است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، در بعضی از نقاط مقدار دامنه تغییر ناگهانی دارد، فرکانس‌هایی که افزایش ناگهانی دامنه در آن‌ها بوجود می‌آید، حتماً باید جزو فرکانس‌های طبیعی سیستم باشند. مقادیر فرکانس‌های طبیعی به همراه مودهای نظیر، در جدول ۴ نشان داده شده است. در شکل ۲۵، مقدار بار اعمال شده خارجی برحسب Hz به صورت نقاط مثلثی نشان داده شده است و جهت نمایش بهتر اختلاف حداکثر جابجایی‌ها، از خط قرمز رنگ استفاده شده است.



شکل ۲۵- تغییر دامنه‌ی نوسانات پوسته‌ی مورد بررسی در شکل ۲۳ با تغییر مقدار فرکانس بار

جدول ۴- فرکانس‌های طبیعی پوسته مورد بررسی در شکل ۲۴

فرکانس‌های طبیعی (Hz)	۱۵/۰۵	۱۹/۹۲	۲۰/۰۲	۳۲/۷۲
شکل مود (m,n)	(۱،۳)	(۱،۲)	(۱،۴)	(۱،۵)

۴- بحث و نتیجه گیری

فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال تحت تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل، چگالی و ارتفاع سیال درونی، زاویه الیاف، نسبت ضخامت به شعاع و نسبت طول به شعاع قرار دارند. تأثیر این پارامترها به قرار زیر است:

وجود سیال درون پوسته، باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی پوسته می‌شود. هر اندازه که چگالی سیال افزایش یابد، فرکانس‌ها کاهش می‌یابند. اثر چگالی سیال روی فرکانس‌های دورتر از فرکانس پایه بیشتر است.

افزایش ارتفاع سیال درون پوسته، منجر به کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. هر چقدر سیال بیشتری درون پوسته استوانه‌ای باشد، اثر افزایش ارتفاع کم‌تر می‌شود.

در یک چیدمان لایه‌های ثابت، زاویه الیاف روی فرکانس پایه تأثیر کمی دارد و اثر آن‌ها روی فرکانس‌های دورتر از فرکانس پایه مشهودتر است.

اثر نسبت ضخامت به شعاع فقط در تعداد زیاد موج محیطی (n) ظاهر می‌شود و در تعداد کم موج محیطی، اثر آن کم‌تر است. با افزایش این نسبت، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.

اثر نسبت طول به شعاع فقط در تعداد کم موج محیطی (n) ظاهر می‌شود و وقتی که تعداد موج محیطی زیاد می‌شود، افزایش این نسبت تاثیری روی فرکانس ندارد. با افزایش این نسبت، فرکانس کاهش می‌یابد.

فرکانس پایه در m=1 اتفاق می‌افتد و با افزایش نیم موج طولی (m)، فرکانس افزایش می‌یابد.

وجود سیال درون پوسته، باعث کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود و پاسخ زمانی پوسته را نیز به تأخیر می‌اندازد.

هر چه چگالی سیال بیشتر باشد، ماکزیمم جابجایی پوسته کاهش می‌یابد. همچنین پاسخ پوسته به بارگذاری، کندتر می‌شود. به عبارت دیگر با افزایش چگالی سیال درون پوسته، ماکزیمم جابجایی پوسته دیرتر اتفاق می‌افتد.

اگر بار پله‌ای برای مدت زمان‌های طولانی روی پوسته اعمال شود، پوسته با فرکانس پایه‌ی خود نوسان می‌کند. این نوسانات همواره حول مقداری ثابت و غیر صفر خواهد بود که برابر خیز استاتیکی پوسته است.

وقتی بار سینوسی ماندگاری روی سطح پوسته قرار می‌گیرد، پوسته با همان فرکانس بار شروع به نوسان می‌کند. اگر فرکانس بار برابر یکی از فرکانس‌های طبیعی پوسته باشد، دامنه‌ی ارتعاش پوسته به شدت افزایش می‌یابد.

۵- پیوست

عناصر ماتریس‌های $[M]_{mn}$ و $[K]_{mn}$ در رابطه (۲۹) به صورت زیر است:

$$M_{11} = -\frac{\pi RL}{2}\bar{\rho}$$
$$M_{12} = M_{21} = 0$$
$$M_{13} = M_{31} = 0$$
$$M_{14} = -\frac{\pi RL}{2}Q = M_{41}$$
$$M_{15} = M_{51} = 0$$
$$M_{22} = -\frac{\pi RL}{2}\bar{\rho}$$
$$M_{23} = M_{32} = 0$$
$$M_{24} = M_{42} = 0$$
$$M_{25} = -\frac{\pi RL}{2}Q = M_{52}$$
$$M_{33} = -\frac{\pi RL}{2}\bar{\rho} - \frac{\pi RL}{2}\rho_{fl}\left(\frac{H}{L} - \frac{1}{2m\pi}sin\frac{2m\pi H}{L}\right)\frac{I_n(\frac{m\pi R}{L})}{I'_n(\frac{m\pi R}{L})}$$
$$M_{34} = M_{43} = 0$$
$$M_{35} = M_{53} = 0$$
$$M_{44} = -\frac{\pi RL}{2}I$$
$$M_{45} = M_{54} = 0$$
$$M_{55} = -\frac{\pi RL}{2}I$$
$$K_{11} = \frac{m^2\pi^3 R}{2L}A_{11} + \frac{n^2\pi L}{2R}A_{66}$$
$$K_{12} = -\frac{mn\pi^2}{2}(A_{12} + A_{66}) = K_{21}$$
$$K_{13} = -\frac{m\pi^2}{2}A_{12} = K_{31}$$
$$K_{14} = \frac{m^2\pi^3 R}{2L}B_{11} + \frac{n^2\pi L}{2R}B_{66} = K_{41}$$
$$K_{15} = -\frac{mn\pi^2}{2}(B_{12} + B_{66}) = K_{51}$$
$$K_{22} = \frac{m^2\pi^3 R}{2L}A_{66} + \frac{n^2\pi L}{2R}A_{22} + \frac{\pi L}{2R}H_{44}$$
$$K_{23} = \frac{n\pi L}{2R}(A_{22} + H_{44}) = K_{32}$$
$$K_{24} = -\frac{mn\pi^2}{2}(B_{12} + B_{66}) = K_{42}$$
$$K_{25} = \frac{m^2\pi^3 R}{2L}B_{66} + \frac{n^2\pi L}{2R}B_{22} - \frac{\pi L}{2}H_{44} = K_{52}$$
$$K_{33} = \frac{m^2\pi^3 R}{2L}H_{55} + \frac{n^2\pi L}{2R}H_{44} + \frac{\pi L}{2R}A_{22}$$
$$K_{34} = \frac{m\pi^2}{2}(-B_{12} + R * H_{55}) = K_{43}$$
$$K_{35} = \frac{n\pi L}{2R}(B_{22} + R * H_{44}) = K_{53}$$
$$K_{44} = \frac{m^2\pi^3 R}{2L}D_{11} + \frac{n^2\pi L}{2R}D_{66} + \frac{\pi RL}{2}H_{55}$$
$$K_{45} = -\frac{mn\pi^2}{2}(D_{12} + D_{66}) = K_{54}$$
$$K_{55} = \frac{m^2\pi^3 R}{2L}D_{66} + \frac{n^2\pi L}{2R}D_{22} + \frac{\pi RL}{2}H_{44}$$

۶- مراجع

[1] Lam KY, Loy CT (1998) Influence of boundary conditions for a thin laminated cylindrical shells. Compos Struct 41: 215-228.

[2] Jafari AA, Khalili SMR, Azarafza R (2005) Transient dynamic response of composite circular cylindrical shells under radial impulse load and axial compressive loads. Thin Wall Struct 43: 1763-1786.

[3] Toorani MH, Lakis AA (2001) Shear deformation in dynamic analysis of anisotropic laminated open cylindrical shells filled with or subjected to a flowing fluid, Comput. Methods. Appl Mech Eng 190: 4929-4966.

[4] Gunawan H, Mikami TJ, Kanie T, Sato SM (2005) Free vibration of fluid-filled cylindrical shells on elastic foundations. Thin Wall Struct 43: 1746-1762.

[5] Jam JE, Nikjoo MA (2013) Buckling and free vibrations of cylindrical stiffened composite shells with internal liquid. Res J Appl Sci Eng Technol 6(19): 3495-3505.

[۶] نیکجو مع، جعفری ع (۱۳۹۰) بهینه سازی ارتعاشات آزاد پوسته‌استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده محتوی مایع. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک، گروه طراحی کاربردی.

[7] Khalili SMR, Azarafza R, Davar A (2009) Transient dynamic response of initially stressed composite circular cylindrical shells under radial impulse load. Compos Struct 89: 275-284.

[8] Yadav D, Verma N (1998) Free vibration of composite circular cylindrical shells with random material properties. Part I: General theory. Compos Struct 41: 331-338.

[۹] قمری ع، جعفری ع (۱۳۸۸) بررسی ارتعاشات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی لایه‌ای با سیال درونی. پایان نامه کارشناسی

ارشد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک.

[10] Jain RK (1974) Vibration of fluid-filled orthotropic cylindrical shells. J Sound Vib 37(3): 379-388.

[۱۱] آذرافزا ر، جعفری ع، خلیلی س‌م (۱۳۸۴) بهینه سازی وزنی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چند لایه. پایان نامه دکتری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک، گروه طراحی کاربردی.