



تحلیل دقیق ارتعاش آزاد ورق‌های قطاعی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

کوروش خورشیدی^{۱*} و سعید عنصری نژاد^۲

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران
^۲دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران
 تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۵/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۱۱/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۹/۲۹

چکیده

در این تحقیق، ارتعاش آزاد ورق‌های قطاعی ایزوتروپیک کوپل شده با لایه پیزوالکتریک بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار دینامیکی ورق‌های قطاعی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری اصل همپلتون و معادله الکترواستاتیکی ماکسول بدست آمده است. معادلات دیفرانسیل کوپل حاکم بر ورق مرکب مرتعش، با بکارگیری روش جداسازی متغیرها و توابع پتانسیل کمکی، حل می‌گردند. اعتبار روش حل دقیق ارائه شده در این مقاله، با نتایج ارائه شده در مراجع، مورد ارزیابی و تایید قرار گرفته است. با استفاده از نتایج عددی، تاثیر زاویه بازشدگی ورق قطاع (α)، نسبت ضخامت به شعاع ورق زمینه (h/r_0)، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق زمینه (r_i/r_0)، نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق زمینه ($h_p/2h$) و شرایط مرزی مختلف روی فرکانس طبیعی ورق قطاعی مرتعش کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک بدست آمده است. همچنین در مورد میزان، نحوه و شرایط اثر گذاری هر پارامتر روی فرکانس طبیعی سازه بحث و بررسی شده است.

کلمات کلیدی: حل دقیق؛ ارتعاش آزاد؛ ورق‌های قطاعی؛ پیزوالکتریک؛ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول.

Exact Free Vibration Analysis of Sector Plates Coupled with Piezoelectric Layers using First-Order Shear Deformation Plate Theory

K. Khorshidi^{1,*}, S. Onsorynezhad²

¹ Assis. Prof., Mech. Eng., Arak Univ., Arak, Iran.

² M.Sc. Student, Mech. Eng., Arak Univ., Arak, Iran.

Abstract

In this study, free vibration analysis of isotropic sector plates coupled with piezoelectric layers based on first-order shear deformation theory has been analyzed. Governing differential equations of the dynamic behavior of free vibration of isotropic sector plates coupled with piezoelectric layers are derived using Hamilton's principle and the electrostatic Maxwell equations. The Coupled governing differential equations of the vibrating composite plate are solved by applying the method of separation of variables and auxiliary potential functions. The presented analytical exact solution in this paper is validated with available data in the literature. Using numerical results the effect of opening angle of sector plate (α), the host thickness to radius ratios (h/r_0), inner to outer radius ratios (r_i/r_0), the ratio of thickness of the piezoelectric layer respect to thickness of the host plate ($h_p/2h$) and different boundary conditions on the natural frequencies of the vibrating sector plates coupled with piezoelectric layers are obtained. Also impact, manner and conditions of each parameter on the natural frequencies are considered and discussed.

Keywords: Exact solution; Free Vibration; Sector Plates; Piezoelectric; First-Order Shear Deformation Plate Theory.

۱- مقدمه

با توجه به توسعه روز افزون تکنولوژی نوین در صنایع مکانیک، هوافضا، عمران، معدن، شیمیایی و ... لزوم مطالعه رفتار دینامیکی این نوع از تکنولوژی علی‌الخصوص مواد نوین مورد استفاده در صنایع، بیش از پیش احساس می‌شود. یکی از پارامترهای مهم دینامیکی در بررسی رفتار سازه‌ها، رفتار ارتعاشی است که به دلیل متناوب بودن بار ناشی از این رفتار، سبب آسیب جدی و تخریب زود هنگام سازه‌ها می‌شود؛ لذا مطالعه این رفتار به طراحان سازه کمک می‌نماید که سازه‌های امنی طراحی کنند. یکی از این مواد نوین، مواد پیزوالکتریک هستند. مواد پیزوالکتریک، کاربرد وسیعی در علوم مختلف دارند. پیزوالکتریک‌ها، موادی هستند که دارای خواصی بین خواص الکتریکی و الاستیکی می‌باشند. با توجه به استفاده گسترده‌ای که این مواد در حسگرها و محرک‌ها دارند، مطالعه روی ورق‌هایی که دارای لایه پیزوالکتریک می‌باشند، توجه بسیاری از محققان را به خود معطوف ساخته است. از آنجا که پیزوالکتریک‌ها به شکل ورق‌های دایروی در موتورهای مافوق صوت بکار گرفته می‌شوند، بررسی این ورق‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. دلیل استفاده از این مواد در موتورهای مافوق صوت، نیاز به وزن پایین، گشتاور بالا و سرعت پایین موتور است. در این موتورها استاتور با استفاده از اثر پیزوالکتریک تحریک شده، موجب بکار انداختن روتور می‌گردد. از دیگر کاربردهای مواد پیزوالکتریک، می‌توان به تولید انرژی الکتریکی با استفاده از تغییر شکل مکانیکی این مواد اشاره کرد. همچنین از دیگر کاربردهای این مواد، می‌توان به استفاده آنها در میکروفن‌ها، بلندگوها، سنسورهای فشار و ... اشاره کرد. در سازه‌های که این مواد بکار گرفته می‌شوند، دارای اشکال مختلفی از قبیل، ورق مستطیلی، ورق دایروی، ورق حلقوی، ورق قطاعی و ... می‌باشند؛ لذا تجزیه و تحلیل رفتار دینامیکی علی‌الخصوص رفتار ارتعاشی این سازه‌ها به خصوص ورق‌ها در دستگاه مختصات استوانه‌ای برای محققان حاضر اهمیت است. راه حل عمومی برای بدست آوردن معادلات دینامیکی بستر پیزوالکتریک، بوسیله دینگ [۱] ارائه شد. وانگ [۲]، لیو [۳]، حسینی هاشمی و همکاران [۴ و ۵] و خورشیدی و همکاران [۶]، ارتعاش آزاد ورق‌های نازک و نسبتاً ضخیم دایروی را بررسی کردند که دارای وصله پیزوالکتریک بودند. دوان [۷] با استفاده از تئوری

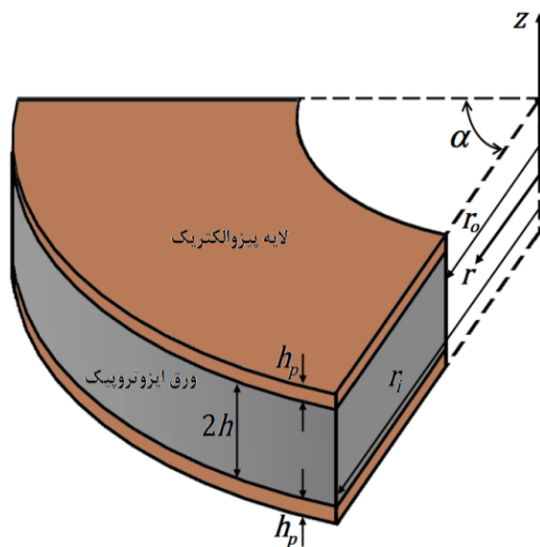
مرتب اول تغییر شکل برشی ارتعاشات آزاد ورق‌های حلقوی نازک و نسبتاً ضخیم را تحلیل کرد که دارای وصله پیزوالکتریک بودند. لیو [۸] با استفاده از روش المان محدود متقارن محوری، به آنالیز ارتعاشات سه بعدی ورق‌های دایروی و حلقوی هوشمند پرداخت. ورق‌های قطاعی علاوه بر کاربردهای عملی بسیاری که دارند، تئوری آنها نیز یکی از مهمترین شاخه‌های ریاضیات کاربردی و علم مهندسی است. خصوصیات ارتعاشی اینگونه ورق‌ها در بسیاری از زمینه‌های مهندسی مورد توجه بسیار است. مطالعات بسیاری در مورد ورق‌های دایروی صورت گرفته است، اما مطالعات اندکی در مورد ورق‌های قطاعی انجام شده است. دریسویچ و میندلین [۹] مطالعات خود را در زمینه ارتعاشات متقارن محوری صفحات دایروی شروع کردند. آنها فرکانس صفحات دایروی را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و تئوری مرتبه کلاسیک بدست آوردند. سونی و همکارانش [۱۰] مطالعات خود در زمینه ارتعاشات متقارن محوری آزاد ورق‌های دایروی با ضخامت متغیر انجام دادند. آنها از توابع چیبیشف به منظور حل معادلات استفاده کردند. چانگ و کوک [۱۱] رفتار ارتعاش آزاد ورق‌های ضخیم دایروی که دارای تکیه گاه ساده و یا گیردار را بررسی نمودند که به این منظور، از روش المان محدود استفاده کردند. ون-کاتسان و کونوکاسریل [۱۲] ارتعاش آزاد ورق‌های دایروی چند لایه را بررسی کردند. در تحلیل آنها هر لایه به صورت ایزوتروپیک در نظر گرفته شد، اما خواص مواد و ضخامت آنها متفاوت بود. معادلات دیفرانسیل بر پایه تئوری مرتبه تغییر شکل برشی در مختصات استوانه‌ای صورت پذیرفت. گوروسوامی و یانگ [۱۳] یک روش المان محدود را برای تحلیل دینامیکی ورق‌های ضخیم در نظر گرفتند. تئوری ورق‌های مرتبه اول تغییر شکل برشی در این مطالعات، مورد استفاده واقع شده است و برخی از جواب‌های عددی مربوط به ارتعاشات آزاد ورق‌های حلقوی نیز ارائه گردید. مسئله مشابهی نیز توسط راو و پراساد [۱۴] حل گردید. ایری [۱۵]، رفتار ارتعاشی ورق‌های مرتبه اول تغییر شکل برشی را با ۹ ترکیب از شرایط تکیه‌گاهی مختلف مربوط به لبه‌های داخلی و خارجی تحلیل کرد. او برای توابع پذیرفتنی مربوط به جابجایی از توابع بسل در مسیر شعاعی و توابع مثلثاتی در مسیر جانبی استفاده کرد. وی با استفاده از این روش، جواب‌های با ارزشی را

بدست آمده و با بکارگیری اصل همیلتون، معادلات تعادل و شرایط مرزی استخراج گردیده است؛ برای بدست آوردن معادلات تعادل برحسب مولفه‌های جابجایی، از روابط کرنش-جابجایی خطی ون-کارمن و روابط تنش - کرنش الاستیک خطی استفاده شده است. در بخش نتایج عددی پس از بررسی اعتبار روش حاضر با مقایسه با نتایج ارائه شده توسط سایر محققان در مراجع معتبر به بررسی و تحلیل تاثیر پارامترهای مختلف از جمله، زاویه قطاع ورق (α)، نسبت ضخامت به شعاع ورق، نسبت شعاع‌های ورق، نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق و شرایط مرزی روی فرکانس طبیعی ورق پرداخته می‌شود.

۲- ارتعاشات آزاد ورق‌های قطاعی نسبتاً ضخیم

ایزوتروپیک کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک

ورق قطاعی نسبتاً ضخیمی را در نظر بگیرید که دارای ضخامت ثابت $2h$ بوده، دارای دو لایه پیزوالکتریک با ضخامت h_p در بالا و پایین خود است. شعاع داخلی ورق r_i و شعاع خارجی ورق r_o بوده، مبدا دستگاه محورهای مختصات استوانه‌ای در مرکز ورق، در صفحه میانی تعبیه می‌شود (شکل ۱).



شکل ۱ - هندسه ورق قطاعی ایزوتروپیک با دو لایه پیزوالکتریک و دستگاه مختصات استوانه‌ای

استخراج نماید. هانگ و همکاران [۱۶]، راه حل تحلیلی دقیق برای ارتعاش آزاد ورق‌های ایزوتروپیک قطاعی نازک با لبه‌های شعاعی ساده گیردار ارائه کردند. پیش از این همان راه حل تحلیلی دقیق برای ارتعاش آزاد ورق‌های قطاعی ضخیم با لبه‌های شعاعی ساده گیردار و لبه‌های مدور با شرایط مرزی دلخواه به کار گرفته شده است. آن‌ها راه حل خود را با استفاده از توابع بسل و بسل پیشرفته توسعه دادند. در برخی از مقالات [۱۷ و ۱۸] برای یافتن فرکانس‌های طبیعی ورق‌های قطاعی نازک و ضخیم با شرایط مرزی مختلف، از روش‌های عددی استفاده کردند. هانگ و هو [۱۹] یک راه حل تحلیلی برای ارتعاش ورق‌های ایزوتروپیک قطاعی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی با استفاده از روش فروبنیوس ارائه کرده است؛ همچنین یک سری تحقیقات در مورد ورق‌های قطاعی حلقوی صورت گرفته است. مک گی و همکاران [۲۰] راه حل تحلیلی دقیقی برای ارتعاش آزاد ورق‌های حلقوی ایزوتروپیک ارائه نموده‌اند. نای و ژانگ [۲۱] ارتعاش آزاد ورق‌های قطاعی حلقوی هدفمند را با استفاده از روش دیفرانسیلی یک بعدی مورد مطالعه قرار دادند. اقدام و همکاران [۲۲] راه حلی بسته برای خمش ورق‌های نازک ایزوتروپیک قطاعی حلقوی با لبه‌های گیردار، تحت تاثیر بارهای یکسان و غیر یکسان، با استفاده از روش کانتورویج تعمیم یافته ارائه کردند. تابع لایه مرزی، اولین بار توسط ریزنر معرفی شد [۲۳]. با استفاده از این تابع، تحلیل خمش ورق‌های قطاعی و لایه‌ای مستطیلی، توسط نوزیر و همکاران صورت گرفت [۲۴].

با توجه به مطالعات انجام پذیرفته تحقیقی در خصوص تحلیل رفتار ارتعاشی ورق‌های قطاعی حلقوی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک انجام پذیرفته است؛ همچنین از آنجایی که حل دقیق رفتار ارتعاشی هر سازه امکان دسترسی مهندسان و محققان به پیش بینی دقیق رفتار سازه فراهم می‌نماید [۲۵-۲۷]. در این مقاله با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، حل دقیق رفتار ارتعاش خطی ورق‌های قطاعی حلقوی ایزوتروپیک کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک برای اولین بار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. برای بدست آوردن معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق‌های قطاعی حلقوی ایزوتروپیک کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سازه

$$\tau_{rz}^h = \kappa^2 \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{rz}, \quad (12)$$

$$\tau_{\theta z}^h = \kappa^2 \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{\theta z}, \quad (13)$$

که E مدول الاستیسیته، ν ضریب پواسون ورق اصلی و بالانویس h نشان‌دهنده میدان تنش در ورق زمینه است. در روابط تنش-کرنش برای جبران خطای ناشی از صفر بودن تنش در سطوح آزاد ورق فاکتور، تصحیح تنش برشی در $\kappa^2 = \pi^2/12$ نظر گرفته شده است. توزیع تنش در لایه‌های پیزوالکتریک به صورت روابط (۱۴-۱۸) است [۵] و [۶].

$$\sigma_r^p = \bar{C}_{11}^p \varepsilon_r + \bar{C}_{12}^p \varepsilon_\theta - \bar{e}_{31} E_z, \quad (14)$$

$$\sigma_\theta^p = \bar{C}_{12}^p \varepsilon_r + \bar{C}_{11}^p \varepsilon_\theta - \bar{e}_{31} E_z, \quad (15)$$

$$\tau_{r\theta}^p = \frac{1}{2} (\bar{C}_{11}^p - \bar{C}_{12}^p) \gamma_{r\theta}, \quad (16)$$

$$\tau_{rz}^p = k^2 C_{55}^p \gamma_{rz} + e_{15} E_r, \quad (17)$$

$$\tau_{\theta z}^p = k^2 C_{55}^p \gamma_{\theta z} + e_{15} E_\theta, \quad (18)$$

بالانویس p ، نشان‌دهنده خواص و مولفه‌های میدان تنش لایه‌های پیزوالکتریک می‌باشند. \bar{C}_{ij}^p ثوابت الاستیسیته ماده پیزوالکتریک، \bar{e}_{ij} ثوابت الکتریک ماده پیزوالکتریک و E_i شدت میدان الکتریکی می‌باشند. ثوابت کاهش یافته ماده پیزوالکتریک در این تحلیل، به صورت روابط (۱۸-۲۰) تعریف می‌شوند:

$$\bar{C}_{12}^p = C_{12}^p - ((C_{13}^p)^2 / C_{33}^p), \quad (18)$$

$$\bar{C}_{11}^p = C_{11}^p - ((C_{13}^p)^2 / C_{33}^p), \quad (19)$$

$$\bar{e}_{31}^p = e_{31} - (C_{13}^p e_{33} / C_{33}^p), \quad (20)$$

در یک ماده پیزوالکتریک، شدت میدان الکتریکی در دستگاه مختصات استوانه‌ای از روابط (۲۱-۲۷) بدست می‌آیند [۵] و [۶].

$$\Phi = \begin{cases} \varphi(r, \theta, t) \sin\left(\pi\left(\frac{z}{hp} - \frac{1}{\alpha}\right)\right), & h \ll z \ll H \\ \varphi(r, \theta, t) \sin\left(-\pi\left(\frac{z}{hp} + \frac{1}{\alpha}\right)\right), & -H \ll z \ll -h \end{cases}, \quad (21)$$

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin\left(\pi\left(\frac{z}{hp} - \frac{1}{\alpha}\right)\right), \quad (22)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \sin\left(\pi\left(\frac{z}{hp} - \frac{1}{\alpha}\right)\right), \quad (23)$$

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\pi}{hp} \varphi \cos\left(\pi\left(\frac{z}{hp} - \frac{1}{\alpha}\right)\right), \quad (24)$$

$$D_r = e_{15} \varepsilon_{rz} + \bar{E}_{11} E_r, \quad (25)$$

جهت بدست آوردن معادلات حاکم بر رفتار دینامیکی ورق قطاعی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بکارگرفته می‌شود که در این تئوری، اثرات اینرسی دورانی و نیروهای برشی در راستای ضخامت در نظر گرفته می‌شود و برای جبران خطای بوجود آمده ناشی از بکارگیری این تئوری (عدم صفرشدن تنش برشی درسطوح آزاد ورق)، فاکتور تصحیح تنش برشی در نظر گرفته می‌شود [۵]. میدان جابجایی با فرض تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی، به صورت رابطه (۱-۳) تعریف می‌شود [۶].

$$u(r, \theta, z, t) = u_0(r, \theta, t) + z \psi_r(r, \theta, t), \quad (1)$$

$$v(r, \theta, z, t) = v_0(r, \theta, t) + z \psi_\theta(r, \theta, t), \quad (2)$$

$$w(r, \theta, z, t) = w_0(r, \theta, t), \quad (3)$$

در روابط (۱) تا (۳) توابع u ، v و w به ترتیب، جابجایی در راستای شعاعی، مماسی و عرضی بوده، ψ_r و ψ_θ شیب عمود بر صفحه میانی در صفحات $z-r$ و $z-\theta$ را نشان می‌دهند. با فرض تغییرشکل با جابجایی‌های روابط کرنش-جابجایی با استفاده از تئوری، تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت رابطه (۴-۸) حاصل می‌شوند.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_0}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_r}{\partial r}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(u_0 + z \psi_r + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (5)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - v_0 - z \psi_\theta \right) + \frac{\partial v_0}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{rz} = \psi_r + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \psi_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (8)$$

رابطه تنش و کرنش برای ورق قطاعی ایزوتروپیک با فرض صفر بودن تنش عمودی بر اساس فرضیات تنش صفحه‌ای در راستای Z با استفاده روابط هوک تعمیم یافته، به شرح روابط (۹-۱۱) بدست می‌آیند.

$$\sigma_r^h = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \quad (9)$$

$$\sigma_\theta^h = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r), \quad (10)$$

$$\tau_{r\theta}^h = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{r\theta}, \quad (11)$$

$$N_r = \int_{-h}^h \sigma_r^h dz + \int_{-h}^H \sigma_r^p dz + \int_{-H}^{-h} \sigma_r^p dz, \quad (38)$$

$$N_\theta = \int_{-h}^h \sigma_\theta^h dz + \int_{-h}^H \sigma_\theta^p dz + \int_{-H}^{-h} \sigma_\theta^p dz, \quad (39)$$

$$N_{r\theta} = \int_{-h}^h \tau_{r\theta}^h dz + \int_{-h}^H \tau_{r\theta}^p dz + \int_{-H}^{-h} \tau_{r\theta}^p dz, \quad (40)$$

$$Q_r = \int_{-h}^h \tau_{rz}^h dz + \int_{-h}^H \tau_{rz}^p dz + \int_{-H}^{-h} \tau_{rz}^p dz, \quad (41)$$

$$Q_\theta = \int_{-h}^h \tau_{\theta z}^h dz + \int_{-h}^H \tau_{\theta z}^p dz + \int_{-H}^{-h} \tau_{\theta z}^p dz, \quad (42)$$

$$M_r = \int_{-h}^h \sigma_r^h z dz + \int_{-h}^H \sigma_r^p z dz + \int_{-H}^{-h} \sigma_r^p z dz, \quad (43)$$

$$M_\theta = \int_{-h}^h \sigma_\theta^h z dz + \int_{-h}^H \sigma_\theta^p z dz + \int_{-H}^{-h} \sigma_\theta^p z dz, \quad (44)$$

$$M_{r\theta} = \int_{-h}^h \tau_{r\theta}^h z dz + \int_{-h}^H \tau_{r\theta}^p z dz + \int_{-H}^{-h} \tau_{r\theta}^p z dz. \quad (45)$$

با انتگرال گیری روابط (۳۸) تا (۴۵)، تنش‌های منتجه به صورت روابط (۴۶-۴۳) بدست می‌آیند:

$$N_r = (A + F) \frac{\partial u_0}{\partial r} + (A + F - 2 S_1) \left(\frac{u_0}{r} + \frac{\partial v_0}{r \partial \theta} \right) + B \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + v \left(\frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial \psi_\theta}{r \partial \theta} \right) \right), \quad (46)$$

$$N_\theta = (A + F - 2 S_1) \frac{\partial u_0}{\partial r} + (A + F) \left(\frac{u_0}{r} + \frac{\partial v_0}{r \partial \theta} \right) + B \left(v \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial \psi_\theta}{r \partial \theta} \right), \quad (47)$$

$$N_{r\theta} = S_1 \left(\frac{\partial u_0}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} \right) + S_3 \left(\frac{\partial \psi_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right), \quad (48)$$

$$Q_r = G \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r \right) - R_1 \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (49)$$

$$Q_\theta = G \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} + \psi_\theta \right) - R_1 \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}, \quad (50)$$

$$M_r = (C + D) \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + (C + D - 2 S_2) \left(\frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial \psi_\theta}{r \partial \theta} \right) + B \left(\frac{\partial u_0}{\partial r} + v \left(\frac{u_0}{r} + \frac{\partial v_0}{r \partial \theta} \right) \right), \quad (51)$$

$$M_\theta = (C + D - 2 S_2) \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + (C + D) \left(\frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial \psi_\theta}{r \partial \theta} \right) + B \left(v \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r} + \frac{\partial v_0}{r \partial \theta} \right), \quad (52)$$

$$M_{r\theta} = S_2 \left(\frac{\partial \psi_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right) + S_3 \left(\frac{\partial u_0}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial r} - \frac{v_0}{r} \right), \quad (53)$$

در روابط (۴۶) تا (۵۳)، ضرایب ثابت A, B, C, D, F, G, S₁, S₂, S₃, R₁ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A = \frac{2hE}{1-\nu^2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{2h^3E}{3(1-\nu^2)}, \quad (54) \text{ تا } (56)$$

$$D = \int_{-h}^H \bar{C}_{11} z^2 dz, \quad F = 2hp\bar{C}_{11}, \quad (57) \text{ و } (58)$$

$$G = \frac{k^2 Eh}{(1+\nu)} + 2k^2 hp\bar{C}_{55}, \quad (59)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} A (1 - \nu) + F \left(1 - \frac{\bar{C}_{12}}{\bar{C}_{11}} \right), \quad (60)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} C (1 - \nu) + D \left(1 - \frac{\bar{C}_{12}}{\bar{C}_{11}} \right), \quad (61)$$

$$S_3 = 0, \quad R_1 = \frac{4}{\pi} hpe_{15}, \quad (62) \text{ و } (63)$$

با جایگذاری روابط (۳۷) تا (۵۳) در روابط تعادل (۳۲) تا (۳۶)، معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق قطاعی ایزوتروپیک کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک بر حسب مولفه‌های جابجایی به صورت روابط (۶۴-۶۸) نتیجه می‌شود:

$$D_\theta = e_{15} \varepsilon_{\theta z} + \bar{E}_{11} E_\theta, \quad (26)$$

$$D_z = e_{15} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + \bar{E}_{33} E_z, \quad (27)$$

که Φ تابع پتانسیل الکتریکی، باید معادله ماکسول را بطور تقریبی ارضا نماید؛ برای این منظور، به صورت سینوسی در نظر گرفته شده است $[\varphi, \varphi(r, \theta, t)]$ ، تابع پتانسیل الکتریکی در صفحه میانی لایه پیزوالکتریک، α یک پارامتر بدون بعد بصورت $\alpha = hp/h$ تعریف می‌شود، $H = h + hp$ است E_r, E_θ و E_z شدت میدان الکتریکی در راستاهای شعاعی، مماسی و عرضی می‌باشند، D_r, D_θ و D_z جابجایی‌های پیزوالکتریک بوده، \bar{E}_{ij} ثوابت کاهش یافته دی الکتریک می‌باشند که این ثوابت دی الکتریک، به صورت روابط (۲۸-۲۹) تعریف می‌گردند:

$$\bar{E}_{11} = \bar{E}_{11}, \quad \bar{E}_{33} = \bar{E}_{33} + e_{33}^2 / c_{33}^p. \quad (28) \text{ و } (29)$$

روابط مربوط به انرژی‌های جنبشی و پتانسیل برای یک ورق قطاعی کوپل شده با ورق پیزوالکتریک که به صورت آزاد ارتعاش می‌نماید، به صورت روابط (۳۰-۳۱) ارائه می‌گردند [۵]

$$K = \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_o} \int_0^\theta \int_{-h}^h \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) r dr d\theta dz + \int_{r_i}^{r_o} \int_0^\alpha \int_{-h}^h \rho_p (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) r dr d\theta dz, \quad (30)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_o} \int_0^\theta \int_{-h}^h (\sigma_r^h \varepsilon_{rr} + \sigma_\theta^h \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{rz}^h \varepsilon_{rz} + \tau_{\theta z}^h \varepsilon_{\theta z} + \tau_{r\theta}^h \varepsilon_{r\theta}) r dr d\theta dz + \int_{r_i}^{r_o} \int_0^\theta \int_{-h}^H (\sigma_r^p \varepsilon_{rr} + \sigma_\theta^p \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{rz}^p \varepsilon_{rz} + \tau_{\theta z}^p \varepsilon_{\theta z} + \tau_{r\theta}^p \varepsilon_{r\theta} + D_r E_r + D_\theta E_\theta + D_z E_z) r dr d\theta dz, \quad (31)$$

در روابط (۳۰) و (۳۱) مشتق جابجایی نسبت به زمان و ρ_p چگالی لایه پیزوالکتریک است. با توجه به روابط فوق و با استفاده از اصل همیلتون، روابط ساختاری به صورت (۳۲-۳۶) بدست می‌آیند.

$$\delta u_0: \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{\partial N_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\psi}_r, \quad (32)$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{N_{r\theta}}{r} = I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \ddot{\psi}_\theta, \quad (33)$$

$$\delta \psi_r: \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = I_2 \ddot{u}_0 + I_3 \ddot{\psi}_r, \quad (34)$$

$$\delta \psi_\theta: \frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{M_{r\theta}}{r} - Q_\theta = I_2 \ddot{v}_0 + I_3 \ddot{\psi}_\theta, \quad (35)$$

$$\delta w: \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{r \partial \theta} + \frac{Q_r}{r} = I_1 \ddot{w}, \quad (36)$$

در روابط بالا ثوابت و تنش‌های منتجه بصورت روابط (۳۷-۴۵) تعریف می‌گردند:

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h}^h \rho(1, z, z^2) dz + \int_{-h}^H \rho_p(1, z, z^2) dz + \int_{-H}^{-h} \rho_p(1, z, z^2) dz, \quad (37)$$

با استفاده از توابع پتانسیل (۷۶) و (۷۷) و انجام عملیات‌های ریاضی، معادلات حرکت به صورت (۷۸-۸۱) در می‌آیند:

$$(A + F)\Delta\Psi_1 = I_1\ddot{\Psi}_1 + I_2\ddot{\Psi}_2, \quad (78)$$

$$(C + D)\Delta\Psi_2 - G\Delta w - G\Psi_2 + R_2\Delta\varphi = I_2\ddot{\Psi}_1 + I_3\ddot{\Psi}_2, \quad (79)$$

$$G\Psi_2 + G\Delta w - R_1\Delta\varphi = I_1\ddot{w}, \quad (80)$$

$$\Psi_2 + R_3\Delta w - R_4\Delta\varphi + R_5\varphi = 0, \quad (81)$$

با حذف پارامترهای Ψ_1, Ψ_2 و φ در روابط (۷۸) تا (۸۱) و پس از انجام یک سری عملیات ریاضی [۲۷-۲۵]، معادلات حاصل از $u_0, v_0, \varphi, \psi_r$ و ψ_θ دکوپله می‌شوند و سرانجام یک معادله دیفرانسیل دکوپله مشتقات جزئی مرتبه هشتم، با ضرایب ثابت بر حسب w بدست می‌آید.

$$P_1\Delta\Delta\Delta\Delta w + P_2\Delta\Delta\Delta w + P_3\Delta\Delta w + P_4\Delta w + P_5 w = 0, \quad (82)$$

ضرایب P_1, P_2, P_3, P_4 و P_5 بصورت روابط (۸۳-۸۷) تعریف می‌شود

$$P_1 = (C + D)(A + F)G(GR_4 - R_1R_3), \quad (83)$$

$$P_2 = -(C + D)(A + F)G^2R_5 + G(- (A + F)I_3(R_1R_3 - GR_4) + CI_1((A + F + G)R_4 - R_1R_3) + DI_1((A + F + G)R_4 - R_1R_3))\omega^2, \quad (84)$$

$$P_3 = G((C + D)GI_1R_5 + A(GI_3R_5 + I_1(-R_1 + GR_4 + (C + D)R_5)) + F(GI_3R_5 + I_1(-R_1 + GR_4 + (C + D)R_5)))\omega^2 - (G(I_2^2(R_1 + R_2(R_3 - 1) - GR_4) + I_1((C + D)I_1R_4 + I_3(R_4(A + F + G) - R_1R_3))))\omega^4, \quad (85)$$

$$P_4 = (A + F)G^2I_1R_5\omega^2 - G(-GI_2^2R_5 + (A + F + G)I_3I_1R_5 + I_1^2(-R_1 + GR_4 + (C + D)R_5))\omega^4 + I_1(GI_1I_3R_4 + I_2^2(R_1 - R_2 - GR_4))\omega^6, \quad (86)$$

$$P_5 = GI_1R_5\omega^4(GI_1 + (I_2^2 - I_1I_3)\omega^2), \quad (87)$$

به منظور حل معادله دیفرانسیل (۸۲) و با توجه به ماهیت نوسانی حرکت ورق پاسخ زیر به عنوان تابع جابجایی عرضی در نظر گرفته می‌شود.

$$w(r, \theta, t) = \bar{w}(r)\sin(p\theta)e^{i\omega t}, \quad (88)$$

در رابطه (۸۸)، \bar{w} دامنه جابجایی ورق را نشان می‌دهد که فقط تابعی از فاصله شعاعی استوانه $p = \pi/\alpha$ می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۸۸) در رابطه (۸۲) خواهیم داشت:

$$P_1\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{w} + P_2\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{w} + P_3\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{w} + P_4\bar{\Delta}\bar{w} + P_5\bar{w} = 0, \quad (89)$$

$$(A + F)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{\partial u_0}{r\partial r} - \frac{u_0}{r^2} + \frac{\partial^2 v_0}{r\partial r\partial\theta} - \frac{\partial v_0}{r^2\partial\theta}\right) + S_1\left(\frac{\partial^2 u_0}{r^2\partial\theta^2} - \frac{\partial v_0}{r^2\partial\theta} - \frac{\partial^2 v_0}{r\partial r\partial\theta}\right) = I_1\ddot{u}_0 + I_2\ddot{\Psi}_r, \quad (64)$$

$$(A + F)\left(\frac{\partial^2 u_0}{r\partial r\partial\theta} + \frac{\partial u_0}{r^2\partial\theta} + \frac{\partial^2 v_0}{r^2\partial\theta^2}\right) + S_1\left(-\frac{\partial^2 u_0}{r\partial r\partial\theta} + \frac{\partial u_0}{r^2\partial\theta} - \frac{v_0}{r^2} + \frac{\partial v_0}{r\partial r} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2}\right) = I_1\ddot{v}_0 + I_2\ddot{\Psi}_\theta, \quad (65)$$

$$(C + D)\left(\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi_r}{r\partial r} - \frac{\psi_r}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{r\partial r\partial\theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{r^2\partial\theta}\right) + S_2\left(\frac{\partial^2 \psi_r}{r^2\partial\theta^2} - \frac{\partial \psi_\theta}{r^2\partial\theta} - \frac{\partial^2 \psi_\theta}{r\partial r\partial\theta}\right) - G\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r\right) + R_2\frac{\partial \varphi}{\partial r} = I_2\ddot{u}_0 + I_3\ddot{\Psi}_r, \quad (66)$$

$$(C + D)\left(\frac{\partial \psi_r}{r^2\partial\theta} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 \psi_r}{r\partial r\partial\theta}\right) + S_2\left(-\frac{\partial^2 \psi_r}{r\partial r\partial\theta} + \frac{\partial \psi_r}{r^2\partial\theta} - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{\partial \psi_\theta}{r\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2}\right) - G\left(\frac{\partial w}{r\partial\theta} + \psi_\theta\right) + R_2\frac{\partial \varphi}{r\partial\theta} = I_2\ddot{v}_0 + I_3\ddot{\Psi}_\theta, \quad (67)$$

$$G\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial \psi_\theta}{r\partial\theta}\right) + G\Delta w - R_1\Delta\varphi = I_1\ddot{w}, \quad (68)$$

که R_2 و عملگر Δ بصورت روابط (۶۹-۷۰) تعریف می‌شوند

$$R_2 = \frac{4}{\pi} hp(e_{15} - \bar{e}_{31}), \quad (69)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}. \quad (70)$$

باید توجه داشته باشید که تمامی متغیرهای الکتریکی در ابتدا می‌بایست معادله ماکسول را ارضا نمایند که این امر، مستلزم آن است که دایورژنس شدت شار الکتریکی در هر نقطه از لایه پیزوالکتریک صفر باشد. برقراری این شرط مستلزم برقراری رابطه (۷۱) است [۵]

$$\int_h^H \left(\frac{\partial(rD_r)}{r\partial r} + \frac{\partial(D_\theta)}{r\partial\theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) dz = 0. \quad (71)$$

با قرار دادن روابط (۲۵) تا (۲۷) در رابطه (۷۱)، رابطه (۷۲) را خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial \psi_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r}\right) + R_3\Delta w - R_4\Delta\varphi + R_5\varphi = 0, \quad (72)$$

در آن R_3, R_4 و R_5 بصورت روابط (۷۳-۷۵) تعریف می‌شوند

$$R_3 = \frac{e_{15}}{e_{15} + \bar{e}_{31}}, \quad R_4 = \frac{2\bar{e}_{11}}{\pi(e_{15} + \bar{e}_{31})}, \quad R_5 = \frac{2\bar{e}_{33}\pi}{hp^2(e_{15} + \bar{e}_{31})}. \quad (73)$$

$$(75)$$

برای حل معادلات حرکت (۶۴) تا (۶۸)، ابتدا باید مجموعه‌ای از عملیات‌های ریاضی از قبیل، مشتق‌گیری و جمع و تفریق کردن انجام داد تا این معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشی ورق قطاعی ایزوتروپیک کوپل شده، با لایه‌های پیزوالکتریک دکوپله شوند. برای این منظور، توابع پتانسیل (۷۶-۷۷) تعریف می‌شوند:

$$\Psi_1 = \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r} + \frac{\partial v_0}{r\partial\theta}, \quad (76)$$

$$\Psi_2 = \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial \psi_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\psi_r}{r}. \quad (77)$$

$$K_2 = G((C + D)(A + F)R_3 + \frac{(R_3 - 1)(C + D)(A + F)GR_4}{GR_4 - R_1}), \quad (1.02)$$

$$K_3 = \frac{1}{(R_1 - GR_4)^2} \left(G^2(C + D)(A + F)R_1(R_3 - 1)R_5 + (R_1 - GR_4)(G(-(A + F)I_3(R_1R_3 - GR_4) + CI_1(-R_1R_3 + (A + F + G)R_4) + DI_1(-R_1R_3 + (A + F + G)R_4))) \omega^2 \right), \quad (1.03)$$

$$K_4 = \frac{1}{(R_1 - GR_4)^3} \left(G^2(C + D)(A + F)R_1(R_3 - 1)R_5^2 + G(R_1 - GR_4) \left((A + F)I_1(R_1 - GR_4)^2 - (AR_1(C + D)I_1 - GI_3(R_3 - 1)) - FGI_3R_1(R_3 - 1) + CI_1R_1(F + G - GR_3) + DI_1R_1(F + G - GR_3) \right) R_5 \omega^2 + (R_1 - GR_4)^2 (G(I_2^2(R_1 + R_2(R_3 - 1) - GR_4) + I_1((C + D)I_1R_4 + I_3(-R_1R_3 + (A + F + G)R_4))) \right) \omega^4 \right), \quad (1.04)$$

$$K_5 = \frac{1}{(R_1 - GR_4)^3} I_1 \omega^2 (G^2((C + D)(A + F)R_1R_2^5 + G(R_1 - GR_4) \left(I_1(R_1 - GR_4)^2 - ((C + D)I_1 + (A + F)I_3)R_1 \right) R_5) \omega^2 + (R_1 - GR_4)^2 (GI_1I_3R_4 + I_2^2(R_1 - R_2 - GR_4)) \omega^4), \quad (1.05)$$

لذا رابطه (۱۰۰) به صورت (۱۰۶) بازنویسی می‌شود

$$\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{w}_i = x_i^3 \bar{w}_i, \quad \bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{w}_i = x_i^2 \bar{w}_i, \quad \bar{\Delta}\bar{w}_i = x_i \bar{w}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1.06)$$

بنابراین می‌توان تابع پتانسیل الکتریکی در صفحه میانی

لایه پیزوالکتریک را بصورت روابط (۱۰۷-۱۰۸) نوشت

$$\bar{\varphi}(r) = \sum_{i=1}^4 L_i \bar{w}_i(r), \quad (1.07)$$

و

$$L_i = \frac{K_2}{K_1} x_i^3 + \frac{K_3}{K_1} x_i^2 + \frac{K_4}{K_1} x_i + \frac{K_5}{K_1}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1.08)$$

جابجایی‌های درون صفحه‌ای در صفحه میانی u_0 و v_0

چرخش‌ها ψ_r و ψ_θ به صورت روابط (۱۰۹-۱۱۲) بدست می‌آیند

$$u_0 = a_1 \frac{\partial w_1}{\partial r} + a_2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + a_3 \frac{\partial w_3}{\partial r} + a_4 \frac{\partial w_4}{\partial r} + a_5 \frac{\partial w_5}{r \partial \theta} + a_6 \frac{\partial w_6}{r \partial \theta}, \quad (1.09)$$

$$v_0 = b_1 \frac{\partial w_1}{r \partial \theta} + b_2 \frac{\partial w_2}{r \partial \theta} + b_3 \frac{\partial w_3}{r \partial \theta} + b_4 \frac{\partial w_4}{r \partial \theta} + b_5 \frac{\partial w_5}{\partial r} + b_6 \frac{\partial w_6}{\partial r}, \quad (1.10)$$

$$\psi_r = a_7 \frac{\partial w_1}{\partial r} + a_8 \frac{\partial w_2}{\partial r} + a_9 \frac{\partial w_3}{\partial r} + a_{10} \frac{\partial w_4}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial w_5}{r \partial \theta} + a_{12} \frac{\partial w_6}{r \partial \theta}, \quad (1.11)$$

$$\psi_\theta = b_7 \frac{\partial w_1}{r \partial \theta} + b_8 \frac{\partial w_2}{r \partial \theta} + b_9 \frac{\partial w_3}{r \partial \theta} + b_{10} \frac{\partial w_4}{r \partial \theta} + b_{11} \frac{\partial w_5}{\partial r} + b_{12} \frac{\partial w_6}{\partial r}, \quad (1.12)$$

که در آن عملگر $\bar{\Delta}$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{p^2}{r^2}, \quad (9.0)$$

با استفاده از رابطه (۹۰)، رابطه (۸۹) را می‌توان به شکل (۹۱) نوشت

$$(\bar{\Delta} - x_1)(\bar{\Delta} - x_2)(\bar{\Delta} - x_3)(\bar{\Delta} - x_4)\bar{w} = 0, \quad (9.1)$$

در آن x_1, x_2, x_3, x_4 چهار ریشه معادله (۹۲) هستند:

$$P_1 x^4 + P_2 x^3 + P_3 x^2 + P_4 x + P_5 = 0, \quad (9.2)$$

حل کلی معادله (۸۹) بصورت رابطه (۹۳) است

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \bar{w}_4, \quad (9.3)$$

توابع $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4$ از چهار معادله بسل (۹۴) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} (\bar{\Delta} - x_1)\bar{w}_1 &= 0, & (\bar{\Delta} - x_2)\bar{w}_2 &= 0, \\ (\bar{\Delta} - x_3)\bar{w}_3 &= 0, & (\bar{\Delta} - x_4)\bar{w}_4 &= 0, \end{aligned} \quad (9.4)$$

با حل معادلات بسل (۹۴)، پاسخ تابع جابجایی عرضی به صورت رابطه (۹۵) حاصل می‌شود.

$$\bar{w}(r) = \sum_{i=1}^4 (c_i w_{i1}(p, \chi_i r) + c_{i+4} w_{i2}(p, \chi_i r)), \quad (9.5)$$

توابع و پارامترهای مجهول در رابطه (۹۵) به صورت رابطه (۹۶-۹۸) تعریف می‌شوند

$$\chi_i = \sqrt{|x_i|}, \quad (9.6)$$

$$w_{i1}(p, \chi_i r) = \begin{cases} I_p(\chi_i r) x_i < 0 \\ I_p(\chi_i r) x_i > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (9.7)$$

$$w_{i2}(p, \chi_i r) = \begin{cases} Y_p(\chi_i r) x_i < 0 \\ K_p(\chi_i r) x_i > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (9.8)$$

در رابطه فوق J و Y توابع بسلی نوع اول و نوع دوم بوده، I و K توابع بسلی اصلاح شده نوع اول و دوم می‌باشند و $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ضرایب نامعلوم هستند.

برای بدست آوردن تابع پتانسیل الکتریکی در صفحه میانی لایه پیزوالکتریک جهت ارضای معادله ماکسول، رابطه هارمونیک (۹۹) در نظر گرفته می‌شود

$$\varphi(r, \theta, t) = \bar{\varphi}(r) \cos(p\theta) e^{i\omega t}, \quad (9.9)$$

با جایگذاری رابطه (۹۹) در معادله ماکسول خواهیم داشت:

$$\bar{\varphi} = \frac{K_2}{K_1} \bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{w} + \frac{K_3}{K_1} \bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{w} + \frac{K_4}{K_1} \bar{\Delta}\bar{w} + \frac{K_5}{K_1} \bar{w}, \quad (1.00)$$

در آن ضرایب K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 بصورت روابط (۱۰۱-۱۰۵) تعریف می‌شوند

$$K_1 = \frac{1}{(R_1 - GR_4)^3} GR_5 (G^2(C + D)(A + F)R_1R_5^2 + G((C + D)I_1 + (A + F)I_3)R_1)(GR_4 - R_1)R_5\omega^2 + (I_1I_3R_1 - I_2^2R_2)(R_1 - GR_4)^2\omega^4), \quad (1.01)$$

شرایط مرزی گیردار

$$w = \psi_r = \psi_\theta = u_0 = v_0 = e_{15}\pi(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r}) - 2\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (127)$$

شرایط مرزی ساده

$$w = M_r = N_r = v_0 = \psi_\theta = e_{15}\pi(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r}) - 2\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (128)$$

شرایط مرزی آزاد

$$M_r = Q_r = M_{r\theta} = N_r = N_{r\theta} = e_{15}\pi(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r}) - 2\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (129)$$

با اعمال شرایط مرزی ساده روی لبه‌های شعاعی شکل نوسانی توابع w ، ψ_r و ψ_θ و سایر توابع وابسته به این توابع بدست می‌آید. برای بدست آوردن معادلات مشخصه جهت تعیین فرکانس‌ها و شکل مودهای ارتعاشی، ورق قطاعی ایزوتروپیک کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک با اعمال شرایط مرزی در چهار لبه ورق قطاعی دستگاه معادلات همگن زیر بدست می‌آید [۲۷-۲۵]

$$([K] - \omega^2[M])q = \{0\}. \quad (130)$$

که در این رابطه ω فرکانس طبیعی ورق، $[M]$ ماتریس جرم ورق و $[K]$ ماتریس سختی ورق و q بردار توابع مجهول می‌باشند. با حل معادله مقدار ویژه (۱۳۰)، فرکانس‌های طبیعی ω و بردار ثوابت تعیین می‌شوند.

۳- اعتبار سنجی نتایج عددی

برای تایید صحت راه حل ارائه شده در این مقاله، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل و نتایج ارائه شده در مراجع معتبر صورت گرفته است. در جدول ۱، نتایج این تحقیق با نتایج هانگ و همکاران [۱۶] مقایسه شده است. ورقی تحلیل شده در این مقایسه، یک ورق قطاعی ایزوتروپیک دارای شرایط مرزی کاملاً ساده در تمام تکیه‌گاه‌ها است. سه فرکانس اول بی‌بعد تماماً ساده در تمام تکیه‌گاه‌ها است. $\Omega = \omega r_o^2 \sqrt{2ph/D}$ ، $D = E(2h)^3 / (12(1-\nu^2))$ ، $\Omega = \omega r_o^2 \sqrt{2ph/D}$ (خمشی) در جدول ۱ بر حسب تغییرات زاویه قطاع و نسبت ضخامت به شعاع‌های مختلف ارائه شده است. نتایج این جدول، برای ضریب پواسان $\nu = 0.3$ و شعاع داخلی قطاع برابر با $r_i = 0$ بدست آمده است. بر اساس نتایج بدست آمده در جدول ۱، مشاهده می‌شود که برای نسبت ضخامت به شعاع ثابت، با افزایش زاویه قطاع، فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابد. دلیل این امر، این است

در آن $a_i, b_i (i = 1, \dots, 12)$ ضرایب ثابت مجهول هستند. همچنین توابع w_5 و w_6 نیز مجهول هستند و باید محاسبه گردند. برای این منظور، معادلات (۱۰۹) تا (۱۱۲) را در روابط (۶۴) تا (۶۸) جایگذاری می‌شوند که در نتیجه روابط (۱۱۳-۱۱۶) را خواهیم داشت:

$$a_i = b_i = ((G - R_2 L_i) I_2 \omega^2) / ((I_2 \omega^2)^2 - ((A + F)x_i + I_2 \omega^2)((C + D)x_i + (I_3 \omega^2 - G))) ; i = 1, \dots, 4, \quad (113)$$

$$a_j = b_j = ((G - R_2 L_{j-6})(A + F)x_{j-6} + I_1 \omega^2) / ((A + F)x_{j-6} + I_1 \omega^2)((C + D)x_{j-6} + (I_3 \omega^2 - G)) - (I_2 \omega^2)^2 ; j = 7, \dots, 10, \quad (114)$$

$$a_i = -b_i = -\frac{S_2 x_i + (I_3 \omega^2 - G)}{I_2 \omega^2} ; i = 5, 6, \quad (115)$$

$$a_{11} = a_{12} = -b_{11} = -b_{12} = 1. \quad (116)$$

توابع w_5 و w_6 نیز بصورت روابط (۱۱۷-۱۲۴) در نظر گرفته می‌شود

$$w_i(r, \theta) = \bar{w}_i(r) \sin(p\theta) ; i = 5, 6, \quad (117)$$

$$\bar{w}_5(r) = c_9 w_{51}(p, \chi_5 r) + c_{10} w_{52}(p, \chi_5 r), \quad (118)$$

$$\bar{w}_6(r) = c_{11} w_{61}(p, \chi_6 r) + c_{12} w_{62}(p, \chi_6 r), \quad (119)$$

و

$$x_5 = \frac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_2}}{2\beta_1}, \quad (120)$$

$$x_6 = \frac{-\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_2}}{2\beta_1}, \quad (120)$$

$$\beta_1 = -S_1 S_2, \quad \beta_2 = -S_1(I_3 \omega^2 - G) - S_2 I_1 \omega^2, \quad \beta_3 = I_2^2 \omega^4 - I_1 \omega^2(I_3 \omega^2 - G), \quad (121)$$

$$\chi_j = \sqrt{|x_j|} ; j = 5, 6, \quad (122)$$

$$w_{j1}(p, \chi_j r) = \begin{cases} J_p(\chi_j r) x_j < 0 \\ I_p(\chi_j r) x_j > 0 \end{cases} ; j = 5, 6, \quad (123)$$

$$w_{j2}(p, \chi_j r) = \begin{cases} Y_p(\chi_j r) x_j < 0 \\ K_p(\chi_j r) x_j > 0 \end{cases} ; j = 5, 6, \quad (124)$$

در آن ضرایب $c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}$ ضرایب مجهولی هستند که باید پس از اعمال شرایط مرزی بدست آیند

اگر لبه‌های ورق ایزوله الکتریکی باشد، خواهیم داشت:

$$\int_h^H D_r(r, \theta, t) dz = 0, \quad (125)$$

با ارضای معادله (۱۲۵)، شرط مرزی الکتریکی بدست می‌آید

$$e_{15}\pi(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r}) - 2\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (126)$$

با استفاده از اصل همپلتون شرایط مرزی حول لبه‌های ورق عبارتند از:

جدول ۲- مقایسه فرکانس طبیعی ورق پیزوالکتریک کوپل شده با ورق قطاعی حلقوی با شرایط مرزی S-C-S

ri/ro			n	α	m	h/ro
۰/۵	۰/۲۵	۰/۱۶۷				
۶۶۰۶/۳۷	۳۳۹۶/۶۵	۲۹۶۰/۲۵	۱			
۱۹۸۶۷/۳	۹۸۰۸/۴۶	۸۳۶۸/۳۷	۲	۹۰		
۳۸۵۲۵/۷	۱۹۱۰۳/۹	۱۶۱۱۷/۵	۳		۲	
۶۶۱۵/۵۰	۳۴۰۶/۲۹	۲۹۹۰/۸۷	۱			
۱۹۸۷۴/۸	۹۸۲۲/۰۶	۸۳۸۸/۸۳	۲	مرجع [۲۸]		
۳۸۵۲۹/۷	۱۹۱۱۸/۱	۱۶۱۴۸/۸	۳			
۶۲۴۸/۰۱	۲۸۵۶/۵۲	۲۳۳۴/۲۳	۱		۰/۰۲	
۱۹۴۵۷/۳۵	۹۱۰۷/۴۶	۷۴۷۷/۳۴	۲	۱۸۰		
۳۸۱۱۹/۳۶	۱۸۳۴۰/۳۶	۱۵۱۰۴/۲۴	۳		۱	
۶۲۵۱/۷۶	۲۸۶۱/۴۷	۲۳۴۱/۷۶	۱			
۱۹۴۶۲/۹	۹۱۱۰/۹۷	۷۴۸۱/۰۸	۲	مرجع [۲۸]		
۳۸۱۲۶/۰	۱۸۳۴۵/۶	۱۵۱۱۵/۲	۳			
۱۰۴۲۳/۳	۵۴۹۳/۳۴	۴۸۰۸/۹۷	۱			
۲۹۴۴۷/۳	۱۵۳۱۲/۶	۱۳۱۸۸/۲	۲	۹۰		
۵۳۸۴۵/۵	۲۸۶۲۶/۱	۲۴۵۰۸/۷	۳		۲	
۱۰۴۳۷/۹	۵۵۰۹/۵۰	۴۸۶۰/۰۹	۱			
۲۹۴۴۸/۵	۱۵۳۳۴/۶	۱۳۲۲۱/۶	۲	مرجع [۲۸]		
۵۳۸۵۲/۱	۲۸۶۵۸/۰	۲۴۵۵۶/۶	۳		۰/۰۳۳۳	
۹۸۷۳/۲	۴۶۲۵/۵۴	۳۷۹۰/۲۵	۱			
۲۸۸۹۹/۸	۱۴۲۴۶/۲	۱۱۷۹۷/۹	۲	۱۸۰		
۵۳۳۱۳/۹	۲۷۵۳۷/۰	۲۳۰۰۰/۳	۳		۱	
۹۸۷۹/۳۴	۴۶۳۳/۹۲	۳۸۰۲/۴۸	۱			
۲۸۹۰۹/۴	۱۴۲۵۱/۷	۱۱۸۰۴/۱	۲	مرجع [۲۸]		
۵۳۳۲۴/۷	۲۷۵۴۵/۴	۲۳۰۱۷/۲	۳			

باشد ($\alpha = 180/n, n = 1, 2, 3, \dots$) در این صورت فرکانس ورق‌های قطاعی برابر با فرکانس ورق‌های دایروی است که عدد موج محیطی (m) آن‌ها برابر n است [۱۶]. در این مقایسه، ورق دارای شرایط مرزی ساده در مرزهای $\theta = 0$ ، $\theta = \alpha$ و $r = r_0$ و گیردار در مرز $r = r_i$ است که به اختصار ورق دارای شرایط مرزی S-C-S نامیده می‌شود. جنس ماده ورق زمینه، دارای خواص فیزیکی مدول یانگ و چگالی به

که با افزایش زاویه قطاع، فاصله پیرامونی بین تکیه‌گاه‌های شعاعی افزایش می‌یابد؛ بنابراین سفتی ورق کاهش می‌یابد. با توجه به نتایج این جدول مشاهده می‌شود که اختلاف بین بین نتایج حاصل از این تحقیق و نتایجی که هانگ و همکاران [۱۶] بدست آورده‌اند، بسیار ناچیز است.

جدول ۱- مقایسه فرکانس بدون بعد $\Omega = \omega r_0^2 \sqrt{2\rho h/D}$ برای ورق قطاعی نسبتاً ضخیم با شرایط مرزی کاملاً ساده

h/r_0	α (deg)	روش	فرکانس اول	فرکانس دوم	فرکانس سوم
۰/۱	مرجع [۱۶]	۳۷/۴۵۴	۸۱/۹۰۳	۱۳۴/۰۹۶	
۶۰	روش حاضر	۳۷/۴۵۲	۸۱/۹۰۳	۱۳۴/۰۱	
۰/۲	مرجع [۱۶]	۳۲/۱۴۸	۶۳/۰۴۳	۹۴/۸۶۸	
۶۰	روش حاضر	۳۲/۱۳۸	۶۳/۰۴۸	۹۴/۸۶۱	
۰/۱	مرجع [۱۶]	۲۴/۵۰۳	۶۲/۷۲۶	۱۱۰/۸۸۱	
۱۲۰	روش حاضر	۲۴/۵۰۶	۶۲/۷۲۷	۱۱۰/۸۸۱	
۰/۲	مرجع [۱۶]	۲۱/۹۹۶	۵۰/۴۱۰	۸۱/۱۸۰	
۶۰	روش حاضر	۲۱/۹۹۲	۵۰/۴۱۰	۸۱/۱۸۰	
۰/۱	مرجع [۱۶]	۱۳/۶۱۶	۴۴/۷۵۶	۸۸/۱۷۲	
۱۸۰	روش حاضر	۱۳/۶۱۴	۴۴/۷۵۵	۸۸/۱۶۸	
۰/۲	مرجع [۱۶]	۱۲/۷۴۵	۳۷/۶۹۹	۶۷/۰۷۶	
۶۰	روش حاضر	۱۲/۷۴۱	۳۷/۶۹۵	۶۷/۰۷۵	
۰/۱	مرجع [۱۶]	۱۲/۳۵۹	۴۱/۶۵۶	۸۳/۲۸۳	
۲۷۰	روش حاضر	۱۲/۳۵۸	۴۱/۶۵۶	۸۳/۲۸۳	
۰/۲	مرجع [۱۶]	۱۱/۲۰۲	۳۴/۶۳۵	۶۳/۱۵۶	
۶۰	روش حاضر	۱۱/۱۹۹	۳۴/۶۳۷	۶۳/۱۵۳	
۰/۱	مرجع [۱۶]	۱۲/۳۶۴	۴۰/۶۹۷	۸۱/۱۹۳	
۳۶۰	روش حاضر	۱۲/۳۶۴	۴۰/۶۹۶	۸۱/۱۹۳	
۰/۲	مرجع [۱۶]	۱۰/۷۲۷	۳۳/۱۴۷	۶۱/۰۴۷	
۶۰	روش حاضر	۱۰/۷۲۵	۳۳/۱۴۲	۶۱/۰۴۷	

در جدول ۲، فرکانس‌های طبیعی بر حسب رادیان بر ثانیه بدست آمده از تحقیق حاضر، برای ورق‌های قطاعی حلقوی ۹۰ و ۱۸۰ درجه با فرکانس‌های طبیعی ورق‌های حلقوی به دست آمده توسط لیسا و کاتو [۲۸] مقایسه شده است. برای تایید صحت مقایسه حاضر، ابتدا باید در نظر داشت که اگر زاویه قطاع (α)، خارج قسمت صحیحی از ۱۸۰

جدول ۳- فرکانس طبیعی ورق قطاعی حلقوی کوپل شده با لایه های پیزوالکتریک با شرایط مرزی s-c-s-f و s-c-s-s-c-s-c

h/ro=1/60		h/ro=1/30		α	شرایط مرزی
ri/ro=1/6	ri/ro=1/2	ri/ro=1/6	ri/ro=1/2		
۴۶۴۵/۹۹	۱۰۹۵/۱۸	۸۷۶۰/۱۰۴	۱۹۳۶۸/۵	۶۰	s-c-s-c
۳۴۲۳/۳۶	۸۰۶۹/۷۵	۶۴۵۴/۷۷	۱۴۲۷۱/۵	۹۰	
۲۹۰۲/۹۳	۷۸۴۰/۵۹	۵۴۸۱/۰۲	۱۳۹۰۵/۴	۱۸۰	
۲۷۴۱/۶۵	۷۴۰۵/۰	۵۱۷۶/۵۲	۱۳۱۳۲/۹	۲۷۰	
۲۶۶۱/۰۲	۷۱۸۷/۲۱	۵۰۲۴/۲۷	۱۲۷۴۶/۶	۳۶۰	
۳۴۰۶/۴۷	۷۷۰۷/۴۶	۶۵۵۷/۶۸	۱۴۲۱۳/۶	۶۰	
۲۴۹۸/۰۸	۵۶۵۲/۱۴	۴۸۰۸/۹۷	۱۰۴۲۳/۳	۹۰	s-c-s-s
۱۹۷۰/۲۳	۵۳۴۱/۷۲	۳۷۹۰/۲۵	۹۸۷۳/۲	۱۸۰	
۱۸۳۸/۸۸	۴۹۸۵/۶	۳۵۳۷/۵۷	۹۲۱۴/۹۹	۲۷۰	
۱۷۷۳/۲	۴۸۰۷/۵۵	۳۴۱۱/۲۲	۸۸۸۵/۸۸	۳۶۰	
۶۴۲/۸۰	۱۴۵۴/۵۲	۱۲۳۷/۴۲	۲۶۸۲/۳۲	۶۰	
۴۷۱/۳۸	۱۰۶۶/۶۵	۹۰۷/۴۴	۱۹۶۷/۰۴	۹۰	
۳۷۱/۷۷	۱۰۰۷/۸۶	۷۱۵/۲۱	۱۸۶۲/۸۵	۱۸۰	s-c-s-f
۳۴۶/۹۹	۹۴۰/۶۹	۶۶۷/۵۲۹	۱۷۳۸/۶۶	۲۷۰	
۳۳۴/۶۰	۹۰۷/۰۸	۶۴۳/۶۹	۱۶۷۶/۵۷	۳۶۰	

جدول ۴- فرکانس طبیعی ورق قطاعی حلقوی کوپل شده با لایه های پیزوالکتریک با شرایط مرزی s-s-s-f و s-s-s-s-s-c-s-c

h/ro=1/60		h/ro=1/30		α	شرایط مرزی
ri/ro=1/6	ri/ro=1/2	ri/ro=1/6	ri/ro=1/2		
۴۳۵۰/۷۵	۸۲۴۳/۵۳	۲۰۰۴۶/۱	۱۵۴۶۴/۱	۶۰	s-s-s-s
۳۱۹۰/۵۵	۶۰۴۵/۲۶	۱۴۷۰۰/۵	۱۱۳۴۰/۴	۹۰	
۲۴۱۹/۳۷	۵۶۵۰/۳۷	۴۷۰۱/۶۵	۱۰۶۳۲/۵	۱۸۰	
۲۲۵۸/۰۸	۵۲۷۳/۶۸	۴۳۸۸/۲	۹۹۲۳/۶۹	۲۷۰	
۲۱۷۷/۴۳	۵۰۸۵/۳۳	۴۲۳۱/۴۸	۹۵۶۹/۲۷	۳۶۰	
۳۱۸۳/۴۴	۵۵۹۹/۵۸	۶۲۴۵/۹۳	۱۰۸۴۱/۴	۶۰	
۲۳۳۴/۵۲	۴۱۰۶/۳۶	۴۵۸۰/۳۵	۷۹۵۰/۳۶	۹۰	s-s-s-s
۱۶۰۲/۵۲	۵۶۵۰/۳۷	۳۱۵۶/۳۵	۷۰۸۹/۲۶	۱۸۰	
۱۴۹۵/۶۸	۳۴۰۷/۰۱	۲۹۴۵/۹۲	۶۶۱۶/۶۴	۲۷۰	
۱۴۴۲/۲۶	۳۲۸۵/۳۳	۲۸۴۰/۷۱	۶۳۸۰/۳۳	۳۶۰	
۴۸۵/۴۳	۸۵۳/۸۲	۹۵۲/۴۱	۱۶۵۲/۸۷	۶۰	
۳۵۵/۹۸	۶۲۶/۱۳	۶۹۸/۴۳	۱۲۱۲/۱۱	۹۰	
۲۴۴/۴۰	۵۵۶/۶	۴۸۱/۲۶	۱۰۸۰/۷۹	۱۸۰	s-s-s-f
۲۲۸/۱۱	۵۱۹/۵۰	۴۴۹/۱۷	۱۰۰۸/۷۴	۲۷۰	
۲۱۹/۹۶	۵۰۰/۹۴	۴۳۳/۱۳	۹۷۲/۷۲	۳۶۰	

ترتیب، 200 GPa و 7800 kg/m^3 انتخاب شده است و از PZT-4 به عنوان جنس لایه‌های پیزوالکتریک استفاده می‌شود که خواص ماده PZT-4 برابر با $\rho = 7500 \text{ (kg/m}^3)$, $\epsilon = 132 \text{ (GPa)}$, $c_{55} = 26 \text{ (GPa)}$, $c_{33} = 115 \text{ (GPa)}$, $c_{11} = 132 \text{ (GPa)}$, $c_{13} = 73 \text{ (GPa)}$, $c_{12} = 71 \text{ (GPa)}$, $c_{15} = 10/5 \text{ (c/m}^2)$, $e_{31} = -4/1 \text{ (c/m}^2)$, $e_{33} = 6/46 \text{ (nC/V)}$, $\epsilon_{11} = 7/124 \text{ (nC/Vm)}$, $\epsilon_{33} = 5/841 \text{ (nC/Vm)}$ و ضریب پواسون ورق زمینه و لایه‌های پیزوالکتریک برابر با $0/3$ در نظر گرفته شده است. شعاع داخلی قطاعی حلقوی، برابر با $0/6$ متر در نظر گرفته شده، نسبت ضخامت یک لایه به ضخامت ورق برابر با $0/1$ فرض شده است. در این جدول، n عدد موج شعاعی است.

۴- بحث و بررسی نتایج عددی

در این بخش، شرایط مرزی لبه‌های $\theta = 0$ و $\theta = \alpha$ ساده و شرایط مرزی برای لبه‌های مدور ورق $r = r_i$ و $r = r_o$ ترکیبی از ساده، آزاد و گیردار در نظر گرفتیم. برای نشان دادن شرایط مرزی از علامت‌های اختصاری استفاده می‌شود که s ، بیانگر شرط مرزی ساده، c بیانگر شرط مرزی گیردار و f ، بیانگر شرط مرزی آزاد است؛ لذا شرایط مرزی $s-c-s-f$ توصیف کننده شرایط مرزی ساده در لبه‌های $\theta = 0$ و $\theta = \alpha$ و شرط مرزی گیردار در لبه $r = r_i$ و شرط مرزی آزاد در لبه $r = r_o$ است. مدول یانگ و چگالی ورق زمینه به ترتیب، 200 GPa و 7800 kg/m^3 انتخاب شده است و از PZT-4، به عنوان جنس لایه‌های پیزوالکتریک استفاده می‌شود. تاثیر شرایط مرزی مختلف، تغییرات نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق قطاعی حلقوی؛ ri/ro ، تغییرات نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی؛ h/ro و تغییرات زاویه قطاع؛ α روی فرکانس طبیعی اول ورق قطاعی حلقوی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک، در جداول ۳ تا ۵ مورد بررسی قرار گرفته است. در این جداول، ۹ شرایط مرزی مختلف از قبیل $s-f-s$ ، $s-s-s-f$ ، $s-s-s-s$ ، $s-s-s-c$ ، $s-c-s-f$ ، $s-c-s-s$ ، $s-c-s-c$ ، $s-f-s-f$ و $s-f-s-s$ در نظر گرفته شده است که برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق ثابت و برابر $hp/2h = 0/1$ و شعاع خارجی ورق برابر، $ro = 0/6$ متر فرض شده است.

جدول ۵- فرکانس طبیعی ورق قطاعی حلقوی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی s-f-s-f و s-f-s-s-s-f-s-c

شرایط مرزی	h/ro=1/60		h/ro=1/30		α
	ri/ro=1/6	ri/ro=1/2	ri/ro=1/6	ri/ro=1/2	
s-f-s-c	۳۹۹۰/۵	۶۲۲۵/۵۳	۷۷۳۱۰/۹	۱۱۸۹۹/۶	۶۰
	۲۹۲۶/۳۷	۴۵۶۵/۳۹	۵۶۶۹/۴	۸۷۲۶/۳۸	۹۰
	۲۰۵۴/۲۷	۴۲۴۸/۳۸	۴۰۲۳/۲۸	۸۱۵۵/۲۷	۱۸۰
	۱۹۱۷/۳۲	۳۹۶۵/۱۵	۳۷۵۵/۰۶	۷۶۱۱/۵۸	۲۷۰
s-f-s-s	۱۸۴۸/۸۴	۳۸۲۳/۵۴	۳۶۲۰/۹۵	۷۳۳۹/۷۴	۳۶۰
	۲۹۴۰/۴۷	۴۰۸۵/۹۵	۵۷۷۹/۵۶	۸۰۱۳/۲	۶۰
	۲۱۵۶/۳۵	۲۹۹۶/۳۷	۴۲۳۸/۳۵	۵۸۷۶/۳۵	۹۰
	۱۳۳۷/۳۵	۲۶۰۰/۲۵	۲۶۳۲/۱۶	۵۱۲۵/۲۵	۱۸۰
s-f-s-f	۱۲۳۸/۸۶	۲۴۲۶/۹	۲۴۵۶/۶۸	۴۷۸۳/۵۷	۲۷۰
	۱۱۹۴/۶۱	۲۳۴۰/۲۲	۲۳۶۸/۹۴	۴۶۱۲/۷۳	۳۶۰
	۱۴۶/۲۹	۲۰۳/۲۷	۲۸۷/۵۴	۳۹۸/۶۸	۶۰
	۱۰۷/۲۸	۱۴۹/۰۷	۲۱۰/۸۶	۲۹۲/۳۷	۹۰
	۶۶/۰۳	۱۲۹/۳۸	۱۳۰/۹۷	۲۵۴/۹۹	۱۸۰
	۶۱/۶۳	۱۲۰/۷۵	۱۲۲/۲۴	۲۳۷/۹۹	۲۷۰
	۵۹/۴۳	۱۱۶/۴۴	۱۱۷/۸۸	۲۲۹/۴۹	۳۶۰

نتایج برای نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی ورق ۰/۱۶۷ و ۰/۰۳۳ ارائه شده است. با توجه به نتایج این جداول می‌توان نتیجه‌گیری کرد که با افزایش نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی ورق، فرکانس طبیعی ورق نیز افزایش می‌یابد. به بیانی دیگر، برای دو ورق با شرایط مرزی یکسان، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق قطاعی حلقوی یکسان، تغییرات زاویه قطاع یکسان و نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق یکسان، ورقی که دارای نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی ورق بیشتری است، دارای فرکانس طبیعی بالاتری است؛ زیرا افزایش نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی ورق، سبب افزایش صلبیت و کاهش جرم موثر ورق می‌شود.

برای نشان دادن میزان تغییرات فرکانس طبیعی ورق حلقوی بر حسب تغییرات نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق، در جدول ۶ سه فرکانس طبیعی اول ورق قطاعی حلقوی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک برای

با توجه به نتایج ارائه شده در جداول ۳ تا ۵ مشاهده می‌شود که بالاترین فرکانس‌ها مربوط به شرط مرزی s-c-s-c است. دلیل این امر، آن است که هرچه لایه‌ها مقیدتر باشند، صلبیت سازه بالاتر می‌رود و همینطور جرم موثر ورق کاهش می‌یابد، بنابراین فرکانس‌های سیستم بیشتر می‌شود؛ همچنین فرکانس‌های ورق با شرایط مرزی s-c-s-s از فرکانس‌های ورق با شرایط مرزی s-s-s-c کوچکتر می‌باشند. دلیل این پدیده نیز این است که در ورق با شرایط مرزی s-c-s-s، لایه داخلی گیردار است، حال آنکه در ورق با شرایط مرزی s-s-s-c، لایه خارجی گیردار شده است. از آنجا که لایه خارجی محیط بیشتری دارد؛ بنابراین گیردار شدن آن صلبیت سازه را بیشتر افزایش و همچنین جرم موثر ورق را بیشتر کاهش می‌دهد، پس فرکانس‌ها بالاتر می‌رود. شرط مرزی آزاد، قیود کمتری را نسبت به شروط مرزی گیردار و ساده به سازه تحمیل می‌سازد؛ بنابراین در بین ۹ حالت گفته شده، s-f-s-f کمترین فرکانس را دارا است. با بررسی نتایج ارائه شده در جداول ۳-۵، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که با افزایش زاویه قطاع، عموماً فرکانس سیستم کاهش می‌یابد و این امر، به دلیل کاهش یافتن صلبیت و افزایش یافتن جرم موثر ورق با افزایش زاویه صورت می‌گیرد. به عبارتی برای دو ورق با شرایط مرزی یکسان، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق قطاعی حلقوی یکسان، تغییرات نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی یکسان و نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق یکسان ورقی که دارای زاویه قطاع بیشتری است، دارای فرکانس طبیعی پایینتری است.

در جداول ۳-۵، فرکانس طبیعی اول ورق قطاعی حلقوی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک برای نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی، ۰/۱۶۷ و ۰/۵ بدست آمده است. با توجه به نتایج بدست آمده در این جداول ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی از ۰/۱۶۷ به ۰/۵ فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد؛ زیرا با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی از ۰/۱۶۷ به ۰/۵، اختلاف شعاع‌های داخلی و خارجی کاهش یافته که این امر سبب افزایش صلبیت و کاهش جرم موثر ورق می‌شود. از دیگر پارامترهایی که در جداول ۳-۵ تاثیر تغییرات آن روی فرکانس طبیعی اول ورق مورد توجه قرار گرفته است، نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی ورق است. در این جداول،

ثوابت الاستیک لایه پیزوالکتریک انرژی پتانسیل و در نتیجه صلبیت سازه افزایش می‌یابد.

جدول ۶- سه فرکانس طبیعی اول ورق قطاعی حلقوی کویل شده با لایه های پیزوالکتریک با شرایط مرزی s-c-s-c با نسبت ضخامت متغیر لایه پیزوالکتریک (h/ro=1/60 , ri/ro=1/6)

شماره فرکانس	α	$\frac{h_p}{2h} = 0$	$\frac{h_p}{2h} = \frac{1}{12}$	$\frac{h_p}{2h} = \frac{1}{8}$	$\frac{h_p}{2h} = \frac{1}{5}$
۱		۴۵۵۴/۹	۴۶۳۰/۸۱	۴۶۶۸/۷۷	۴۷۳۷/۰۹
۲	۶۰	۱۱۴۸۰/۹	۱۱۶۷۲/۲	۱۱۷۶۷/۹	۱۱۹۴۰/۱
۳		۲۱۳۳۸/۷	۲۱۶۹۴/۳	۲۱۸۷۲/۱	۲۲۱۹۲/۲
۱		۳۳۵۶/۳۴	۳۴۱۲/۱۸	۳۴۴۰/۱۵	۳۴۹۰/۴۹
۲	۹۰	۸۴۵۹/۵۸	۸۶۰۰/۵۷	۸۶۷۱/۰۷	۸۷۹۷/۹۶
۳		۱۵۷۲۳/۲	۱۵۹۸۵/۳	۱۶۱۱۶/۳	۱۶۳۵۲/۱
۱		۲۸۴۶/۰۱	۲۸۹۳/۴۴	۲۹۱۷/۱۶	۲۹۵۹/۸۵
۲	۱۸۰	۷۷۳۳/۵۸	۷۸۶۲/۴۷	۷۹۲۶/۹۲	۸۰۴۲/۹۲
۳		۱۴۸۱۹/۹	۱۵۰۶۶/۹	۱۵۱۹۰/۴	۱۵۴۱۲/۷
۱		۲۶۸۷/۹	۲۷۳۲/۷	۲۷۵۵/۰۹	۲۷۹۵/۴۱
۲	۲۷۰	۷۳۰۳/۹۳	۷۴۲۵/۶۷	۷۴۸۶/۵۳	۷۵۹۶/۰۹
۳		۱۳۹۹۶/۵	۱۴۲۲۹/۸	۱۴۳۴۶/۵	۱۴۵۶۱/۷
۱		۲۶۰۸/۸۴	۲۶۵۲/۳۲	۲۶۷۴/۰۶	۲۷۱۴/۱۷
۲	۳۶۰	۷۰۸۹/۱۱	۷۲۰۷/۲۶	۷۲۶۶/۳۴	۷۳۷۵/۳۴
۳		۱۳۵۸۴/۹	۱۳۸۱۱/۳	۱۳۹۲۴/۵	۱۴۱۳۳/۳۷

زوایای قطاعی مختلف قطاع بر حسب ۴ نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق با شرایط مرزی s-c-s-c نشان داده شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۶، ملاحظه می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق، فرکانس‌های طبیعی ورق افزایش می‌یابد؛ زیرا این امر سبب افزایش صلبیت ورق در نتیجه افزایش فرکانس طبیعی را به همراه دارد.

در جدول ۸، نتایج تغییرات سه فرکانس طبیعی اول ورق قطاعی حلقوی کویی شده با لایه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی s-c-s-c با انواع لایه‌های پیزوالکتریک بر حسب تغییرات جنس لایه‌های پیزوالکتریک ارائه شده است. در جدول ۸، لایه‌های پیزوالکتریک با جنس‌های PZT-4, PZT-5A, PZT-6B, PZT-7A, PZT-8, PIC-151 و NEPEC6 در نظر گرفته شده است که در جدول خواص فیزیکی این مواد آورده شده است. نتایج در جدول ۸ برای ورق با شرایط مرزی s-c-s-c دارای زاویه قطاع ۹۰ درجه، شعاع خارجی قطع ۰/۶ متر، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی قطاع ۰/۱۶۷، نسبت ضخامت لایه های پیزوالکتریک به ضخامت ورق ۰/۱ و نسبت ضخامت ورق به شعاع داخلی ۰/۱۶۷ بدست آمده است.

با توجه به نتایج بدست آمده در جدول ۸ مشاهده می‌شود که هر چه ثوابت الاستیک لایه پیزوالکتریک افزایش می‌یابد، فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد؛ زیرا با افزایش

جدول ۷- خواص فیزیکی مواد پیزوالکتریک [۴-۶ و ۲۸]

چگالی ρ (kg/m ³)	ثوابت دی الکتریک (nC/Vm)			ثوابت الکتریکی (c/m ²)			ثوابت الاستیک (GPa)					ماده
	ϵ_{33}	ϵ_{22}	ϵ_{11}	e_{15}	e_{31}	e_{33}	C_{13}	C_{12}	C_{55}	C_{33}	C_{11}	
۷۵۰۰	۵/۸۴۱	۶/۴۶	۷/۱۲۴	۱۰/۵	-۴/۱	۱۴/۱	۷۳	۷۱	۲۶	۱۱۵	۱۳۲	PZT-4
۷۷۵۰	۷/۳۵	۸/۱۱	۸/۱۱	۱۲/۳	-۵/۴	۱۵/۸	۷۵/۴	۷۵/۹	۲۱/۱	۱۱۱	۱۲۱	PZT-5A
۷۵۵۰	۳/۴۲	۳/۶	۳/۶	۴/۶	-۰/۹	۷/۱۰	۸۴/۲	۸۴/۷	۳۵/۵	۱۶۳	۱۶۸	PZT-6B
۷۵۰۰	۱۳	۱۵/۱	۱۵/۱	۱۷	-۶/۵	۲۳/۳	۸۳/۹	۷۹/۱	۲۳	۱۱۷	۱۲۶	PZT-5H
۷۶۰۰	۲/۰۸	۴/۰۷	۴/۰۷	۹/۲	-۲/۱	۹/۵	۸۱/۳	۷۶/۱	۲۵/۳	۱۳۱	۱۴۸	PZT-7A
۷۶۰۰	۵/۱۴	۷/۹۷	۷/۹۷	۱۰/۴	-۴	۱۷/۵	۷۱/۱	۶۹/۹	۳۱/۳	۱۲۳	۱۳۷	PZT-8
۷۸۰۰	۸/۱۹	۹/۸۳۷	۹/۸۳۷	۱۱/۹۷	۹/۵۲	۱۵/۱۴	۶۳/۹	۶۳/۱	۱۹/۶	۱۰۰/۴	۱۰۷/۶	PIC-151
۷۶۰۰	۵/۶۲۲	۶/۴۶۳	۶/۴۶۳	۱۲/۷	-۵/۲	۱۵/۱	۷۴/۳	۷۷/۸	۲۵/۶	۱۱۵	۱۳۹	NEPEC6

- فرکانس ورق با افزایش نسبت شعاع (r_i/r_o) افزایش می‌یابد.
- فرکانس ورق با افزایش نسبت ضخامت به شعاع (h/r_o) افزایش می‌یابد.
- در بین انواع ورق‌های پیزوالکتریک، بیشترین فرکانس‌ها مربوط به ورق PZT-6B است.
- کمترین فرکانس‌ها در بین ورق‌های پیزوالکتریک را ورق PIC-151 دارد.

۶- مراجع

- [1] Ding H, Xu R, Chi Y, Chen W (1999) Free axisymmetric vibration of transversely isotropic piezoelectric circular plates. *Int J Solids Struct* 36: 4629-4652.
- [2] Wang Q, Quek ST, Sun CT, Liu X (2001) Analysis of piezoelectric coupled circular plate. *Smart Mater Struct* 10: 229-239.
- [3] Liu X, Wang Q, Quek ST (2002) Analytical solution for free vibration of piezoelectric coupled moderately thick circular plates. *Int J Solids Struct* 39: 2129-215.
- [4] Hosseini-Hashemi Sh, Es'haghi M, Rokni-Damavandi H, (2010) An exact analytical solution for freely vibrating piezoelectric coupled circular/annular thick plates using Reddy plate theory. *Compos Struct* 92(6): 1333-1351.
- [5] Hosseini-Hashemi Sh, Khorshidi K, Es'haghi M, Fadaee M, Karimi M (2012) On the effects of coupling between in-plane and out-of-plane vibrating modes of smart functionally graded circular/annular plates. *Appl Math Model* 36(3): 1132-1147.
- [6] Khorshidi K, Rezaei E, Ghadimi AA, Pagoli M, (2015) Active vibration control of circular plates coupled with piezoelectric layers excited by plane sound wave. *Appl Math Model* 39(3): 1217-1228.
- [7] Duan WH, Quek ST, Wang Q (2005) Free vibration analysis of piezoelectric coupled thin and thick annular plate. *J Sound Vib* 281: 119-139.
- [8] Liu CF, Chen TJ, Chen YJ (2008) A modified axisymmetric finite element for the 3-D vibration analysis of piezoelectric laminated circular and annular plates. *J Sound Vib* 309: 794-804.
- [9] Deresiewicz H, Mindlin RD (1955) Axially symmetric flexural vibration of circular disk. *J Appl Mech-T ASME* 22: 86-88.
- [10] Sony SR, Amba-Rao CL (1975) On radially symmetric vibration orthotropic non-uniform disc

جدول ۸- فرکانس طبیعی اول ورق قطاعی حلقوی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک با شرایط مرزی s-c-s-c با انواع لایه‌های پیزوالکتریک
($h/r_o=1/60$, $hp/2h=1/10$, $r_i/r_o=1/6$, $r_0=0.6$, $\alpha=90^\circ$)

ماده	شماره فرکانس		
	اول	دوم	سوم
PZT-4	۳۴۲۳/۳۶	۸۶۲۸/۷۷	۱۶۰۳۷/۷
PZT-5A	۳۴۰۹/۱۴	۸۵۹۲/۹۲	۱۵۹۷۱/۱
PZT-6B	۳۵۳۲/۵۶	۸۷۵۱/۹۳	۱۶۱۸۰/۷
PZT-5H	۳۴۰۵/۲۶	۸۵۹۰/۲۱	۱۵۹۶۴/۲۵
PZT-7A	۳۴۷۶/۳۴	۸۶۹۳/۲۶	۱۶۱۰۷/۷
PZT-8	۳۴۷۰/۱۴	۸۶۸۶/۸۳	۱۶۰۹۹/۳۴
PIC-151	۳۳۶۷/۳۴	۸۵۷۴/۲۷	۱۵۹۴۱/۵۳
NEPEC6	۳۴۵۵/۲۵	۸۶۷۵/۳۹	۱۶۰۳۲/۲۱

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق، حل دقیق ارتعاش آزاد خطی ورق‌های قطاعی حلقوی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک با بکارگیری تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی برای اولین بار مورد بررسی قرار گرفته است که برای این منظور، از فرضیات کرنش خطی ون-کارمن بهره گرفته شده است. با توجه به تایید اعتبار روش حاضر نتایج عددی در این تحقیق برای ۹ شرایط مرزی مختلف شامل، دولبه محیطی ساده و لب‌های شعاعی ترکیبی از شرایط مرزی ساده، آزاد و گیردار، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق قطاعی حلقوی، نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی، نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک به ضخامت ورق و زاویه قطاع مختلف فرکانسهای طبیعی ورق بر حسب رادیان بر ثانیه بدست آمده است. با توجه به نتایج بدست آمده و بررسی دلایل فیزیکی نتایج حاصل می‌توان گفت:

- بالاترین فرکانس‌ها مربوط به شرط مرزی s-c-s-c است.
- شرط مرزی s-f-s-f، کمترین فرکانس را دارا است.
- با افزایش زاویه قطاع، فرکانس سیستم کاهش می‌یابد.
- با افزایش ضخامت پیزوالکتریک فرکانس‌های ورق افزایش می‌یابد.

- thick annular sectorial plates with simply supported radial edges. *Mech Sci* 37(5): 537-566.
- [21] Nie GJ, Zhong Z (2008) Vibration analysis of functionally graded annular sectorial plates with simply supported radial edges. *Compos Struct* 84(2): 167-176.
- [22] Aghdam MM, Mohammadi M, Erfanian V (2007) Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method. *Thin-Walled Struct* 45(12): 983-990.
- [23] Reissner E (1985) Reflections on the theory of elastic plates. *Appl Mech Rev* 38: 1453-1464.
- [24] Nosier A, Yavari A, Sarkani S (2001) A study of the edge-zone equation of Mindlin-Reissner plate theory in bending of laminated rectangular plates. *Acta Mech* 146: 227-238.
- [25] Khorshidi K, Fallah A (2016) Buckling analysis of functionally graded rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory. *Int J Mech Sci* 113: 94-104.
- [26] Khorshidi K, Asgari T, Fallah A (2015) Free vibrations analysis of functionally graded rectangular nano-plates based on nonlocal exponential shear deformation theory. *Mech Adv Compos Struct* 2(2): 79-93.
- [27] Khorshidi K, Khodadadi M (2016) Precision closed-form solution for out-of-plane vibration of rectangular plates via trigonometric shear deformation theory. *Mech Adv Compos Struct* 3(1): 31-43.
- [28] Leissa AW, Qatu MS (2011) *Vibrations of continuous systems*. McGraw-Hill, New York.
- [29] Jalili N (2009) *Piezoelectric-based vibration control: From macro to micro/nano scale systems*. Springer Science & Business Media.
- including shear deformation. *J Sound Vib* 42: 100-124.
- [11] Cheung YK, Kwok WL (1975) Dynamic analysis of circular and sector thick layered plates. *J Sound Vib* 42: 147-158.
- [12] Venkatesan R, Kunukkasseril VX (1978) Free vibration of layered circular plate. *J Sound Vib* 60: 511-534.
- [13] Guruswamy P, Yung TY (1979) A sector element for dynamic analysis of thick plate. *J Sound Vib* 62: 505-516.
- [14] Rao SS, Prasad AS (1975) vibration of annular plate including the effect of rotatory inertia Transverse shear deformation. *J Sound Vib* 42: 305-324.
- [15] Irie T, Yamada G, Takagi T (1982) Natural frequencies of thick annular plate. *J Appl Mech-T ASME* 49: 633-638.
- [16] Huang CS, McGee OG, Leissa AW (1994) Exact analytical solutions for free vibrations of thick sectorial plates with simply supported radial edges. *Solids Struct* 31(11): 1609-1631.
- [17] Liu FL, Liew KM (1999) Free vibration analysis of thin sector plates by the new version of differential quadrature method. *Comput Meth Appl Mech Eng* 177(1): 77-92.
- [18] Qiang LY, Jian L (2007) Free vibration analysis of circular and annular sectorial thin plates using curve strip Fourier P-element. *J Sound Vib* 305(3): 457-466.
- [19] Huang CS, Ho KH (2004) An analytical solution for vibrations of a polarly orthotropic Mindlin sectorial plate with simply supported radial edges. *J Sound Vib* 273(1): 277-294.
- [20] McGee OG, Huang CS, Leissa AW (1995) Comprehensive exact solutions for free vibrations of