



مدل‌سازی برداشت انرژی الکتریکی با استفاده از مواد پیزوالکتریک تحت تحریک اتفاقی از پایه

سید محمد خادم‌باشی^۱ و حمید معین‌فرد^{۲*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۵/۲۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۸/۲۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۱/۲۰

چکیده

بسیاری از تجهیزات برداشت‌کننده انرژی از اجزای پیزوالکتریک به منظور تبدیل ارتعاشات مکانیکی به انرژی الکتریکی مفید استفاده می‌کنند. تحریک ورودی معمولاً بصورت موج هارمونیک در نظر گرفته می‌شود، در حالیکه در موقعیت‌های عملی، تحریک مکانیکی سیستم، یک سیگنال اتفاقی است. هدف این پژوهش، مطالعه برداشت انرژی در تجهیزات پیزوالکتریک با استفاده از تئوری ارتعاشات اتفاقی است. در مرحله اول یک مدل پارامتری متمرکز از سیستم ارائه شده است. پس از آن معادلات دیفرانسیل بدون بعد حاکم بر ولتاژ القا شده در مدار برداشت انرژی و همچنین حاکم بر طول ماده پیزوالکتریک بدست آمده است. فرض شده است که تحریک ورودی بصورت یک شتاب با طیف فرکانسی نوین سفید، با باند محدود باشد. سپس از تئوری ارتعاشات اتفاقی برای بدست آوردن خواص آماری ولتاژ، توان و طول ماده پیزوالکتریک بر حسب خواص آماری تحریک، بصورت تحلیلی استفاده شده است. نتایج بدست آمده حاکی از آن است که با انتخاب مناسب پارامترهای سیستم، مقدار مورد نظر توان برداشت‌شده می‌تواند بطور موثری افزایش یابد. انتظار می‌رود نتایج بدست آمده از این پژوهش بتوانند بطور کمی و کیفی در تحلیل، بهینه‌سازی و ساخت تجهیزات پیزوالکتریک برداشت‌کننده انرژی مورد استفاده قرار گیرند.

کلمات کلیدی: برداشت‌کننده انرژی؛ ماده پیزوالکتریک؛ ارتعاشات اتفاقی؛ توان الکتریکی.

Modeling Piezoelectric-Based Energy Harvesters under Random Base Excitation

S. M. Khadembashi¹, H. Moeenfar^{2,*}

¹ MSC. Student, Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.

² Assistant. Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.

Abstract

Many energy-harvesting devices use the piezoelectric elements in order to convert mechanical vibrations into usable electrical energy. The input excitation is usually assumed to be a deterministic harmonic wave, while, in practical situations, the mechanical excitation of the media is a random signal. The objective of this work is to study energy harvesting in the piezoelectric devices using the random vibration theory. In the first step, a lumped parameter physical model of the device is presented. A mathematical model is then developed by acquiring the normalized differential equations governing the voltage induced in the energy-harvesting circuit as well as the length of the piezoelectric materials. The random vibration theory is then utilized to derive the analytical expressions for the statistical properties voltage, power, and length of the piezoelectric materials in terms of the statistical properties of the excitation, which is assumed to be a band limited white noise. It is shown that with a proper selection of the system parameters, the expected value for the harvested power can be effectively maximized. The qualitative and quantitative knowledge resulting from this effort is expected to enable the analysis, optimization, and synthesis of the energy-harvesting piezoelectric devices.

Keywords: Energy Harvester; Piezoelectric Materials; Random Vibration; Electrical Power.

۱- مقدمه

فرایند بدست آوردن انرژی از محیط اطراف سیستم و تبدیل آن به انرژی الکتریکی مفید، برداشت توان نامیده می‌شود. در سال‌های اخیر، تمایل به تامین توان تجهیزات شبکه‌های سنسوری و وسایل متحرک، بدون استفاده از باتری باعث ایجاد انگیزه‌ی تحقیق در زمینه‌ی تجهیزات برداشت‌کننده‌ی انرژی شده است. با استفاده از فناوری برداشت‌کننده‌ی انرژی در تجهیزات الکترونیکی کوچک، توان این تجهیزات با استفاده از انرژی ارتعاشی موجود در طبیعت قابل تامین خواهد بود. بنابراین نیاز به یک منبع توان خارجی و یا جایگزینی دوره‌ای باتری از بین رفته یا حداقل می‌شود.

یک روش معمول برای برداشت انرژی از یک سیستم ارتعاش‌کننده، استفاده از مواد پیزوالکتریک است. این مواد دارای یک ساختار بلوری هستند که توانایی تبدیل انرژی کرنشی مکانیکی به شارژ الکتریکی و بالعکس را دارا می‌باشند. مزیت اصلی تجهیزات پیزوالکتریک در مقایسه با تجهیزات الکترومغناطیس، توان خروجی بالای آن‌ها برای یک وسیله با اندازه‌ی مشخص است [۱]. البته مواد پیزوالکتریک، برای تولید سطح توان بالا مناسب نیستند، اما این روش برای کاربرد در تجهیزات الکترونیکی کوچک بسیار مناسب می‌باشد [۴]. محققان بسیاری به بررسی استفاده از مواد پیزوالکتریک در سازه‌های مکانیکی پرداختند. به عنوان مثال، آران‌ی و همکارانش [۲] کمانش عرضی یک نانو تیر پیزوالکتریک واقع در محیط الاستیک با استفاده از تئوری تیر ردی را بررسی نمودند. پژند و اعرابی [۳] به تحلیل غیرخطی پوسته‌های با تقارن محوری چند لایه، با لایه‌ی پیزوالکتریک گسترده پرداختند.

مواد پیزوالکتریک انباشته تا کنون کاربردهای گسترده‌ای پیدا کرده‌اند. بدن انسان منبع انرژی‌های مکانیکی ناشی از حرکت و انرژی هیدرولیک خون است. محققان با استفاده از این منابع، انرژی مورد نیاز برای قطعات کوچک الکترونیکی موجود در بدن شامل سنسورهای پایش سلامتی را بدون نیاز به منابع انرژی خارجی تامین کرده‌اند [۵]. بسیاری از سازه‌ها مانند بدنه‌ی هواپیما و پل‌های معلق، نیاز به پایش دائمی دارند. از سوی دیگر، با توجه به محل قرارگیری سنسورهای پایش سلامت سازه، در بسیاری از موارد امکان جایگزینی باتری‌ها وجود ندارد. از این رو استفاده از یک منبع توان

دائمی مانند برداشت‌کننده‌های پیزوالکتریک انرژی اجتناب‌ناپذیر است [۶]. پیزوالکتریک‌های انباشته‌ی برداشت‌کننده‌ی انرژی همچنین در برخی کوله‌پشتی‌ها به منظور شارژ موبایل استفاده می‌شوند [۷].

تا کنون محققان بطور گسترده‌ای مواد پیزوالکتریک را با هدف برداشت انرژی مدل‌سازی کرده‌اند. مروری خلاصه در مورد برداشت انرژی از مواد پیزوالکتریک را می‌توان در منبع [۸] مشاهده نمود. عبدالکافی^۱ و همکارانش یک برداشت‌کننده‌ی انرژی شامل یک ایرفویل صلب با درجات آزادی پیچشی^۲ و رفت و برگشتی^۳ را طراحی [۹]، مدل‌سازی و تحلیل [۱۰] کردند. دستگاه آن‌ها دارای فنرهای پیچشی و خمشی خطی و غیرخطی بود؛ این فنرها به اتصال‌دهنده‌ی پیزوالکتریک با درجه آزادی رفت و برگشتی متصل شده بودند. آنها [۱۱] بصورت تحلیلی تاثیر پارامترهای طراحی مختلف در بالا بردن توان برداشت‌شده از سیستم پیزوالکتریک را بررسی کردند. لی^۴ و همکارانش [۱۲] ژنراتورهای الکتریکی کوچک دارای تیرهای خمشی پیزوالکتریک و پایه الاستیک را بررسی کردند. جونیور^۵ و همکارانش [۱۳] یک مدل صفحه‌ای کوبل الکترومکانیکی اجزا محدود را برای تخمین توان الکتریکی خروجی صفحات پیزوالکتریک برداشت‌کننده‌ی انرژی ارائه دادند. ژو^۶ و همکارانش [۱۴] توان برداشت‌شده از پیزوالکتریک انباشته را به صورت تئوری و عملی بررسی کردند. پریا و همکارانش [۱۵] مدل‌سازی انواع برداشت‌کننده‌های انرژی از مواد پیزوالکتریک را بررسی و کاربردهای آن‌ها را ارائه کردند. عبدالکافی و همکارانش [۱۶] استفاده از یک تیر یکسرگیردار دارای یک لایه پیزوالکتریک که تحت ارتعاشات پیچشی و خمشی است را به عنوان یک طرح پیزوالکتریک برداشت‌کننده‌ی انرژی جدید پیشنهاد کردند. آندو^۷ و همکارانش [۱] یک استراتژی جدید برای توسعه مدل باند

¹ Abdelkefi

² Pitch

³ Plunge

⁴ Li

⁵ Junior

⁶ Zhu

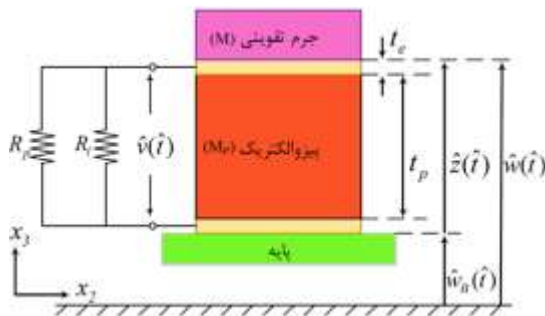
⁷ Ando

۲- فرمولاسیون مسئله

۲-۱- مدل کوپل الکترومکانیکی

مدل یک بعدی برداشت‌کننده‌ی انرژی پیزوالکتریک در شکل ۱ ارائه شده است. در این شکل t_e ضخامت الکترودها می‌باشد که قابل نظر کردن است. t_p ، $\hat{z}(\hat{t})$ ، R_p و \hat{w}_B به ترتیب ضخامت اولیه، طول در زمان \hat{t} ، مقاومت الکتریکی داخلی پیزوالکتریک و جابجایی پایه‌ی ماده‌ی پیزوالکتریک هستند. همچنین v اختلاف پتانسیل ولتاژ تولیدی و R_l مقاومت الکتریکی مصرف‌کننده است.

سیستم نشان داده شده در شکل ۱ در یک محیط مرتعش قرار می‌گیرد و پایه‌ی سیستم به علت نیرویی که به آن وارد می‌شود، با شتاب \hat{w}_B حرکت می‌کند. به علت خاصیت الاستیک ماده‌ی پیزوالکتریک و حضور بار تقویتی روی آن، پیزوالکتریک کرنش پیدا می‌کند. این کرنش باعث القای اختلاف پتانسیل بین دو الکترودها شده است. شکل ۱ و تولید جریان الکتریکی درون مدار می‌شود و به این ترتیب انرژی مه‌ار می‌شود. با استفاده از شکل یک بعدی نشان داده شده، می‌توان روابط الاستیک خطی سه بعدی ماده‌ی پیزوالکتریک که در رابطه‌ی (۱) ارائه شده را بصورت معادلات (۲) و (۳) ساده کرد [۲۱، ۲۲].



شکل ۱- مدل یک بعدی شماتیک پیزوالکتریک برداشت‌کننده‌ی انرژی

$$\begin{Bmatrix} T \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^E & -e^t \\ e & \varepsilon^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S \\ E \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$T_3 = c_{33}^E S_3 - e_{33}^t E_3 \quad (2)$$

$$D_3 = e_{33}^s S_3 + \varepsilon_{33}^s E_3 \quad (3)$$

در معادله‌ی (۱)، T ، S ، E و D به ترتیب بیان‌کننده تانسور تنش، تانسور کرنش، ماتریس میدان الکتریکی ایجاد

گسترده و دو جهته‌ی برداشت‌کننده‌ی انرژی ارتعاشی ارائه نمودند.

همان‌طور که گفته شد، طراحی، مدل‌سازی و بهینه‌سازی پیزوالکتریک برداشت‌کننده‌ی انرژی بطور گسترده‌ای در پژوهش‌های محققان ارائه شده است. هر چند بیشتر پژوهش‌های مربوطه از تئوری ارتعاشات معین^۱ برای مدل‌سازی سیستم استفاده کرده‌اند، اما تحریک اکثر سیستم‌ها در عمل بصورت یک باند گسترده‌ی فرکانسی است. برویس^۲ و لیتاک^۳ [۱۷] برداشت انرژی از یک تیر یکسرگیردار دارای جرم تقویتی و لایه‌ی پیزوالکتریک را تحت تحریک ارتعاشات اتفاقی بررسی کردند. کوتون^۴ و همکارانش [۱۸] کماتش یک تیر یکسرگیردار تحت تحریک اتفاقی را ارائه دادند. پینگ^۵ و همکارانش [۱۹] یک سیستم دارای پیزوالکتریک و الکترومغناطیس که تحت تحریک اتفاقی قرار دارد را ارائه کردند و نتایج تئوری را با نتایج عملی مطابقت دادند. جکسون^۶ و همکارانش [۲۰] بصورت آزمایشگاهی توان برداشت‌شده از یک مولد ارتعاشی پیزوالکتریک را برای انواع سناریوهای ارتعاشات ورودی سینوسی، اتفاقی و سینوسی روی اتفاقی^۷ مقایسه کردند. اما همان‌طور که بصورت مختصر مرور شد، هنوز یک روش ریاضی به‌منظور مدل‌سازی ارتعاشات اتفاقی برداشت‌کننده‌ی انرژی پیزوالکتریک‌های انباشته ارائه نشده است. بنابراین در این مقاله یک سیستم پیزوالکتریک یک بعدی متمرکز^۸ برای برداشت انرژی از یک تحریک اتفاقی باند گسترده ارائه شده است. مدل کوپل الکترومکانیکی سیستم بصورت دو معادله‌ی دیفرانسیل زمانی ارائه شده است. خواص آماری توان خروجی بر حسب خواص آماری تحریک ورودی اتفاقی با استفاده از تئوری ارتعاشات اتفاقی محاسبه شده است. سپس یک بررسی پارامتری به منظور مشخص کردن تاثیر پارامترهای طراحی بدون بعد مختلف روی مقدار میانگین توان برداشت‌شده صورت گرفته است. در نهایت نیز نتایج ارائه و تفسیر شده‌اند.

¹ Deterministic Vibration

² Borowiec

³ Litak

⁴ Cottone

⁵ Ping

⁶ Jackson

⁷ Sine On Random (SOR)

⁸ Lumped

$$\theta \dot{z}(\hat{t}) + C_p \dot{v}(\hat{t}) + \frac{1}{R} \hat{v}(\hat{t}) = 0 \quad (10)$$

در این معادلات، پارامترهای K ، C_p و θ بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$K = \frac{C_{33}^E A_p}{t_p} \quad (11)$$

$$C_p = \frac{\epsilon_{33}^s A_p}{t_p} \quad (12)$$

$$\theta = -\frac{e_{33} A_p}{t_p} \quad (13)$$

در روابط (۱۱) و (۱۲)، بالوندهای E و S یک پارامتر را به ترتیب در میدان الکتریکی و کرنش ثابت (معمولا صفر) بیان می‌کنند.

همچنین با توجه به اینکه مقاومت داخلی ماده‌ی پیزوالکتریک معمولا در مقایسه با مقاومت مصرف‌کننده بسیار بالاتر بوده و به عبارت دیگر $R_p > R_l$ است؛ مقاومت کلی مدار یا R ، با دقت خوبی با R_l تخمین زده می‌شود. به بیان دیگر $R \approx R_l$.

برای سهولت در دسترسی به نتیجه، متغیرهای بی‌بعد سیستم بصورت ذیل تعریف می‌شوند.

$$z = \frac{\hat{z}}{t_p} \quad (14)$$

$$w_B = \frac{\hat{w}_B}{t_p} \quad (15)$$

$$v = \frac{\hat{v}}{v_0} \quad (16)$$

$$t = \omega_0 \hat{t} \quad (17)$$

که v_0 و ω_0 بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$v_0 = \frac{\theta t_p}{C_p} \quad (18)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M_T}} \quad (19)$$

با استفاده از متغیرهای بی‌بعد ارائه شده در روابط (۱۴)، (۱۵)، (۱۶) و (۱۷)، معادلات (۹) و (۱۰) بصورت بی‌بعد شده به ترتیب در معادلات (۲۰) و (۲۱) بیان می‌شوند.

$$z''(t) + z(t) - A_1 v(t) = -w_B''(t) \quad (20)$$

$$z'(t) + v'(t) - A_2 v(t) = 0 \quad (21)$$

که در این معادلات، پارامتر زمان برحسب t بوده و A_1 و A_2 متغیرهای بی‌بعد هستند که بصورت زیر تعریف می‌شوند.

شده و ماتریس جابجایی الکتریکی هستند. به علاوه c ، e و ϵ بصورت ماتریس سفتی، ثابت پیزوالکتریک (که با چگالی شارژ و کرنش مرتبط است) و ثابت گذردهی ماده‌ی پیزوالکتریک تعریف می‌شوند. بالوندهای E و S یک پارامتر را به ترتیب در میدان الکتریکی و کرنش ثابت (معمولا صفر) بیان می‌کنند، در حالیکه بالوند t ترانهادهی ماتریس را نشان می‌دهد. همچنین در معادلات (۲) و (۳)، زیروندهای ۳ و ۳۳ به ترتیب اشاره به بردارها و تانسورهای مربوط به مشخصات سیستم در راستای محور شماره‌ی ۳ (عمودی) دارند.

با استفاده از تعریف تنش یک بعدی و قانون دوم نیوتن، تنش القا شده در ماده‌ی پیزوالکتریک بصورت زیر بدست می‌آید.

$$T_3 = -\frac{M_T (\ddot{z}(\hat{t}) + \ddot{w}_B(\hat{t}))}{A_p} \quad (4)$$

که A_p سطح مقطع پیزوالکتریک و M_T جرم موثر سیستم است و با استفاده از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$$M_T = M + \frac{1}{3} M_p \quad (5)$$

در رابطه‌ی شماره‌ی (۵)، M و M_p به ترتیب نشان‌دهنده‌ی جرم تقویتی نوک پیزوالکتریک و جرم پیزوالکتریک هستند. همچنین، جرم معادل پیزوالکتریک، یک سوم جرم آن در نظر گرفته شده است [۱۵، ۲۳]. باید توجه داشت که این رابطه، یک رابطه تقریبی است، ولی در عین حال دقت آن قابل قبول است.

با این تعریف، کرنش مهندسی، میدان الکتریکی و جابجایی الکتریکی پیزوالکتریک به ترتیب بصورت روابط (۶)، (۷) و (۸) تعریف می‌شوند.

$$S_3 = \frac{\hat{z}(\hat{t})}{t_p} \quad (6)$$

$$E_3 = -\frac{\hat{v}(\hat{t})}{t_p} \quad (7)$$

$$D_3 = \frac{q}{A_p} \quad (8)$$

با جایگذاری معادلات (۴)، (۶)، (۷) و (۸) در معادلات (۲) و (۳) و انجام چند عملیات ریاضی، معادلات (۲) و (۳) بصورت فرم کاربردی‌تری که به ترتیب در معادلات (۱۰) و (۱۱) ارائه شده است، قابل ساده شدن است.

$$M_T \ddot{z}(\hat{t}) + K \hat{z}(\hat{t}) - \theta \hat{v}(\hat{t}) = -M_T \ddot{w}_B(\hat{t}) \quad (9)$$

$$\vec{Y}_0 = - \begin{Bmatrix} w_{B_0}'' \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

در صورتی که $\vec{H}(\omega)$ پاسخ فرکانسی سیستم باشد، خروجی سیستم بصورت زیر خواهد بود.

$$\vec{\Phi}(t) = \vec{H}(\omega) w_{B_0}'' \exp(i\omega t) \quad (33)$$

با جایگذاری معادلات (۳۰) و (۳۳) در معادله‌ی (۲۴)، $\vec{H}(\omega)$ بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\vec{H}(\omega) = \begin{Bmatrix} H_1(\omega) \\ H_2(\omega) \end{Bmatrix} \quad (34)$$

که در آن

$$H_1(\omega) = \frac{(A_2 - i\omega)}{A_2(\omega^2 - 1) + i(\omega + A_1\omega - \omega^3)} \quad (35)$$

$$H_2(\omega) = \frac{i\omega}{A_2(\omega^2 - 1) + i(\omega + A_1\omega - \omega^3)} \quad (36)$$

اکنون امید ریاضی^۱ (میانگین) خروجی $(\vec{\Phi}(t))$ بصورت زیر بدست می‌آید [۲۴].

$$\frac{E[\vec{\Phi}(t)]}{E[w_{B_0}''(t)]} = \vec{H}(\omega) \Big|_{\omega=0} = - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

اثبات رابطه‌ی (۳۷) در پیوست الف ارائه شده است.

به عبارت دیگر، امید ریاضی $z(t)$ مساوی منفی امید ریاضی شتاب پایه می‌شود (سطر اول معادله‌ی (۳۷))، در حالیکه مقدار میانگین ولتاژ بی‌بعد صفر می‌شود (سطر دوم معادله‌ی (۳۷)).

چگالی طیفی متغیرهای خروجی با استفاده از معادله‌ی (۳۸) بدست می‌آید [۲۴].

$$\vec{S}_{\vec{\Phi}}(\omega) = \begin{Bmatrix} S_z(\omega) \\ S_v(\omega) \end{Bmatrix} \quad (38)$$

که در آن

$$S_z(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \cdot S_{w_{B_0}''}(\omega) \quad (39)$$

$$S_v(\omega) = |H_2(\omega)|^2 \cdot S_{w_{B_0}''}(\omega) \quad (40)$$

در موقعیت‌های عملی، چگالی طیفی یک سمتی ورودی^۲ ورودی^۲ (شتاب پایه سیستم) یک نویز سفید دارای باند محدود است که نمونه‌ی آن در شکل ۲ نشان داده شده است [۲۵].

$$A_1 = \frac{\theta^2}{KC_p} \quad (22)$$

$$A_2 = - \frac{\theta \sqrt{M_T}}{R_l C_p \sqrt{K}} \quad (23)$$

با توجه به این که پارامتر θ ، مقداری منفی دارد، A_1 و A_2 پارامترهایی مثبت هستند.

۲-۲- مدل‌سازی ارتعاشات اتفاقی

تا کنون محققان بطور گسترده‌ای مواد پیزوالکتریک را با هدف بدست آوردن انرژی، مدل‌سازی کرده‌اند. تقریباً تمام این پژوهش‌ها از تئوری ارتعاشات قطعی به‌منظور مدل‌سازی سیستم استفاده کرده‌اند. اما در حالت واقعی، تحریک سیستم‌ها معمولاً بصورت اتفاقی با باند گسترده‌ای از فرکانس‌ها است. بنابراین در این پژوهش از تئوری ارتعاشات اتفاقی برای مدل‌سازی خواص آماری توان الکتریکی استفاده می‌شود. برای این کار در قدم اول، معادلات (۲۰) و (۲۱) بصورت ماتریسی ارائه شده‌اند.

$$[B^{(1)}] \vec{\Phi}^*(t) + [B^{(2)}] \vec{\Phi}^*(t) + [B^{(3)}] \vec{\Phi}^*(t) = \vec{Y}(t) \quad (24)$$

که

$$\vec{\Phi}(t) = \begin{Bmatrix} z(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$\vec{Y}(t) = - \begin{Bmatrix} w_{B_0}''(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$[B^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$[B^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[B^{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & -A_1 \\ 0 & -A_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

سیستم معادلات دیفرانسیل که در معادله‌ی (۲۴) بیان شد، دارای یک ورودی و دو خروجی است. مرحله‌ی اول در مدل‌سازی ارتعاشات اتفاقی سیستم، پیدا کردن پاسخ فرکانسی آن است. برای این منظور، ورودی بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$w_{B_0}''(t) = w_{B_0}'' \exp(i\omega t) \quad (30)$$

اکنون $\vec{Y}(t)$ بصورت زیر قابل محاسبه است.

$$\vec{Y}(t) = \vec{Y}_0 \exp(i\omega t) \quad (31)$$

که $i = \sqrt{-1}$ و \vec{Y}_0 به صورت زیر تعریف می‌شود.

¹ Mathematical Expectation

² One Sided Spectral Density

از معادلات (۴۶)، (۴۷) و (۴۸) به‌سادگی اثبات می‌شود که مقدار امید توان الکتریکی بدون بعد بصورت ذیل قابل بیان است.

$$E[P] = \frac{E[v^2]}{S_0} \quad (49)$$

به بیان دیگر، معادله‌ی (۴۵) برای محاسبه مقدار امید ریاضی توان الکتریکی بدون بعد قابل استفاده است.

۳- نتایج و بحث

پارامترهای فیزیکی و هندسی سیستم در جدول ۱ نشان داده شده‌اند.

در شکل‌های ۳ و ۴، مولفه‌های اول و دوم پاسخ فرکانسی موجود در معادلات (۳۵) و (۳۶)، $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$ ، به ازای مقادیر معمول برای پارامترهای A_1 و A_2 ارائه شده است. در شکل‌های ۵ و ۶، چگالی طیفی یک سمتی $S_v(\omega)/S_0$ موجود در معادله‌ی (۴۳) بر حسب فرکانس بدون بعد ω نشان داده شده و تاثیر پارامترهای طراحی مختلف (A_1 و A_2) در این چگالی‌های طیفی بررسی شده‌اند.

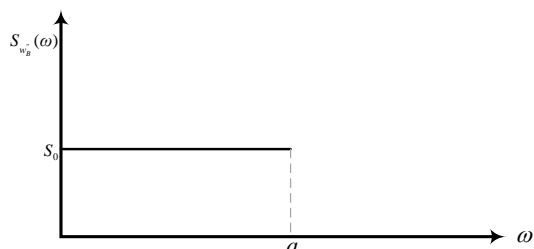
جدول ۱- پارامترهای فیزیکی و هندسی سیستم نشان داده شده در شکل ۱ [۲۲]

نام متغیر	مقدار متغیر	واحد
M	۰/۰۱	kg
t_p	۰/۰۱	m
A_p	۰/۰۰۱	m^2
ω_N	۱۹۶۵۷۰	rad/sec
m_p	۰/۰۰۷۵	kg
e_{33}	۶۴/۲۸	C/m ²
K_e^2	۱/۲۸۶	-
ϵ_{33}^S	$1/317 \times 10^{-8}$	f/m
C_{33}^E	$48/3 \times 10^9$	N/m ²
R_p	5×10^9	Ω

با توجه به شکل ۵، با افزایش مقدار A_1 (با ثابت نگه داشتن مقدار A_2)، حداکثر چگالی طیفی ولتاژ به ویژه در فرکانس بی‌بعد $\omega = 1$ ، بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. اما فرکانسی که به ازای آن، چگالی طیفی ولتاژ بیشینه است، بطور قابل ملاحظه‌ای تغییر نمی‌کند. در شکل ۶ تاثیر تغییر مقدار پارامتر A_2 (در مقدار ثابت A_1) روی چگالی طیفی

بنابراین رابطه‌ی مربوط به چگالی طیفی ورودی که در شکل ۲ اشاره گردید، بصورت زیر بیان می‌شود.

$$S_{v_g}(\omega) = \begin{cases} S_0 & 0 \leq \omega \leq a \\ 0 & a < \omega < \infty \end{cases} \quad (41)$$



شکل ۲- شتاب چگالی طیفی یک سمتی بدون بعد پایه‌ی سیستم که نویز سفید باند محدود در نظر گرفته می‌شود

با جایگزینی معادله‌ی (۴۱) در معادلات (۳۹) و (۴۰)، به ترتیب معادلات (۴۲) و (۴۳) بدست می‌آیند.

$$\frac{S_z(\omega)}{S_0} = \begin{cases} |H_1(\omega)|^2 & 0 \leq \omega \leq a \\ 0 & a < \omega < \infty \end{cases} \quad (42)$$

$$\frac{S_v(\omega)}{S_0} = \begin{cases} |H_2(\omega)|^2 & 0 \leq \omega \leq a \\ 0 & a < \omega < \infty \end{cases} \quad (43)$$

در تئوری ارتعاشات اتفاقی اثبات می‌شود که مقدار امید ریاضی مربع متغیر اتفاقی با انتگرال‌گیری از چگالی طیفی آن در بازه فرکانسی آن بدست می‌آید [۲۴]. با استفاده از این تئوری، معادلات زیر برای محاسبه‌ی $E[z^2]$ و $E[v^2]$ ارائه شده‌اند.

$$\frac{E[z^2]}{S_0} = \int_0^\infty \frac{S_z(\omega)}{S_0} d\omega = \int_0^a |H_1(\omega)|^2 d\omega \quad (44)$$

$$\frac{E[v^2]}{S_0} = \int_0^\infty \frac{S_v(\omega)}{S_0} d\omega = \int_0^a |H_2(\omega)|^2 d\omega \quad (45)$$

توان الکتریکی بدست آمده از مدار (\hat{P}) از معادله‌ی مشهور زیر بدست می‌آید.

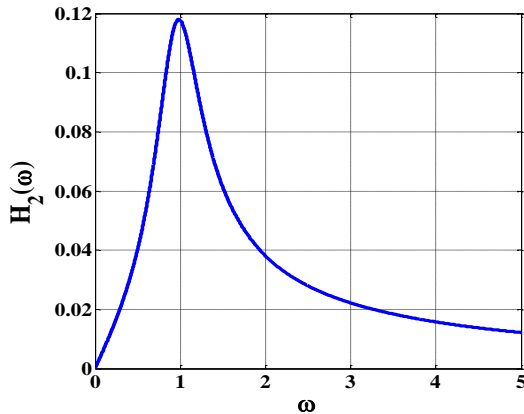
$$\hat{P}(t) = \frac{\hat{v}^2}{R_l} \quad (46)$$

توان الکتریکی بدون بعد بصورت زیر بیان می‌شود.

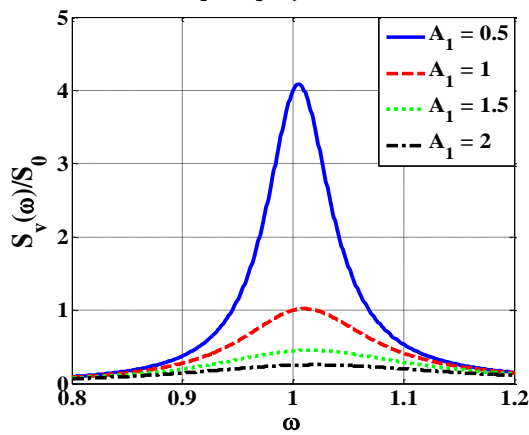
$$P(t) = \frac{\hat{P}(t)}{P_0} \quad (47)$$

که

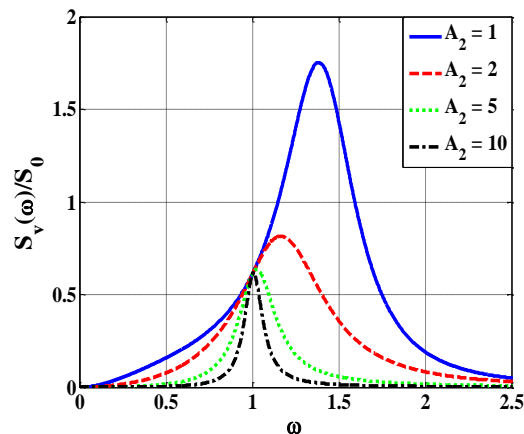
$$P_0 = \frac{S_0 v_0^2}{R_l} \quad (48)$$



شکل ۴- مولفه‌ی دوم پاسخ فرکانسی سیستم، $H_2(\omega)$ در $A_2 = 7$ و $A_1 = 1.28$



شکل ۵- تاثیر پارامتر A_1 روی چگالی طیفی ولتاژ بدون بعد در $A_2 = 7$



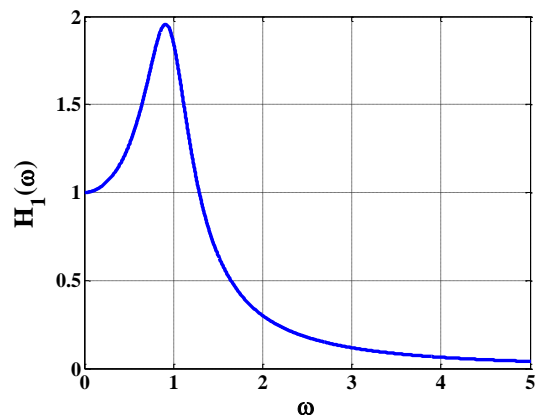
شکل ۶- تاثیر پارامتر A_2 روی چگالی طیفی ولتاژ بدون بعد در $A_1 = 1/28$

ولتاژ بررسی شده است. واضح است که با افزایش مقدار A_2 ، فرکانسی که در آن چگالی طیفی ولتاژ بیشینه می‌شود، کاهش می‌یابد.

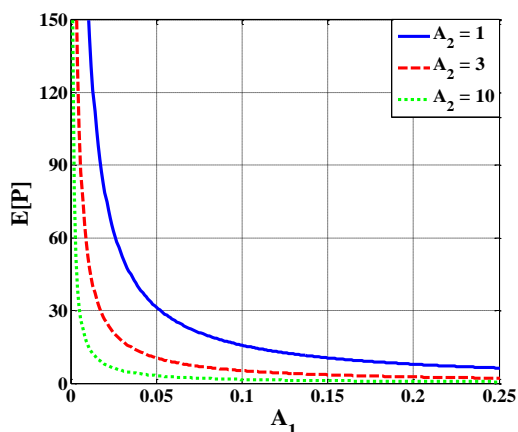
در شکل‌های ۷ و ۸ تاثیر تغییر مقادیر A_1 و A_2 روی چگالی طیفی پارامتر z موجود در معادله‌ی (۴۲) مطالعه شده است.

واضح است که با افزایش مقدار A_1 (در مقدار ثابت A_2)، کاهش $S_z(\omega)/S_0$ یافته است، در حالیکه افزایش مقدار A_2 (در مقدار ثابت A_1) باعث افزایش $S_z(\omega)/S_0$ می‌شود. همچنین افزایش مقادیر A_1 و A_2 ، تاثیر محسوسی روی فرکانس بیشینه $S_z(\omega)/S_0$ ندارد.

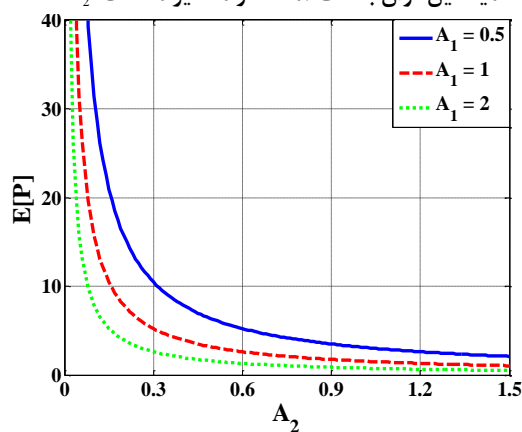
با استفاده از معادله‌ی (۴۹)، $E[p]$ بر حسب پارامترهای A_2 و A_1 بدست آمده و نتایج مربوطه در شکل‌های ۹ و ۱۰ رسم شده‌اند. این دو شکل نشان می‌دهند که مقدار امید ریاضی توان الکتریکی بی‌بعد برداشت شده، با کاهش هر دو پارامتر طراحی (A_2 و A_1) بیشینه می‌شود.



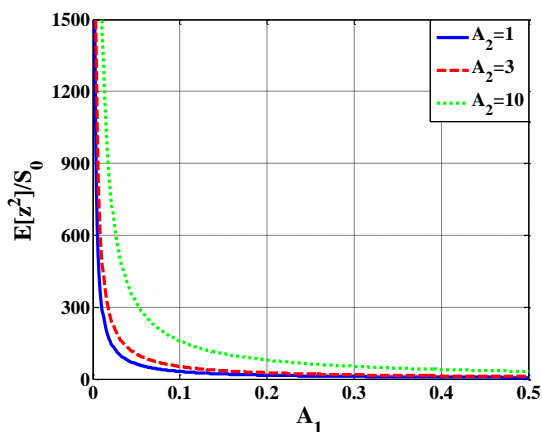
شکل ۳- مولفه‌ی اول پاسخ فرکانسی سیستم، $H_1(\omega)$ در $A_2 = 7$ و $A_1 = 1.28$



شکل ۹- تاثیر پارامتر بدون بعد A_1 روی مقدار میانگین توان بدست آمده در مقادیر مختلف A_2

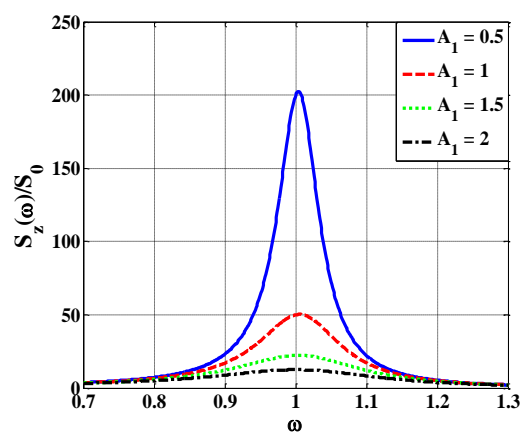


شکل ۱۰- تاثیر پارامتر بدون بعد A_2 روی مقدار میانگین توان بدست آمده در مقادیر مختلف A_1

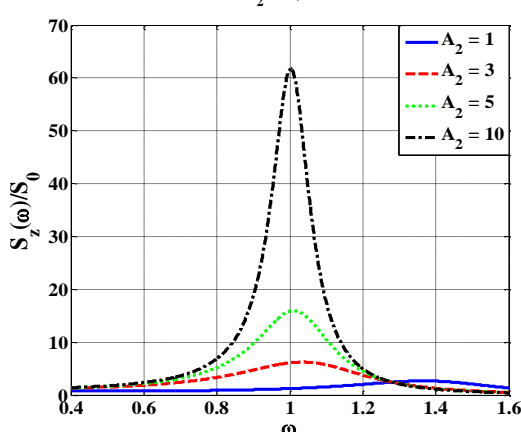


شکل ۱۱- تاثیر A_1 و A_2 روی $E[z^2]/S_0$

۴- نتیجه‌گیری



شکل ۷- تاثیر پارامتر بدون بعد A_1 روی $S_z(\omega)/S_0$ در $A_2 = \gamma$



شکل ۸- تاثیر پارامتر بدون بعد A_2 روی $S_z(\omega)/S_0$ در $A_1 = 1/28$

مقدار امید ریاضی مربع هر متغیر اتفاقی سطح زیر منحنی چگالی طیفی آن متغیر اتفاقی است. بنابراین این واقعیت که کاهش مقادیر A_1 و A_2 باعث بیشینه شدن مقدار امید ریاضی مربع ولتاژ می‌شود، با استفاده از شکل‌های ۵ و ۶ نیز قابل پیش‌بینی بود.

با استفاده از معادله‌ی (۴۴)، $E[z^2]$ بر حسب پارامترهای A_1 و A_2 بدست آمده و نتایج مربوطه در شکل ۱۱ رسم شده‌اند. واضح است که کاهش مقدار A_1 و افزایش مقدار A_2 باعث افزایش $E[z^2]$ می‌شود.

باید توجه داشت که $E[z^2]$ به اندازه $E[p]$ در مکانیزم برداشت انرژی تحت بررسی، اهمیت ندارد و رفتارش تنها به‌منظور کامل شدن پژوهش ارائه شده است.

با اعمال عملگر میانگین و توجه به این نکته که صرفاً متغیر ورودی (یعنی $w_B''(t)$) یک متغیر تصادفی است، خواهیم داشت

$$E[\bar{\Phi}(t)] = E[w_B''(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(\tau) d\tau \quad (51)$$

از سوی دیگر، طبق قضایای موجود در ارتعاشات، تابع پاسخ ضربه و تابع پاسخ فرکانسی به صورت ذیل با یکدیگر در ارتباط هستند.

$$\bar{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (52)$$

در نتیجه مقدار پاسخ فرکانسی در $\omega = 0$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{H}(\omega) \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(t) dt \quad (53)$$

در نتیجه، رابطه‌ی (51) بصورت رابطه‌ی (54) قابل ارائه است:

$$E[\bar{\Phi}(t)] = E[w_B''(t)] \cdot \bar{H}(\omega) \Big|_{\omega=0} \quad (54)$$

در صورتیکه مقدار ω در روابط (35) و (36) صفر قرار داده شود، مقادیر $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$ به ترتیب ۱- و صفر می‌شوند. به عبارت دیگر، نسبت امید ریاضی خروجی به امید ریاضی ورودی از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{E[\bar{\Phi}(t)]}{E[w_B''(t)]} = \bar{H}(\omega) \Big|_{\omega=0} = - \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad (55)$$

۶- منابع

[1] Ando B, Baglio S, Maiorca F, Trigona C (2013) Analysis of two dimensional, wide band, bistable vibration energy harvester. *Sensor Actuator* 22: 176-182.

[۲] علی قربان‌پور آرانی، محمد عبدالهیان، رضا کلاه‌چی (۱۳۹۳) کماتش الکتروترمو مکانیکی نانوتیر پیزوالکتریک با استفاده از تئوری‌های الاستیسیته گرادیان کرنشی و تیر ردی. *مجله‌ی علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها*، شماره‌ی ۳، صفحات ۳۳-۳۳.

[۳] محمد رضایی پزند، الیاس اعرابی (۱۳۹۰) تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌ی متقارن محوری چند لایه با لایه‌ی پیزوالکتریک گسترده. *مجله‌ی علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها*، شماره‌ی ۱، صفحات ۱-۱۱.

[4] Abdelkefi A, Nayfeh AH, Hajj MR (2012) Effects of nonlinear piezoelectric coupling on energy

اهمیت مدل‌سازی بر پایه تئوری ارتعاشات اتفاقی سیستم پیزوالکتریک برداشت‌کننده‌ی انرژی، برای اطلاع بهتر از طراحی و بهینه‌سازی این سیستم‌ها، به خوبی مشخص و پذیرفته شده است.

وجود برخی عوامل از جمله جفت‌شدگی الکترومکانیکی در معادلات برداشت انرژی، می‌تواند این بررسی را پیچیده‌تر کند. در این مقاله دینامیک اتفاقی یک سیستم پیزوالکتریک برداشت‌کننده‌ی انرژی بررسی شد. یک مدل فیزیکی پارامتری متمرکز برای معرفی سیستم ارائه شد و سپس یک مدل ریاضی بی‌بعد به منظور شبیه‌سازی سیستم، توسعه داده شد. تئوری ارتعاشات اتفاقی به منظور مشخص کردن توان خروجی سیستم در حالت تحریک از پایه اعمال شد. پیشنهادها‌ی مهندسی به منظور افزایش مقدار امید ریاضی توان الکتریکی بدون بعد بدست آمده، ارائه گردید. با استفاده از دانش ارائه شده در این مقاله، می‌توان تصمیم‌گیری آگاهانه درباره انتخاب پارامترهای فیزیکی و هندسی سیستم برداشت‌کننده‌ی انرژی داشت که یک جنبه ضروری در طراحی است. با توجه به این‌که همه تحریک‌های موجود در طبیعت به نحوی تحریک اتفاقی هستند، نتایج و رویکرد ارائه شده در این پژوهش می‌تواند در طراحی بهینه‌تر و واقع‌بینانه تر برداشت‌کننده‌های انرژی، مورد استفاده قرار بگیرد. در واقع با در نظر گرفتن تحریک سیستم به صورت یک تحریک اتفاقی، می‌توان طراحی دقیق‌تری برای مهار کننده انرژی ارائه داد و با بررسی خواص آماری این انرژی مهار شده، بهره وری بیشتری در مهار انرژی ارتعاشاتی به صورت انرژی الکتریکی داشت.

۵- پیوست

طبق تئوری ارتعاشات، خروجی یک سیستم دینامیکی خطی (مثلاً $\Phi(t)$ در مقاله حاضر) با تابع پاسخ ضربه‌ی $\bar{h}(t)$ که تحت ورودی خاص (مثل $w_B''(t)$ در مقاله حاضر) قرار می‌گیرد، با استفاده از انتگرال کانولوشن ورودی و تابع پاسخ ضربه، به صورت ذیل قابل محاسبه است:

$$\bar{\Phi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(\tau) w_B''(t) d\tau \quad (50)$$

- [16] Abdelkefi A , Najar F, Nayfeh AH, Ayed SB (2011) An energy harvester using piezoelectric cantilever beams undergoing coupled bending-torsion vibrations. *Smart Mater Struct* 20: 1-11.
- [17] Borowiec M, Litak G, Friswell MI, Ali S, Adhikari S, Lees AW (2013) Energy harvesting in piezoelastic systems driven by random excitations. *Int J Struct Stab Dy* 13: 1-11.
- [18] Cottone F, Gammaitoni L, Vocca H, Ferrari M, Ferrari V (2012) Piezoelectric buckled beams for random vibration energy harvesting. *Smart Mater Struct* 21: 1-11.
- [19] Li P, Gao S, Cai H (2015) Modeling and analysis of hybrid piezoelectric and electromagnetic energy harvesting from random vibrations. *Microsyst Technol* 21: 401-414.
- [20] Cryns JW, Hatchell BK, Santiago-Rojas E, Silvers KL (2013) Experimental analysis of a piezoelectric energy harvesting system for harmonic, random, and sine on random vibration. *Adv Acoust Vib* 1-12.
- [21] Roundy S, Wright PK, Rabaey J (2003) A study of low level vibrations as a power source for wireless sensor nodes. *Comput Commun* 26: 1131-1144.
- [22] DuToit NE, Wardle BL, Kim SG (2005) Design considerations for MEMS-Scale piezoelectric mechanical vibration energy harvesters. *Integr Ferroelectr* 71: 121-160.
- [23] Rao SS (2007) *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, Hoboken.
- [24] Newland DE (1984) *An introduction to random vibrations and spectral analysis*. Longman.
- [25] Halvorsen E (2007) Broadband excitation of resonant energy harvesters. *Power MEMS* 319-322.
- harvesters under direct excitation. *Nonlinear Dynam* 67: 1221-1232.
- [5] Ciofani G, Menciassi A (2012) *Piezoelectric nanomaterials for biomedical applications*. Springer.
- [6] Ebrahimi F (2013) *Piezoelectric materials and devices: applications in engineering and medical sciences*. CRC Press.
- [7] Zhu D (2011) *Vibration energy harvesting: machinery vibration, human movement and flow induced vibration*. InTech.
- [8] Sodano HA, Inman DJ (2004) A review of power harvesting from vibration using piezoelectric materials. *Smart Mater Struct* 36: 197-205.
- [9] Abdelkefi A, Nayfeh AH, Hajj MR (2012) Design of piezoaeroelastic energy harvesters. *Nonlinear Dynam* 68: 519-530.
- [10] Abdelkefi A, Nayfeh AH, Hajj MR (2012) Modeling and analysis of piezoaeroelastic energy harvesters. *Nonlinear Dynam* 67: 925-939.
- [11] A Abdelkefi, AH Nayfeh, MR Hajj (2012) Enhancement of power harvesting from piezoaeroelastic systems. *Nonlinear Dynam* 68: 531-541.
- [12] Li W, Liu TS, Hsiao CC (2011) A miniature generator using piezoelectric bender with elastic base. *Mechatronics* 21: 1183-1189.
- [13] Junior CDM, Erturk A, Inman DJ (2009) An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates. *J Sound Vib* 327: 9-25.
- [14] Xu TB, Siochi EJ, Kang JH, Zuo L, Zhou W, Tang X (2013) Energy harvesting using a PZT ceramic multilayer stack. *Smart Mater Struct* 22: 1-15.
- [15] Priya S, Inman DJ (2009) *Energy harvesting technologies*. Springer.