مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

شماره ۱ جلد ۲، پاییز ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌ی متقارن محوری چندلایه با لایه‌ی پیزوالکتریک گسترده

محمد رضایی پژند[1*] و الیاس اعرابی[2]

[1] استاد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

[2] کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در این پژوهش، کارهای وابسته‌ی پیشنیان درباره روش‌های تحلیل و بررسی رفتار خطی و غیرخطی پوسته‌های با تقارن محوری، چند لایه و مواد هوشمند به طور گسترده و دقیقی مورد مطالعه قرار گرفته است. با وجود انجام کارهای فراوان، نویسندگان دریافتند که اثر پژوهشی درباره‌ی رفتار پوسته‌های با تقارن محوری چندلایه‌ی هوشمند، و به ویژه تحلیل غیرخطی هندسی آن‌ها، با استفاده از نگره‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا کم است. این مقاله به تحلیل غیرخطی پوسته‌های با تقارن محوری چندلایه با لایه‌ی پیزوالکتریک گسترده می‌پردازد. از دو گونه‌ی تابع‌های شکل مرتبه‌ی بالا برای تقریب بهترکرنش برشی در راستای ضخامت بهره‌جویی می‌شود. دو درجه‌ی آزادی به جزء یک بعدی پوسته‌ی دگرگون افزوده خواهد شد تا پاسخ دقیق‌تر به دست آید. رابطه‌سازی لاگرانژی به همراه فرآیند نیوتن-رافسون به کار می‌رود. درستی این شیوه تحلیل غیرخطی با حل چند مساله‌ی عددی آشکار می‌شود. پاسخ‌های نویسندگان نشان می‌دهند که روش پیشنهادی کارا است و نتیجه‌های دقیقتری از پیش را در اختیار می‌گذارد.

کلمات کلیدی: پوسته‌ی با تقارن محوری؛ ماده‌ی مرکب؛ پیزوالکتریک؛ پوسته‌ی چندلایه؛ حسگر؛ تحلیل غیرخطی هندسی.

۱- مقدمه

ماده‌ی پیزوالکتریک به دلیل داشتن ویژگی‌های مکانیکی و الکتریکی مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار دارد. در ۵۰ سال اخیر، کاربرد این گونه ماده‌ها برای به فرمان درآوردن شکل[1]، کاهش نوسان و کنترل فعال سازه‌ها رو به افزایش بوده است. دو ویژگی اصلی این ماده‌ی هوشمند، اثر مستقیم و وارون می‌باشند که تبدیلی بین کارمایه[2] های الکتریکی و مکانیکی هستند. این ویژگی‌ها به دلیل وجود ذره‌های باردار با توانایی قطبی شدن[3] و ساختار بلوری نامتقارن ماده‌ی پیزوالکتریک می‌باشد. اثر مستقیم، توانایی تولید شارژ

[1] Shape control

[2] Energy

[3] Polarization

نویسنده مسئول. تلفن ۰۹۱۵۵۰۵۱۰۸۳

آدرس پست الکترونیک: mrpajand@yahoo.com

الکتریکی متناسب با نیروی خارجی است. در برابر آن، بر پایه‌ی اثر وارون، می‌توان با وارد کردن یک میدان الکتریکی در ماده‌ی پیزوالکتریک تغییرشکل ایجاد نمود [۱]. اثرهای پیزوالکتریک نخستین بار در اواخر قرن ۱۹ به وسیله برادران کوری کشف شد. سی سال پس از آن، ویت معادله‌های اساسی پیزوالکتریسیته را توسعه داد. در سال ۱۹۶۴، کدی[۱] در مقاله‌ای پدیده‌ی پیزوالکتریسیته را مرور کلی نمود [۲]. پارتون[۲] و کودیاتسف[۳] راه‌حل‌هایی برای شماری از مساله‌های پیزوالکتریسیته خطی پیشنهاد کردند [۳]. آلیک[۴] و هیوز[۵] روش جزء محدود را برای تحلیل سه بعدی پیزوالکتریک به کار بردند [۴]. راجاپاکسه[۶] و ژو[۷] به مطالعه استوانه نامحدود پیزوالکتریک زیر اثر بارهای خارجی پرداختند [۵]. آن‌ها از تابع اولیه فوریه برای حل تحلیلی استوانه نامحدود پیزوالکتریک و استوانه‌ی مرکب نامحدود زیر اثر بارهای الکترومکانیکی متقارن بهره جستند. کاپوریا[۸] و همکاران [۶] یک راه‌حل سه‌بعدی برای پوسته‌های استوانه‌ای پیزوالکتریک با تکیه‌گاه ساده زیر اثر بار الکترومکانیکی متقارن ارائه نمودند. هایلیگر[۹] [۷] یک راه‌حل ایستای سه بعدی برای پاسخ استوانه پیزوالکتریک چندلایه با تکیه‌گاه ساده پیشنهاد کرد. روش اجزای محدود یک روش عددی مناسب برای پیش‌بینی رفتار سازه‌های پیزوالکتریک می‌باشد. با بهره‌جویی از این ابزار قدرتمند، میشل[۱۰] و ردی[۱۱] [۸] رفتار ایستایی سازه‌های پیزوالکتریک را بررسی نمودند. پینتو کوریا[۱۲] و همکاران [۹] دو الگوسازی جزء محدود نیمه تحلیلی با تقارن محوری برای خمش پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی ارائه دادند. ها[۱۳] و همکاران [۱۰] یک رابطه‌سازی جزء محدود برای الگوسازی پاسخ ایستا و پویای مواد مرکب چندلایه با سرامیک‌های پیزوالکتریک زیر اثر بارهای مکانیکی و الکتریکی پیشنهاد کردند. تکیروقلو[۱۴] و همکاران [۱۱] از روش جزء محدود نیمه تحلیلی برای تحلیل رفتار استوانه‌ی پیزوالکتریک چندلایه زیر اثر بارهای الکتریکی و مکانیکی متقارن استفاده نمودند. فاریا[۱۵] و آلمیدا[۱۶] [۱۲] با بهره‌جویی از روش اجزای محدود و نگره‌ی کیرشهف به تحلیل ایستا و پویای پوسته‌های چندلایه‌ی نازک استوانه‌ای غیرایزوتروپیک پرداختند. لیو[۱۷] و سورانا[۱۸] [۱۳] با استفاده از رابطه‌سازی جزء محدود و روش نسخه- p به تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌های مرکب متقارن محوری پرداخته‌اند. در این روش، نخست، میدان تغییرمکان با مرتبه p را برای هر لایه نوشتند و پس از آن، با وارد کردن شرط‌های پیوستگی بین لایه‌ای تغییرمکان‌ها، متغیرهای کلی سازه را به‌دست آوردند. مرتبه p در دو راستای مماس و عمود بر میان تار مقدارهای متفاوتی داشت و مقدار آن با انجام تحلیل خطی تعیین و در تحلیل ناخطی به‌کار می‌رفت. الیور[۱۹] و انات[۲۰] [۱۴] با استفاده از روش لاگرانژی کامل، رفتار غیرخطی هندسی پوسته‌های با تقارن محوری را بررسی نمودند. ضیایی‌فر[۲۱] و الوی[۲۲] [۱۵] با معرفی دو تابع شکل، میدان کرنش برشی در جهت ضخامت را بهبود دادند. آن‌ها با استفاده از روش اجزای محدود و تابع های لاگرانژی کامل، مزیت‌های این تابع‌های شکل را نشان دادند. سیموئز مویتا[۲۳] و همکاران [۱۶] با بهره‌جویی از نگره‌ی کیرشهف به تحلیل رفتار پویای سازه‌های چندلایه‌ی پیزوالکتریک پرداختند. آن‌ها از روش نیومارک برای رسیدن به پاسخ استفاده کردند. پینتو کوریا و همکاران [۱۷] با معرفی دو جزء پوسته‌ای و استفاده از نگره‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا و روش لایه‌ای، رفتار پوسته‌های پیزوالکتریک چندلایه را بررسی کردند. سیموئز مویتا و همکاران [۱۸] به تحلیل غیرخطی هندسی سازه‌ی نازک پوسته‌ای با لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند. در این الگوسازی از نگره‌ی سنتی کیرشهف بهره‌جویی شد.

[1] Cady
[2] Parton
[3] kudryavtsev
[4] Allik
[5] Hughes
[6] Rajapakse
[7] Zhou
[8] Kapuria
[9] Heyliger
[10] Mitchell
[11] Reddy
[12] Pinto Correia
[13] Ha
[14] Taciroglu
[15] Faria
[16] Almeida
[17] Liu
[18] Surana
[19] Oliver
[20] Oñate
[21] Ziyaeifar
[22] Elwi
[23] Simões Moita

همچنین، از رابطه‌سازی لاگرانژی بهنگام و روش نیوتن-رافسون در فرآیند تحلیل استفاده گردید. سونگ یی[1] و همکاران [۱۹] با بهره‌جویی از جزء سه بعدی ۲۰ گرهی به بررسی پاسخ پویایی غیرخطی سازه‌ها با لایه‌های حسگر و عملگر پیزوالکتریک پرداختند. در این رابطه‌سازی، روش لاگرانژی بهنگام و اصل کار مجازی به کار رفت. دومیر[2] و همکاران [۲۰] به تحلیل غیرخطی ایستا و گذرای صفحه‌های چندلایه‌ی اورتوتروپیک متقارن زیر اثر بارگذاری متقارن یکنواخت پرداختند. این پژوهشگران لایه‌ها را درمختصه‌ی قطبی اورتوتروپیک به کاربردند. آن‌ها از فن تغییرشکل برشی مرتبه یکم بهره‌جویی نموده‌اند. سانتوز[3] و همکاران [۲۱] به تحلیل خمش و نوسان آزاد پوسته‌های چندلایه‌ی پیزوالکتریک پرداختند. در این الگوسازی از شیوه‌ی نیمه تحلیلی بهره‌جویی می‌شد و گسترش دنباله‌ی فوریه در راستای محیطی به‌کار می‌رفت. سانتوز و همکاران [۲۲] در مقاله‌ای دیگر، با استفاده از نگره‌ی کشسان سه‌بعدی و شیوه نیمه تحلیلی به بررسی خمش، نوسان آزاد و کمانش پوسته‌ی دوران‌یافته از ماده‌ی ناهمسانگرد پرداختند.

در این پژوهش، کارهای وابسته‌ی پیشنیان به طور گسترده و دقیقی مطالعه شد. آشکار گردید، اثر پژوهشی درباره‌ی رفتار پوسته‌های متقارن چندلایه‌ی هوشمند، و بویژه تحلیل غیرخطی هندسی آن‌ها، با استفاده از نگره‌ی تغییرشکل برشی مرتبه بالا[4] کم است. ازاین رو، این مقاله به کاربرد تابع‌های شکل مرتبه‌ی بالا برای میدان تغییرمکان در تحلیل ایستای پوسته‌ی با تقارن محوری با لایه‌ی پیزوالکتریک می‌پردازد. رابطه‌سازی پیشنهادی برای تحلیل مساله‌های مختلف به کار می‌رود. برای نشان دادن درستی تحلیل ناخطی این اثر و افزایش دقت فرآیند پیشنهادی، پاسخ‌های نویسندگان با نتیجه‌های دیگر پژوهشگران مقایسه خواهد شد.

۲- معادله‌های مشخصه مواد

فرض می‌شود که پوسته‌ی مرکب پیزوالکتریک از چندین لایه به علاوه لایه‌ی پیزوالکتریک تشکیل شده است. رابطه‌ی تنش-کرنش برای یک لایه‌ی اورتوتروپیک نسبت به مختصه کلی پوسته به گونه‌ی زیر می‌باشد:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{۱}$$

این معادله برای ماده‌ی پیزوالکتریک به صورت زیر پیشنهاد می‌شود[۱۶]:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T & -\in \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{۲}$$

در این رابطه، $\mathbf{D}$ بردار تغییرمکان الکتریکی، $\mathbf{Q}$ ماتریس تشکیل دهنده[5] کشسان، $\mathbf{e}$ ماتریس ضریب‌های تنش پیزوالکتریک و $\in$ ماتریس دی‌الکتریک می‌باشد. پنداشت میدان الکتریکی در جهت ضخامت، رابطه‌ی زیر را به دست می‌دهد:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \text{و} \quad \mathbf{E} = \{0 \quad 0 \quad E_z\}^T$$
$$E_z = -\frac{\phi}{t_k} \tag{۳}$$

۳- رابطه‌سازی جزء محدود

معادله‌ی تعادل برای یک جزء محدود لایه لایه به صورت زیر می‌باشد [۱۶]:

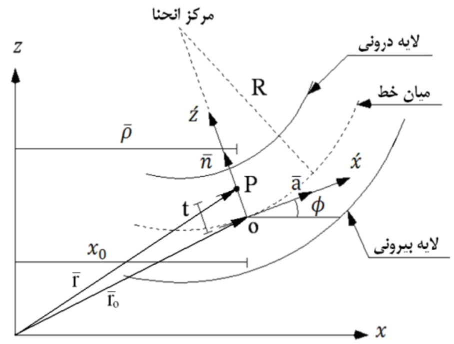
$$\sum_{k=1}^{N}\left(\int_A \int_{h_{k-1}}^{h_k} \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\mathbf{C}}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\, dz\, dA\right) - \mathbf{R} = 0 \tag{۴}$$

در این رابطه، $\mathbf{R}$ کار مجازی نیروهای خارجی است که شامل کار نیروهای سطحی، بار متمرکز و بار الکتریکی[6] سطحی می‌باشد.

برای رابطه‌سازی دو محور مختصه‌ی محلی وکلی به کار می‌رود. محور مختصه‌ی کلی به گونه‌ای اختیار می‌شود که میان‌خط بر صفحه‌ی کلی xz منطبق شود. بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{n}$، بردارهای مماس و عمود بر میان خط در نقطه کلی O هستند. آن‌گونه که شکل ۱ نشان می‌دهد، این بردارها در هر نقطه از میان‌خط، یک دستگاه مختصه‌ی محلی $x'z'$ تعریف می‌کنند. رابطه‌های زیر را می‌توان برای بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{n}$ نوشت [۱۴]:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix}, \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix} \tag{۵}$$

---
[1] Sung Yi
[2] Dumir
[3] Santos
[4] Higher Order Shear Deformation Theory
[5] Constitutive
[6] Electric Charge



شکل ۱- هندسه‌ی لایه‌ها

در رابطه‌ی کنونی، ϕ زاویه‌ی بین محورهای x' و x می‌باشد. بر پایه‌ی شکل ۱ و ۲، مکان هر نقطه از سازه مانند P بر حسب بردار $\mathbf{r}$ نوشته می‌شود:

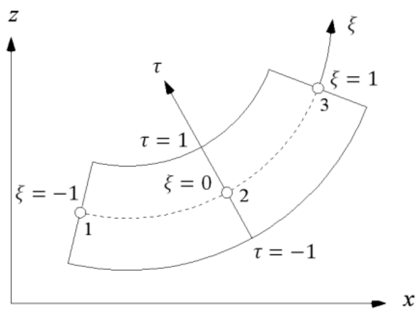
$$\mathbf{r}=\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{n} N_i(\xi)\mathbf{r}_{oi}+t\mathbf{n} \qquad (۶)$$

در این رابطه، $\mathbf{r}_{oi}$ بردار مکان گره i از شبکه‌بندی جزء محدود هم‌عامل[1] یک بعدی سه گرهی شکل ۲ است. $N_i(\xi)$ تابع شکل استاندارد گره i، ξ مختصه‌ی هم‌عامل و n تعداد گره‌های جزء می‌باشد. مختصه‌ی هم‌عامل دیگر با τ نشان داده می‌شود و رابطه‌ی زیر را دارد:

$$\tau=\frac{2t}{h} \qquad (۷)$$

در این رابطه، h ضخامت کلی پوسته‌ی چندلایه و t مختصه در راستای ضخامت است.

میدان تغییرمکان زیر به‌کار می‌رود [۱۵]. این میدان در مختصه محلی به صورت زیر نوشته می‌شود:



شکل ۲- جزء هم عامل یک بعدی سه گرهی

[1] Isoparametric

$$\begin{Bmatrix} u' \\ w' \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u'_0 \\ w'_0 \end{Bmatrix}+t\begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta-1 \end{Bmatrix}$$
$$+g(t)\begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{Bmatrix}\beta+k(t)\begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{Bmatrix}\gamma \qquad (۸)$$

$$g(t)=\frac{4t^3}{3h^2} \quad \text{و} \quad k(t)=\frac{4}{h}t^2-\frac{16}{3h^2}t^3\,\mathrm{sgn}(t)$$

در این جا، u' و w' تغییرمکان‌های یک نقطه‌ی عمومی در دستگاه محلی و θ، β و γ زاویه‌های چرخش بردار عمود بر میان تار در اثر تغییرشکل را نشان می‌دهند. β و γ در مقایسه با θ کوچک می‌باشند، که به دلیل ماهیت برشی این دوران‌هاست. می‌توان رابطه‌ی نموی زیر را برای میدان تغییر مکان نوشت [۱۵]:

$$\begin{Bmatrix} du' \\ dw' \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} du'_0 \\ dw'_0 \end{Bmatrix}+t\begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{Bmatrix}d\theta+g(t)\begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{Bmatrix}d\beta$$
$$+k(t)\begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{Bmatrix}d\gamma \qquad (۹)$$

تغییرمکان‌های محلی به گونه‌ی دیگری نیز نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{u}'=\begin{Bmatrix} u' \\ w' \end{Bmatrix}=\mathbf{u}'_0+t\mathbf{u}'_1+g(t)\mathbf{u}'_2+k(t)\mathbf{u}'_3 \qquad (۱۰)$$

بردار تغییرمکان پایه [2] را به صورت زیر تعریف می‌کنند[۱۴]:

$$\mathbf{p}=\{u_0 \quad w_0 \quad u'_1 \quad w'_1 \quad u'_2 \quad w'_2 \quad u'_3 \quad w'_3\} \qquad (۱۱)$$

در رابطه کنونی، u'_i و w'_i مولفه‌های بردار $\mathbf{u}'_i$ هستند. مولفه‌های u_0 و w_0 در مختصه‌ی کلی و دیگر مولفه‌ها در مختصه‌ی محلی اندازه‌گیری می‌شوند. می‌توان بردار $\mathbf{p}$ را به صورت زیر درون‌یابی کرد:

$$\mathbf{p}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i\mathbf{p}_i \quad \text{و} \quad \mathbf{N}_i=N_i\mathbf{I}_8 \qquad (۱۲)$$

در این رابطه، N_i تابع شکل لاگرانژی گره i و $\mathbf{I}_8$ ماتریس یکه ۸ × ۸ می‌باشد. باید دانست، بردار تغییرمکان و بردار تغییرمکان اساسی متفاوت هستند. بردار تغییرمکان را به گونه‌ی زیر می‌نویسند [۱۴]:

$$\mathbf{a}=\{u_0 \quad w_0 \quad \theta \quad \beta \quad \gamma\}^T \qquad (۱۳)$$

[2] Fundamental Displacement

بـردار گرادیـان تغییرمکـان در P بـه صـورت زیـر تعریـف می‌گردد:

$$\mathbf{g}=\begin{Bmatrix} g_1\\ g_2\\ g_3\\ g_4\\ g_5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'}\\ \frac{\partial w'}{\partial x'}\\ \frac{\partial u'}{\partial z'}\\ \frac{\partial w'}{\partial z'}\\ \frac{u}{\bar\rho} \end{Bmatrix} \text{ و } \bar\rho = x_0 - t\sin\phi \qquad (۱۴)$$

در این رابطه، $\bar\rho$ و x_0، فاصله‌ی افقی نقطه‌های P و O از محور تقارن می‌باشند. بردار کرنش گرین نقطه‌ی P در مختصه‌ی $x'z'$ به قرار زیر است [۱۴]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'}\\ \gamma_{x'z'}\\ \varepsilon_{y'} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} g_1+\frac{1}{2}\left(g_1^2+g_2^2\right)\\ g_2+g_3+g_1g_3+g_2g_4\\ g_5+\frac{1}{2}g_5^2 \end{Bmatrix} \qquad (۱۵)$$

همانند پیوست الف می‌توان نشان داد که رابطه‌ی زیر بین بردارهای $\mathbf{g}$ و $\mathbf{p}$ برقرار می‌باشد [۱۴]:

$$\mathbf{g}=\mathbf{L}\mathbf{p} \qquad (۱۶)$$

با بهره جستن از رابطه‌های (۱۲) و (۱۶)، معادله‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{g}=\mathbf{L}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i\mathbf{p}_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}_i\mathbf{p}_i \qquad (۱۷)$$

شکل نموی معادله‌ی کنونی به قرار زیر است:

$$\delta\mathbf{g}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}_i\delta\mathbf{p}_i \qquad (۱۸)$$

$$\delta\mathbf{p}_i=\begin{Bmatrix} \delta u_0\\ \delta w_0\\ \delta u_1'\\ \delta w_1'\\ \delta u_2'\\ \delta w_2'\\ \delta u_3'\\ \delta w_3' \end{Bmatrix}=\mathbf{C}_i\begin{Bmatrix} \delta u_0\\ \delta w_0\\ \delta\theta_i\\ \delta\beta_i\\ \delta\gamma_i \end{Bmatrix}=\mathbf{C}_i\delta\mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{C}_i=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\cos\theta_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sin\theta_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\cos\theta_i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta_i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos\theta_i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta_i \end{bmatrix}$$

بـا قـراردادن $\delta\mathbf{p}_i$ در معادلـه‌ی (۱۸)، رابطـه‌ی زیـر نتیجـه می‌شود:

$$\delta\mathbf{g}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{M}_i\mathbf{C}_i\delta\mathbf{a}_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{G}_i\delta\mathbf{a}_i \qquad (۱۹)$$

با بهره‌جویی از نمو کرنش و بردار گرادیان تغییرمکان، معادله‌ی زیر برای نمو بردار کرنش مکانیکی به دست می‌آید:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{A}\delta\mathbf{g} \qquad (۲۰)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1+g_1 & g_2 & 0 & 0 & 0\\ g_3 & 1+g_4 & 1+g_1 & g_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+g_5 \end{bmatrix}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{A}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{G}_i\delta\mathbf{a}_i=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i\delta\mathbf{a}_i \qquad (۲۱)$$

با استفاده از رابطه (۳)، می‌توان میدان الکتریکی را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\mathbf{E}=-\mathbf{B}^{\phi}\boldsymbol{\varphi} \qquad (۲۲)$$

در ایـن رابطـه، $\mathbf{B}^{\phi}$ مـاتریس پتانسـیل-میـدان الکتریکـی می‌باشد.

با جایگذاری رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) در معادله‌ی (۴)، ماتریس‌های سفتی[1] به دست می‌آید:

$$\mathbf{K}_l=\sum_{k=1}^{N}\left(\int_A\int_{h_{k-1}}^{h_k}\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0\\ 0 & \mathbf{B}^{\phi} \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & -\mathbf{e}\\ \mathbf{e}^T & \in \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0\\ 0 & \mathbf{B}^{\phi} \end{bmatrix}dzdA\right)$$

$$=\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi}\\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

$$\mathbf{K}_G=\sum_{k=1}^{N}\int_A\int_{h_{k-1}}^{h_k}\mathbf{G}^T\mathbf{S}\mathbf{G}dzdA \qquad (۲۴)$$

[1] Stiffness

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\sigma_{x'}\mathbf{I}_2 & \tau_{x'z'}\mathbf{I}_2 & [0]_{2\times1}\\ \tau_{x'z'}\mathbf{I}_2 & [0]_{2\times2} & [0]_{2\times1}\\ [0]_{1\times2} & [0]_{1\times2} & \sigma_{y'}\end{bmatrix}$$

در این رابطه، $\mathbf{I}_2$ یک ماتریس یکه ۲ × ۲ می‌باشد. تمامی تابع اولیه[1]ها با استفاده از روش تابع اولیه‌گیری گوس انجام می‌پذیرد. رابطه‌ی زیر برای دیفرانسیل حجم برقرار است:

$$dV=2\pi\bar{\rho}\left(1-\frac{t}{R}\right)\frac{h}{2}\left[\left(\frac{dx_0}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{dz_0}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\xi d\tau$$

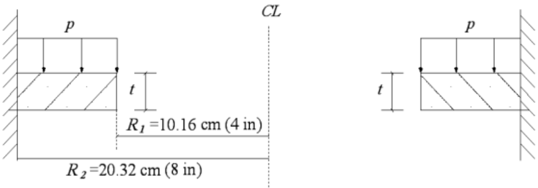
در این رابطه، h ضخامت کل پوسته و t مختصه در راستای ضخامت است.

بر مبنای رابطه‌سازی بالا، یک برنامه‌ی رایانه‌ای با استفاده از نرم‌افزار فرترن ۹۰ نوشته شد. در این برنامه تعداد ۳۱ زیر برنامه[2] برای انجام گام‌های محاسباتی به‌کار رفته است. شیوه تحلیل به این صورت می‌باشد که نخست، بارگذاری به چندین گام تقسیم می‌شود. در هر گام پس از به‌دست آوردن مقدار تغییرمکان و دوران‌ها، ماتریس سفتی بهنگام می‌گردد. تفاوت بین نیروی وارد شده به سازه و نیروهای داخلی، بار پسماند را به‌دست می‌دهد. بار پسماند بر روی سازه اثر داده می‌شود و فرآیند تحلیل تا رسیدن به همگرایی ادامه می‌یابد.

۴- نمونه‌های عددی

در این بخش، با حل نمونه‌های عددی و مقایسه‌ی پاسخ‌ها با پژوهش‌های پیشین، توانایی رابطه‌سازی پیشنهادی آشکار می‌گردد. نخست، به بررسی پاسخ پوسته‌های مرکب پرداخته می‌شود. در ادامه‌ی کار، تحلیل پوسته‌های مرکب با لایه‌ی پیزوالکتریک به صورت عملگر می‌آید.

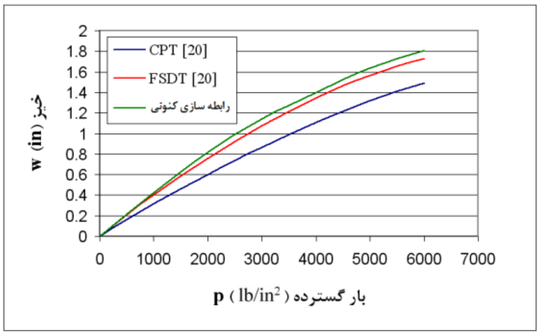
مثال ۱: برای نشان دادن افزایش دقت جزء پیشنهادی در برابر رابطه‌سازی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم[3] و نگره‌ی سنتی[4]، سازه‌ای که دومیر و همکاران تحلیل کرده‌اند، در ادامه حل می‌شود. خیز یک صفحه‌ی حلقه‌ای شکل ۵ لایه‌ی اورتوتروپیک با ضخامت یکسان برای هر لایه و ضخامت کلی ۱/۰۱۶cm (۰/۴ in) زیر اثر بار گسترده ۴۱/۳۶۷ × $۱۰^{۶}$ N/m^2 (۶۰۰۰ lb/in^2) حساب خواهد شد. ضریب کشسانی در راستای اصلی ماده و عمود بر آن، به ترتیب، ۲۷۵/۷۷۹ × $۱۰^{۹}$ N/m^2 (۴۰ × $۱۰^{۶}$ lb/in^2) و ۶/۸۹۴ × $۱۰^{۹}$ N/m^2 (۱ × $۱۰^{۶}$ lb/in^2) است. نسبت پواسون υ_{12} = ۰/۲۵ و ضریب برشی ماده ۳/۴۴۷ × $۱۰^{۹}$ N/m^2 (۵ × $۱۰^{۵}$ lb/in^2) می‌باشد. سازه در لبه‌ی بیرونی گیردار و در لبه‌ی داخلی آزاد است. ویژگی‌های هندسی ماده در شکل ۳ می‌آید. آرایش لایه‌ها نسبت به جهت شعاعی (۰/۹۰/۰/۹۰/۰) می‌باشد.



شکل ۳- صفحه حلقه‌ای شکل

تغییرمکان نقطه‌های گوناگون صفحه‌ی حلقه‌ای شکل و پاسخ‌های رابطه‌سازی دومیر و همکاران در نمودار شکل ۴ آمده است.

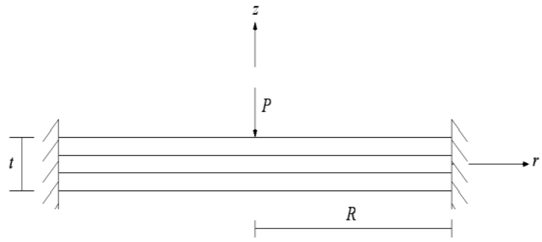
نتیجه‌های عددی نویسندگان، افزایش دقت رابطه‌سازی با تابع‌های شکل مرتبه‌ی بالا در میدان تغییرمکان را در برابر روش‌های تغییر شکل برشی مرتبه یکم و نگره‌ی سنتی صفحه تایید می‌کنند [۲۰].



شکل ۴- نمودار تغییرمکان صفحه‌ی حلقه‌ای شکل همسانگرد

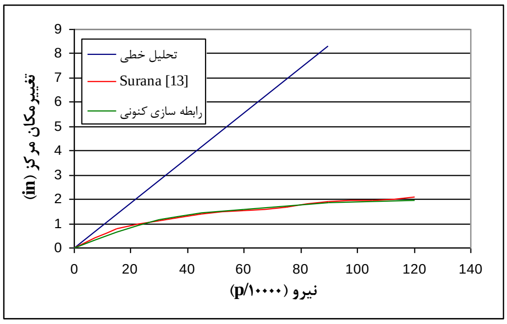
[1] Integral
[2] Subroutine
[3] First Order Shear Deformation Theory (FSDT)
[4] Classical Plate Theory (CPT)

مثال۲: یک صفحه‌ی دایره‌ای که سه لایه با ضخامت‌های یکسان دارد، تحلیل می‌شود. ضریب کشسانی و نسبت پواسون لایه‌های ۱ و ۳، به ترتیب، (۳×۱۰^{۷} lb/in^{2}) $۲۰۶/۸۳۴ \times ۱۰^{۹}$N/m^{2} و ۰/۳ و در لایه‌ی ۲ برابر با (lb/in^{2} ۱×۱۰^{۶}) $۶/۸۹۴ \times ۱۰^{۹}$N/m^{2} و ۰ /۲ می‌باشد. لبه‌های صفحه در سرتاسر سازه گیردار است. ضخامت کلی صفحه (in ۰/۴۸) ۱/۲۲cm و شعاع آن (۱۰in) ۲۵/۴cm می‌باشد. بار مرکزی ($۱/۲ \times ۱۰^{۶}$ lb) $۵/۳۳۸ \times ۱۰^{۶}$N به این سازه وارد می‌گردد. شکل ۶ نمودار بار- تغییرمکان مرکز صفحه را نشان می‌دهد.



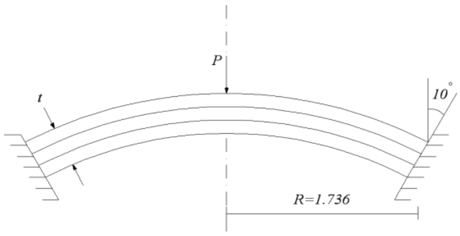
شکل ۵- صفحه‌ی دایره‌ای سه‌لایه

در شکل ۶ نتیجه‌های تحلیل رابطه‌سازی پیشنهادی، روش سورانا و تحلیل خطی آمده است. برپایه‌ی شکل ۶ اثر زیاد غیرخطی بودن مساله آشکار می‌شود. همچنین، هماهنگی مناسبی بین پاسخ رابطه‌سازی نویسندگان و نتیجه‌های سورانا وجود دارد [۱۳].

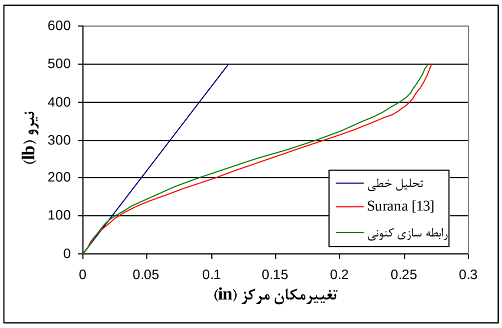


شکل ۶- نمودار بار- تغییرمکان صفحه‌ی سه لایه

مثال۳: یک کلاهک کروی سه لایه، همانند شکل ۷، زیر اثر یک بار نقطه‌ای در مرکز قرار دارد. تکیه‌گاه این کلاهک گیردار است. ضخامت کلی پوسته (in ۰/ ۰۳) ۰/۰۷۶۲cm می‌باشد. این پوسته متقارن با استفاده از سه جزء مدلسازی می‌شود. ضریب کشسانی و نسبت پواسون لایه‌های ۱ و ۳، به ترتیب، (۳×۱۰^{۷} lb/in^{2}) $۲۰۶/۸۳۴ \times ۱۰^{۹}$N/m^{2} و ۰/۳ و در لایه‌ی ۲، (۱×۱۰^{۶}lb/in^{2}) $۶/۸۹۴ \times ۱۰^{۹}$N/m^{2} و ۰ /۲ می‌باشد. نمودار شکل ۸ نتیجه تحلیل را نشان می‌دهد.



شکل ۷- کلاهک کروی



شکل ۸- نمودار تغییرمکان کلاهک کروی

با مقایسه‌ی نتیجه‌های تحلیل با پاسخ‌های روش سورانا، توانایی رابطه‌سازی پیشنهادی در الگوسازی پوسته‌ی متقارن به خوبی نمایان می‌گردد. از سوی دیگر، شکل ۸ به خوبی اثر زیاد تحلیل غیرخطی را آشکار می‌کند.

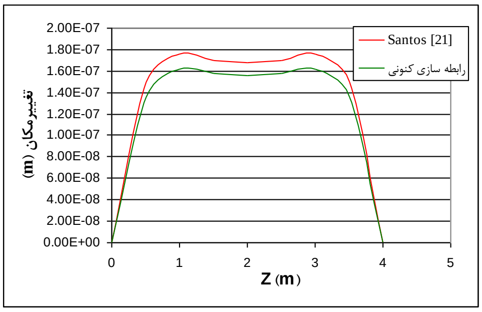
مثال۴: یک پوسته استوانه‌ای از جنس PZT-4 زیر اثر پتانسیل خارجی تحلیل می‌شود. درجه‌های آزادی مکانیکی در دو سر استوانه گیردارند. در حالت نخست، ضخامت کلی پوسته، طول، شعاع و پتانسیل خارجی به ترتیب، ۱۰cm، ۴m، ۱ m و $\phi = 100V$ می‌باشد. در حالت دوم، ضخامت پوسته و پتانسیل خارجی مقدارهای ۰/۵cm و $\phi = 100kV$ را دارند. ویژگی‌های ماده در جدول ۱ آمده است.

شکل ۹ نمودار تغییرمکان پوسته زیر اثر پتانسیل خارجی را نشان می‌دهد. نزدیک بودن پاسخ‌های این اثر با نتیجه‌های سانتوز و همکاران، توانایی رابطه‌سازی پیشنهادی برای الگوسازی پوسته پیزوالکتریک را نشان می‌دهد [۲۱]. پاسخ

غیرخطی پوسته در حالت دوم در جدول ۲ می‌آید. به دلیل تقارن، تنها مقدار تغییرمکان نیمی از استوانه در این جدول وارد شده است.

جدول ۱- مشخصه‌ی ماده PZT-4

$E_3(Gpa)$	۶۴/۵
$E_1 = E_2(Gpa)$	۸۱/۳
υ_{13}	۰/۴۳۲
υ_{12}	۰/۳۲۹
G	۲۵/۶
$e_{31}(Cm^{-2})$	۵/۲
$e_{32}(Cm^{-2})$	-۵/۲
$e_{24}(Cm^{-2})$	۱۲/۷۲
$e_{15}(Cm^{-2})$	۱۲/۷۲
$\in_{11}\ (Fm^{-1})$	۱/۳۰۵ × ۱۰ ^-۸^
$\in_{22}\ (Fm^{-1})$	۱/۳۰۵ × ۱۰ ^-۸^
$\in_{33}\ (Fm^{-1})$	۱/۱۵۰۵ × ۱۰ ^-۸^



شکل ۹- نمودار تغییرمکان پوسته

جدول ۲- پاسخ غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای برای حالت دوم

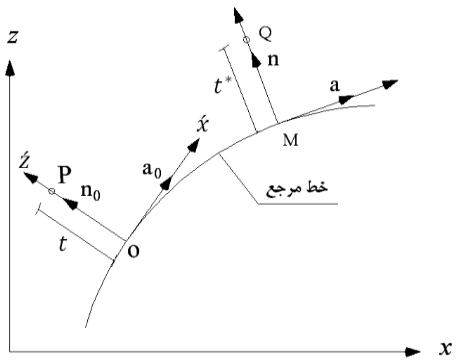
تغییر مکان(mm)	Z(m)
۰	۰
۴/۶۴۶	۰/۱۵
۳/۵۴۲	۰/۲۵
۳/۶۸۰۹	۰/۵
۳/۶۸۰۲	۱
۳/۶۸۰۱	۱/۵
۳/۶۸	۲

۵- نتیجه‌گیری

فن اجزای محدود توانمندی بسیاری برای تحلیل مساله‌های ماده‌ی مرکب دارد. با بهره جستن از این روش، پوسته‌ی متقارن محوری با لایه‌های مختلف تحلیل گردید. در این رابطه‌سازی یک جزء جدید دگرگون[1] یک بعدی سه گرهی با تابع‌های شکل مرتبه‌ی بالا برای میدان تغییرمکان به کار رفت. با استفاده از این جزء، دقت محاسبات به میزان قابل قبولی افزایش یافت. مقایسه‌ی پاسخ‌های روش پیشنهادی با پژوهش‌های پیشینیان، توانایی خوب رابطه‌سازی نویسندگان را برای الگوسازی پوسته‌های متقارن با لایه‌ی پیزوالکتریک نشان می‌دهد.

پیوست الف: محاسبه عملگر L

برای محاسبه‌ی عملگر **L** در نقطه‌ی P، دو نقطه‌ی P و Q، همانند شکل الف- ۱ به کار می‌رود [۱۴]:



شکل الف- ۱- دستگاه محلی برای محاسبه عملگر L

بردار تغییرمکان نقطه‌ی Q در دستگاه مختصه‌ی $x'z'$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\mathbf{u}}'_Q = \bar{\mathbf{u}}'_M + t^*\bar{\mathbf{u}}'_{1M} + g\left(t^*\right)\bar{\mathbf{u}}'_{2M} + k\left(t^*\right)\bar{\mathbf{u}}'_{3M} \quad \text{(الف- ۱)}$$

با بهره جستن از معادله‌های (۱) ، (۲) و شکل ۱، می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت [۱۴]:

[1] Degenerated

$$\left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(r,t)}\right]=\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial r}\quad\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}\right]=\mathbf{T}^T\mathbf{R} \qquad \text{(الف-۲)}$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{t}{R} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}=\left[\frac{\partial(x',z')}{\partial(x,z)}\right]=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi\\ -\sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{g}_1,\mathbf{g}_2]_P=\left[\frac{\partial(\bar{u}',\bar{w}')}{\partial(x',z')}\right]_P=\left[\frac{\partial(\bar{u}',\bar{w}')}{\partial(r,t)}\right]_P\mathbf{R}^{-1} \qquad \text{(الف-۳)}$$

$$\mathbf{g}_1=\begin{Bmatrix}g_1\\ g_2\end{Bmatrix}=C_r\left[\frac{\partial\bar{\mathbf{u}}'_Q}{\partial r}\right]_P \qquad \text{(الف-۴)}$$

$$\mathbf{g}_2=\begin{Bmatrix}g_3\\ g_4\end{Bmatrix}=\left[\frac{\partial\bar{\mathbf{u}}'_Q}{\partial t}\right]_P \qquad \text{(الف-۵)}$$

$$C_r=\frac{1}{1-\dfrac{t}{R}}$$

در رابطه‌های کنونی، زیرنویس P، رابطه‌های نقطه‌ی P را نشان می‌دهد و $\bar{\mathbf{u}}'_Q$ نشانه‌ی بردار تغییرمکان نقطه‌ی O و دستگاه $x'z'$ وابسته به آن است. با استفاده از این رابطه‌ها، معادله‌های زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{u}_M=\bar{u}'_M\mathbf{a}_0+\bar{w}'_M\mathbf{n}_0 \qquad \text{(الف-۶)}$$

$$\mathbf{u}_{1M}=\bar{u}'_{1M}\mathbf{a}_0+\bar{w}'_{1M}\mathbf{n}_0=u'_{1M}\mathbf{a}+w'_{1M}\mathbf{n} \qquad \text{(الف-۷)}$$

با بهره جستن از این برابری‌ها، رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\mathbf{u}}'_M=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_0^T\\ \mathbf{n}_0^T\end{bmatrix}.\mathbf{u}_M=\mathbf{T}_0\mathbf{u}_M \qquad \text{(الف-۸)}$$

$$\bar{\mathbf{u}}'_{1M}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_0^T\\ \mathbf{n}_0^T\end{bmatrix}[\mathbf{a},\mathbf{n}]\mathbf{u}'_{1M}=\mathbf{T}_0[\mathbf{a},\mathbf{n}]\mathbf{u}'_{1M} \qquad \text{(الف-۹)}$$

در این رابطه، $\mathbf{u}_M$ و $\mathbf{u}'_{1M}$، به ترتیب، بردارهای تغییرمکان در دستگاه‌های کلی xz و $\mathbf{a},\mathbf{n}$ نقطه‌ی M هستند. $\mathbf{T}_0$ ماتریس انتقال در نقطه‌ی O را نشان می‌دهد. با استفاده از این رابطه‌ها، معادله‌های نهایی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}g_1\\ g_2\end{Bmatrix}=C_r\mathbf{T}_0\frac{d\mathbf{u}_0}{dr}+C_rt\left[\Delta\mathbf{u}'_1+\mathbf{I}_2\frac{d\mathbf{u}'_1}{dr}\right]+C_rg(t)\left[\Delta\mathbf{u}'_2+\mathbf{I}_2\frac{d\mathbf{u}'_2}{dr}\right]+C_rk(t)\left[\Delta\mathbf{u}'_3+\mathbf{I}_2\frac{d\mathbf{u}'_3}{dr}\right] \qquad \text{(الف-۱۰)}$$

$$\begin{Bmatrix}g_3\\ g_4\end{Bmatrix}=\mathbf{I}_2\mathbf{u}'_1+\frac{4t^2}{h^2}\mathbf{I}_2\mathbf{u}'_2+\left(\frac{8t}{h}-16\frac{t^2}{h^2}\operatorname{sgn}(t)\right)\times\mathbf{I}_2\mathbf{u}'_3 \qquad \text{(الف-۱۱)}$$

$$\begin{aligned}g_5&=\frac{u}{\bar\rho}=\frac{u_0+tu_1+g(t)u_2+k(t)u_3}{\bar\rho}\\&=\frac{u_0}{\bar\rho}+\frac{t}{\bar\rho}\left(\cos\phi u'_1-\sin\phi w'_1\right)\\&+\frac{g(t)}{\bar\rho}\left(\cos\phi u'_2-\sin\phi w'_2\right)\\&+\frac{k(t)}{\bar\rho}\left(\cos\phi u'_3-\sin\phi w'_3\right)\end{aligned} \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

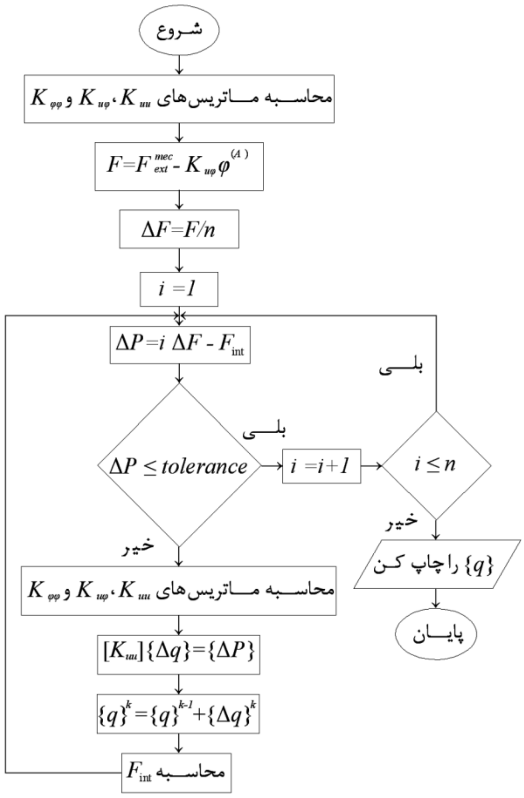
$$\Delta=\frac{1}{R}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

در رابطه‌های کنونی، $\mathbf{u}_0$ تغییرمکان کلی (xz) نقطه‌ی O و $\mathbf{u}'_1$، $\mathbf{u}'_2$ و $\mathbf{u}'_3$ تغییرمکان محلی($x'z'$) به دلیل دوران خط عمود در نقطه‌ی O می‌باشد.

$$\mathbf{g}=\mathbf{L}\mathbf{p} \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}C_r\mathbf{T}_0\dfrac{d}{dr} & C_rt\left[\Delta+\mathbf{I}_2\dfrac{d}{dr}\right] & C_rg(t)\left[\Delta+\mathbf{I}_2\dfrac{d}{dr}\right] & C_rk(t)\left[\Delta+\mathbf{I}_2\dfrac{d}{dr}\right]\\ [0]_{2\times2} & \mathbf{I}_2 & \dfrac{4t^2}{h^2}\mathbf{I}_2 & \left(\dfrac{8t}{h}-16\dfrac{t^2}{h^2}\operatorname{sgn}(t)\right)\mathbf{I}_2\\ \dfrac{1}{\bar\rho}\quad 0 & \dfrac{t}{\bar\rho}\cos\phi\quad -\dfrac{t}{\bar\rho}\sin\phi & \dfrac{g(t)}{\bar\rho}\cos\phi\quad -\dfrac{g(t)}{\bar\rho}\sin\phi & \dfrac{k(t)}{\bar\rho}\cos\phi\quad -\dfrac{k(t)}{\bar\rho}\sin\phi\end{bmatrix} \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

پیوست ب: نمودار جریان



مراجع

[1] Piefort V (2001), Finite element modeling of piezoelectric active structures, Active laboratory of the Université libre de bruxelles. Thesis for degree of doctor in applied sciences.

[2] Cady WG (1964) Piezoelectricity- an introduction to the theory and applications of electomechanical phenomena in crystals. New York: Dover Publications.

[3] Parton VZ, Kudryavtsev BA (1988) Electromagnetoelasticity. New York: Gordon and Breach.

[4] Allik H, Hughes TJR (1970) Finite element method for piezoelectric vibration. Int J Number Methods Eng 2: 151–7.

[5] Rajapakse RKND, Zhou Y (1997) Stress analysis of piezoceramic cylinder. Smart Mater Structure 6: 169–177.

[6] Kapuria S, Sengupta S,Dumir PC (1997) Three-dimentional solution for simply-supported piezoelectric cylindrical shell for axisymmetric laod. Comput Methods Appl Mech Eng 140: 139–55.

[7] Heyliger PR (1997) A note on the static behavior of simply-supported laminated piezoelectric cylinders. Int J Solids Struct 34: 3781–94.

[8] Mitchell JA, Reddy JN (1995) A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminate. Int J Solids Struct 32: 2345–67.

[9] Pinto correia IF, Mota Soares CM, Mota Soares CA, Herskovits J (2002) Active control of axisymmetric shells with piezoelectric layers: a mixed laminated theory with a high order displacement field. Comput Struct 80: 2265–75.

[10] Ha SK, Keilers C, Chung FK (1992) Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators. AIAA J 30: 772–80.

[11] Taciroglu E, Liu CW, Dong SB, Chun CK (2004) Analysis of laminated piezoelectric circular cylinders under axisymmetric mechanical and electrical loads with a semi-analytic finite element method. Int J Solids Struct 41: 5185–208.

[12] Faria AR, Almeida SFM (1998) Axisymmetric actuation of composite cylindrical thin shells with piezoelectric rings. Smart Mater Struct 7: 843–850.

[13] Liu JH, Surana KS (1995) Piecewise hierarchical p-version axisymmetric shell element for geometrically nonlinear behavior of laminated composites. Comput Struct 55: 67–84.

[14] Oliver J, Oñate E (1986) A total lagrangian formulation for the geometrically nonlinear analysis of structures using finite elements. Part II: arches, frames and axisymmetric shells. Numerical Methods in Engineering 23: 253–274.

[15] Ziyaeifar M, Elwi AE (1996) Degenerated plate-shell elements with refined transverse shear strains. Comput and Struct 60: 428–460.

[16] Simões Moita JM, Correia IFP, Mota Soares CM, Mota Soares CA (2004) Active control of adaptive laminated structures with bonded piezoelectric sensors and actuators. Comput and Struct 82: 1349–1358.

[17] Pinto correia IF, Martins PG, Mota Soares CM, Mota Soares CA, Herskovits J (2006) Modelling and optimization of laminated adaptive shells of revolution. Compos Struct 75: 49–59.

[18] Simões Moita JM, Mota Soares CM, Mota Soares CA (2002) Geometrically non-linear analysis of composite structures with integrated piezoelectric sensors and actuators. Compos Struct 57: 253–261.

[19] Sung Yi, Shih Fu Ling, Ming Ying (2000) Large deformation finite element analysis of composite structures integrated with piezoelectric sensors and

actuators. Finite elements in analysis and design 35: 1–15.

[20] Dumir PC, Joshi S, Dube GP (2001) Geometrically nonlinear axisymmetric analysis of thick laminated annular plate using FSDT. Composites:Part B 32: 1–10.

[21] Santos H, Mota Soares CM, Mota Soares CA, Reddy JN (2008) A finite element model for the analysis of 3D axisymmetric laminated shells with piezoelectric sensors and actuators: Bending and free vibrations. Computers and structures 86: 940–947.

[22] Santos H, Mota Soares CM, Mota Soares CA, Reddy JN (2005) A semi-analytical finite element model for the analysis of laminated 3D axisymmetric shells:bending, free vibration and buckling. Composite structures 71: 273–281.