



تحلیل ارتعاشی و پاسخ زمانی یک تیر تحت عبور مجموعه ای از بارهای متحرک

سعید ابوالقاسمی*

استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران.

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۲/۰۷، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۰۳/۲۸، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۵/۰۵

چکیده

در این مقاله به بررسی رفتار ارتعاشی و پاسخ زمانی یک تیر با شرایط مرزی ساده که تحت عبور مجموعه ای از بارهای متحرک قرار دارد، پرداخته شده است. به منظور مدلسازی تیر از تئوری اویلر-برنولی استفاده شده است و معادلات دینامیکی حاکم بر مساله به روش تحلیلی حل شده اند. در ابتدا رفتار ارتعاشی تیر ناشی از عبور یک بار متمرکز در دو حالت قبل و بعد از خروج بار از تیر مورد بررسی قرار گرفته است. سپس این تحلیل به مجموعه ای از بارهای در حال حرکت با فاصله یکسان از هم که از سمت چپ وارد تیر شده و پس از طی کردن طول تیر از آن خارج می شوند، تعمیم داده شده و سناریوهای مختلف حرکت بارها، از جمله حرکت در دو جهت مخالف، مورد بررسی قرار گرفته است. تاثیر سرعت حرکت و نیز فاصله بین بارها بر پاسخ زمانی مرکز تیر و بیشترین میزان جابجایی تیر مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده نشان می دهد که در ترکیب های خاصی از سرعت بار و فاصله بین بارها، دامنه ارتعاشات تیر به دلیل وقوع پدیده رزونانس افزایش پیدا می کند که باید در طراحی تیر مورد توجه قرار گیرد.

کلمات کلیدی: بار متحرک؛ ضریب بزرگنمایی دینامیکی؛ پاسخ زمانی؛ تیر اویلر-برنولی؛ رفتار ارتعاشی.

Vibrational analysis and time response of a beam traveled by a series of moving loads

S.Abolghasemi

Assist. Prof., Department of Engineering, Golestan university, Iran.

Abstract

This paper investigates the vibrational behavior and time response of a simply supported beam traveled by a series of moving loads. The Euler-Bernoulli beam theory is employed for modeling, and the governing dynamic equations of the problem are solved analytically. Initially, the vibrational behavior of the beam caused by the passage of a single concentrated load is examined for two stages: before and after the load exits the beam. Subsequently, this analysis is extended to a series of loads moving at equal spacing, which enter the beam from the left side and exit after traversing its length. Various load movement scenarios, including motion in two opposite directions, are also studied. The effects of load velocity and the spacing between loads on the time response at the beam's midpoint and the maximum beam deflection are analyzed. The obtained results indicate that for specific combinations of load velocity and load spacing, the vibration amplitude increases due to the resonance phenomenon, which must be taken into account in beam design.

Keywords: Moving load; dynamic amplification factor; time response; Euler-Bernoulli beam; vibrational behavior.

۱- مقدمه

بارهای متحرک، بارهایی هستند که در طول زمان، موقعیت آن‌ها روی سازه تغییر می‌کند. این نوع بارگذاری در بسیاری از کاربردهای مهندسی، به‌ویژه در سیستم‌های مکانیکی و عمرانی، مانند پل‌ها و خطوط ریلی مشاهده می‌شود. رفتار دینامیکی سازه‌ها تحت تأثیر این نوع بار، پیچیده‌تر از بارهای ایستا بوده و نیازمند تحلیل‌های دقیق‌تری است. اهمیت تحلیل این نوع بارگذاری، به دلیل تأثیر آن در افزایش ارتعاشات، خستگی سازه، و احتمال وقوع پدیده‌هایی مانند تشدید (رزونانس) می‌باشد. مطالعات اولیه نشان می‌دهند که حرکت یک نیروی متمرکز روی یک تیر ساده می‌تواند منجر به رفتارهای ارتعاشی پیچیده‌ای شود. مسئله بار متحرک یکی از مسائل کلاسیک در تحلیل دینامیکی سازه‌ها است که به شکل‌های مختلفی مدل‌سازی شده است. در ساده‌ترین حالت، بار به‌صورت نیروی بدون جرم و با سرعت ثابت در نظر گرفته می‌شود. اما در مدل‌های پیشرفته‌تر، تأثیر جرم بار، سفتی و میرایی آن نیز در تحلیل لحاظ می‌شود تا پاسخ واقعی‌تری به‌دست آید.

مدل‌سازی تیرها تحت بار متحرک معمولاً بر اساس نظریه‌های کلاسیک مانند تئوری اویلر-برنولی و تئوری تیموشنکو انجام می‌شود و معادلات حاکم عموماً به صورت معادلات دیفرانسیل با ضرایب زمانی متغیر بوده و حل آن‌ها به روش‌های تحلیلی، نیمه‌تحلیلی یا عددی مانند روش مودال، تفاضل محدود، المان محدود و یا روش مربعات دیفرانسیلی انجام می‌گیرد. مطالعه رفتار دینامیکی تیرها تحت بار متحرک در چندین زمینه متمرکز شده است که از آن جمله می‌توان به نحوه مدل‌سازی تیر و روش حل مورد استفاده، نحوه مدل‌سازی و مشخصات بار متحرک، شرایط تکیه گاهی تیر، مشخصات هندسی و جنس تیر و نیز سیستم‌های دوتیر موازی و یا سیستم‌های داری چند تیر در ارتباط با هم اشاره کرد. مطالعات اولیه در این حوزه در اوایل دهه ۱۹۷۰ بر اساس توزیع‌های ساده‌ی بار متحرک و تحلیل تیرهای ایده‌آل انجام شد. فریبا^۱ به‌عنوان یکی از بنیان‌گذاران این حوزه، اثر بار متحرک بر ارتعاشات تیرها را مطالعه کرد و نشان داد که بارهای متحرک می‌توانند پاسخ ارتعاشی بسیار بالاتری نسبت به حالت

استاتیک ایجاد کنند [۱]. معادلات حاکم بر مساله تیر تحت بار متحرک را می‌توان به روش تحلیلی و یا عددی حل کرد و یکی از رویکردهای متداول در تحلیل ارتعاشی، استفاده از روش المان محدود است، که امکان بررسی دقیق پاسخ زمانی و فضایی تیرها تحت بارهای متحرک مختلف را فراهم می‌کند و به همین دلیل مورد استفاده بسیاری از محققین در مطالعات خود بوده است [۲-۷].

مدلسازی بار متحرک نیز به روشهای مختلفی می‌تواند صورت بگیرد. در مرجع [۸] رفتار ارتعاشی یک تیر ایزوتروپیک با شرایط مرزی مختلف تحت بار متمرکز در سه حالت سرعت ثابت، شتاب تند شونده و شتاب کند شونده مورد بررسی قرار گرفت. در مرجع [۹] رفتار ارتعاشی تیرهای چند دهانه^۲ با مقطع غیر یکنواخت و تحت بار متمرکز با سرعت ثابت و متغیر مورد مطالعه قرار گرفت. در این مقاله از تئوری اویلر-برنولی برای مدل‌سازی تیر استفاده شده است و حل مساله با استفاده از آنالیز مودال و روش انتگرال گیری مستقیم بدست آمده است. در تحقیقی دیگر [۱۰]، معادله حرکت بی‌بعد یک تیر که تحت عبور بار هارمونیک متحرک قرار دارد، با استفاده از تئوری اغتشاشات مبتنی بر بسط دومقیاسی زمانی حل شده است. چئونگ و همکاران [۱۱] به مطالعه رفتار تیرهای چند دهانه با استفاده از توابع اصلاح‌شده ارتعاشی تیر^۳ به‌عنوان مودهای فرضی پرداخته‌اند و سپس با توسعه تحقیق خود [۱۲]، تأثیر عبور وسایل نقلیه بر رفتار ارتعاشی تیر را بررسی کرده‌اند که در آن وسیله نقلیه به صورت یک سیستم دودرجه آزادی مدل شده است. ونگ و همکاران [۱۳] به بررسی ارتعاشات غیرخطی یک تیر تحت بار متحرک پرداختند. آن‌ها از روش همپلتون برای استخراج معادلات حاکم و از روش گالرکین برای حل آن استفاده نمودند. نتایج نشان می‌دهند که مشخصات هندسی و نیز خواص ماده تیر، هردو باعث کاهش دامنه ارتعاش اجباری شده و در عین حال موجب افزایش سرعت نوسانات و افزایش سرعت بحرانی بار متحرک می‌شوند.

موضوع پایداری دینامیکی تیر با تکیه‌گاه ساده تحت عبور چندین بار توسط پیرمرادیان [۱۴] مورد بررسی قرار گرفت و مرز پایدار و ناپایدار مساله بر حسب پارامترهای جرم‌های عبوری با استفاده از دو روش محاسبه شد.

³ Modified beam vibration functions

¹ Frýba

² Multi-span beams

حرکت چندین بار متمرکز به کمک روش اجزای محدود پرداخته اند. فروغی و همکاران [۲۳] با استفاده از روش تحلیلی و عددی به مطالعه ارتعاشات میکروتیرهای مدرج تابعی واقع بر بستر الاستیک تحت حرکت یک بار متحرک پرداختند و روابط تحلیلی ساده‌ای برای پیش‌بینی ضریب بزرگنمایی دینامیکی، شرایط لغو ارتعاش و بیشینه دامنه ارتعاش آزاد ارائه نمودند. ارتعاشات عرضی یک سیستم متشکل از چند تیر که از طریق فنر های عرضی به هم متصل اند، توسط آریایی و همکاران [۲۴، ۲۵] مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق از تئوری تیموشکنو برای مدل‌سازی تیرها استفاده شده و معادلات حاکم با استفاده از روش تغییر متغیر و آنالیز مودال از حالت کوپل شده خارج و حل شده اند. مطالعه دیگری در زمینه تحلیل این نوع سیستم از تیرها توسط لای و همکاران [۲۶] با استفاده از روش تبدیلات انتگرالی انجام شده است. در [۲۷] رفتار دینامیکی یک تیر اویلر-برنولی دارای شرایط مرزی الاستیک تحت حرکت یک نوسانگر^۴ یک درجه آزادی با در نظر گرفتن اثر میرایی مورد بررسی قرار گرفته و پاسخ ارتعاشی تیر و نوسانگر با استفاده از تحلیل مودال و استفاده از مجموعه توابع چند جمله‌ای متعامد محاسبه شده است. رفتار ارتعاشی یک تیر کامپوزیتی واقع بر بستر الاستیک با طول بی نهایت و تحت اثر حرکت یک بار هارمونیک، توسط رضوانی و همکاران [۲۸] مطالعه شده است. در این مقاله از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم برای مدل‌سازی تیر استفاده شده و تاثیر سرعت و فرکانس بار بر تغییر شکل تیر و ممان خمشی آن بررسی شده است. در مرجع [۲۹] از توابع دینامیکی گرین برای تحلیل یک تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی ساده تحت بار متحرک استفاده شده است که در آن با استفاده از یک عبارت ماتریسی ساده می توان خمش تیر را محاسبه نمود. راثو [۳۰] با استفاده از روش جمع مودها^۵ به تحلیل ارتعاشی یک تیر اویلر-برنولی با در نظر گرفتن تاثیر اینرسی بار متحرک پرداخته است. وی از روش مقیاس های چند گانه^۶ برای حل معادلات زمانی استفاده نموده و تاثیر اینرسی بار را بر پایداری تیر مورد ارزیابی قرار داده است.

یکی از مهمترین عوامل تاثیر گذار بر رفتار دینامیکی تیر تحت عبور بار، شرایط تکیه گاهی آن می باشد. در [۱۵] از روش اجزای محدود جهت تحلیل دینامیکی یک تیر واقع بر بستر الاستیک و تحت عبور بار متمرکز استفاده شده است. بدین منظور بستر تیر به صورت مجموعه ای از فنرهایی با ضریب متغیر مدل‌سازی شده است و از تعمیم آن برای شبیه سازی سازه های خط راه آهن استفاده شده است. جوهانسون و همکاران [۱۶] یک حل تحلیلی صریح برای ارزیابی رفتار دینامیکی تیرهای چند دهانه ارائه دادند و به کمک این حل، فرکانس های طبیعی ارتعاشات تیر و شکل مودهای متناظر با آن را با اعمال شرایط مرزی بر روی تابع مشخصه تیر به دست آوردند. رفتار دینامیکی یک تیر باریک تحت عبور چندین بار متمرکز با سرعت یکسان و فواصل مساوی در [۱۷] مساله از حالت پیوسته به گسسته، یک حل تحلیلی برای بررسی ارتعاشات تیر ارائه شده است. ژنگ و همکاران [۱۸] در مقاله خود به مقایسه دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشکنو در تحلیل دینامیکی تیرها تحت عبور بار متمرکز هارمونیک پرداخته اند. در این تحقیق تیر به صورت یک ریل با تکیه گاههای گسسته^۱ مدل شده است. سبحانی راد و حسنی [۱۹، ۲۰] در مقالات خود به مطالعه رفتار ارتعاشی پل های خط آهن چند دهانه با فاصله دهانه یکسان و متغیر و تحت عبور بارهای متمرکز با فواصل یکسان پرداختند. معادلات حاکم بر مساله به صورت تحلیلی با استفاده از روش انتگرال دامیل و همچنین روش نیومارک بتا حل شده است و پدیده حداکثر پاسخ و خنثی سازی ارتعاشات مورد بررسی قرار گرفته است. سیمسک در مقاله خود [۲۱] به بررسی رفتار ارتعاشی یک تیر از جنس مواد مدرج تابعی^۲ و تحت عبور یک جرم متحرک با استفاده از تئوری های مختلف مرتبه اول و مرتبه بالا پرداخته است. وی از روش لاگرانژ برای استخراج معادلات حاکم و از توابع آزمایشی^۳ به صورت چند جمله ای برای بیان جابه جایی های عرضی، محوری و دوران مقاطع تیر استفاده نموده است. ها و همکاران [۲۲] در مقاله خود به بررسی رفتار یک تیر از جنس مواد مدرج تابعی با سطح مقطع غیر یکنواخت و تحت اثر

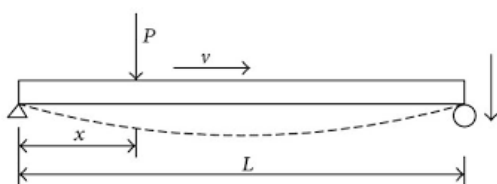
^۵ Mode superposition^۶ Multiple scales^۱ Discretely supported track^۲ Functionally graded materials (FGM)^۳ Trial functions^۴ Moving oscillator

جهت مخالف هم، تعمیم داده می شود. سپس با استفاده از حل عمومی ارائه شده، تاثیر سرعت حرکت بارها و فاصله آنها از یکدیگر و نیز حرکت بارها در خلاف جهت هم بر پاسخ زمانی تیر و بیشترین میزان تغییر شکل ایجاد شده در آن مورد بحث و بررسی قرار می گیرد. همچنین تاثیر نسبت میرایی بر رفتار تیر و دامنه ارتعاشات آن، به خصوص در شرایط تشدید ارزیابی می شود.

۲- فرمول بندی مساله

۲-۱- حالت عبور یک بار

تیر با تکیه‌گاه ساده، یکی از بنیادی‌ترین و پرکاربردترین مدل‌ها در تحلیل سازه است و اغلب به‌عنوان یک مدل مرجع در بسیاری از مسائل مهندسی به کار می‌رود. در این مطالعه نیز تحلیل بر اساس همین مدل انجام شده است. در این مدل ساده‌شده، فرض می‌شود تیر دارای تکیه‌گاه ساده در دو طرف بوده و یک بار متمرکز با سرعت ثابت v در طول تیر حرکت می‌کند (شکل ۱). همچنین از اثرات اینرسی نیرو و میرایی در این تحلیل صرف‌نظر می‌شود.



شکل ۱- تیر با شرایط مرزی ساده تحت عبور بار متحرک.

رفتار خمشی تیر بر اساس فرضیات تیر اویلر-برنولی بررسی می‌شود که طبق آن، مقاطع صفحه‌ای که در ابتدا عمود بر محور خنثی هستند، پس از تغییر شکل نیز صفحه‌ای باقی مانده و فقط دوران می‌کنند و اثر تغییر شکل برشی عرضی نادیده گرفته می‌شود. معادله حاکم بر ارتعاش عرضی تیر تحت اثر یک بار متمرکز متحرک به‌صورت زیر بیان می‌شود [۳۵]:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt)P \quad (1)$$

که در آن EI صلبیت خمشی تیر بوده و ρ و A به‌ترتیب چگالی و سطح مقطع تیر را نشان می‌دهند. P اندازه بار متحرک است که با سرعت v در امتداد تیر در حال حرکت

در مرجع [۳۱] ارتعاشات جانبی-پیچشی کوپل‌شده تیرهای جدار نازک تحت اثر بارهای هارمونیک متحرک مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش، بر اساس نظریه تیر جدار نازک ولاسوف^۱، معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار دینامیکی تیر استخراج شده و با استفاده از بسط مودال به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. سپس پاسخ مربوط به جابه‌جایی‌های جانبی و پیچشی در حوزه زمان با استفاده از تبدیل لاپلاس و معکوس آن به دست آمده‌اند.

نصیر و همکاران [۳۲] رفتار ارتعاشی یک تیر ویسکوالاستیک اویلر-برنولی تحت اثر حرکت جرم با سرعت ثابت و در حضور انواع مختلف الحاقات شامل جرم متمرکز، میراگر و فنر را با استفاده از روش تجزیه مودال مورد تحلیل قرار دادند.

لی و همکاران [۳۳] در پژوهش خود، با استفاده از روش تجزیه مودال، روابط تحلیلی برای پیش‌بینی پاسخ دینامیکی تیرهای دارای جان موج‌دار فولادی تحت بار ناشی از حرکت قطار ارائه و با نتایج شبیه‌سازی اجزای محدود و داده‌های آزمایشگاهی موجود اعتبارسنجی کرده‌اند.

در مرجع [۳۴] اثرات اندرکنش خاک-سازه و نیروی جرم‌های متحرک بر رفتار دینامیکی تیرهای قرار گرفته بر بستر الاستیک مورد مطالعه قرار گرفته است. با توجه به اینکه تغییرات ناگهانی جرم و اجزای سازه‌ای می‌تواند عملکرد دینامیکی سازه را به طور قابل توجهی تحت تأثیر قرار دهد، در این پژوهش نقش اثرات اینرسی ناشی از جرم خاک و جرم‌های متحرک در تحلیل ارتعاشی سازه مورد مطالعه قرار گرفته است.

مطالعه تحقیقات پیشین نشان می‌دهد که تقریباً در همه موارد، رفتار تیر تنها در زمان عبور بار مورد بررسی قرار گرفته و یا فرض بر این بوده است که تعداد بارهای عبوری در هر لحظه ثابت می‌باشد، در حالی که رفتار تیر پس از خروج بار، به خصوص در حالت عبور چندین بار، از اهمیت زیادی برخوردار است که کمتر بدان پرداخته شده است. در این مقاله، ابتدا رفتار ارتعاشی تیر تحت عبور یک بار متمرکز در حین و بعد از خروج بار با استفاده از روش تحلیلی مبتنی بر حل مستقیم معادلات حاکم بر مساله و اعمال دقیق شرایط مرزی در دو حالت حرکت بار بر روی تیر و پس از خروج آن از تیر، بررسی شده و سپس حل تحلیلی ارائه شده به حالت حرکت چندین بار متمرکز با فواصل یکسان در یک جهت و نیز در دو

¹ Vlasov's thin-walled beam theory

اعمال شرایط اولیه می باشد. این شرایط اولیه، مربوط به جابجایی و سرعت تیر در لحظه خروج بار در زمان $t = \tau$ بوده و به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= y_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \dot{w}(x, 0) &= \dot{y}_n(\tau) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (۶)$$

به منظور حل معادله دیفرانسیل در این حالت که به صورت $EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0$ می باشد، مجدداً پاسخ را می توان به شکل رابطه (۳) در نظر گرفت. پس از جایگذاری این حل در معادله همگن و ساده سازی و سپس اعمال شرایط مرزی بیان شده در رابطه (۶)، پاسخ زمانی به صورت زیر بدست می آید که در آن $t_1 = t - \tau$ ، زمان سپری شده پس از خروج بار از روی تیر می باشد:

$$y_n(t_1) = y_n(\tau) \cos(\omega_n(t_1)) + \frac{\dot{y}_n(\tau)}{\omega_n} \sin(\omega_n(t_1)) \quad (۷)$$

که در آن $y_n(\tau)$ و $\dot{y}_n(\tau)$ با جایگذاری $t = \tau$ در روابط (۵) و مشتق زمانی آن، به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$y_n(\tau) = \left(\frac{2P}{\rho A L \omega_n^2}\right) \left(\frac{1}{1 - \beta_n^2}\right) \left[1 - \beta_n \sin\left(\frac{n^2 \pi^2}{L v} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\right)\right], \quad (۸-۱)$$

$$y_n(\tau) = \left(\frac{2P}{\rho A L \omega_n^2}\right) \left(-\frac{1}{2} \tau \cos(n\pi)\right), \beta_n = 1 \quad (۸-۲)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_n(\tau) &= \left(\frac{2P}{\rho A L \omega_n^2}\right) \left(\frac{1}{1 - \beta_n^2}\right) \left[\frac{n\pi v}{L} \cos(n\pi) - \beta_n \omega_n \cos\left(\frac{n^2 \pi^2}{L v} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\right)\right], \beta_n \neq 1 \\ \dot{y}_n(\tau) &= \left(\frac{2P}{\rho A L \omega_n^2}\right) \omega_n \cos(n\pi), \beta_n = 1 \end{aligned} \quad (۹-۱) \quad (۹-۲)$$

بنابراین حل مساله برای زمان های $t \leq \tau$ با جایگذاری $y_n(t)$ از رابطه (۵) و برای زمان های $t > \tau$ با جایگذاری $y_n(t)$ از رابطه (۷) در شکل کلی حل در نظر گرفته شده در رابطه (۳) بدست می آید.

۲-۲- حالت عبور مجموعه ای از بارها در یک جهت

روش حل بیان شده در قسمت قبل را می توان برای حالت عبور چندین بار با سرعت یکسان و فواصل مساوی، تعمیم داد.

بوده و $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک می باشد. برای یک تیر با تکیه گاه ساده، شرایط مرزی به صورت زیر بیان می شوند:

$$w(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, L) \quad (۲)$$

پاسخ معادله دیفرانسیل بیان شده در رابطه (۱) با استفاده از روش جداسازی متغیرها به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (۳)$$

که در آن $y_n(t)$ مختصات مودال n ام بوده و $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ بیانگر تابع شکل مد n ام مربوط به ارتعاشات یک تیر با شرایط مرزی ساده است که شرایط مرزی بیان شده در رابطه (۲) را ارضا می کند. این تابع شکل مد برای شرایط مرزی مختلف تیر قابل محاسبه است. مهمترین بخش حل مساله یک تیر با نیروی متحرک، بدست آوردن پاسخ زمانی $y_n(t)$ می باشد که در ادامه به طور کامل شرح داده می شود. با جایگذاری حل (۳) در معادله (۱) و پس از ساده سازی، معادله دیفرانسیل حاکم بر پاسخ زمانی تیر به صورت زیر بدست می آید:

$$\ddot{y}_n(t) + \omega_n^2 y_n(t) = \left(\frac{2P}{\rho A L}\right) \sin(\Omega_n t) \quad (۴)$$

که در آن $\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ برابر با فرکانس طبیعی تیر بوده و $\Omega_n = \frac{n\pi v}{L}$ برابر با فرکانس تحریک ناشی از حرکت بار می باشد. به منظور ساده سازی روابط، نسبت فرکانس به صورت $\beta_n = \frac{\Omega_n}{\omega_n}$ تعریف می شود. حل معادله (۴) باید برای دو حالت $\beta_n = 1$ و $\beta_n \neq 1$ به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گیرد که این حل به صورت زیر قابل محاسبه می باشد:

$$y_n(t) = \left(\frac{2P}{\rho A L \omega_n^2}\right) \left(\frac{1}{1 - \beta_n^2}\right) [\sin(\Omega_n t) - \beta_n \sin(\omega_n t)], \beta_n \neq 1 \quad (۵-۱)$$

$$y_n(t) = \left(\frac{2P}{\rho A L \omega_n^2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) [\sin(\omega_n t) - \omega_n t \sin(\omega_n t)], \beta_n = 1 \quad (۵-۲)$$

اکنون با جایگذاری مقدار بدست آمده برای $y_n(t)$ در رابطه (۳)، جابجایی تیر $w(x, t)$ در هر زمان و هر مکان از تیر قابل محاسبه خواهد بود. زمان پیمایش طول تیر توسط بار متحرک برابر با $\tau = L/v$ می باشد و بنابراین حل بدست آمده در رابطه (۵) برای زمان های $t \leq \tau$ صادق است. برای زمان $t > \tau$ و پس از آنکه بار متحرک تیر را ترک می کند، شرایط تیر به صورت یک مساله با ارتعاشات آزاد خواهد بود که در آن با صفر قرار دادن سمت راست معادله (۱)، یک معادله دیفرانسیل همگن بدست می آید که برای حل آن، نیاز به

$$y_n(t_2) = \left(\frac{2P}{\rho AL \omega_n^2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left[\sin(\omega_n(t-d/v)) - \omega_n(t) - \frac{d}{v} \sin(\omega_n(t-d/v)) \right], \quad (11-2)$$

$$\beta_n = 1$$

$$y_n(T_2) = y_n(\tau) \cos(\omega_n(t-\tau-d/v)) + \frac{\dot{y}_n(\tau)}{\omega_n} \sin(\omega_n(t-\tau-d/v)) \quad (12)$$

که مقادیر $y_n(\tau)$ و $\dot{y}_n(\tau)$ موجود در رابطه (۱۲)، قبلا و در روابط (۸) محاسبه شدند.

۳-۲- حالت عبور مجموعه ای از بارها در دو جهت مخالف

برای تحلیل رفتار ارتعاشی تیر در حالتی که دو مجموعه بار از دو سمت مخالف وارد تیر شده و پس از پیمودن طول تیر از آن خارج می شوند (شکل ۳)، پاسخ در نظر گرفته شده در رابطه (۳) به صورت زیر تغییر می یابد:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^L(t) \sin\left(\frac{n\pi x_L}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n^R(t) \sin\left(\frac{n\pi x_R}{L}\right) \quad (13)$$

که در آن $y_n^L(t)$ و $y_n^R(t)$ به ترتیب پاسخ زمانی مربوط به بارهای وارده از سمت چپ و راست می باشند. با قرار دادن این پاسخ در رابطه (۱) مربوط به معادله ارتعاشی تیر، معادله دیفرانسیل حاکم بر پاسخ زمانی تیر برای این دو مجموعه بار به صورت زیر بدست می آید:

$$\ddot{y}_n^L(t) + \omega_n^2 y_n^L(t) = \left(\frac{2P_L}{\rho AL}\right) \sin(\Omega_n^L t) \quad (14)$$

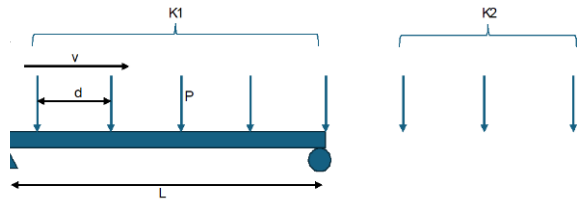
$$\ddot{y}_n^R(t) + \omega_n^2 y_n^R(t) = \left(\frac{2P_R}{\rho AL}\right) \sin(\Omega_n^R t)$$

با فرض اینکه مقدار و نیز سرعت بارهای وارده از دو سمت باهم برابر باشند که در این مقاله این فرض برقرار است، خواهیم داشت: $\Omega_n^L = \Omega_n^R$ و $P_L = P_R$. بنابراین قسمت پاسخ زمانی مربوط به هر دو مجموعه بار با هم برابر خواهد بود و رابطه $y_n^L(t) = y_n^R(t)$ برقرار است. در نتیجه رابطه (۱۳) را می توان با توجه به شکل ۳، با تعریف مختصات مورد استفاده برای بارهای وارده از سمت چپ و راست به صورت $x_L = x$ و $x_R = L - x$ به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi(L-x)}{L}\right) \right) \quad (15)$$

که در آن قسمت پاسخ زمانی $y_n(t)$ متعلق به هر دو مجموعه بار، مشابه آنچه در قسمت قبل توضیح داده شد،

برای این منظور با توجه به خطی بودن معادله دیفرانسیل حاکم، می توان از روش جمع آثار استفاده نمود. برای مثال فرض کنید تعدادی بار با سرعت یکسان v و با فاصله یکسان d نسبت به هم در حال حرکت بوده که از این میان تعداد k_1 بار در حال عبور بر روی تیر بوده و تعداد k_2 بار از روی تیر خارج شده اند (شکل ۲).



شکل ۲- تیر تحت عبور مجموعه ای از بارهای متمرکز با سرعت ثابت و فاصله یکسان.

در هر لحظه، بسته به اینکه چه تعداد بار در حال عبور بر روی تیر بوده و چه تعداد بار از روی تیر خارج شده اند، می توان جابجایی تیر را با جمع کردن حل ناشی از تاثیر هر بار، به صورت زیر نوشت:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(t_1) + y_n(t_2) + \dots + y_n(t_{k_1})] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(T_1) + y_n(T_2) + \dots + y_n(T_{k_2})] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (10)$$

و در آن $t_i = t - (i-1)\frac{d}{v}$, $(i = 1, 2, \dots, k_1)$ و $T_j = t - \tau - \frac{(j-1)d}{v}$, $(j = 1, 2, \dots, k_2)$ زمان ورود بار i ام به تیر بوده و T_j زمان خروج بار j ام از روی تیر می باشد. حل حاصل شامل دو قسمت ناشی از تاثیر بارهای در حال حرکت بر روی تیر و تاثیر ناشی از بارهای خارج شده از تیر می باشد. البته بدیهی است که در صورت وجود میرایی، حل مربوط به تاثیر بارهای خارج شده از تیر پس از مدتی بسته به شدت میرایی در سیستم، از بین می رود. به عنوان نمونه، در رابطه (۱۰) مقادیر $y_n(t_2)$ و $y_n(T_2)$ به صورت زیر قابل بیان می باشند:

$$y_n(t_2) = \left(\frac{2P}{\rho AL \omega_n^2}\right) \left(\frac{1}{1 - \beta_n^2}\right) \left(\sin(\Omega_n(t-d/v)) - \beta_n \sin(\omega_n(t-d/v)) \right), \quad (11-1)$$

$$\beta_n \neq 1$$

بیان شده در رابطه (۱۸)، دارای ریشه حقیقی نمی باشد و بنابراین دامنه ارتعاشات به سمت بینهایت میل نمی کند و توسط میرایی سیستم، کنترل می شود.

۳- نتایج تحلیل ارتعاشی

۳-۱- صحت سنجی نتایج

در ابتدا اعتبار روش حل ارائه شده برای حالت مربوط به حرکت یک بار متمرکز بر روی تیر، از طریق مقایسه نتایج به دست آمده از حل تحلیلی با داده های گزارش شده در مرجع [۲] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مرجع از روش اجزای محدود برای تحلیل مساله استفاده شده است. نتایج مربوط به این مقایسه در جدول ۱ ارائه شده است. در این جدول ضریب بزرگنمایی دینامیکی ۱ تیر برای نسبت های مختلف T_f/τ مقایسه شده است که در آن $T_f = 2\pi/\omega_1$ دوره تناوب اصلی تیر می باشد. ضریب بزرگنمایی دینامیکی به صورت نسبت بیشترین مقدار خیز تیر در مرکز آن در هنگام عبور بار به مقدار خیز ماکزیمم تیر تحت بار استاتیکی اعمالی در مرکز آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$D_d = w_{max}\left(\frac{L}{2}, t\right) / w_{st}\left(\frac{L}{2}\right) \quad (۱۹)$$

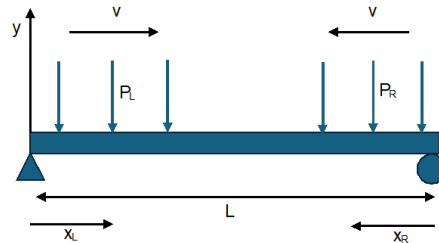
که در آن مقدار خیز تیر با شرایط مرزی ساده تحت بار استاتیکی در مرکز برابر با $w_{st}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{PL^3}{48EI}$ می باشد.

جدول ۱- مقایسه نتایج بدست آمده برای ضریب بزرگنمایی

دینامیکی تیر برای مقادیر مختلف T_f/τ

T_f/τ	مطالعه حاضر	مرجع [۲]
۰/۱	۱/۰۴۸۲	۱/۰۵۳
۰/۵	۱/۲۵۷۶	۱/۲۵۲
۱	۱/۷۰۵۴	۱/۷۰۵
۱/۲۳۴	۱/۷۳۱۷	۱/۷۳۰
۱/۵	۱/۷۰۱۹	۱/۷۰۴
۲	۱/۵۴۸۱	۱/۵۵۰

محاسبه می شود. بقیه مراحل حل مربوط به این حالت، مشابه حل قبلی خواهد بود.



شکل ۳- تیر تحت عبور مجموعه ای از بارهای متمرکز در دو جهت مخالف.

۴-۲- تاثیر میرایی بر معادلات حاکم

وجود میرایی باعث تغییر رفتار سیستم ارتعاشی و کاهش دامنه ارتعاشات می شود. تاثیر میرایی سیستم به خصوص در پدیده رزونانس اهمیت پیدا می کند که با میرا کردن قسمتی از انرژی سیستم، از رشد سریع دامنه ارتعاشات جلوگیری می کند. معادله حاکم بر رفتار تیر تحت بار متحرک در حضور میرایی به صورت زیر می باشد:

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \delta(x - vt)P \quad (۱۶)$$

که در آن c ضریب میرایی است. مجدداً با جایگذاری حل در نظر گرفته شده در رابطه (۳) در این معادله و پس از ساده سازی، رابطه زیر بدست می آید:

$$\ddot{y}_n(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}_n(t) + \omega_n^2 y_n(t) = \left(\frac{2P}{\rho AL}\right) \sin(\bar{\omega}_n t) \quad (۱۷)$$

که در آن $\zeta = \frac{c}{2\rho A\omega_n}$ برابر با نسبت میرایی سیستم است. حل معادله دیفرانسیل (۱۷) از جمع حل خصوصی و حل عمومی به صورت زیر به دست می آید:

$$y_n(t) = e^{(-\zeta\omega_n t)} (A_n \cos(\omega_{d_n} t) + B_n \sin(\omega_{d_n} t)) + \frac{2P}{\rho AL} \left(\frac{(1 - \beta_n^2) \sin(\Omega_n t) - 2\beta_n \zeta \cos(\Omega_n t)}{\omega_n^2 (\beta_n^4 + 4\beta_n^2 \zeta^2 - 2\beta_n^2 + 1)} \right) \quad (۱۸)$$

که در آن $\omega_{d_n} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ فرکانس طبیعی سیستم میرا بوده و ثوابت A_n و B_n با اعمال شرایط اولیه محاسبه می شوند. قابل توجه اینکه در این حالت، مخرج کسر حل خصوصی

^۱ Dynamic magnification factor

در ادامه نتایج بدست آمده از حل تحلیلی ارائه شده برای بررسی ارتعاشات تیر برای حالت های مختلف عبور بار توضیح داده می شود.

۳-۲- رفتار تیر تحت عبور یک بار منفرد

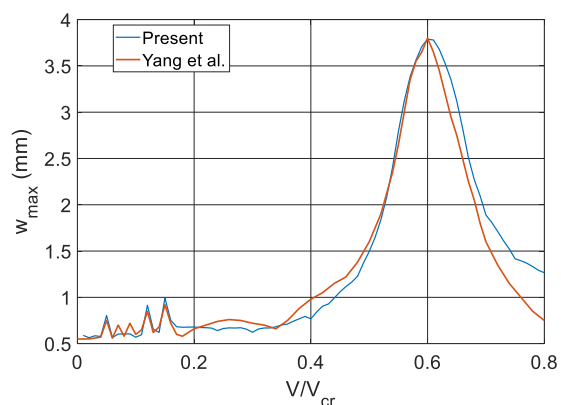
رفتار ارتعاشی تیر با شرایط مرزی ساده تحت اثر یک بار متحرک با سرعت های مختلف در شکل ۵ ارائه شده است. در این شکل، نسبت جابجایی دینامیکی به جابجایی استاتیکی در مرکز تیر برای نسبت های مختلف v/v_{cr} مقایسه شده است که در آن $v_{cr} = \omega_1 L / \pi$ برابر با اولین سرعت بحرانی تیر می باشد. این شکل به وضوح پاسخ تیر را قبل از خروج بار از تیر ($t/\tau \leq 1$) و پس از خروج بار از تیر ($t/\tau > 1$) نشان می دهد. با توجه به این شکل مشاهده می شود که پاسخ تیر عمدتاً به سرعت بار وابسته است. نحوه تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی با نسبت سرعت و همچنین زمان وقوع بیشینه جابجایی مرکز تیر، به ترتیب در شکل های ۶ و ۷ نشان داده شده اند. طبق شکل ۶، ضریب بزرگنمایی دینامیکی در نسبت $v/v_{cr} = 0.6170$ به بیشینه مقدار خود رسیده و پس از آن کاهش می یابد. شکل ۷ نشان می دهد که برای مقادیر $v/v_{cr} \leq 1$ ، بیشینه جابجایی تیر همواره در حین حرکت بار و قبل از خروج بار از تیر رخ می دهد، در حالی که برای $v/v_{cr} > 1$ ، بیشینه جابجایی زمانی اتفاق می افتد که بار از روی تیر خارج شده است که نتیجه ای جالب و قابل توجه می باشد. در واقع می توان گفت ارتعاش یک تیر تحت اثر بار متحرک می تواند پس از آنکه بار از روی تیر عبور کرده و آن را ترک کرده است، به بیشترین مقدار خود برسد؛ زیرا تیر به دلیل اینرسی و انرژی الاستیک ذخیره شده همچنان به ارتعاش ادامه می دهد. این پدیده مرتبط با پاسخ ارتعاش آزاد سیستم است که پس از حذف تحریک اجباری باقی می ماند.

جدول ۲- تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیر با افزایش تعداد جملات حل سری (n) برای مقادیر مختلف T_f/τ

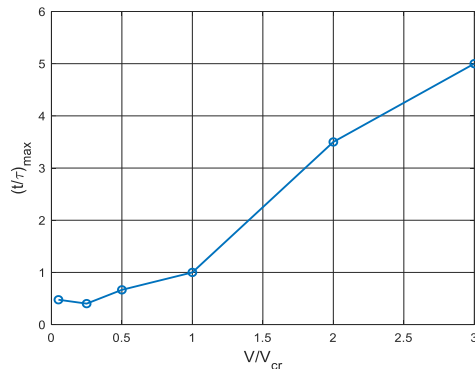
T_f/τ						n
T_f/τ						
δ	$1/\delta$	$1/234$	1	0.5	0.1	
$1/5481$	$1/71.4$	$1/7429$	$1/7.7$	$1/2497$	$1/345$	1
$1/5481$	$1/71.4$	7429	$1/7.7$	$1/2497$	$1/345$	2

همچنین به منظور ارزیابی تاثیر تعداد جملات مورد استفاده در حل سری در نظر گرفته شده در رابطه (۳)، تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی با افزایش تعداد جملات (n)، برای مقادیر مختلف T_f/τ در جدول ۲ ارائه شده است. این نتایج نشان می دهند که محاسبات برای $n = 10$ همگرا می باشند. همچنین مشاهده می شود که مدهای پادمقارن ($n = 2, 4, 6, 8, 10$) تاثیری در پاسخ نهایی ندارند، دلیل این موضوع آن است که این مدها توسط بار متحرک برانگیخته نمی شوند. همان طور که در داده های جدول ۲ دیده می شود، در سرعت های بیشتر بار متحرک (یعنی نسبت های بزرگتر T_f/τ)، پاسخ با سرعت بیشتری همگرا می شود؛ که بیانگر آن است که در سرعت های بالا، تنها مدهای مرتبه پایین تر برانگیخته می شوند.

در ادامه به منظور بررسی صحت حل ارائه شده برای حالت عبور مجموعه ای از بارهای متحرک، در شکل ۴ نتایج بدست آمده با نتایج ارائه شده توسط یانگ و همکاران [۳۶] با یکدیگر مقایسه شده است. این نمودار نشان دهنده بیشترین میزان جابجایی مرکز یک تیر با شرایط تکیه گاهی ساده در دو طرف تحت عبور تعدادی بار بر اساس شبیه سازی حرکت یک قطار روی ریل با مقدار $d/L = 1.2$ بدست آمده است. بر اساس این شکل مشاهده می شود که تطابق خوبی بین نتایج برقرار بوده و حل تحلیلی ارائه شده قادر به تخمین دامنه ارتعاشات و نیز نقاط ماکزیمم که در آن پدیده تشدید رخ می دهد، می باشد.



شکل ۴: مقایسه نتایج مربوط به بیشترین جابجایی مرکز تیر تحت عبور مجموعه ای از بارهای متحرک.

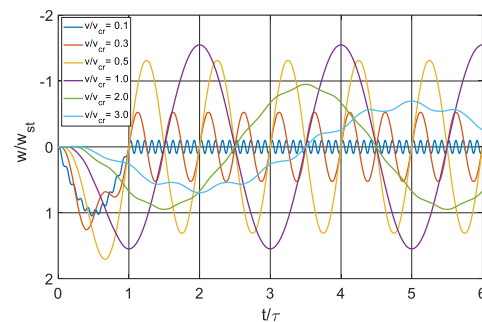


شکل ۷- زمان وقوع بیشترین میزان جابجایی در مرکز تیر در نسبت سرعت های مختلف.

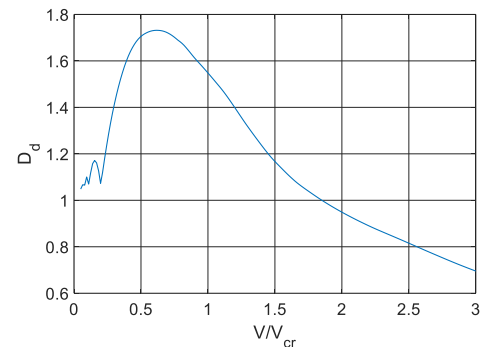
۳-۳- رفتار تیر تحت عبور مجموعه ای از بارها در یک جهت

پاسخ زمانی مربوط به ارتعاشات مرکز تیر تحت عبور مجموعه ای از بارها با سرعت یکسان و فواصل مساوی در شکل ۸ نشان داده شده است. در این شکل جابجایی مرکز تیر به صورت تابعی از زمان برای نسبت های سرعت و فواصل مختلف بین بارها، رسم شده است. همان طور که مشاهده می شود، به ازای مقادیر مشخص سرعت بار و فاصله بین بارها، ارتعاشات تیر با زمان افزایش پیدا کرده و در صورت عدم وجود میرایی، پدیده رزونانس رخ می دهد که می تواند بسیار خطرناک بوده و باعث خسارت به سازه گردد. برای درک بهتر این موضوع، در شکل ۹ نمودار ضریب بزرگنمایی دینامیکی بر حسب نسبت سرعت بار، برای فواصل مختلف بین بارها رسم شده است. بر اساس این شکل، دامنه ارتعاشات مرکز تیر به ازای مقادیر مشخص (نسبت سرعت) v/v_{cr} و فاصله بین بارها (d/L) ، افزایش شدیدی خواهد داشت. برای مثال در حالت $d/L = 0.5$ و نسبت سرعت $v/v_{cr} = 0.25$ ، دامنه ارتعاشات افزایش شدیدی پیدا می کند. همچنین در حالت $d/L = 1$ ، دامنه ارتعاشات در نسبت سرعت های $v/v_{cr} = 0.25, 0.5$ دارای پرش می باشد که البته بیشترین افزایش مربوط به $v/v_{cr} = 0.5$ است. برای نسبت فاصله $d/L = 2$ ، این افزایش دامنه ارتعاشات در نسبت سرعت های $v/v_{cr} = 0.25, 0.5, 1$ اتفاق می افتد و بیشترین افزایش مربوط به سرعت بحرانی تیر است. بنابراین با توجه به نتایج بدست آمده، در ترکیب هایی از نسبت سرعت و فاصله بین بارها، دامنه ارتعاشات تیر می تواند به دلیل وقوع

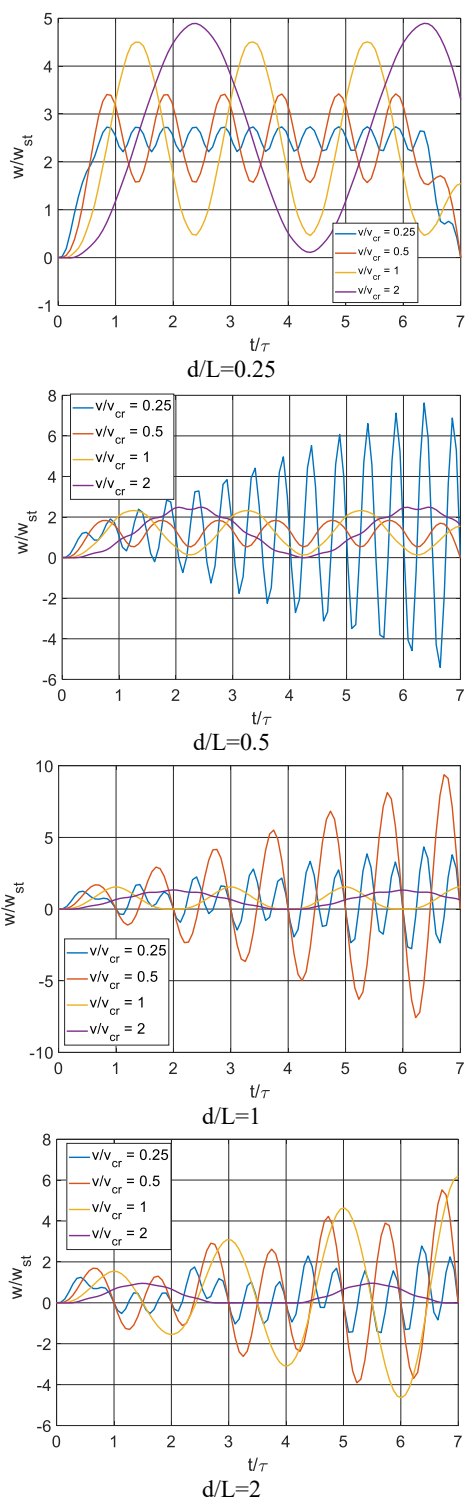
۳	۱/۰۴۶۲	۱/۲۵۸	۱/۷۰۷	۱/۷۳۲۵	۱/۷۰۰۵	۱/۵۴۸۱
۴	۱/۰۴۶۲	۱/۲۵۸	۱/۷۰۷	۱/۷۳۲۵	۱/۷۰۰۵	۱/۵۴۸۱
۵	۱/۰۴۷۷	۱/۲۵۸	۱/۷۰۵۷	۱/۷۳۱۳	۱/۷۰۱۷	۱/۵۴۸۱
۶	۱/۰۴۷۷	۱/۲۵۸	۱/۷۰۵۷	۱/۷۳۱۳	۱/۷۰۱۷	۱/۵۴۸۱
۷	۱/۰۴۸	۱/۲۵۷۸	۱/۷۰۵۴	۱/۷۳۱۶	۱/۷۰۱۷	۱/۵۴۸۱
۸	۱/۰۴۸	۱/۲۵۷۸	۱/۷۰۵۴	۱/۷۳۱۶	۱/۷۰۱۷	۱/۵۴۸۱
۹	۱/۰۴۸۲	۱/۲۵۷۷	۱/۷۰۵۴	۱/۷۳۱۷	۱/۷۰۱۶	۱/۵۴۸۱
۱۰	۱/۰۴۸۲	۱/۲۵۷۷	۱/۷۰۵۴	۱/۷۳۱۷	۱/۷۰۱۶	۱/۵۴۸۱



شکل ۵- پاسخ زمانی تیر با شرایط مرزی ساده تحت اثر بار متحرک با سرعت های مختلف. $(x = L/2)$



شکل ۶- تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی با نسبت سرعت بار در یک تیر با شرایط مرزی ساده $(x = L/2)$.



شکل ۸- پاسخ زمانی ارتعاشات مرکز تیر تحت عبور مجموعه ای از بارها در یک جهت برای نسبت های سرعت و فواصل مختلف بین بارها.

پدیده روزنانس و تحریک فرکانس های طبیعی تیر، به صورت ناگهانی افزایش یابد.

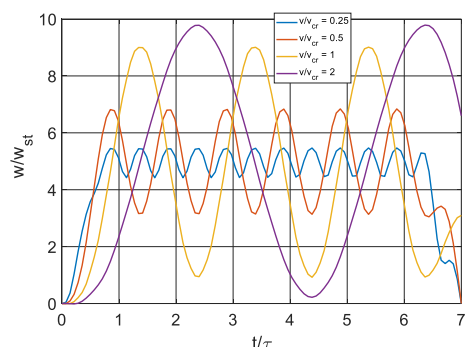
با بررسی دقیق حالت های مختلف نمودارهایی مشابه آنچه در شکل ۹ آورده شده است، مشاهده می شود که برای هر نسبت سرعت v/v_{cr} ، دامنه ارتعاشات مرکز تیر به ازای مضارب زوج مساوی یا بزرگتر از ۲ از نسبت d/L ، دارای نقطه پرش یا پیک می باشد. بنابراین ارتباط بین پارمترهای d/L و v/v_{cr} در حالت تشدید به صورت رابطه زیر قابل بیان است:

$$\frac{d}{L} = 2n \frac{v}{v_{cr}}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

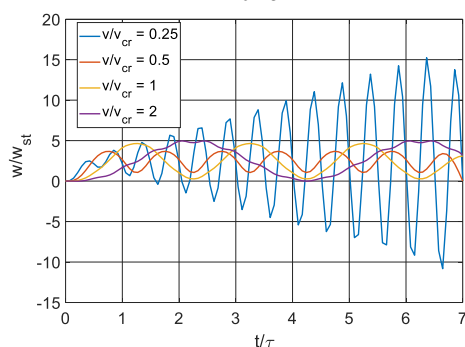
موضوع روزنانس در طراحی سازه های تحت عبور بار متحرک مانند پل ها، باید در نظر گرفته شود. از دیدگاه انرژی نیز علت این پدیده را می توان انباشت انرژی ناشی از کار نیروهای در حال حرکت بر روی تیر دانست. در واقع مقدار کاری که بار متحرک در هنگام حرکت بر روی تیر در هر لحظه انجام می دهد، برابر با حاصلضرب مقدار بار در جابجایی تیر در محل بار می باشد که این کار می تواند مثبت یا منفی باشد. در صورتی که سرعت حرکت بار و فاصله بین بارها به گونه ای باشد که کار نیروها در حین حرکت روی تیر همواره مثبت باشد، انرژی ناشی از کار نیروها به تیر منتقل شده و باعث افزایش سرعت نقاط تیر و در نتیجه دامنه ارتعاشات آن می شود.

۴-۳- رفتار تیر تحت عبور مجموعه ای از بارها در دو جهت مخالف

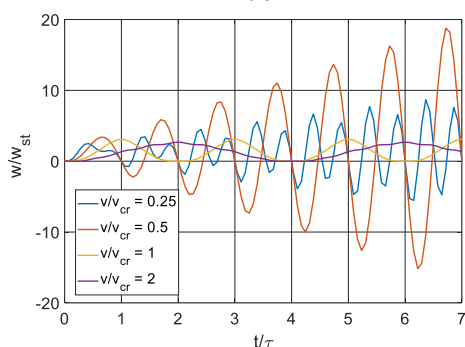
در مرحله بعد، تحلیل مشابهی برای حالتی که دو مجموعه بار متحرک از دو سمت مقابل وارد تیر شده و از آن خارج می شوند، انجام شده است. نتایج مربوط به ارتعاشات مرکز تیر و ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای این حالت به ترتیب در شکل های ۱۰ و ۱۱ ارائه شده است. نتایج بدست آمده برای این شرایط، مشابه حالت قبلی مربوط به عبور بارها از یک سمت تیر است (از سمت چپ به راست تیر)، با این تفاوت که دامنه ارتعاشات و مقدار ضریب بزرگنمایی دینامیکی در این حالت به طور قابل توجهی بیشتر است.



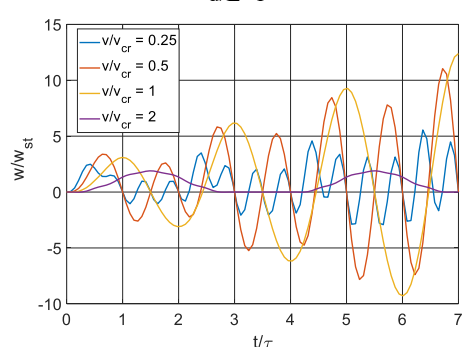
$d/L=0.25$



$d/L=0.5$

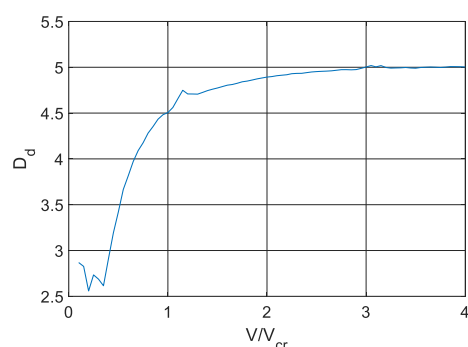


$d/L=1$

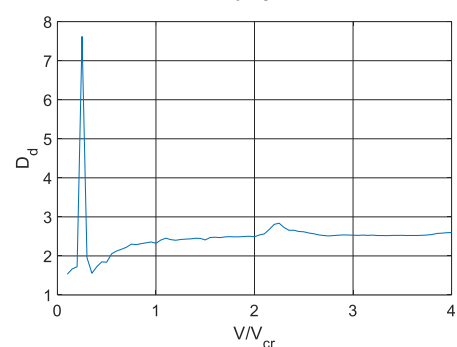


$d/L=2$

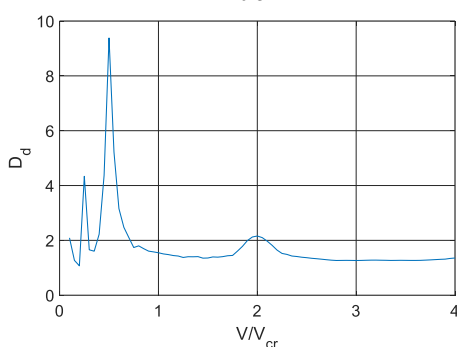
شکل ۱۰- پاسخ زمانی ارتعاشات مرکز تیر تحت عبور مجموعه ای از بارها در دو جهت مخالف برای نسبت های سرعت و فواصل مختلف بین بارها.



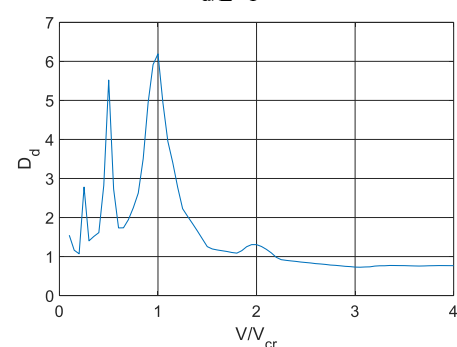
$d/L=0.25$



$d/L=0.5$



$d/L=1$

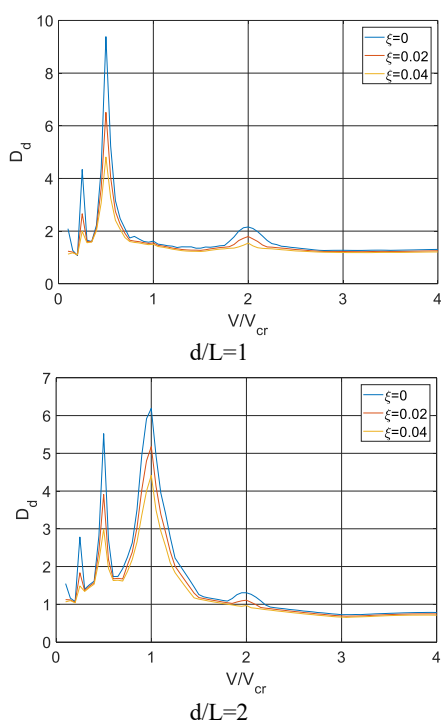


$d/L=2$

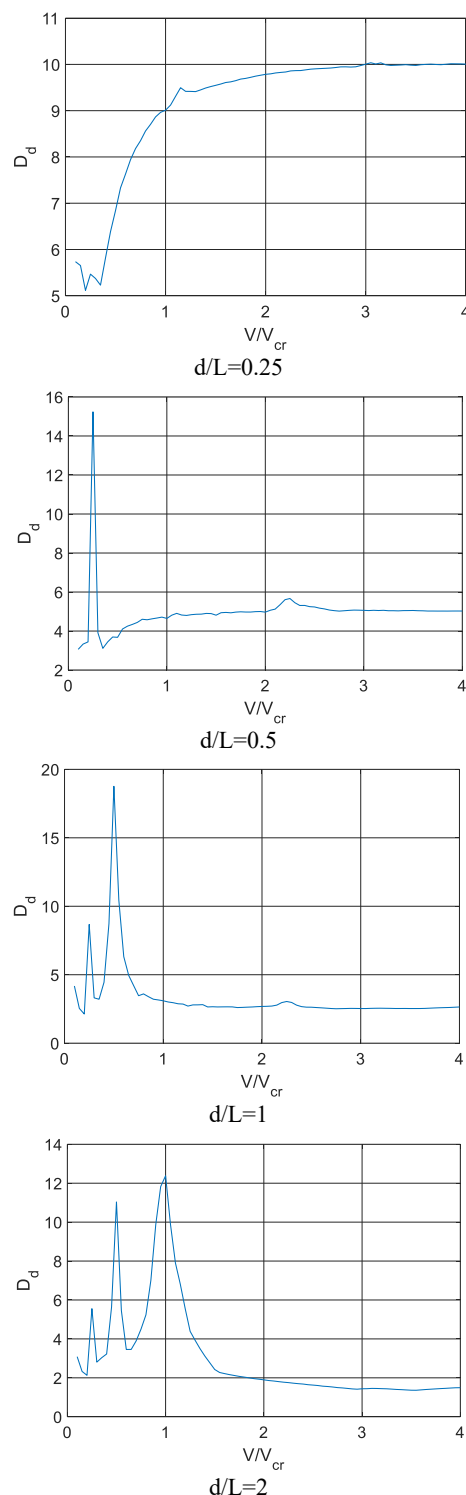
شکل ۹- تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی با نسبت سرعت بار در یک تیر تحت عبور مجموعه ای از بارها در یک جهت.

۵-۳- بررسی اثر میرایی

همان طور که گفته شد، وجود میرایی باعث کاهش دامنه ارتعاشات به خصوص در زمان روزنانس می شود. به منظور بررسی حساسیت سیستم به مقدار میرایی سازه ای و تاثیر آن بر دامنه ارتعاشات یک تیر تحت عبور بار، در شکل ۱۲ نمودار ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای حالت عبور مجموعه ای از بارها در یک جهت و برای مقادیر مختلف نسبت میرایی رسم شده است. بر اساس این شکل، با افزایش میرایی، ماکزیمم دامنه ارتعاشات تیر کاهش پیدا می کند، اما موقعیت این نقاط ماکزیمم تغییر نمی کند و بنابراین در حالت وجود میرایی نیز رابطه (۲۰) برقرار هست. همچنین در شکل ۱۳ نمودار پاسخ زمانی ارتعاشات مرکز تیر برای یکی از حالت های وقوع تشدید در حضور میرایی رسم شده است. در این شکل نیز تاثیر وجود میرایی و افزایش مقدار آن بر کاهش دامنه ارتعاشات تیر قابل مشاهده است.



شکل ۱۲- تاثیر نسبت میرایی بر ضریب بزرگنمایی دینامیکی در یک تیر تحت عبور مجموعه ای از بارها در یک جهت.



شکل ۱۱- تغییرات ضریب بزرگنمایی دینامیکی با نسبت سرعت بار در یک تیر تحت عبور مجموعه ای از بارها در دو جهت مخالف.

که بیانگر آن است که در سرعت های بالا، تنها مودهای مرتبه پایین تر برانگیخته می شوند.

۲- در حالت عبور یک بار از روی تیر، ضریب بزرگنمایی دینامیکی در نسبت $v/v_{cr} = 0.6170$ به بیشینه مقدار خود رسیده و پس از آن کاهش می یابد.

۳- در حالت عبور یک بار منفرد، برای سرعت های بیشتر از سرعت بحرانی، بیشترین جابجایی در تیر پس از خروج بار اتفاق می افتد، در حالی که برای سرعت های کمتر از سرعت بحرانی، بیشترین جابجایی همواره در حین عبور بار اتفاق خواهد افتاد.

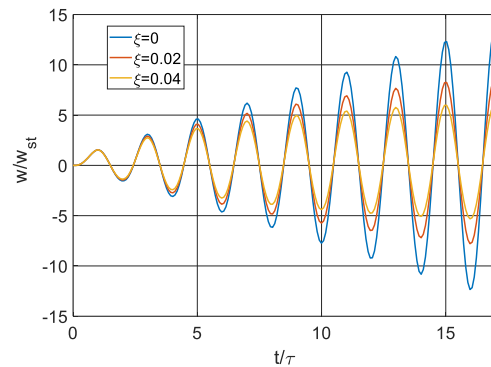
۴- در حالت عبور مجموعه ای از بارها از روی تیر، به ازای مقادیر مشخصی از نسبت سرعت و نسبت فاصله بین بارها به صورت $\frac{d}{L} = 2n \frac{v}{v_{cr}}, n = 1, 2, 3, \dots$ ، به دلیل تحریک مدهای طبیعی تیر، دامنه ارتعاشات افزایش زیادی پیدا می کند که می تواند باعث تهدید سلامت سازه شود.

۵- در حالت عبور مجموعه ای از بارها در دو جهت مخالف هم، پاسخ ارتعاشی تیر مشابه با حالت حرکت در یک جهت بوده، با این تفاوت که دامنه ارتعاشات بیشتر می باشد، چرا که در این حالت انرژی بیشتری به تیر منتقل می شود.

۶- وجود میرایی باعث کاهش دامنه ارتعاشات و کاهش ماکزیمم تغییر شکل مرکز تیر در حین عبور بار به خصوص در شرایط تشدید می شود، اما باعث جابجایی نقاط ایجاد تشدید (نقاط پیک منحنی) نمی شود.

مراجع

- [1] L. Frýba, Vibration of solids and structures under moving loads, Noordhoff International, Groningen, 1972.
- [2] Y.H. Lin, M.W. Trethewey, Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads, J. Sound Vib., 136(2), 323-342.
- [3] M.H. Kadivar, S.R. Mohebpour, Finite element dynamic analysis of unsymmetric composite laminated beams with shear effect and rotary inertia under the action of moving loads, Finite Elem. Anal. Des., 29 (1998) 259-273.
- [4] L. Kwasniewski, H. Li, J. Wekezer, J. Malachowski, Finite element analysis of vehicle-bridge interaction, Finite Elem. Anal. Des., 42 (2006) 950-959.



شکل ۱۳- مقایسه پاسخ زمانی ارتعاشات مرکز تیر برای مقادیر مختلف نسبت میرایی در حالت $v/v_{cr} = 1$ و $d/L = 2$.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی ارتعاشات تیر با شرایط مرزی ساده تحت عبور مجموعه ای از بارهای در حال حرکت با سرعت و فواصل یکسان در یک جهت و دو جهت مخالف هم پرداخته شد. بدین منظور از تئوری تیر اویلر-برنولی که در آن تاثیر تغییر شکل برشی بر جابجایی تیر لحاظ نمی شود، استفاده شد و خواص تیر و نیز سطح مقطع آن در طول تیر به صورت ثابت در نظر گرفته شد. همچنین رفتار بار عبوری به صورت یک نیروی متمرکز و بدون در نظر گرفتن تاثیر جرم و در نتیجه برهم کنش بار و تیر مدلسازی شد. بر اساس این فرضیات، معادله حاکم بر ارتعاشات تیر تحت عبور بار به صورت تحلیلی حل شده و شرایط اولیه تیر در دو حالت بار در حال حرکت روی تیر و خروج بار از روی تیر استخراج شده و برای محاسبه پاسخ ارتعاشی مورد استفاده قرار گرفت. هدف اصلی از این پژوهش، بررسی رفتار تیر در حین و بعد از عبور بارها از روی تیر بود. بدین منظور ابتدا معادلات حاکم برای حالت عبور یک بار منفرد مورد تحلیل قرار گرفت و سپس حل حاصل به حالت عبور مجموعه ای از بارها تعمیم داده شد.

مهمترین نتایج بدست آمده را می توان به صورت زیر ارائه کرد:

۱- با بررسی همگرایی پاسخ ارتعاشی با افزایش تعداد مدهای در نظر گرفته شده در حل، مشاهده می شود که مدهای پادمتقارن ($n = 2, 4, 6, 8, 10$) به دلیل اینکه توسط بار متحرک برانگیخته نمی شوند، تاثیری در پاسخ نهایی ندارند. همچنین با افزایش سرعت بار، پاسخ با سرعت بیشتری همگرا می شود؛

- [18] X. Zhang, D. Thompson, X. Sheng, Differences between Euler-Bernoulli and Timoshenko beam formulations for calculating the effects of moving loads on a periodically supported beam, *J. Sound Vib.*, 481 (2020) 115432.
- [19] S. Sobhanirad, B. Hassani, Investigation of cancellation and maximum of resonance in multi-span railway beam bridges with unequal lengths under moving loads, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 46, (۲۰۲۴).
- [20] S. Sobhanirad, B. Hassani, Vibration analysis of multi-span continuous beam bridges with unequal spans subjected to moving loads, *Int. J. Dyn. Control*, 12 (2023) 945-958.
- [21] M. Şimşek, Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories, *Compos. Struct.*, 92 (2010) 904-917.
- [22] L.T. Ha, N.D. Kien, V.T. Anh, Dynamic behavior of nonuniform functionally graded Euler-Bernoulli beams under multiple moving forces, *Vietnam Journal of Mechanics*, 37.3 (2015): 151-168.
- [۲۳] فروغی، صفرپور، مهران، ع. بیگلر، مطالعه پارامتریک ارتعاشات وابسته به اندازه تیرهای مدرج محوری رایلی تحت یک بار متحرک بر روی بستر پاسترناک، نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، ۵۳ (۲۰۲۱) ۲۱۷۱-۲۱۹۲.
- [24] A. Ariaei, S. Ziaei-Rad, M. Ghayour, Transverse vibration of a multiple-Timoshenko beam system with intermediate elastic connections due to a moving load, *Arch. Appl. Mech.*, 81 (2010) 263-281.
- [۲۵] فروزنده، آریایی، تحلیل ارتعاشات مجموعه‌ای از چند تیر تیموشنکو موازی با اتصالات انعطاف پذیر میانی تحت عبور جرم متحرک، مکانیک سازه ها و شاره ها، ۶ (۲۰۱۶) ۶۹-۸۶.
- [26] Z. Lai, L. Jiang, W. Zhou, S. Natarajan, An Analytical Study on Dynamic Response of Multiple Simply Supported Beam System Subjected to Moving Loads, *Shock Vib.*, 2018.1 (2018): 2149251.
- [27] A. Di Matteo, Dynamic response of beams excited by moving oscillators: Approximate analytical solutions for general boundary conditions, *Computers & Structures*, 280 (2023) 106989.
- [28] M.J. Rezvanil, M.H. Kargarnovin, D. Younesian, Dynamic analysis of composite beam subjected to harmonic moving load based on the third-order shear deformation theory, *Front. Mech. Eng.*, 6 (2011) 409-418.
- [5] X. Lu, C.-W. Kim, K.-C. Chang, Finite Element Analysis Framework for Dynamic Vehicle-Bridge Interaction System Based on ABAQUS, *International Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 20 (2020) 2050034.
- [6] H.A.F.A. Santos, A new finite element formulation for the dynamic analysis of beams under moving loads, *Computers & Structures*, 298 (2024): 107347.
- [۷] و. حمیدرضا، م.م. رضا، ا. فریدون، ع.ن. آرمین، مدلسازی ارتعاش تیر مدل ریل راه آهن تحت اثر بار متحرک باکمک و معرفی مدل جدید ماکرو المان متحرک، نشریه مهندسی سازه و ساخت، ۱۱ (۲۰۲۳) ۱۱۸-۱۳۷.
- [8] M.A. Hilal, H.S. Zibdeh, Vibration analysis of beams with general boundary conditions traversed by a moving force, *J. Sound Vib.*, 229 (2000) 377-388.
- [9] Y.A. Dugush, M. Eisenberger, Vibrations of Non-Uniform Continuous Beams under Moving Loads, *J. Sound Vib.*, 254.5 (2002): 911-926.
- [10] G. Piccardo, F. Tubino, Dynamic response of Euler-Bernoulli beams to resonant harmonic moving loads, *Struct. Eng. Mech.*, 44 (2012) 681-704.
- [11] D.Y. Zheng, Y.K. Cheung, F.T.K. Au, Y.S. Cheng, Vibration of multi-span non-uniform beams under moving loads by using modified beam vibration functions, *J. Sound Vib.*, 212 (1998) 455-467.
- [12] Y.K. Cheung, F.T.K. Au, D.Y. Zheng, Y.S. Cheng, Vibration of multi-span non-uniform bridges under moving vehicles and trains by using modified beam vibration functions, *J. Sound Vib.*, 228 (1999) 611-628.
- [13] Y. Wang, X. Zhu, Z. Lou, Dynamic response of beams under moving loads with finite deformation, *Nonlinear Dyn.*, 98 (2019) 167-184.
- [۱۴] پ. مصطفی، تحلیل پایداری دینامیکی ارتعاشات عرضی تیر تحت عبور متوالی جرم‌های متحرک، شبیه سازی و تحلیل تکنولوژی های نوین در مهندسی مکانیک (مهندسی مکانیک جامدات)، ۱ (۲۰۱۵) ۴۱-۴۹.
- [15] D. Thambiratnam, Y. Zhuge, Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads, *J. Sound Vib.*, 198 (1996) 149-169.
- [16] C. Johansson, C. Pacoste, R. Karoumi, Closed-form solution for the mode superposition analysis of the vibration in multi-span beam bridges caused by concentrated moving loads, *Computers & Structures*, 119 (2013) 85-94.
- [17] G. Migliaccio, M. Ferretti, S. Di Nino, A. Luongo, Analytical prediction of the dynamics of beams under traveling loads and external resonance phenomena, *J. Sound Vib.*, 593 (2024) 118656.

- [33] Q. Li, M. Zhou, Resonance and cancellation in vibration of girder bridges with corrugated steel webs under moving train loads, Structures, Elsevier, 2025, pp. 108425.
- [34] J. Ma, H. Yang, C. Wang, F. Liu, D. Li, L. Wang, Vibration analysis of a finite-length beam on a modified Winkler foundation under arbitrary moving masses, International Int. J. Struct. Stab. Dyn., 26 (2026) 2650162.
- [35] M. Olsson, On the fundamental moving load problem, J. Sound Vib., 145 (1991) 299-307.
- [36] Y.-B. Yang, J.-D. Yau, L.-C. Hsu, Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds, Eng. Struct., 19 (1997) 936-944.
- [29] M.A. Foda, Z. Abduljabbar, A dynamic green function formulation for the response of a beam structure to a moving mass, J. Sound Vib., 210 (1998) 295-306.
- [30] G. Visweswara Rao, Linear dynamics of an elastic beam under moving loads, J. Vib. Acoust., 122 (2000) 281-289.
- [31] C. Liu, Forced vibration analysis of thin-walled beams under harmonic moving loads, J. Comput. Methods Sci. Eng., (2025): 14727978251364449.
- [32] R. AlSaleh, A. Nasir, N. Atieh, Vibration response of Euler-Bernoulli-damped beam with appendages subjected to a moving mass, Earthquake Eng. Eng. Vibr., 24 (2025) 223-234.