



تحلیل برداشت انرژی از ارتعاشات تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی به کمک تئوری مرتبه بالا

کاوه صبری لقای^۱، کرامت ملک‌زاده فرد^{۲*}، سعید شکراللهی^۳^۱ دانشجوی دکتری، مجتمع هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.^۲ استاد، مجتمع هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.^۳ دانشیار، مجتمع هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران.

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۸/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۹/۲۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۴/۱۶

چکیده

در این مطالعه، رفتار یک تیر ساندویچی یک‌سرگیردار مجهز به لایه‌ی پیزوالکتریک به‌عنوان برداشت‌کننده‌ی انرژی ارتعاشی مورد تحلیل قرار گرفته است. هدف مطالعه، بررسی تأثیر نحوه‌ی چیدمان لایه‌های کامپوزیتی، تغییر پارامترهای هندسی و مکانیکی و ملاحظات مدل‌سازی بر میزان توان برداشت‌شده و بازدهی سیستم است. مدل‌سازی تیر با بهره‌گیری از نظریه‌های برشی مرتبه‌بالا و روش اجزاء محدود انجام شده و ضمن اعمال اثر ضریب پواسون در رویه‌های کامپوزیتی، اثر کرنش راستای ضخامت هسته و پدیده‌ی قفل برشی نیز به‌دقت بررسی شدند. دو پیکربندی مختلف از لایه‌های کامپوزیت شامل پوشش کامل و پوشش محدود سطح تیر بررسی گردید. نتایج عددی نشان داد که وجود لایه‌ی کامپوزیتی موجب افزایش ولتاژ خروجی و بهبود عملکرد برداشت‌کننده می‌شود. همچنین، مدل مرتبه‌بالا امکان تحلیل دقیق‌تر اثر ضخامت هسته و زوایای الیاف را فراهم ساخت. بررسی پارامترهایی نظیر ضخامت هسته، طول جرم متمرکز و جهت الیاف نشان داد که این عوامل نقش مؤثری در تنظیم فرکانس طبیعی و افزایش بازدهی انرژی دارند. همچنین یافته‌ها بر اهمیت استفاده از مدل‌های دقیق‌تر و مقاوم در برابر قفل برشی در طراحی برداشت‌کننده‌های ارتعاشی ساندویچی به خصوص در ضخامت‌های زیاد تأکید می‌کند.

کلمات کلیدی: برداشت انرژی؛ تیر ساندویچی؛ رویه‌ی کامپوزیتی؛ تئوری مرتبه بالا؛ کرنش راستای ضخامت؛ قفل برشی.

High-Order Analysis of Vibration Energy Harvesting from Sandwich Beams with Composite Face Sheets

K. Sabri Laghaie¹, K. Malekzadeh Fard^{2,*}, S. Shokrollahi³¹ Ph.D. Student, Faculty of Aerospace, Malek Ashtar University of technology, Tehran, Iran.² Prof., Faculty of Aerospace, Malek Ashtar University of technology, Tehran, Iran.³ Assoc. Prof., Faculty of Aerospace, Malek Ashtar University of technology, Tehran, Iran.

Abstract

In this study, the behavior of a cantilevered sandwich beam equipped with a piezoelectric layer is analyzed as a vibration energy harvester. The aim is to investigate the influence of composite layer configurations, variations in geometric and mechanical parameters, and modeling considerations on the harvested power and overall efficiency of the system. The beam was modeled using higher-order shear deformation theories and the finite element method. The effects of Poisson's ratio in the composite face sheets, the core's through-thickness strain, and the shear locking phenomenon were all carefully examined. Two different configurations of the composite layers-full and partial surface coverage-were considered. Numerical results revealed that the presence of composite layers enhances the output voltage and improves the performance of the harvester. Moreover, the higher-order model enabled a more accurate analysis of the effects of core thickness and fiber orientation. Parametric studies on the core thickness, tip mass length, and fiber orientation demonstrated that these factors play a significant role in tuning the natural frequency and improving energy efficiency. The findings further emphasize the importance of employing more precise and shear-locking-resistant models in the design of sandwich-type vibration energy harvesters, particularly for structures with substantial thickness.

Keywords: Energy harvesting; Sandwich beam; Composite surface; Higher-order theory; Through thickness strain; Shear locking

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، با توسعه سریع سامانه‌ها و سازه‌های هوشمند، استفاده از حسگرهای بی‌سیم به منظور پایش سلامت سازه‌ها و دستگاه‌های الکترونیکی کم‌مصرف به‌طور چشم‌گیری افزایش یافته است [۱]. این تجهیزات عموماً با باتری‌های شیمیایی تغذیه می‌شوند که نیازمند تعویض دوره‌ای هستند و این امر هزینه‌های نگهداری قابل توجهی به همراه دارد. علاوه بر این، باتری‌های شیمیایی در مقادیر زیاد معمولاً مواد سمی تولید کرده و موجب آلودگی محیط‌زیست می‌شوند. به همین دلیل، استحصال انرژی از ارتعاشات سازه‌ای یا سایر منابع انرژی محیطی به‌عنوان جایگزینی پایدار برای باتری‌های شیمیایی مطرح شده است. در این میان، برداشت‌کننده‌های انرژی پیزوالکتریک به دلیل عدم آلودگی و تراکم توان بالاتر نسبت به سایر مکانیزم‌های تبدیل ارتعاش به الکتریسیته [۲]، توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. مواد پیزوالکتریک به دلیل خاصیت ذاتی خود قادر هستند در پاسخ به کرنش مکانیکی، انرژی الکتریکی تولید کنند [۳]. معمولاً لایه‌ای از این مواد بر سطح اجسام در حال ارتعاش مانند تیرها، صفحات، پل‌ها، ساختمان‌ها یا تجهیزات و ماشین‌آلات مکانیکی چسبانده می‌شود. هنگامی که این اجسام تحت تحریکات خارجی نظیر بارگذاری‌ها [۴]، زلزله‌ها [۵] یا ارتعاش ناشی از موتورها [۶] قرار می‌گیرند، تغییر شکل در لایه‌ی پیزوالکتریک ایجاد شده و امکان استحصال انرژی مفید از ارتعاشات سازه یا دستگاه مکانیکی فراهم می‌شود.

با این حال، اغلب برداشت‌کننده‌های پیزوالکتریکی طراحی خطی داشته و تنها در نزدیکی فرکانس تشدید توان مؤثر تولید می‌کنند، در حالی که بسیاری از دستگاه‌های مکانیکی ارتعاشاتی در محدوده فرکانسی پایین (۱۰ تا ۲۰۰ هرتز) و به صورت گسترده در یک بازه فرکانسی ایجاد می‌نمایند [۱]. از این رو، افزایش توان خروجی در فرکانس‌های پایین و گسترش پهنای باند برداشت‌کننده‌های پیزوالکتریک دو چالش اساسی در مسیر کاربردی‌سازی این فناوری محسوب می‌شوند [۱]. تاکنون محققان ساختارهای متنوعی از برداشت‌کننده‌های پیزوالکتریکی ارائه داده و با روش‌های تحلیلی، عددی یا تجربی به مطالعه پرداخته‌اند. یکی از این ساختارها استفاده از ساختار ساندویچی در تیر برداشت‌کننده انرژی می‌باشد. در این زمینه می‌توان به مطالعه‌ی لی و

همکاران [۷] اشاره نمود که یک طراحی بهینه برای برداشت‌گر انرژی پیزوالکتریک انعطاف‌پذیر با ساختار لایه‌ای-ساندویچی ارائه کرده‌اند که در آن، به‌جای زیرلایه‌ی سخت مرسوم، از زیرلایه‌ی نرم با مدول یانگ بهینه استفاده شده است. آنان با به‌کارگیری مدل تیر لایه‌ای-ساندویچی شامل اثرات خمش، برش و کوپل یک‌طرفه‌ی پیزوالکتریک، مدلی تئوریک برای طراحی بهینه توسعه داده‌اند. نتایج نشان داد که این طراحی جدید منجر به ۳۳٪ افزایش چگالی انرژی سطحی، ۵۱٪ کاهش سختی مکانیکی و ۱۷۷٪ افزایش بازده انرژی نسبت به ساختارهای سنتی می‌شود. در مطالعه‌ی دیگری لی ژانگ و همکاران [۸] یک مبدل انرژی پیزوالکتریک ساندویچی چندشاخه معرفی کرده‌اند که با افزودن شاخه‌های فرعی و جرم‌های نوک‌دار به تیر اصلی ساندویچی، امکان ایجاد چندین فرکانس تشدید و برداشت انرژی از ارتعاشات کم‌دامنه و کم‌فرکانس محیطی را فراهم می‌کند. آن‌ها ابتدا مدل ریاضی و معادلات کوپل الکترومکانیکی سامانه را توسعه دادند و سپس نمونه‌ی آزمایشگاهی با دو شاخه‌ی داخلی ساختند و تحت ارتعاش هارمونیک مورد آزمون قرار دادند. نتایج نشان داد این طراحی جدید با دقت بالا در مقایسه با شبیه‌سازی اجزای محدود و داده‌های تجربی، توانست ولتاژ خروجی قابل توجهی در چندین فرکانس تشدید مختلف تولید کند. آرانی و همکاران [۹] به مطالعه استحصال انرژی از تیرهای ساندویچی پرداختند که هسته آن‌ها از جنس کامپوزیت و رویه‌ها از صفحات پیزوالکتریک تشکیل شده‌اند. ژانگ یانگ و همکاران [۱۰] نیز برداشت‌کننده‌های ساندویچی پیزوالکتریک را به‌صورت تحلیلی و تجربی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها به جای استفاده از زیرلایه‌های معمولی، از یک زیرلایه ساندویچی بهره بردند که این امر علاوه بر کاهش فرکانس تشدید، امکان افزایش ولتاژ خروجی را با تنظیم پارامترهای هندسی و موادی فراهم می‌کند. خورشیدی و همکاران [۱۰] به مطالعه‌ی تئوری برداشت‌کننده‌ی پیزوالکتریک ساخته شده از صفحه‌ی ساندویچی لانه زنبوری پرداختند. صفحه ساندویچی با هسته‌ی لانه زنبوری و صفحات تقویت شده با نانولوله کربن مدلسازی شدند. نتایج آن‌ها نشان داد این برداشت‌کننده به دلیل انعطاف‌پذیری بالا عملکرد بهتری دارد. دائو و همکاران [۱۱] یک حل تحلیلی بسته برای برداشت انرژی از تیر

این کار، یک تیر یک-سرگردار بایمورف تحت تحریک پایه مدل سازی شده و با تغییر متغیرهای هندسی، بیشینه‌ی توان خروجی برداشت شد. حسینی و همکاران [۱۷] تأثیر شکل و ابعاد هندسی تیر یک-سرگردار دولایه‌ی پیزوالکتریک را بر کارایی الکترومکانیکی یک برداشت کننده انرژی بررسی کردند و برای این منظور یک مدل تحلیلی مبتنی بر تقریب رابلی-ریتز ارائه دادند. همچنین فلاح و عرب‌ملکی [۱۸] برداشت انرژی از یک تیر بایمورف متخلخل پوشیده شده با لایه‌ی پیزوالکتریک را که تحت ارتعاشات ناشی از جریان سیال خارجی قرار داشت، بررسی کردند. در این مطالعه، معادلات الکترومکانیکی بر پایه‌ی تئوری تیر اوایلر-برنولی استخراج شده و اثر پارامترهای مختلف بر پاسخ یک تیر متخلخل یک-سرگردار با جرم متمرکز در انتها تحلیل گردید.

در حوزه‌ی به کارگیری تئوری‌های مرتبه بالا در تیرهای ساندویچی نیز مطالعات قابل توجهی انجام شده است. به عنوان نمونه، ملک‌زاده و همکاران [۱۹] با بهره‌گیری از تئوری مرتبه بالای بهبود یافته، پاسخ دینامیکی ناشی از ضربه‌ی کم-سرعت در تیرهای ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی را بررسی کردند. همچنین محمودخانی و لقایی [۲۰] به بررسی فلاتر پانل‌های ساندویچی دارای لایه ویسکوالاستیک مقید شده پرداختند. در این پژوهش، هسته با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی مدل سازی شد که امکان در نظر گرفتن تغییر شکل‌ها و کرنش در راستای ضخامت را فراهم می‌کند. معادلات حاکم پس از گسسته سازی به کمک روش اجزای محدود استخراج شده و از توابع درونیاب هرمیتی برای مدل سازی نقص‌های هندسی استفاده گردید. در ادامه، واحدی و محمودخانی [۲۱] عملکرد یک جاذب ارتعاشی ساخته شده از تیر خمیده ساندویچی همراه با جرم صلب را تحلیل نمودند؛ در این مدل، رویه‌ها با تئوری اوایلر-برنولی و هسته با تئوری مرتبه بالای برشی در نظر گرفته شد. افزون بر این، در برخی از پژوهش‌ها اثر ضربه پواسون نیز به طور ویژه مورد توجه قرار گرفته است. بیگلری و همکاران [۲۲] در پژوهش خود به تحلیل پاسخ استاتیکی تیرهای هوشمند مجهز به پیچ‌های پیزوالکتریک با هدف استفاده در عملگرها پرداختند و تأثیر ضربه پواسون را مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه، پارامترهایی نظیر طول عملگرها، محل قرارگیری پیزوالکتریک‌ها، مرتبه تئوری، زاویه الیاف، شرایط مرزی و

ساندویچی مجهز به لایه پیزوالکتریک تحت بارگذاری دینامیکی ارائه کرده‌اند که در آن اثرات تغییر شکل برشی مرتبه بالا لحاظ شده است. نتایج نشان می‌دهد شرایط بارگذاری و ابعاد هندسی تیر نقش مهمی در ولتاژ و بازده برداشت انرژی دارند. در مطالعه‌ی ژیانگ و همکاران [۱۲] یک برداشت کننده انرژی پیزوالکتریک مبتنی بر تیر ساندویچی با تکیه گاه‌های الاستیک دوره‌ای معرفی شده است که به طور هم‌زمان برداشت انرژی و کاهش ارتعاش را بهبود می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد این ساختار نسبت به تیرهای پیزوالکتریک معمولی، ولتاژ، توان خروجی و پهنای باند فرکانسی بزرگ‌تری دارد.

لومنتوت و فریزول [۱۳] یک مدل الکترومکانیکی برای دینامیک یک برداشت کننده لوله‌ای شکل که به صورت موضعی توسط پیزوالکتریک پوشانده شده و تحت ارتعاشات ناشی از تحریک پایه و عبور جریان هوا از درون لوله قرار دارد، ارائه کردند. این برداشت کننده جهت برقرسانی به سنسورهای پایش سلامت مدنظر قرار گرفته است که می‌تواند برای تشخیص وضعیت فلاتر مورد استفاده قرار گیرد. معادلات کوپل شده کامل شامل سازه، سیال، الکترومکانیکی و سیستم الکتریکی (مدار یکسوکننده) با استفاده از اصل همپلتون بدست آمدند. در انتها اثر پارامترهای مختلف مانند سرعت سیال بر توان بهینه خروجی، پاسخ فرکانسی و برق خروجی مستقیم (DC) بررسی شدند.

کیانپور و جهانی [۱۴] تیرهای پیزوالکتریک ساندویچی دوزنقه‌ای با جرم انتهایی تحت تحریک پایه را مدل سازی کرده و هندسه آن را با الگوریتم ژنتیک بهینه کردند. نتایج نشان داد این تیر بهینه قادر به تولید توان ۱٫۳ میلی‌وات در فرکانس ۵۰ هرتز بوده و دقت مدل تحلیلی نیز با شبیه سازی اجزای محدود قابل تأیید است. محمدکریمی و همکاران [۱۵] به صورت تجربی به بررسی برداشت انرژی پیزوالکتریک ناشی از پدیده فلاتر پرداختند. در پژوهش آن‌ها، از یک تیر یک سرگردار استفاده شد که در انتهای آزاد آن یک سطح برآزا و در انتهای گیردار آن یک پیچ پیزوالکتریک بایمورف نصب شده بود؛ به این ترتیب، مدل مورد استفاده دارای دو درجه آزادی خمشی و پیچشی بود. در مطالعه‌ای دیگر، عاروان و همکاران [۱۶] به بهینه سازی شکل تیر تک لایه‌ی پیزوالکتریک به عنوان یک برداشت کننده انرژی پرداختند. در

ضریب پواسون مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان داد که عدم لحاظ اثر ضریب پواسون در مود کششی، منجر به خطای قابل توجهی در پاسخ الاستاتیکی تیر چندلایه زاویه‌دار می‌شود. بیگلری و ستاری [۲۳] با به کارگیری حل دقیق، اثر تورق را بر ارتعاش آزاد تیرهای کامپوزیتی بررسی کردند. در مدل سازی تیر، آن‌ها اثر اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی جانبی و ضریب پواسون را لحاظ نمودند. نتایج نشان داد که تأثیر ضریب پواسون بر فرکانس‌های تیرهای چندلایه متعامد کم است، اما عدم لحاظ آن در تیرهای چندلایه زاویه‌دار باعث ایجاد خطای قابل توجهی می‌شود.

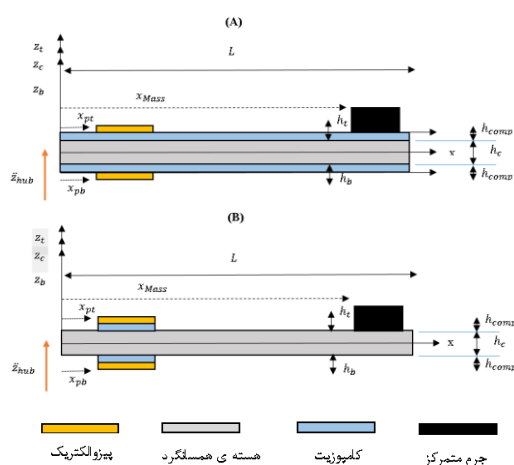
با وجود مطالعات گسترده در زمینه برداشت‌کننده‌های انرژی پیزوالکتریکی با ساختارهای متنوع، استفاده از رویه‌های کامپوزیتی در سازه‌های ساندویچی، به‌ویژه با پوشش‌های موضعی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. همچنین در اغلب پژوهش‌ها، از مدل‌های مرتبه پایین استفاده شده و اثرات مهمی نظیر کرنش در راستای ضخامت هسته، پدیده قفل برشی در روش اجزای محدود، اثر ضریب پواسون رویه‌های کامپوزیتی و نقش طول جرم متمرکز انتهایی به‌صورت دقیق لحاظ نشده‌اند.

بر این اساس، هدف اصلی و نوآوری‌های پژوهش حاضر توسعه یک مدل تحلیلی اجزای محدود مبتنی بر تئوری لایه‌ای مرتبه بالای برشی برای برداشت انرژی از تیرهای ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و جرم متمرکز است؛ به‌گونه‌ای که خلأهای ذکر شده در مدلسازی این حوزه پوشش داده شده و اثر هر یک از پارامترهای یادشده بر فرکانس تشدید و پاسخ الکترومکانیکی به‌صورت نظام‌مند بررسی گردد. این چارچوب همچنین امکان ساندویچی کردن سازه‌های موجود به‌منظور بهبود انطباق فرکانسی با تحریک محیطی و افزایش بازده برداشت انرژی را فراهم می‌کند. در این راستا، دو نوع سازه‌ی ساندویچی شامل پوشش سراسری و پوشش موضعی وصله‌های پیزوالکتریک در ساختار برداشت‌کننده مورد بررسی قرار گرفته است. روابط حاکم بر تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی و وصله‌های پیزوالکتریک با در نظرگیری کرنش‌های راستای ضخامت در هسته استخراج شده و روابط ساختاری رویه‌های کامپوزیتی نیز با لحاظ اثر ضریب پواسون به دست آمده است. برای مدلسازی تیر ساندویچی از تئوری‌های مرتبه‌ی بالا استفاده شده و

جابجایی‌های درون‌صفحه‌ای و برون‌صفحه‌ای به‌ترتیب با چندجمله‌ای‌های درجه‌ی سه و دو تقریب زده شده‌اند. همچنین با توجه به اینکه نتایج برای هسته‌های نسبتاً ضخیم نیز ارائه می‌شوند، به منظور افزایش دقت، کرنش برشی در هسته لحاظ شده و لایه‌های بالایی و پایینی بر اساس مدل اوپلر-برنولی مدل سازی گردیده‌اند. حل مسئله نیز با استفاده از روش اجزای محدود و المان‌های سه‌گره‌ای با رفع قفل برشی انجام شده و کلیه‌ی مراحل مدل‌سازی و تحلیل در محیط نرم‌افزار میپل کدنویسی شده‌اند.

۲- مدل سازی

در شکل ۱ مدل هندسی دو نوع تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی، وصله‌های پیزوالکتریک و جرم متمرکز نشان داده شده است. در این مدل L طول کل تیر، x_{Mass} فاصله جرم از مبدا، h_t ، h_c ، h_b و h_{comp} به ترتیب ضخامت کل رویه بالا، هسته، کل رویه پایین و فقط لایه کامپوزیت بوده و $\bar{z}$ نیز بیانگر شتاب ورودی به پایه تیر می‌باشد.



شکل ۱- پیکربندی (A) و (B)

۲-۱- روابط سینماتیک

طبق نظریه مرتبه بالا که در مرجع [۲۴] معرفی شده است، برای لایه میانی جابجایی‌های محوری (درون صفحه‌ای u) و عرضی (خارج صفحه‌ای w) به‌ترتیب به صورت چند جمله‌ای‌های مرتبه ۳ و ۲ در نظر گرفته شده‌اند (رابطه (۱)).

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z u_1 + z^2 u_2 + z^3 u_3 \\ w &= w_0 + z w_1 + z^2 w_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} + z^2\varepsilon_{xx}^{(2)} + z^3\varepsilon_{xx}^{(3)}, \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zz}^{(0)} + z\varepsilon_{zz}^{(1)}, \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{xz}^{(0)} + z\varepsilon_{xz}^{(1)} + z^2\varepsilon_{xz}^{(2)},\end{aligned}\quad (6)$$

که در رابطه (۶) ضرایب $z^{0,1,2,3}$ کرنش‌هایی بدون وابستگی به z هستند و به صورت رابطه (۷) بر حسب عبارت‌های جابجایی تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \varepsilon_{xx}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \varepsilon_{xx}^3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \varepsilon_{zz}^0 &= w_1, \varepsilon_{zz}^1 = 2w_2, \varepsilon_{zz}^2 = 0, \varepsilon_{zz}^3 = 0 \\ \varepsilon_{xz}^0 &= u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \varepsilon_{xz}^1 = 2u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \varepsilon_{xz}^2 &= 3u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x}\end{aligned}\quad (7)$$

به‌طور مشابه با جای‌گذاری میدان‌های جابجایی ارائه شده رابطه (۲) در رابطه (۵) کرنش‌های نرمال در راستای محور x برای لایه بالا و پایین مطابق با رابطه (۸) به‌دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{xx}^i = \varepsilon_{xx}^{i0} + z\varepsilon_{xx}^{i1} \quad i: t, b \quad (8)$$

که در رابطه (۸) ε_{xx}^{i0} و ε_{xx}^{i1} به صورت رابطه (۹) تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon_{xx}^{i0} = \frac{\partial u_{i0}}{\partial x}, \varepsilon_{xx}^{i1} = -\frac{\partial^2 w_{i0}}{\partial x^2} \quad i: t, b \quad (9)$$

۲-۲- روابط ساختاری

مطابق با رابطه تنش-کرنش هوک برای سه بعد و با توجه به این که برای یک تیر تنش نرمال در راستای محور y برابر صفر می‌باشد، روابط ساختاری برای هسته به صورت رابطه (۱۰) ارائه می‌شود [۲۵].

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}], \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{zz}] = 0, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}], \\ \sigma_{xz} &= G\varepsilon_{xz}\end{aligned}\quad (10)$$

در رابطه (۱۰) با صفر قرار دادن σ_{yy} و بدست آمدن ε_{yy} بر حسب ε_{xx} و ε_{zz} و سپس قرار دادن در رابطه‌ی اول و سوم خواهیم داشت:

همچنین جابجایی‌های محوری و عرضی برای لایه‌های بالا و پایین، طبق رابطه (۲) بیان می‌شوند:

$$u_m = u_{m0} - z_m \frac{\partial w_m}{\partial x_m}, w_m = w_{m0}, \quad m: t, b \quad (2)$$

که در رابطه (۲) t و b به ترتیب بیانگر لایه بالا و پایینی می‌باشند. همچنین به‌منظور برقراری فرض عدم لغزش بین لایه‌ها و شرط پیوستگی جابجایی‌ها، نیاز است تا جابجایی‌ها در فصل مشترک هسته و رویه‌ها مطابق با رابطه (۳) برابر نهاده شوند:

$$\begin{aligned}u_t\left(z = -\frac{h_t}{2}\right) &= u_c\left(z = +\frac{h_c}{2}\right) \\ u_b\left(z = +\frac{h_b}{2}\right) &= u_c\left(z = -\frac{h_c}{2}\right) \\ w_t\left(z = -\frac{h_t}{2}\right) &= w_c\left(z = +\frac{h_c}{2}\right) \\ w_b\left(z = +\frac{h_b}{2}\right) &= w_c\left(z = -\frac{h_c}{2}\right).\end{aligned}\quad (3)$$

با حل چهار معادله جبری حاصل از رابطه (۳) مجهولات جابجایی w_1, u_3, u_2 و w_2 بر حسب سایر متغیرهای جابجایی به‌دست می‌آیند (رابطه (۴)):

$$\begin{aligned}u_{c2} &= \frac{1}{h_{c2}} (h_t w_{t0,x} - h_b w_{b0,x} + 2u_{t0} + 2u_{b0} - 4u_{c0}), \\ u_{c3} &= \frac{1}{h_{c3}} (2h_t w_{t0,x} + 2h_b w_{b0,x} - 4h_c u_{c1} + 4u_{t0} - 4u_{b0}), \\ w_{c1} &= \frac{w_{t0} - w_{b0}}{h_c}, \\ w_{c2} &= \frac{2w_{t0} - 4w_{c0} + 2w_{b0}}{h_c^2}.\end{aligned}\quad (4)$$

بنابراین هفت متغیر جابجایی مستقل شامل جابجایی‌های $u_0, u_1, w_0, u_{t0}, u_{b0}, w_{t0}$ و w_{b0} باقی می‌مانند. در ادامه با استفاده از میدان‌های جابجایی، کرنش‌ها مطابق رابطه (۵) بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (5)$$

که در رابطه (۵) $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}$ و ε_{xz} به ترتیب کرنش‌های نرمال در راستای محور x, z و کرنش برشی هستند. در رابطه (۵) فرض بر آن است که کرنش‌ها و چرخش‌ها کوچک هستند و از عبارت‌های غیرخطی هندسی صرف‌نظر شده است. در ادامه با جای‌گذاری رابطه (۱) در رابطه (۵) داریم:

در نتیجه رابطه‌ی ساختاری برای هر لایه از کامپوزیت با وجود پیزوالکتریک نهفته به صورت رابطه (۱۷) نوشته خواهد شد:

$$\{T\} = [c]_k \{S\} - \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k E_k \quad (17)$$

$$D_k = \{e_{31} \quad e_{32} \quad 0\}_k \{S\} + \varepsilon_k E_k$$

که $[c]_k$ ماتریس سفتی در دستگاه اصلی مادی برای لایه‌ی k ام می‌باشد و میدان الکتریکی (E_z) به صورت شدت میدان الکتریکی در راستای محور z و برابر با ولتاژ (اختلاف پتانسیل) بر ضخامت پیزوالکتریک ($\phi / (h_p) -$) تعریف می‌گردد. جهت انتقال بردار تنش‌ها از دستگاه مادی (TL) به دستگاه (xy) مطابق مرجع [۲۶] از ماتریس انتقال $[R_T]_k$ مطابق رابطه (۱۸) استفاده خواهد شد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [R_T]_k^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix} = [R_T]_k^{-1} [c]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$= [R_T]_k^{-1} [c]_k [R_S]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

که در آن:

$$[R_S]_k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -\sin \theta_k \cos \theta_k \\ -2 \sin \theta_k \cos \theta_k & 2 \sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[R_T]_k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & 2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ -\sin \theta_k \cos \theta_k & \sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix}$$

در نتیجه رابطه‌ی ساختاری اول برای یک تک لایه در مختصات (xy) به صورت (۲۰) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \{T\}^{(xy)} &= [R_T]_k^{-1} \{T\}^{(LT)} \\ &= [R_T]_k^{-1} [c]_k [R_S]_k \{S\}^{(xy)} \\ &\quad - [R_T]_k^{-1} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k E_k \\ &= [Q]_k \{S\}^{(xy)} + [R_T]_k^{-1} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k \frac{\phi_k}{h_k} \end{aligned} \quad (20)$$

در نتیجه با به دست آمدن تنش‌ها منتجه‌های تنش نیز برای یک چند لایه به صورت رابطه (۲۱) نوشته خواهد شد:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1 - \nu^2)} [(\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{zz})], \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1 - \nu^2)} [(\varepsilon_{xx} \nu + \varepsilon_{zz})], \\ \sigma_{xz} &= G \varepsilon_{xz} \end{aligned} \quad (11)$$

با به دست آوردن روابط تنش برای هسته، منتجه‌های تنش مکانیکی را برای لایه هسته با جای گذاری روابط (۱۱) در (۱۲) می‌توان محاسبه نمود:

$$N_{\alpha\beta}^i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} z^i dz, i = 0, 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta: x, z \quad (12)$$

در ادامه روابط تنش-کرنش برای لایه پایین و بالا با فرض این که کرنش ε_{zz} برای هر دو لایه صفر است تعیین می‌گردد.

۲-۳- روابط ساختاری رویه‌ها با لایه‌ی پیزوالکتریک

روابط ساختاری برای مواد پیزوالکتریک در رابطه (۱۳) به صورت تنش برحسب میدان الکتریکی آورده شده است.

$$\begin{aligned} \{T\} &= [c^E] \{S\} - [e]^T \{E\} \\ \{D\} &= [e] \{S\} + [\varepsilon^S] \{E\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\{T\} = \{T_{11} \quad T_{22} \quad T_{33} \quad T_{23} \quad T_{13} \quad T_{12}\}^T \quad (14)$$

که در روابط (۱۳) و (۱۴) $\{T\}$ بردار تنش‌ها، $\{S\}$ بردار کرنش‌ها، $\{E\}$ بردار میدان الکتریکی و $\{D\}$ بردار جابجایی الکتریکی است. همچنین $[c^E]$ ماتریس سفتی، $[e]$ ماتریس ثوابت پیزوالکتریک و $[\varepsilon^S]$ ماتریس ثوابت دی الکتریک نام دارد. با توجه به این که لایه‌های بالا و پایین هردو از جنس کامپوزیت بوده که یک لایه از آن‌ها پیزوالکتریک است و با توجه به نازکی این دولایه روابط ساختاری طبق فرضیات اوایلر-برنولی استخراج می‌شوند. همچنین با توجه به این که میدان الکتریکی و جابجایی الکتریکی در جهت عمود بر صفحه‌ی میانی (جهت z) یکنواخت هستند و قطبیدگی تنها در جهت z است لذا این بردارها به این صورت تعریف می‌گردند:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_z \end{Bmatrix} \quad (15)$$

همچنین بردار تنش از ۶ مولفه به ۳ مولفه کاهش می‌یابد:

$$\{T\} = \{T_{11} \quad T_{22} \quad T_{12}\}^T \quad (16)$$

$$0 = (A_{12}\epsilon_{xx}^0 + A_{22}\epsilon_{yy}^0 + A_{26}\gamma_{xy}^0 + B_{12}\kappa_{xx} + B_{22}\kappa_{yy} + B_{26}\kappa_{xy}) + \int_{z_{k-1}}^{z_k} e_{32} \frac{\phi_k}{h_k} dz \quad (25)$$

$$0 = (A_{16}\epsilon_{xx}^0 + A_{26}\epsilon_{yy}^0 + A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{16}\kappa_{xx} + B_{26}\kappa_{yy} + B_{66}\kappa_{xy}) \quad (26)$$

$$M_{xx} = (B_{11}\epsilon_{xx}^0 + B_{12}\epsilon_{yy}^0 + B_{16}\gamma_{xy}^0 + D_{11}\kappa_{xx} + D_{12}\kappa_{yy} + D_{16}\kappa_{xy}) + \int_{z_{k-1}}^{z_k} z e_{31} \frac{\phi_k}{h_k} dz \quad (27)$$

$$0 = (B_{12}\epsilon_{xx}^0 + B_{22}\epsilon_{yy}^0 + B_{26}\gamma_{xy}^0 + D_{12}\kappa_{xx} + D_{22}\kappa_{yy} + D_{26}\kappa_{xy}) + \int_{z_{k-1}}^{z_k} z e_{32} \frac{\phi_k}{h_k} dz \quad (28)$$

$$0 = (B_{16}\epsilon_{xx}^0 + B_{26}\epsilon_{yy}^0 + B_{66}\gamma_{xy}^0 + D_{16}\kappa_{xx} + D_{26}\kappa_{yy} + D_{66}\kappa_{xy}) \quad (29)$$

حال با استفاده از معادلات (۲۵)، (۲۶)، (۲۸) و (۲۹) مقادیر ϵ_{xx}^0 ، ϵ_{yy}^0 ، γ_{xy}^0 ، κ_{xx} ، κ_{yy} و κ_{xy} را بر حسب محاسبه کرده و در نهایت با جاگذاری در (۲۴) و (۲۷) به معادلات (۳۰) خواهیم رسید.

$$\begin{aligned} N_{xx} &= (\bar{C}_1\epsilon_{xx}^0 + \bar{C}_2\kappa_{xx}) + F_1 \\ M_{xx} &= (\bar{C}_3\epsilon_{xx}^0 + \bar{C}_4\kappa_{xx}) + F_2 \end{aligned} \quad (30)$$

که F_1 و F_2 ناشی از کوپلینگ الکترومکانیکی است. به همین ترتیب با قرار دادن مقادیر ϵ_{yy}^0 ، γ_{xy}^0 ، κ_{yy} و κ_{xy} در رابطه ساختاری دوم ((۲۳)) این معادله نیز تنها بر حسب متغیرهای ϵ_{xx}^0 ، κ_{xx} و E_3 نوشته می‌شود:

$$D_3 = \bar{G}_1\epsilon_{xx}^0 + \bar{G}_2\kappa_{xx} + \bar{G}_3E_3 \quad (31)$$

که در آن شدت میدان الکتریکی E_3 برابر $voltage/(h_p)$ - بوده و ضرایب $\bar{C}_1$ ، $\bar{C}_2$ ، $\bar{C}_3$ ، $\bar{C}_4$ ، F_1 ، F_2 ، $\bar{G}_1$ ، $\bar{G}_2$ و $\bar{G}_3$ مقادیر ثابت و حاوی عبارات جبری بسیار طولانی بوده لذا قابل ارائه در اینجا نیستند. لازم به توضیح است که تمام روابط اصلی و معادلات حاکم در مقاله به‌طور کامل ارائه شده‌اند و ضرایب مورد اشاره صرفاً ثابت‌های

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} + \\ &\sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} I_3 \\ zI_3 \end{bmatrix} [R_T]_k^{-1} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\phi_k}{h_k} dz \end{aligned} \quad (21)$$

در رابطه (۲۱) ماتریس I_3 ماتریس همانی ۳ در ۳ و ماتریس‌های A، B و D به ترتیب ماتریس‌های کششی، کوپلینگ و خمشی هستند. رابطه دوم ساختاری که جابجایی الکتریک برای لایه k ام را می‌دهد در مختصات (xy) مطابق (۲۲) به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} D_k &= \{e_{31} \quad e_{32} \quad 0\}_k [R_S]_k \{S\}_k^{(xy)} - \epsilon_k \frac{\phi_k}{h_k} \\ &= \{e_{31} \quad e_{32} \quad 0\}_k [R_S]_k [I_3 \quad zI_3] \begin{Bmatrix} S_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \epsilon_k \frac{\phi_k}{h_k} \end{aligned} \quad (22)$$

در نهایت با انتگرال‌گیری در راستای ضخامت برای هر لایه نتیجه‌ی جابجایی الکتریکی هر لایه محاسبه خواهد شد.

$$\begin{aligned} \int_{z_{k-1}}^{z_k} D_k dz &= \\ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{e_{31} \quad e_{32} \quad 0\}_k [R_S]_k [I_3 \quad zI_3] \begin{Bmatrix} S_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} dz &- \int_{z_{k-1}}^{z_k} \epsilon_k \frac{\phi_k}{h_k} dz \end{aligned} \quad (23)$$

در رابطه (۲۳) S_0 و κ به ترتیب معرف کرنش صفحه میانی و چرخش‌ها^۱ بوده، I_3 ماتریس همانی ۳ در ۳ و ϵ_k ثابت دی الکتریک لایه k ام می‌باشد.

۲-۴- اعمال اثر ضریب پواسون

دو معادله‌ی (۲۱) و (۲۳) دو معادله‌ی اساسی ساختاری برای چندلایه‌هایی کامپوزیتی همراه با لایه‌ی پیزوالکتریک هستند. با توجه به یک بعدی بودن مساله‌ی حاضر همانند بخش قبل می‌توان دریافت که N_{yy} ، N_{xy} ، M_{yy} ، M_{xy} صفر بوده و تنها مقادیر N_{xx} و M_{xx} غیر صفر هستند. در نتیجه با استفاده از معادلات (۲۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= (A_{11}\epsilon_{xx}^0 + A_{12}\epsilon_{yy}^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}\kappa_{xx} + B_{12}\kappa_{yy} + B_{16}\kappa_{xy}) \\ &+ \int_{z_{k-1}}^{z_k} e_{31} \frac{\phi_k}{h_k} dz \end{aligned} \quad (24)$$

¹ Curvature

همچنین انرژی الکتریکی داخلی لایه‌های پیزوالکتریک طبق رابطه‌ی (۳۶) با انتگرال‌گیری روی حجم لایه‌های پیزوالکتریک به دست می‌آید.

$$W_{ie} = \frac{1}{2} \int_{V_p} \mathbf{E}^t \mathbf{D} dV_p \quad (36)$$

در رابطه (۳۶) $\mathbf{E}^t$ تراندهادی بردار میدان الکتریکی و $\mathbf{D}$ نیز معرف بردار جابجایی الکتریکی است. انرژی جنبشی کل سازه برای المان نیز به صورت رابطه (۳۷) محاسبه می‌شود:

$$T = T_b + T_c + T_t + T_{Mass} \quad (37)$$

در رابطه (۳۷) $T_b^{(e)}$ ، $T_c^{(e)}$ ، $T_t^{(e)}$ و T_{Mass} به ترتیب بیانگر انرژی‌های جنبشی لایه‌ی بالا، پایین، هسته و جرم متمرکز هستند که به صورت رابطه (۳۸) تعریف می‌شوند:

$$T_c = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{L_e} \rho [\dot{u}^2 + (\dot{w} + \dot{w}_{BASE})^2] dx dz dy, \quad (38)$$

$$T_i = \frac{1}{2} \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \int_0^{L_e} \int_0^b \rho_i [\dot{u}_i^2 + (\dot{w}_i + \dot{w}_{BASE})^2] dx dz dy$$

$$i = b, t$$

$$T_{Mass} = \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \left[\left(\frac{I_c}{L_c} \right) \omega_c^2 + \left(\frac{m_c}{L_c} \right) v_c^2 \right] dx$$

در رابطه (۳۸) ρ به ترتیب مربوط به چگالی‌های لایه بالا، پایین و هسته است. در این معادلات $\dot{w}_{BASE}$ همان سرعت تحریک پایه می‌باشد که به صورت یکنواخت و ثابت به قسمت پایه تیر گیردار وارد می‌شود و همچنین توجه شود که تابعی از زمان است. همان طور که بیان شد، این جابجایی مربوط به تحریک خارجی است. بنابراین بعد از بسط توان‌ها در رابطه انرژی جنبشی، ترم‌هایی که شامل $\dot{w}_{BASE}$ هستند بعد از قرارگرفتن در رابطه لاگرانژ استخراج شده و در بردار نیرو قرار می‌گیرند. با وردش^۲ گرفتن از معادلات، این سرعت به شتاب تبدیل خواهد شد. در رابطه (۳۸)، I_c ممان اینرسی جرمی، m_c جرم، v_c سرعت کل، ω_c سرعت زاویه‌ای نوک، L_c طول جرم است که عبارات سرعت در رابطه‌ی (۳۹) آورده شده است.

$$\omega_c = \frac{\partial \dot{w}_t}{\partial x} \quad (39)$$

$$v_{cx} = \dot{u}_t - h_g (\dot{w}_t')$$

عددی هستند که از ترکیب ماتریس‌های A_{ij} ، B_{ij} و D_{ij} به دست می‌آیند.

۲-۵- روابط انرژی برای هر المان

در این پژوهش به منظور استخراج ماتریس‌های اجزاء محدود از روابط لاگرانژ استفاده شده است. در این روابط نیاز است تا در ابتدا عبارات‌های انرژی کرنشی برای ماتریس سفتی و کوپلینگ الکترومکانیکی، انرژی جنبشی برای ماتریس جرم و انرژی الکتریکی داخلی برای ماتریس ظرفیت‌برای هر المان تعیین شوند. در این راستا با توجه به رابطه انرژی کرنشی کلی (۳۲) برای لایه هسته (زیر لایه) و رویه‌ها انرژی کرنشی به صورت رابطه (۳۳) و (۳۴) بدست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \int \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (32)$$

$$U_t = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{L_e} \left([N_{xx} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{t0} \\ \varepsilon_{yy}^{t0} \\ \varepsilon_{xy}^{t0} \end{bmatrix} + [M_{xx} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{t1} \\ \varepsilon_{yy}^{t1} \\ \varepsilon_{xy}^{t1} \end{bmatrix} \right) dx dy \quad (33)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{L_e} \left([N_{xx} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{b0} \\ \varepsilon_{yy}^{b0} \\ \varepsilon_{xy}^{b0} \end{bmatrix} + [M_{xx} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{b1} \\ \varepsilon_{yy}^{b1} \\ \varepsilon_{xy}^{b1} \end{bmatrix} \right) dx dy$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{L_e} (N_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^0 + N_{xx}^1 \varepsilon_{xx}^1 + N_{xx}^2 \varepsilon_{xx}^2 + N_{zz}^3 \varepsilon_{zz}^3 + N_{zz}^0 \varepsilon_{zz}^0 + N_{zz}^1 \varepsilon_{zz}^1 + N_{zz}^2 \varepsilon_{zz}^2 + N_{zz}^3 \varepsilon_{zz}^3 + N_{xz}^0 \varepsilon_{xz}^0 + N_{xz}^1 \varepsilon_{xz}^1 + N_{xz}^2 \varepsilon_{xz}^2) dx dy \quad (34)$$

که در این روابط L_e طول هر المان و b پهنای تیر است. در نهایت برای انرژی کرنشی کل سازه داریم:

$$U_T = U_b + U_c + U_t \quad (35)$$

² Variation

۲-۸- روابط روش المان محدود

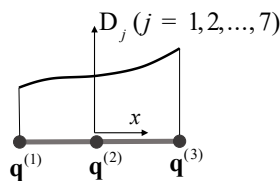
در این بخش به نحوه اعمال روش المان محدود و محاسبه ماتریس‌های جرم، سفتی و میرایی پرداخته خواهد شد. برای گسسته سازی هند سه ی تیر، المان در نظر گرفته شده یک المان سه گرهی یک بعدی است که در شکل ۲ نشان داده شده است. در این شکل، ξ مختصات بی بعد هر المان است که مبدأ آن در مرکز المان قرار گرفته است و رابطه آن با دستگاه مختصات کلی در جهت x برای n_e آمین المان به صورت رابطه (۴۳) تعریف می‌شود:

$$\xi = \left(\frac{2x}{L_e} - 1\right) - 2(n_e - 1) \quad (43)$$

بردار $\mathbf{q}^{(i)}$ نیز که مولفه های آن جابجایی های هر گره است برای تیر ساندویچی به صورت رابطه (۴۴) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{q}^{(i)} = [u_{b0}^{(i)}, w_{b0}^{(i)}, w_{b0,x}^{(i)}, u_0^{(i)}, u_1^{(i)}, u_{t0}^{(i)}, w_0^{(i)}, w_{t0}^{(i)}, w_{t0,x}^{(i)}]^T, i = 1, 2, 3 \quad (44)$$

بنابراین در کل قسمت ساندویچی تیر هر گره تعداد ۹ درجه آزادی در نتیجه، هر المان ۲۷ درجه آزادی خواهد داشت. در رابطه (۴۴) همانطور که دیده می‌شود علاوه بر جابجایی‌های خارج صفحه‌ی لایه بالا و پایین، مشتقات این جابجایی‌ها نسبت به x یعنی $w_{t0,x}^{(i)}$ و $w_{b0,x}^{(i)}$ وجود دارد که علت آن استفاده از المان نوع هرمیتی برای این دو لایه است. در شکل ۲، Δ بردار درجات آزادی هر گره است که در رابطه (۴۵) نشان داده شده است. Δ به کمک توابع شکلی که از درون یابی توابع چندجمله‌ای برای یک المان سه گرهی به دست آمده است، تقریب زده می‌شود (رابطه (۴۶)).



شکل ۲- المان سه گرهی با مختصات بی بعد ξ

$$\Delta(\xi) = [u_{b0}, w_{b0}, u_0, u_1, u_{t0}, w_0, w_{t0}]^T \quad (45)$$

$$\Delta = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (46)$$

$$v_{cz} = \dot{w}_t + \dot{w}_{BASE}$$

$$v_c = \sqrt{v_{cz}^2 + v_{cx}^2}$$

در رابطه‌ی (۳۹) سرعت جرم صلب در راستای x ، v_{cx} سرعت جرم صلب در راستای z هستند که بردار سرعت v_c برآیند دو بردار v_{cx} و v_{cz} است. همچنین I_c بر حسب شعاع ژیراسیون k به صورت رابطه‌ی (۴۰) تعریف می‌شود:

$$k = \sqrt{\left(\frac{1}{12} b h_c^3\right) / A_c} \quad (40)$$

$$I_c = k^2 m_c$$

که در رابطه‌ی (۴۰) A_c و h_c به ترتیب ارتفاع و مساحت سطح مقطع جرم صلب هستند. در نهایت با استفاده از روابط (۱) تا (۱۲) انرژی‌های کرنشی و جنبشی ارائه شده در (۳۵) و (۳۷) بر حسب هفت متغیر جابجایی مستقل از هم نوشته می‌شوند.

۲-۶- ماتریس کوپلینگ Θ

با قراردادن روابط انرژی کرنشی کل سازه در معادله‌ی همیلتون و شروع انتگرال‌گیری روی دامنه‌ی حل، ترم انرژی‌های کرنشی الکتریکی که بیانگر کوپلینگ بین میدان الکتریکی و کرنش‌ها است منجر به ایجاد ماتریس کوپلینگ Θ خواهد شد.

$$\int_v \delta(U_T) = \delta d_e^T k_e^T d_e + \delta \vartheta_e^T \theta_e^T d_e \quad (41)$$

که d_e بردار جابجایی المان و ϑ_e بردار ولتاژ المان می‌باشد.

۲-۷- ماتریس ظرفیت C_p

نهایتاً با وردش گرفتن از انرژی الکتریکی داخلی که در رابطه‌ی (۳۶) ارائه شده است، ماتریس ظرفیت پیزوالکتریک محاسبه خواهد شد.

$$\int_v \delta(D_3 E_3) = \delta((\bar{G}_1 \epsilon_{xx}^0 + \bar{G}_2 \kappa_{xx} + \bar{G}_3 E_3) E_3) = \delta \vartheta_e^T c_p \vartheta_e \quad (42)$$

مقادیر ماتریس ظرفیت برای یک المان در بخش بعدی ارائه شده است.

در رابطه‌ی (۴۸) تعریف شده است تقریب زده نمی شود بلکه بر اساس رویکرد بازتوزیع سازگاری میدان^۳ (FCR) [۲۷] تابع شکل زیر برای u_1 در ε_{xz}^0 بکار گرفته شده است.

$$S_1^{(1)} = \frac{1}{6} - \frac{\xi}{2}, S_2^{(1)} = \frac{2}{3}, S_3^{(1)} = \frac{1}{6} + \frac{\xi}{2} \quad (52)$$

همان طور که دیده می شود تابع شکل بالا یک تابع خطی از ξ بوده بنابراین عبارات u_1 و $\frac{\partial w}{\partial x}$ که در رابطه‌ی (۷) برای یافتن ε_{xz}^0 با هم جمع شده اند، هر دو تابع درجه اول از ξ می شوند. این مورد به جلوگیری از قفل شدگی بر شی کمک خواهد کرد و مانع بروز برش مصنوعی می شود.

در نهایت، بعد از تعریف مجهول های جابجایی و جایگذاری در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل، $U^{(e)}$ و $T^{(e)}$ به اختصار به صورت رابطه (۵۳) برای هر المان حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} U^{(e)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} q_i q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij}^{(e)} q_i \vartheta_j \\ T^{(e)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^{(e)} \dot{q}_i \dot{q}_j, \\ W_{ie}^{(e)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ji}^{(e)} q_i \vartheta_j + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{p_{ij}}^{(e)} \vartheta_i \vartheta_j, \end{aligned} \quad (53)$$

که n برابر با ۲۷ است. ماتریس های $\mathbf{K}^{(e)}$ ، $\mathbf{M}^{(e)}$ ، $\mathbf{C}_p^{(e)}$ ، $\mathbf{\theta}^{(e)}$ و $\mathbf{F}^{(e)}$ نیز به ترتیب ماتریس های سفتی، جرمی سازه ای، کوپلینگ الکترومکانیکی، ظرفیت و نیرویی برای هر المان را نشان می دهند که عبارات مرتبط با آنها در حالت کلی و به ویژه برای حالت حاوی پیزوالکتریک (بخش ساندویچی)، عباراتی بسیار طولانی می باشند. با این حال عبارات بردار کوپلینگ و ماتریس ظرفیت در روابط (۵۴) و (۵۵) آورده شده است.

در رابطه (۴۶)، $\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{(1)}; \mathbf{q}^{(2)}; \mathbf{q}^{(3)}]$ است که قبلا تعریف شده و $\mathbf{N}$ ماتریس توابع شکل نام دارد و شامل ۷ ردیف و ۲۷ ستون است و عناصر غیر صفر ردیف های ۱، ۳، ۴، ۵ و ۶ به صورت رابطه (۴۷) به دست آمده است:

$$\begin{aligned} N_{1(9i-8)} &= N_{3(9i-5)} = N_{4(9i-4)} = N_{5(9i-3)} \\ &= N_{6(9i-2)} = S_i^{(1)}(\xi), \end{aligned} \quad (47)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

در رابطه (۴۷) $S_i^{(1)}$ تابع شکل لاگرانژی برای المان سه گرهی است که به صورت رابطه (۴۸) به دست می آید:

$$\begin{aligned} S_1^{(1)} &= \frac{\xi^2 - \xi}{2} \\ S_2^{(1)} &= -\xi^2 + 1 \\ S_3^{(1)} &= \frac{\xi^2 + \xi}{2}. \end{aligned} \quad (48)$$

مابقی مولفه های Δ که شامل جابجایی خارج صفحه لایه بالا و پایین است (w_{t0} و w_{b0})، به کمک توابع شکل هرمیتی با پیوستگی C^1 تقریب زده می شوند که به علت فرض اویلر-برنولی بودن این دو لایه این نوع تابع شکل انتخاب شده است. بنابراین، مؤلفه های ردیف دوم و هفتم ماتریس $\mathbf{N}$ از طریق رابطه (۴۹) تعیین می شوند:

$$\begin{aligned} N_{2(9i-7)} &= N_{7(9i-1)} = S_i^{(2)}(\xi), \\ N_{2(9i-6)} &= N_{7(9i)} = D_i^{(2)}(\xi), i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (49)$$

در رابطه (۴۹) توابع شکل هرمیتی $S_i^{(2)}(\xi)$ و $D_i^{(2)}(\xi)$ برای المان سه گرهی به صورت رابطه (۵۰) و (۵۱) به دست می آیند:

$$\begin{aligned} S_1^{(2)} &= \frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 - \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2 \\ S_2^{(2)} &= \xi^4 - 2\xi^2 + 1 \\ S_3^{(2)} &= -\frac{3}{4}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^4 + \frac{5}{4}\xi^3 + \xi^2 \\ D_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(\xi^5 - \xi^4 - \xi^3 + \xi^2) \\ D_2^{(2)} &= (\xi^2 - 2\xi^3 - \xi) \\ D_3^{(2)} &= \frac{1}{4}(\xi^5 + \xi^4 - \xi^3 - \xi^2) \end{aligned} \quad (50)$$

$$(51)$$

۲-۹- حذف اثر قفل برشی

برای جلوگیری از بروز قفل برشی جابجایی u_1 که در عبارت کرنش برشی ε_{xz}^0 ظاهر می شود با توابع شکل مرتبه دو که

³ Field continues redistribution

فرض هارمونیک بودن ورودی سیستم با قرار دادن $\mathbf{d}_0 e^{j\omega t}$ به جای بردار جابجایی $\mathbf{d}$ داریم:

$$[\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{C}]\mathbf{d}_0 - \tilde{\mathbf{Q}}\vartheta = \mathbf{F}_0 \quad (۵۹)$$

که ω همان فرکانس تحریک پایه (یا در کل فرکانس نیروی خارجی) می باشد. و از معادله بعدی داریم:

$$\left(\frac{1}{R} + j\omega C_p\right)\vartheta + j\omega\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{d}_0 = 0 \quad (۶۰)$$

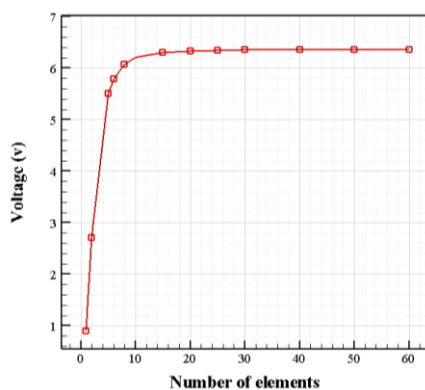
در نهایت ولتاژ حالت پایا^۹ و جابجایی ها مطابق رابطه (۶۱) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \vartheta_{ss} &= \frac{\omega\tilde{\mathbf{Q}}^T\mathbf{d}_0}{\left(\frac{1}{R} + j\omega C_p\right)} \\ (\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{C} + (j\omega\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{Q}}^T)\left(\frac{1}{R} + j\omega C_p\right)^{-1})\mathbf{d}_0 &= \mathbf{F}_0 \end{aligned} \quad (۶۱)$$

۳- نتایج عددی

۳-۱- تحلیل همگرایی

نمودار تحلیل همگرایی ولتاژ برای تیر ساندویچی با رویه های پیزوالکتریکی در شکل ۳ نشان داده شده است. مطابق این نمودار ولتاژ برداشت کننده با ۳۰ المان و دقت صدم به همگرایی رسیده است.



شکل ۳- نمودار تحلیل همگرایی ولتاژ

۳-۲- صحت سنجی

به منظور انجام صحت سنجی کد رایانه ای، فرکانس های طبیعی یک تیر ساندویچی با هسته ی پلاستیک پلی کربنات با رویه های آلومینیومی همراه با یک لایه ی پیزوالکتریک مطابق مرجع [۱] و مطالعه ی حاضر در جدول ۱ مقایسه شده اند.

$$\begin{aligned} \theta_{ij}^{(e)} &= \frac{2b\left(\frac{d^2}{d\xi^2}SS7_{jl}(\xi)\right)F_{2t}}{L_e^2 h_t} - \\ &\frac{b\left(\frac{d}{d\xi}SSl_{jl}(\xi)\right)F_{1b}}{L_e h b} \\ &+ \frac{2b\left(\frac{d^2}{d\xi^2}SS2_{jl}(\xi)\right)F_{2b}}{L_e^2 h_b} \\ &- \frac{b\left(\frac{d}{d\xi}SS5_{j1}(\xi)\right)F_{1t}}{L_e h t} \end{aligned} \quad (۵۴)$$

$$C_p^{(e)} = \frac{b\bar{G}_{3t}}{h_t^2} + \frac{b\bar{G}_{3b}}{h_b^2} \quad (۵۵)$$

با مشخص شدن فرم کلی ماتریس های المانی انتگرال گیری با استفاده از دستورات انتگرال تحلیلی نرم افزار میپل نسبت به مختصات بی بعد ξ روی المان انجام شده و ماتریس های المانی بدست آمده اند.

لازم به ذکر است جهت در نظر گیری میرایی سیستم نیز از میرایی رایلی یا میرایی تناسبی فقط برای تیر اصلی یعنی بدون پیزوالکتریک (تنها هسته و رویه ی کامپوزیتی) استفاده می شود.

$$\mathbf{C}_e = \alpha\mathbf{M}_{ebeam} + \beta\mathbf{K}_{ebeam} \quad (۵۶)$$

۲-۱۰- معادلات الکترومکانیکی سیستم

با انجام عملیات تجميع ماتریس های المانی (عمل اسمبلی) ماتریس های کل سازه به دست می آید که با اعمال شرایط مرزی یکسرگیردار (با حذف سطروستون مربوط به گره اول از ماتریس ها) معادله نهایی الکترومکانیکی تیر ساندویچی برای برداشت کننده انرژی حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} - \tilde{\mathbf{Q}}\vartheta_0 &= \mathbf{F} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^T\mathbf{d} + C_p\vartheta_0 + Q &= 0 \end{aligned} \quad (۵۷)$$

همچنین لازم به ذکر است اثر تحریک پایه یعنی $\dot{w}_{BASE}$ در رابطه (۳۸) به سمت راست معادله اضافه شده و در ماتریس نیرویی $\mathbf{F}$ ظاهر می شود. با مشتق گیری از رابطه دوم (۵۷) خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T\dot{\mathbf{d}} + C_p\dot{\vartheta}_0 + \frac{\vartheta_0}{R} = 0 \quad (۵۸)$$

که R مقاومت بر حسب اهم نماینده ی بار مصرفی و C_p ظرفیت پیزوالکتریک است. برای یافتن پاسخ حالت پایا و با

$$\rho_{com} = 129 \text{ Kg/m}^3$$

$$L = 0.25 \text{ M}$$

$$b = 0.1 \text{ M}$$

طول، پهنا و ضخامت

$$h = 0.1 \text{ M}$$

$$c_{11} = c_{22} =$$

$$6.95e10$$

$$c_{12} = 2.43e10$$

$$c_{66} = 2.25e10$$

$$\rho = 7750 \text{ KG/M}^3$$

$$e_{31} = 16.04$$

$$\epsilon_{33}^S = 9.5 \text{ NF}$$

$$R = 1E8 \Omega$$

$$\zeta = 0.2$$

$$\rho_c = 2700 \text{ KG/M}^3$$

$$h_c = 5 \text{ MM}$$

$$b = 0.1 \text{ m}$$

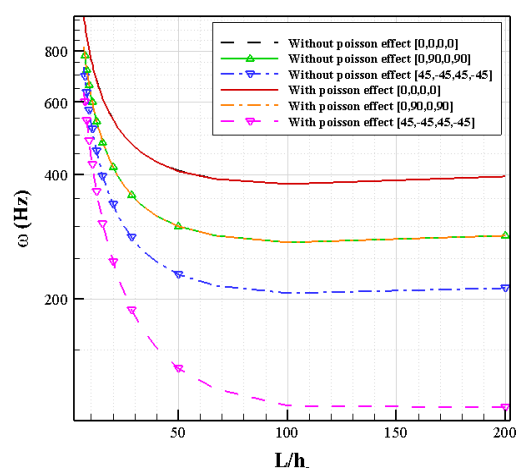
مشخصات
پیزوالکتریک‌ها
ضرایب ماتریس سفتی
و چگالی

ثوابت پیزوالکتریک و
دی الکتریک

مقاومت الکتریکی و
نسبت میرایی

جرم متمرکز
چگالی، ارتفاع و پهنا

شکل ۵ عدم در نظرگیری اثر ضریب پواسون را برای فرکانس طبیعی یک تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی چهار لایه و بدون پیزوالکتریک نشان می‌دهد. مطابق شکل واضح است که تنها در حالتی که زوایای الیاف کامپوزیت غیر از ۰ درجه و صلیبی هستند اثر ضریب پواسون مشهود است. شکل ۶ دامنهی جابجایی نوک این تیر را در فرکانس‌های تحریک مختلف نشان می‌دهد. مطابق شکل همانند فرکانس طبیعی اثر ضریب پواسون تنها در زاویه‌ی ۴۵ درجه (غیر از ۰ و ۹۰ درجه) چشمگیر خواهد بود.

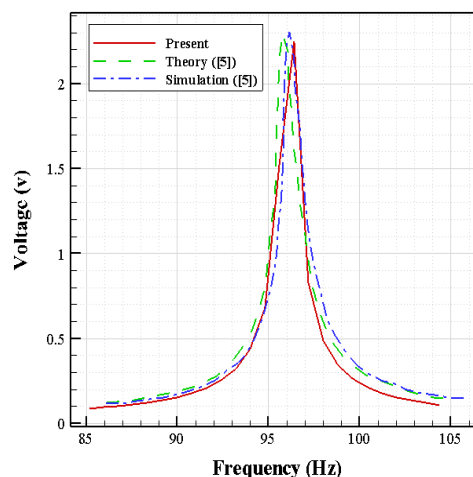


شکل ۵- فرکانس طبیعی تیر ساندویچی با رویه‌ی کامپوزیتی بدون لایه پیزوالکتریک

جدول ۱- مقایسه‌ی فرکانس‌های طبیعی مدار باز و اتصال کوتاه با مرجع [۱]

شماره مود	مدار باز (هرتز)	اتصال کوتاه (هرتز)	مدار باز (هرتز)	مدار باز (هرتز)
۱	۹۶,۳۰	۹۶,۰۹	۹۶,۱۸	۹۶,۰۲
۲	۴۰۹,۴۸	۴۰۹,۰۶	۴۰۷,۳۳	۴۰۷,۰۸

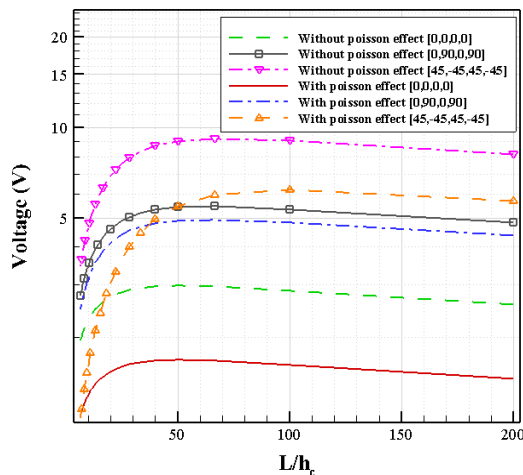
در یک صحت سنجی دیگر ولتاژ تیر ساندویچی در مطالعه‌ی حاضر و مرجع [۱] مقایسه شده‌اند. در این مرجع نتایج برای روش تحلیلی و هم برای شبیه سازی در نرم افزارهای عددی ارائه شده است. مطابق شکل ۴ نتایج مطالعه‌ی حاضر و مرجع ذکر شده با دقت خوبی به یکدیگر نزدیک هستند.



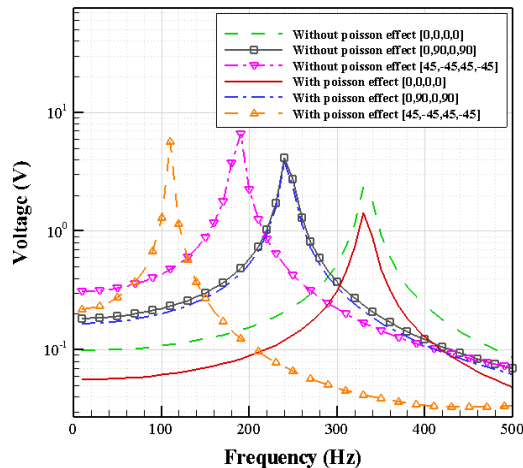
شکل ۴- مقایسه‌ی ولتاژ تیر ساندویچی مدل حاضر و مرجع [۱]

جدول ۲- مشخصات هندسی و مکانیکی

$L = 0.2 \text{ M}$	طول، پهنا و ضخامت	مشخصات تیر
$b = 0.1 \text{ M}$		
$h = 0.01 \text{ M}$		
$E = 70 \text{ GPa}$	مدول الاستیسیته،	اصلی
$\nu = 0.33$	ضریب پواسون و	
$\rho = 2700 \text{ KG/M}^3$	چگالی	
$E_1 = 250 \text{ GPa}$	مدول الاستیسیته،	مشخصات
$E_2 = 10 \text{ GPa}$	ضریب پواسون و	رویه‌های
$\nu_{12} = 0.25$	چگالی	کامپوزیتی

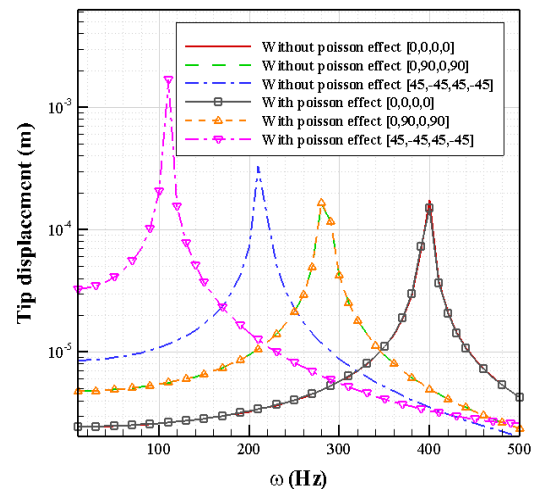


شکل ۷- اثر ضریب پواسون بر ولتاژ بر حسب تغییرات ضخامت هسته (دامنه ۱g)



شکل ۸- اثر ضریب پواسون بر تغییرات ولتاژ با فرکانس تحریک (دامنه ۱g)

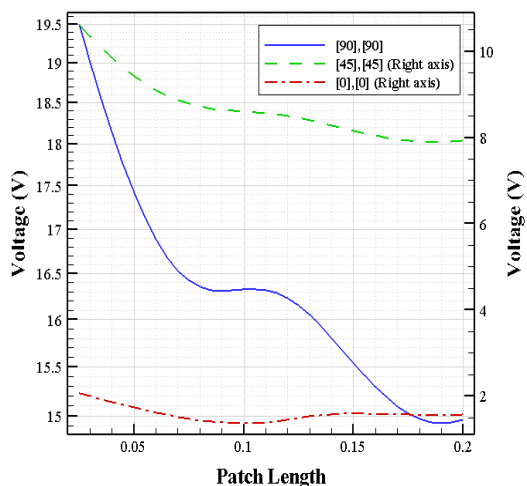
اثر فاصله‌ی لایه‌ی پیزوالکتریک بر ولتاژ از لبه‌ی گیردار و بدون وجود کامپوزیت در شکل ۹ آورده شده است. در این نمودار و بقیه‌ی شکل‌ها طول پیچ پیزوالکتریک ۰٫۰۲۵ متر در نظر گرفته شده است. چنانچه دیده می‌شود با حرکت پیزوالکتریک به سمت لبه آزاد ولتاژ به ازای تمام ضخامت‌های هسته روند کاهش خواهد داشت. بنابراین بهترین مکان پیزوالکتریک را می‌توان چسبیده به لبه گیردار در نظر گرفت.



شکل ۹- جابجایی نوک تیر بدون پیزوالکتریک با رویه‌ی کامپوزیتی بر حسب فرکانس تحریک (دامنه ۱g)

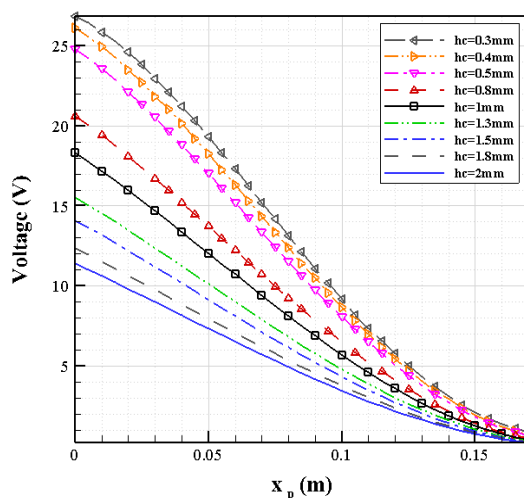
عدم در نظرگیری اثر ضریب پواسون بر ولتاژ خروجی در تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی همراه با لایه‌های پیزوالکتریک در شکل ۷ و شکل ۸ نشان داده شده است. شکل ۷ ولتاژ خروجی بر حسب تغییرات ضخامت هسته در فرکانس تشدید متناظر با هر ضخامت را نشان می‌دهد. طبق بررسی انجام شده اثر پواسون در زوایای ۰ درجه و ۹۰ درجه نیز می‌تواند مهم باشد به طوریکه اختلاف فاحش بین دو نمودار در حالات با در نظرگیری و بدون در نظرگیری اثر ضریب پواسون مشهود است. چنانچه در نمودار ولتاژ-فرکانس شکل ۸ مشاهده می‌شود عدم در نظرگیری اثر یاد شده در زاویه‌ی ۴۵ درجه منجر به نتایج نادرست در تخمین فرکانس تشدید و ولتاژ خروجی خواهد شد. یکی از علل اصلی این موضوع را می‌توان در ترم F_1 و F_2 در رابطه‌ی (۳۰) جستجو نمود. چرا که در حالت بدون اثر پواسون این دو جمله مستقل از اعضای ماتریس‌های A ، B و D خواهند شد.

شکل ۱۱ مربوط به حالتی است که رویه‌ی کامپوزیتی و پیزوالکتریک هر دو تکه‌ای هستند (پیکربندی B). مطابق این شکل ظاهراً همچنان بیشترین پتانسیل الکتریکی در طول کم پچ حاصل می‌شود اما با افزایش طول روند کاهشی دائمی نیست و در زوایای ۹۰ و ۰ درجه روند کاهشی ولتاژ متوقف شده و در بعضی طول‌ها کمی افزایش نیز دیده می‌شود. نکته‌ی دیگری که از نمودار می‌توان دریافت بیشترین پتانسیل الکتریکی در زاویه‌ی ۹۰ درجه و برابر ۱۹.۵ V همچنان از بیشترین مقدار بدون کامپوزیت در شکل ۹ بیشتر است. بنابراین استفاده از رویه‌ی کامپوزیتی توانسته است توان برداشت‌کننده را در این مقاومت افزایش دهد.



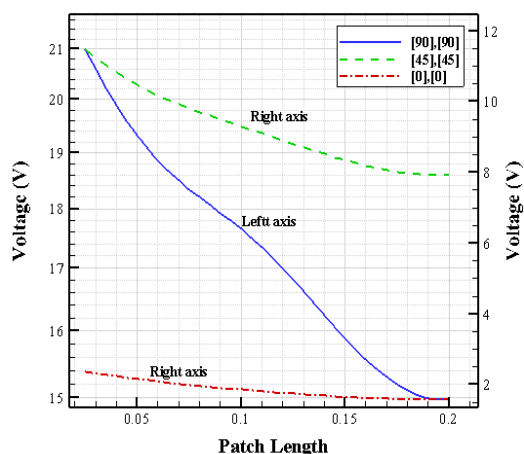
شکل ۱۱- اثر طول پچ پیزوالکتریک پیکربندی (B)

در شکل ۱۲ تا شکل ۱۴ تاثیر طول جرم متمرکز بر انرژی برداشت شده به ترتیب برای زوایای الیاف ۰، ۴۵ و ۹۰ درجه آورده شده است. در این نمودارها محور افقی بر حسب فرکانس تحریک بوده و جرم صلب در انتهای تیر با ارتفاع ۵ mm قرار گرفته است. در هر سه زاویه‌ی الیاف پاسخ فرکانسی ولتاژ زیر فرکانس تشدید با افزایش طول جرم افزایش یافته ولی بالای فرکانس تشدید با افزایش طول کاهش یافته است. در شکل ۱۳ و شکل ۱۴ مشاهده می‌شود در حوالی فرکانس تشدید انتخاب طول مناسب بسیار مهم می‌باشد تا بیشترین ولتاژ حاصل شود به طوریکه صرفاً بیشترین ولتاژ در بیشترین طول و کم‌ترین ولتاژ در کم‌ترین طول اتفاق



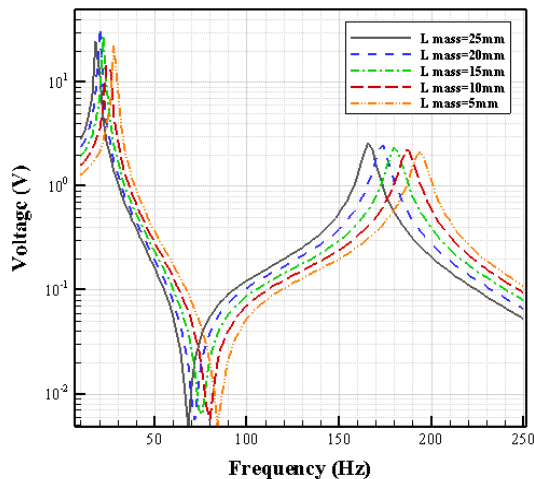
شکل ۹- تاثیر مکان پیزوالکتریک بر ولتاژ در تیر بدون کامپوزیت

شکل ۱۰ و شکل ۱۱ اثر طول پچ پیزوالکتریک را به ترتیب در پیکربندی‌های (A) و (B) با کامپوزیت تک لایه و بدون وجود جرم نشان می‌دهد. نمودارها برای ضخامت ۱ میلی‌متر هسته و شتاب ورودی ۰.۲ g ارائه شده‌اند. مطابق شکل ۱۰ برای هر سه جهت گیری الیاف کامپوزیت، بیشترین برداشت انرژی در طول کم پیزوالکتریک حاصل شده و با افزایش طول ولتاژ کاهش یافته است. همچنین بیشترین پتانسیل در زاویه‌ی ۹۰ درجه حدوداً ۲۱ V حاصل خواهد شد. این مقدار، از برداشت‌کننده‌ی بدون لایه‌ی کامپوزیت در شکل ۹ (۱۸ V) بیشتر شده است.



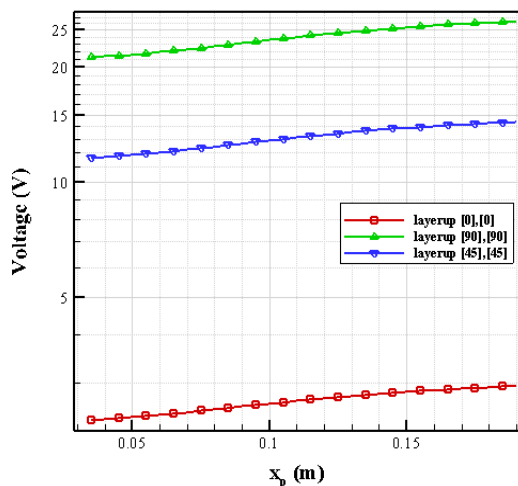
شکل ۱۰- اثر طول پچ پیزوالکتریک پیکربندی (A)

شکل ۱۳- اثر طول جرم صلب بر ولتاژ خروجی (زاویه الیاف [۴۵] و [۴۵])



شکل ۱۴- اثر طول جرم صلب بر ولتاژ خروجی (زاویه الیاف [۹۰] و [۹۰])

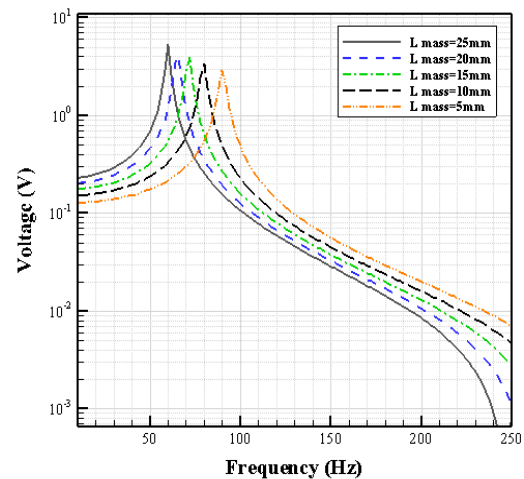
تغییرات ولتاژ با فاصله ی جرم متمرکز از لبه گیردار برای سه زاویه الیاف متفاوت در شکل ۱۵ دیده می شود. طبق این نمودار برای هر سه زاویه با دور شدن از لبه ی گیردار ولتاژ بیشتری تولید شده است.



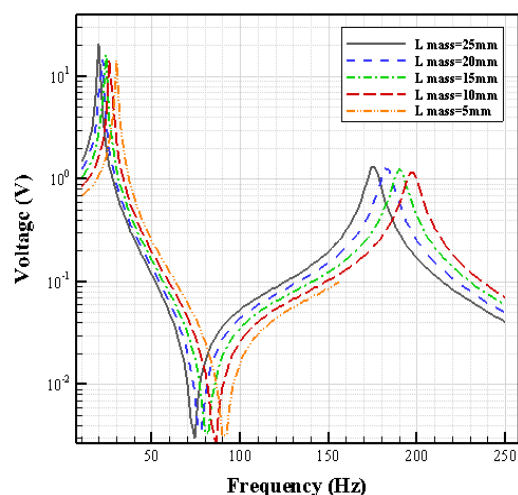
شکل ۱۵- تغییرات ولتاژ با فاصله ی جرم متمرکز از لبه گیردار

در یک بررسی دیگر تغییرات ولتاژ و فرکانس تشدید بر حسب زاویه ی الیاف روبه بالا و پایین در شکل ۱۶ و شکل ۱۷

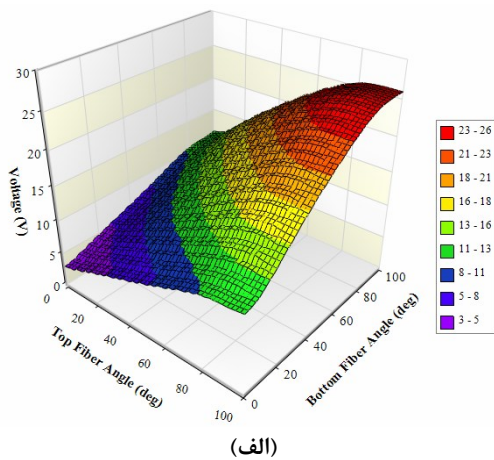
نیفتاده است چراکه در شکل ۱۴ بیشینه نمودار در طول mm ۲۰ حاصل شده است. نکته ی دیگر مربوط به تغییرات فرکانس تشدید است که در شکل ۱۲ فرکانس تشدید از ۶۰ تا ۹۰ هرتز، در شکل ۱۳ از ۲۰ تا ۳۰ هرتز و در شکل ۱۴ از ۱۸ تا ۲۸ هرتز وابسته به طول جرم متغیر شده است. بنابراین طول جرم صلب را می توان یکی از پارامترهای تاثیرگذار در نزدیک شدن به فرکانس تشدید و افزایش بازده در نظر گرفت. البته ذکر این نکته ضروری است که پارامتر طول جرم نماینده ی یک پارامتر طراحی فیزیکی است و تغییر آن به صورت طبیعی منجر به تغییر جرم، ممان اینرسی و بازوی جرمی خواهد شد.



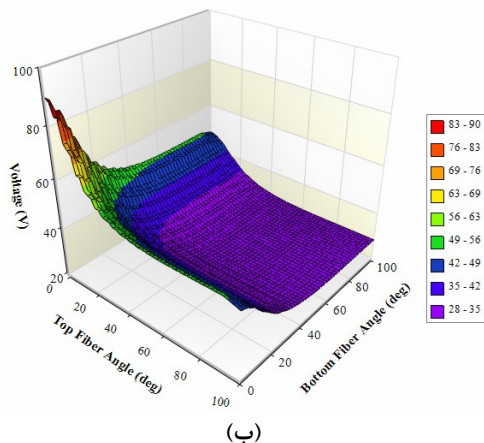
شکل ۱۲- اثر طول جرم صلب بر ولتاژ خروجی (زاویه الیاف [۰] و [۰])



به ترتیب برای بدون وجود جرم صلب و با وجود جرم صلب آورده شده است. طبق دو نمودار می‌توان دریافت بیشترین توان و کمترین فرکانس تشدید در حالتی که هر دو زاویه‌ی الیاف رویه‌ها ۹۰ درجه هستند اتفاق افتاده است و همچنان وجود جرم ولتاژ را در این زاویه افزایش و فرکانس تشدید را کاهش داده است. در زاویه ۹۰ درجه الیاف، به دلیل کاهش مدول الاستیسیته مؤثر در راستای طول تیر، سفتی خمشی سازه کاهش یافته و کرنش خمشی در لایه پیزوالکتریک افزایش می‌یابد. از آنجا که ولتاژ تولیدی پیزوالکتریک مستقیماً با کرنش مکانیکی متناسب است، این افزایش کرنش منجر به ولتاژ خروجی بیشتر می‌شود. علاوه بر این، کاهش سفتی خمشی باعث بهبود انطباق فرکانسی با تحریک محیطی و تقویت پاسخ الکترومکانیکی برداشت‌کننده می‌گردد.

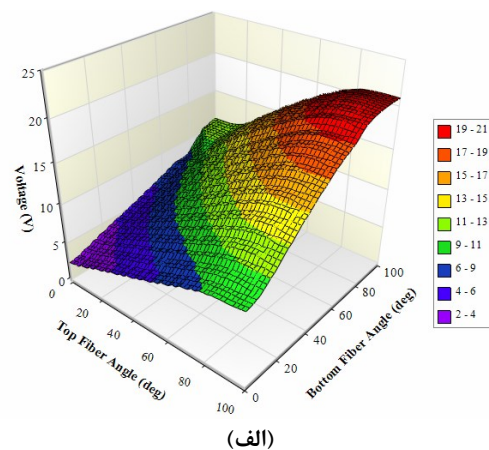


(الف)

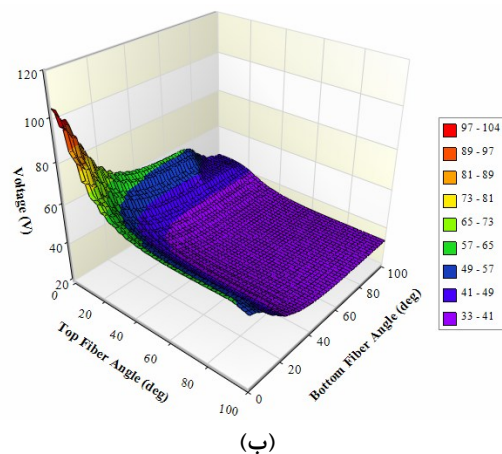


(ب)

شکل ۱۷- تغییرات (الف) ولتاژ (ب) فرکانس تشدید با زاویه-ی الیاف رویه بالا و پایین با جرم صلب



(الف)



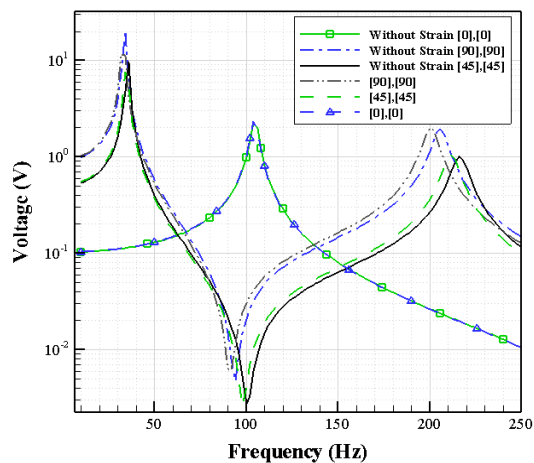
(ب)

شکل ۱۶- تغییرات (الف) ولتاژ (ب) فرکانس تشدید با زاویه-ی الیاف رویه بالا و پایین بدون جرم صلب

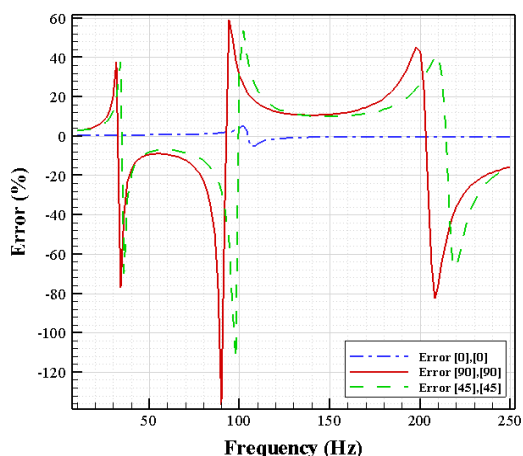
۳-۳- اثر کرنش راستای ضخامت

در شکل ۱۸ اثر در نظرگیری کرنش راستای ضخامت در مدلسازی هسته‌ی تیر بر پتانسیل الکتریکی برای دو زاویه‌ی الیاف ۹۰ و ۴۵ درجه نشان داده شده است. در این نمودار پیکربندی A و پوشش موضعی پیزوالکتریک در نظر گرفته شده و فرکانس تحریک دقیقاً برابر فرکانس تشدید در هر ضخامت مربوطه است. مطابق این نمودار برای هر دو زاویه عدم در نظرگیری کرنش ضخامت منجر به محاسبه‌ی کمتر ولتاژ شده است. با بررسی نمودار خطای عدم در نظرگیری کرنش راستای ضخامت در شکل ۱۹ بیشترین خطا در $\frac{L}{h} = 12$ و حدوداً برابر ۹,۲۶ درصد حاصل شده است. در این نسبت ضخامت، هسته ساندویچی به‌طور هم‌زمان تحت برش

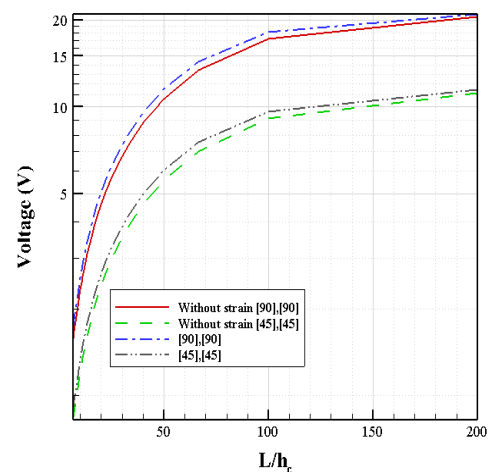
درجه بوده به طوری که در نمودار خطا بیشترین در صد به ۴ درصد در فرکانس تشدید رسیده است. اما در زاویه ۹۰ درجه و ۴۵ درجه در اطراف فرکانسهای تشدید در صد خطا بسیار چشمگیر شده است. تفاوت نتایج در زوایای ۴۵ درجه و ۹۰ درجه ناشی از حساسیت بیشتر پاسخ الکترومکانیکی به کرنش ضخامت هسته است. چراکه در این زوایا سهم تغییر شکل‌های عرضی و برشی افزایش یافته و کرنش ضخامت ε_{zz} در ناحیه تشدید نقش مؤثرتری در کوپلینگ پیزوالکتریک ایفا می‌کند. در حالی که در زاویه ۰ درجه به دلیل سفتی بالای رویه‌ها، سهم ε_{zz} ناچیز بوده و اختلاف نتایج بسیار کمتر است.



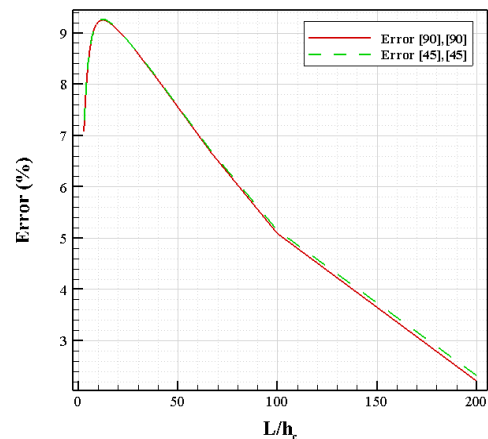
شکل ۲۰- اثر در نظرگیری کرنش راستای ضخامت در هسته بر تغییرات ولتاژ خروجی با فرکانس تحریک



قابل توجه و تغییر شکل نرمال در راستای ضخامت قرار می‌گیرد. در این بازه، کرنش راستای ضخامت سهم معناداری در توزیع کرنش‌ها دارد اما با افزایش بیشتر ضخامت هسته، مکانیزم تغییر شکل غالب در هسته به تدریج از حالت ترکیبی (برش + کرنش ضخامت) به رفتار غالباً برشی تغییر می‌کند. با کاهش ضخامت هسته این خطا نیز کم‌تر شده و به زیر ۳ درصد می‌رسد. همچنین در ضخامت‌های کم، خطای زاویه‌ی ۴۵ درجه کمی بیشتر از ۹۰ درجه شده است.



شکل ۱۸- اثر در نظرگیری کرنش راستای ضخامت در هسته بر ولتاژ خروجی



شکل ۱۹- خطای عدم در نظرگیری کرنش راستای ضخامت بر ولتاژ خروجی

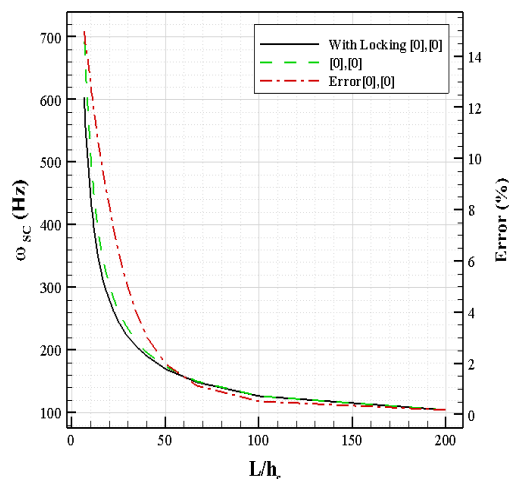
بررسی تاثیر کرنش ضخامت هسته با تغییرات فرکانس تحریک در شکل ۲۰ و نمودار خطای آن در شکل ۲۱ انجام شده است. بر اساس این نمودار کم‌ترین تاثیر در زاویه ۰

شکل ۲۱- خطای عدم در نظرگیری کرنش راستای ضخامت

بر تغییرات ولتاژ خروجی با فرکانس تحریک

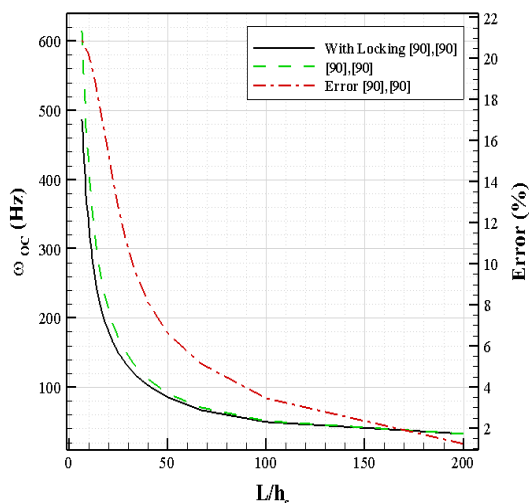
۳-۴- اثر پدیده‌ی قفل برشی

اثر پدیده‌ی قفل برشی بر فرکانس مدار باز سازه در شکل ۲۲ و شکل ۲۳ به ترتیب برای زوایای صفر و ۹۰ درجه آورده شده است. طبق این دو شکل برای هر دو زاویه با افزایش ضخامت هسته فرکانسی که در حضور قفل شدگی برشی تخمین زده می‌شود کم‌تر از فرکانس بدون قفل شدگی است. باتوجه به نمودار خطا که در محور عمودی دوم دو شکل رسم شده است خطای قفل برشی برای ۰ درجه در $\frac{L}{h_c}$ های پایین به ۱۴ درصد و برای زاویه‌ی ۹۰ درجه به ۲۰ درصد رسیده است. اما در $\frac{L}{h_c}$ های بالا برای ۰ درجه خطا بسیار ناچیز و در زاویه‌ی ۹۰ درجه به حدود زیر ۲ درصد رسیده است. علت اینکه خطای قفل برشی در ۰ درجه کم‌تر از ۹۰ درجه شده است را می‌توان به این دلیل دانست که در زاویه‌ی ۰ درجه چون الیاف هم جهت با طول تیر هستند سفتی خمشی آن در مقایسه با سفتی برشی بالاتر است. از آن جایی که قفل برشی مربوط به اعمال سفتی برشی غیر واقعی است وقتی سهم سفتی برشی در مقایسه با سفتی خمشی کم‌تر باشد تاثیر نسبی خطا بر فرکانس طبیعی یا ولتاژ کم رنگ‌تر می‌شود. اما در زاویه‌ی ۹۰ درجه سفتی خمشی تیر کم‌تر شده و سهم سفتی برشی سازه بیشتر می‌شود که در این صورت المان در شبیه‌سازی حالت برشی غالب، دچار اختلال می‌گردد.



شکل ۲۲- اثر عدم در نظرگیری قفل برشی بر فرکانس

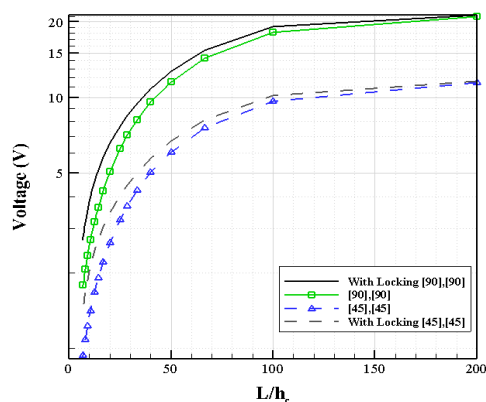
مدار باز (۰) و (۰)



شکل ۲۳- اثر عدم در نظرگیری قفل برشی بر فرکانس

مدار باز (۹۰) و (۹۰)

در شکل ۲۴ و شکل ۲۵ به ترتیب اثر قفل برشی بر ولتاژ و خطای عدم در نظرگیری این پدیده بررسی شده است. در شکل ۲۴ نتایج برای دو زاویه‌ی ۹۰ و ۴۵ درجه آورده شده است که در هر دو زاویه وجود قفل شدگی باعث شده ولتاژ محاسبه شده بیشتر از حالت واقعی گردد که علت این مورد را می‌توان به دلیل نرم‌تر شدن سازه مرتبط دانست این کاهش سفتی منجر به کاهش فرکانس و افزایش ولتاژ شده است. با بررسی نمودار خطا در شکل ۲۵ نیز می‌توان این افزایش کاذب ولتاژ را تا مقدار ۵۰ درصد برای $\frac{L}{h_c}$ های بسیار پایین مشاهده کرد. در این نمودار همچنان خطای ۹۰ درجه بیشتر از زاویه‌ی دیگر (صفر درجه) شده است.



شکل ۲۴- اثر عدم در نظرگیری قفل برشی بر ولتاژ

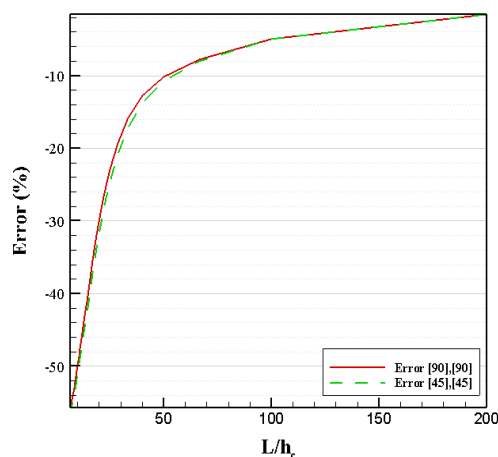
لایه‌ی کامپوزیت با پوشش سراسری روی سطح زیرلایه توانسته منجر به افزایش حداکثر پتانسیل الکتریکی برداشت شده از ۱۸ ولت به ۲۱ ولت شود. همچنین توسعه‌ی مدل مرتبه‌بالا امکان بررسی دقیق‌تر اثر ضخامت‌های مختلف هسته‌ی تیر را فراهم ساخت. به علاوه وجود پارامترهای مختلف مانند طول جرم متمرکز، زاویه‌ی الیاف رو به ها و مشخصات هندسی مدل تیرساندویچی امکان تنظیم و تطبیق فرکانس طبیعی برداشت‌کننده با شرایط محیطی را داشته و در نتیجه بهبود بازدهی را به دنبال خواهد داشت. به طوریکه فرکانس تشدید از ۱۸ تا ۹۰ هرتز وابسته به طول جرم و زاویه‌ی الیاف متغیر شده است.

در ادامه، بررسی کرنش ضخامت هسته نشان داد در پوشش سراسری کامپوزیت برای زاویه‌ی ۴۵ و ۹۰ درجه عدم در نظرگیری کرنش ضخامت منجر به محاسبه‌ی کم‌تر ولتاژ شده است همچنین بیشترین خطا در $\frac{L}{h} = 12$ به حدودا ۹,۲۶ درصد رسید. اما با کاهش ضخامت هسته این خطا به زیر ۳ درصد می‌رسد. همچنین در فرکانس‌های یکسان برای دو مدل، در حوالی فرکانس تشدید خطا برای این دوزاویه بسیار فاحش و غیر قابل چشم پوشی شده است. در بررسی پدیده قفل برشی نتایج نشان داد که با افزایش ضخامت هسته، مدل مبتلا به قفل برشی، فرکانس‌های طبیعی پایین‌تر و ولتاژ بالاتری را می‌تواند پیش‌بینی کند. به طوریکه خطای قفل برشی برای ۰ درجه در $\frac{L}{h}$ های پایین به ۱۴ درصد و برای زاویه‌ی ۹۰ درجه به ۲۰ درصد رسیده است. اما در $\frac{L}{h}$ های بالا برای ۰ درجه خطا بسیار ناچیز و در زاویه‌ی ۹۰ درجه به حدود زیر ۲ درصد رسیده است. این رفتار، لزوم استفاده از فرمولاسیون‌های مقاوم در برابر قفل برشی را برای شبیه‌سازی اجزاء محدود چنین سازه‌هایی پررنگ می‌سازد. در مجموع، این مطالعه ضمن ارائه‌ی یک مدل ریاضی کامل برای تیرهای ساندویچی با رویه‌ی کامپوزیتی و جرم متمرکز تصویری روشن از تأثیر هندسه، نحوه‌ی قرارگیری لایه‌های کامپوزیتی، طول و مکان جرم متمرکز و اثر مدلسازی مناسب در تیرهای ساندویچی برداشت‌کننده ارائه داد و نشان داد که انتخاب درست پیکربندی می‌تواند منجر به افزایش بازده در شرایط واقعی سازه‌ای شود.

۵- فهرست علائم

$\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4, F_1, F_2$

ضرایب ثابت



شکل ۲۵- خطای عدم در نظرگیری قفل برشی بر ولتاژ

۴- نتیجه گیری

در این پژوهش رفتار یک تیر ساندویچی یکسرگیردار با رویه‌های کامپوزیتی و لایه‌ی پیزوالکتریک مورد تحلیل قرار گرفت. هدف اصلی، بررسی اثر قرارگیری لایه‌ی کامپوزیتی و اثر تغییر پارامترهای مختلف بر میدان‌های مکانیکی و الکتریکی برداشت‌کننده بود. اهمیت این موضوع در امکان طراحی برداشت‌کننده‌هایی است که بتوانند با شرایط مختلف و فرکانس‌های کاری گوناگون سازگار شوند؛ به این ترتیب انتخاب مناسب پیکربندی لایه‌ها می‌تواند بر کارایی سیستم برداشت توان اثرگذار باشد. برای مدلسازی، هسته‌ی همسانگرد تیر بر پایه‌ی نظریه‌های برشی مرتبه بالا با در نظر گرفتن اثر کرنش‌های راستای ضخامت تحلیل شد. همچنین رویه‌های بالا و پایین با مدل اویلر-برنولی همراه با لحاظ کردن ضریب پواسون مدل شدند. در روش اجزاء محدود نیز از المان سه‌گره‌ی ۹ درجه آزادی در هر گره و توابع شکل هرمیتی-لاگرانژی استفاده گردید و توابع شکل لازم برای جلوگیری از قفل برشی در نظر گرفته شد. دو حالت مختلف برای نحوه‌ی قرارگیری لایه‌ی کامپوزیت بررسی شد: در حالت نخست، کل سطح تیر توسط لایه‌ی کامپوزیت پوشانده شد و در حالت دوم، این لایه صرفاً در ناحیه‌ی زیر پیچ پیزوالکتریک قرار گرفت.

در اولین بخش مقایسه‌ی نتایج نشان داد در مدلسازی برداشت‌کننده‌های همراه با لایه کامپوزیت اثر ضریب پواسون می‌تواند مهم و غیرقابل چشم‌پوشی باشد. علاوه بر این وجود

ϕ_k	پتانسیل الکتریکی لایه k	$\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$	ضرایب ثابت
$[e], [\varepsilon^S]$	ماتریس ثوابت پیزوالکتریک و ثوابت دی الکتریک	g	ثابت گرانش
$\{D\}, \{E\}$	بردار جابجایی الکتریکی و میدان الکتریکی	$[c^E]$	ماتریس سفتی پیزوالکتریک
E, E_3	میدان الکتریکی، شدت میدان الکتریکی راستای ضخامت	c_p	ماتریس ظرفیت
G	مدول برشی	h_{comp}	ضخامت لایه کامپوزیت
k	شماره‌ی لایه‌ی کامپوزیت	h_g	فاصله مرکز جرم صلب از خط میانی پره‌ی اصلی
Δ	بردار توابع شکل	h_t, h_c و h_b	ضخامت رویه بالا، هسته و رویه پایین
N	ماتریس توابع شکل	θ_e	ماتریس کوپلینگ پیزوالکتریک المانی
q	بردار درجات آزادی المان	θ_k	زاویه‌ی الیاف کامپوزیت
L	طول کل پره (تیر)	K^*	ماتریس سفتی مدار باز
$Q(t)$	شارژ الکتریکی	A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	ماتریس‌های سفتی کششی، کوپلینگ کششی-خمشی و سفتی خمشی
R	مقاومت الکتریکی	E_1, E_2	مدول الاستیسیته‌ی راستای الیاف و عمود بر الیاف
$T, T_b, T_t, T_c, T_{Mass}$	انرژی جنبشی کل، رویه پایین، رویه بالا، هسته و جرم	E_c	مدول الاستیسیته‌ی هسته
b	پهنای تیر	I_c	ممان اینرسی جرم متمرکز
w و u	جابجایی بیرون و درون صفحه‌ای	I_3	ماتریس همبستگی در ۳
$\dot{w}_{BASE}$	سرعت پایه‌ی تیر	L_e	طول المان
C, M, K	ماتریس میرایی، جرم و سفتی کل	$M_{ij} \quad i, j = x, z, y$	منتجه‌های ممان تنش صفحه‌ای
ζ	نسبت میرایی	$N_{ij} \quad i, j = x, z, y$	منتجه‌های تنش صفحه‌ای
ν	ضریب پواسون	$N_{\alpha\beta}^i, i = 0, 1, 2, 3$	منتجه‌های تنش
ξ	مختصات محلی روی المان	$Q_{ij}, \bar{Q}_{ij}$	سفتی کاهش یافته در مختصات مادی و جهانی
ω	فرکانس طبیعی	$\{S\}, \{T\}$	بردار کرنش و تنش
θ, ϑ_{ss}	ولتاژ حالت پایا	$U^{(e)}, T^{(e)}, W_{ie}^{(e)}, F^{(e)}$	انرژی کرنشی، جنبشی، کار و نیرویی المان
β, α	ضرایب میرایی رابلی	U_T	انرژی کرنشی کل لایه‌ها
		U_b, U_c, U_t	انرژی کرنشی رویه پایین، هسته و رویه بالا
		U	انرژی کرنشی
		V_p	حجم پیزوالکتریک
		W_{ie}	انرژی الکتریکی داخلی
		W_{nc}	کار نیروهای ناپایستار
		d_e	بردار جابجایی المانی
		e_{31}, e_{32}	اجزاء ماتریس ثوابت پیزوالکتریک
		m_c	جرم متمرکز
		n_e	شماره‌ی المان
		v_c, v_{cx}, v_{cz}	سرعت کل، سرعت راستای X و Z جرم متمرکز
		w_{BASE}	جابجایی بیرون صفحه‌ای پایه
		$x_{Storage}$	فاصله‌ی جرم متمرکز از مبدا مختصات
		$\ddot{z}$	شتاب پایه‌ی تیر
		$\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xz}$	کرنش‌های محوری و برشی
		K_{yy}, K_{xy}, K_{xx}	چرخش‌ها
		ρ_t, ρ_b, ρ	چگالی رویه‌ی بالا، پایین و هسته
		ρ_c	چگالی جرم صلب
		$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$	تنش‌های محوری و برشی
		ω_c, L_c	سرعت زاویه‌ای و طول جرم متمرکز
		$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_6$	کرنش‌های محوری و برشی در مختصات مادی

مراجع

- [1] Li, X., et al., (2018) Sandwich piezoelectric energy harvester: Analytical modeling and experimental validation. *Energy Convers Manag.* 176: p. 69-85.
- [2] Cook-Chennault, K.A., N. Thambi, and A.M. Sastry, (2008) Powering MEMS portable devices—a review of non-regenerative and regenerative power supply systems with special emphasis on piezoelectric energy harvesting systems. *Smart Mater Struct.* 17(4): p. 043001.
- [3] Erturk, A. and D.J. Inman, (2011) *Piezoelectric energy harvesting*: John Wiley & Sons.
- [4] Biglari, H., H. Teymouri, and A. Shokouhi, (2024) Dynamic Response of Sandwich Beam with Flexible Porous Core Under Moving Mass. *Mech. Compos. Mater.* 60(1): p. 163-182.
- [5] Quan, H., T. Canh, and V. Le, (2023) Vehicle model dynamic analysis under random excitation of uneven pavement as measured by the international roughness index. *Transp. Commun. Sci. J.* 8: p. 866-880.
- [6] Chen, J., et al., (2024) Dynamic modelling and stability analysis of aero-engine rotor system

- [۱۸] فلاح و ع. ملکی، (۲۰۲۱) برداشت انرژی با استفاده از تیر بایمورف متخلخل با لایه پیزوالکتریک تحت ارتعاشات القایی ناشی از جریان سیال خارجی. نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، ۲۰۲۱. ۵۳(۸): ص. ۴۶۳۳-۴۶۴۸
- [19] Malekzadeh, K., S.M.R. Khalili, and A. Veysi Gorgabad, (2015) Dynamic Response of Composite Sandwich Beams With Arbitrary Functionally Graded Cores Subjected to Low-Velocity Impact. *Mech Adv Mat Struct*. 22(8): p. 605-618.
- [20] Mahmoudkhani, S. and K.S. Laghaie, (2022) Flutter analysis of sandwich panel with the constrained viscoelastic layer considering the effects of the imperfection and the core thickness deformation. *Thin-Walled Struct*. 173: p. 108980.
- [۲۱] واحدی اصل، ت. و س. محمودخانی، (۲۰۲۱) بررسی کارایی جاذب ارتعاش ساخته شده از تیر سه لایه با هسته ویسکوالاستیک. مکانیک سازه ها و شاره ها، ۱۱(۵): ص. ۱-۱۶
- [22] Biglari, H., M.N. Ansaroudi, and S.R. Movahhed, (2017) Static Response of Smart Beams Equipped with Extension/Shearing Piezoelectric Patches Considering Poisson's Effect Based on Different Theories. *Amirkabir J Mech Eng*. 48(4).
- [۲۳] بیگلری، ح.، حسن، و س. ساربانقلی، (۲۰۱۴) ارتعاش آزاد تیر کامپوزیتی متورق تیموشنکو با در نظر گرفتن ضریب پواسون برای شرایط تکیه گاهی مختلف. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، ۴۴(۳): ص. ۱-۱۰
- [24] Frostig, Y. and O.T. Thomsen, (2004) High-order free vibration of sandwich panels with a flexible core. *Int J Solids Struct*. 41(5-6): p. 1697-1724.
- [25] Sadd, M.H., *Elasticity: theory, (2009) applications, and numerics*: Academic Press.
- [26] Piefort, V., (2001) Finite element modelling of piezoelectric active structures.
- [27] Prathap, G., (1986) Field-consistency-toward a science of constrained multi-strain-field finite element formulations. *Sadhana*. 9: p. 319-343.
- considering aerodynamics. *Aerosp Sci Technol*, 2024. 151: p. 109294.
- [7] Li, Q., et al., (2023) Optimal design towards high performance of sandwich flexible piezoelectric energy harvesters. *J Appl Mech*. 90(6): p. 061007.
- [8] Li, X., et al., (2019) Multi-branch sandwich piezoelectric energy harvester: Mathematical modeling and validation. *Smart Mater Struct*. 28(3): p. 035010.
- [9] Arani, A.G., et al., (2021) Energy harvesting of sandwich beam with laminated composite core and piezoelectric face sheets under external fluid flow. *Smart Struct Syst*. 27(4): p. 641-650.
- [10] Khorshidi, K., M. Rezaeifaray, and M. Karimi, (2022) Energy harvesting using vibrating honeycomb sandwich panels with auxetic core and carbon nanotube-reinforced face sheets. *Int J Solids Struct*. 256.
- [11] Dao, S.-D., et al., (2025) A Closed-Form Solution for Harvesting Energy from the High-Order Sandwich Beam Subjected to Dynamic Loading. *Buildings*. 15(12): p. 2135.
- [12] Jiang, S., et al., Vibration Reduction and Enhanced Vibration Energy Harvesting of Piezoelectric Sandwich Beams on Periodic Elastic Supports. *Int. J. Struct. Stab. Dyn*. 0(0): p. 2650275.
- [13] Lumentut, M. and M. Friswell, (2018) A smart pipe energy harvester excited by fluid flow and base excitation. *Acta Mechanica*. 229: p. 4431-4458.
- [14] Kianpoor, A. and K. Jahani, (2019) Modeling and analyzing of energy harvesting from trapezoidal piezoelectric beams. *Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Mech*. 43(Suppl 1): p. 259-266.
- [۱۵] محمدکریمی، ح.، ع. صالح زاده نوبری، و ح. شاهوردی، (۱۳۹۸) مطالعه تجربی برداشت انرژی توسط پیزوالکتریک از پدیده فلاتر در تونل باد، هجدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران.
- [۱۶] عاروان، م.، م. فرخ، و س. ایرانی، (۲۰۲۰) بهینه سازی شکل یک تیر تک لایه پیزوالکتریک برداشت کننده انرژی. دانش و فناوری هوافضا، ۹(۲): ص. ۲۵۵-۲۶۶
- [۱۷] حسینی، ر.ا.، م. لطافتی، و س. حسینی مقدم، (۲۰۱۷) برداشت انرژی ارتعاشی با استفاده از تیر یک سر درگیر با دولایه پیزوالکتریک. مکانیک سازه ها و شاره ها، ۷(۱): ص. ۹-۱۶