



حل سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی صفحه‌ای مبتنی بر آنالیز بازه‌ای و فرم مقدار میانگین

پیام ورشوی جاغرق^{۱*} و علیرضا معصومی^۲

^۱ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران.

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران.

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۲۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۷/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۱۸

چکیده

در این مقاله، یک روش نوین برای تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی صفحه‌ای مبتنی بر تلفیق آنالیز بازه‌ای و فرآیند پالایش ارائه شده است. در گام نخست، معادلات سینماتیکی هر زنجیره از مکانیزم موازی با اعمال قیود سینماتیکی مربوطه استخراج می‌شود. سپس با ترکیب روش‌های آنالیز بازه‌ای و فرم مقدار میانگین، مسئله سینماتیک مستقیم با دقت مورد نظر تحلیل می‌گردد. به منظور اعتبارسنجی، نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج حاصل از روش برآیند مقایسه شده است. پیاده‌سازی روش پیشنهادی بر روی مکانیزم موازی صفحه‌ای 3-RRR، قابلیت آن را در تخمین دقیق موقعیت و جهت‌گیری سکوی متحرک نشان می‌دهد. مزیت اصلی این رویکرد، دقت بالا همراه با کارایی محاسباتی مناسب می‌باشد که آن را به گزینه‌ای امیدوارکننده برای حل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی صفحه‌ای تبدیل می‌کند.

کلمات کلیدی: سینماتیک مستقیم؛ مکانیزم موازی صفحه‌ای؛ آنالیز بازه‌ای، فرم مقدار میانگین؛ روش برآیند.

Solving the Forward Kinematics of Planar Parallel Mechanisms Based on Interval Analysis and Mean-Value Form

Payam Varshovi-Jaghargh^{1*}, Alireza Masoumi²

¹ Assist. Prof., Mech. Eng., Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran.

² Assist. Prof., Mech. Eng., Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran.

Abstract

In this paper, a new method is presented for analyzing the forward kinematics problem of planar parallel mechanisms based on a combination of interval analysis and a refinement process. In the first step, the kinematic equations of each chain of parallel mechanism are derived by applying the relevant kinematic constraints. Then, the forward kinematics problem is solved with the desired accuracy using a combination of interval analysis and mean-value form. For validation purposes, the results of the proposed method are compared with those obtained from the resultant method. The implementation of the proposed approach on a 3-RRR planar parallel mechanism demonstrates its capability to accurately estimate the position and orientation of the moving platform. The main advantage of this method is its high accuracy with reasonable computational efficiency, which makes it a promising option for solving the forward kinematics problem of planar parallel mechanisms.

Keywords: Forward kinematics; Planar parallel mechanism; Interval analysis; Mean-value form; Resultant method.

۱- مقدمه

مسئله سینماتیک مستقیم^۱ مکانیزم‌های موازی به‌عنوان یکی از چالش برانگیزترین مسائل در حوزه رباتیک شناخته می‌شود. این مسئله، به تعیین موقعیت و جهت‌گیری سکوی متحرک بر اساس موقعیت یا جهت‌گیری مفاصل فعال (مانند طول عملگرهای خطی یا زوایای مفصلی محرک‌ها) می‌پردازد. در مقایسه با ربات‌های سری، حل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی با دشواری‌های قابل توجهی روبرو است. این دشواری‌ها ناشی از طبیعت غیرخطی و چندمتغیره معادلات حاکم می‌باشد. همچنین، وجود چندین جواب ممکن و پیچیدگی محاسباتی، بر این چالش می‌افزاید. از این رو، تحلیل آن نیازمند به‌کارگیری روش‌هایی نظیر هندسه جبری، حذف متغیرها و الگوریتم‌های عددی می‌باشد.

در سال‌های اخیر، روش‌های متعددی برای حل سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی پیشنهاد شده‌است. روش‌های عددی کلاسیک، مانند نیوتن-رافسون، به طور گسترده‌ای برای حل این مسائل مورد استفاده قرار گرفته‌اند. با این حال، این روش‌ها در مواردی به حدس اولیه مناسب وابسته هستند. در نتیجه، احتمال همگرا شدن به پاسخ‌های نادرست وجود دارد. در مقابل، رویکردهای تحلیلی همچون هندسه جبری و روش‌های حذف متغیرها، اگرچه از دقت بالایی برخوردار هستند، اما به دلیل پیچیدگی معادلات در مکانیزم‌های موازی با اتصالات چندگانه، معمولاً از سرعت همگرایی پایینی برخوردار می‌باشند. در کنار روش‌های عددی کلاسیک، روش‌های عددی پیشرفته‌ای نیز مانند روش هوموتوپی برای تضمین یافتن تمامی جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم، به ویژه در مواجهه با سیستم‌های چندجوابی، توسعه یافته‌اند. همچنین، در سال‌های اخیر، الگوریتم‌های هوشمند مبتنی بر یادگیری ماشین، شبکه‌های عصبی مصنوعی و الگوریتم‌های تکاملی نظیر الگوریتم ژنتیک، نیز به عنوان جایگزین‌هایی امیدوارکننده برای تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی مطرح شده‌است. این روش‌ها با آموزش بر پایه داده‌های به دست آمده از تحلیل سینماتیک مکانیزم، می‌توانند بدون نیاز به حدس اولیه، تخمین‌هایی سریع و مناسب از پیکربندی سکوی متحرک ارائه دهند. هرچند دقت

آن‌ها به کیفیت و حجم داده‌های آموزشی وابسته است، اما در کاربردهای بلادرنگ^۲ که نیاز به سرعت بالا در محاسبات دارند، گزینه‌هایی مطلوب به شمار می‌روند.

مطالعات متعددی بر روی مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی انجام شده‌است. گریفیس و دافی [۱]، تحلیل جابجایی مستقیم یکی از انواع پلتفرم‌های گاف-استوارت را با استفاده از روش هندسی ارائه کردند. گسلین و مرلت [۲]، با بهره‌گیری از قضیه استورم، به تحلیل سینماتیک مستقیم معماری‌های خاصی از ربات‌های موازی صفحه‌ای سه درجه آزادی پرداختند. استودی [۳] الگوریتمی برای حل مسئله سینماتیک مستقیم پلتفرم گاف-استوارت ارائه داد که در آن با استفاده از نگاشت سینماتیک هفت بعدی و معادلات قیدی، یک چندجمله‌ای تک‌متغیره از درجه ۴۰ استخراج شد. مرلت [۴] با طبقه‌بندی تمامی زنجیره‌های سینماتیکی ممکن در مکانیزم‌های موازی صفحه‌ای به سه نوع اصلی، روشی جامع برای محاسبه تمامی پاسخ‌های سینماتیک مستقیم ارائه نمود که امکان تحلیل همه ترکیب‌های زنجیره‌های پایه و در نتیجه تمام پیکربندی‌های ربات‌های موازی صفحه‌ای را فراهم می‌سازد.

یی و لیم [۵] از یک شبکه عصبی روبه‌جلو برای تحلیل سینماتیک مستقیم پلتفرم گاف-استوارت استفاده کرده و راه‌حلی با دقتی در حدود یک میلی‌متر و یک درجه ارائه دادند. لی و شیم [۶] با بهره‌گیری از حذف جبری و ماتریس سیلویستر، نشان دادند که معادله حاصل از تحلیل سینماتیک مستقیم پلتفرم گاف-استوارت، یک چندجمله‌ای تک‌متغیره از درجه ۴۰ خواهد بود. پریخ و لام [۷]، با ترکیب شبکه عصبی چندلایه و روش نیوتن-رافسون، موفق به تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی گاف-استوارت شدند و دقتی در حدود ۰/۰۱ میلی‌متر و ۰/۰۱ درجه به دست آوردند. گان و همکاران [۸]، نیز با استفاده از تئوری پایه‌های گروبنر، تأیید کردند که مسئله سینماتیک مستقیم این مکانیزم به یک چندجمله‌ای تک‌متغیره از درجه ۴۰ منتهی می‌شود.

فضای سینماتیک هفت بعدی نیز در تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی مورد استفاده قرار گرفته است. طالع ماسوله و همکاران [۹]، الگوریتمی موسوم به ضمنی‌سازی خطی (LIA) مبتنی بر حل چندین دستگاه

² Real-Time¹ Forward kinematics problem

از دحام ذرات، راهکاری برای حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی ارائه دادند. در نهایت هون [۱۹]، با بهره‌گیری از ترکیب شبکه عصبی مصنوعی و الگوریتم بهینه‌سازی رفتار باکتریایی^۲، راه‌حلی برای مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی هگزا ارائه نمود.

آنالیز بازه‌ای^۳ یکی از روش‌های قدرتمند در ریاضیات محاسباتی برای حل معادلات غیرخطی و مسائل بهینه‌سازی است. در این روش، متغیرها به جای مقادیر عددی مشخص، به صورت بازه‌هایی از اعداد حقیقی نمایش داده می‌شوند. در نتیجه، خروجی محاسبات به شکل بازه‌های محاسبه خواهد شد [۲۰]. این روش به طور ذاتی خطاهای ناشی از گرد کردن را در نظر گرفته و نتایجی تضمین شده ارائه می‌دهد. در حالت کلی، الگوریتم‌های تحلیلی مبتنی بر آنالیز بازه‌ای شامل چند مرحله هستند. در گام نخست، بازه‌های اولیه متغیرها بر اساس محدوده‌های فیزیکی مکانیزم تعیین می‌شوند. سپس، در صورت بزرگ بودن بازه‌ها، آن‌ها به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شوند. در مرحله بعد، با استفاده از ارزیابی بازه‌ای معادلات، بازه‌هایی که به‌طور قطعی فاقد پاسخ هستند، حذف می‌گردند. این فرآیند به‌صورت بازگشتی تا دستیابی به بازه‌هایی با اندازه کافی کوچک و مطابق با دقت مطلوب ادامه می‌یابد. جعبه‌ابزار اینتلب^۴ نیز، ابزاری مبتنی بر نرم‌افزار متلب است که برای انجام محاسبات بازه‌ای با قابلیت تحلیل نتایج، توسعه یافته‌است.

تحقیقات متعددی پیرامون به‌کارگیری آنالیز بازه‌ای در مکانیزم‌های موازی صورت گرفته است که عمدتاً بر حل مسائل سینماتیک مستقیم، بهینه‌سازی مسیر، شناسایی تکینگی‌ها و مدل‌سازی عدم قطعیت متمرکز هستند. یکی از نخستین پژوهش‌ها در این زمینه توسط مرلت [۲۱] انجام شد که در آن، با استفاده از آنالیز بازه‌ای و قیود سینماتیکی، تمامی ۴۰ جواب مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم گاف-استوارت به دست آمد. هاوو و مرلت [۲۲] نیز روشی برای طراحی بهینه ربات‌های موازی مبتنی بر آنالیز بازه‌ای ارائه دادند. دانی و همکاران [۲۳] [۱]، از محاسبات بازه‌ای به‌منظور تأیید عددی کالیبراسیون سینماتیکی ربات‌های موازی و اعتبارسنجی مدل‌های سینماتیکی مورد استفاده بهره بردند. تانوس و همکاران [۲۴]، روشی برای خطی‌سازی بازه‌ای ارائه کردند که

معادلات خطی برای بررسی مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی پنج درجه آزادی با ساختار بازوهای یکسان ارائه کردند. مورل و همکاران [۱۰]، با بهره‌گیری از ماشین‌های بردار پشتیبان^۱، روشی شامل پیش‌پردازش آفلاین، آموزش مدل‌ها و ارزیابی سریع آنلاین برای حل مسئله سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی ارائه کردند. ورشوی و همکاران [۱۱]، سینماتیک مستقیم سه نوع ربات موازی چهار درجه آزادی با الگوی حرکتی سه درجه انتقالی و یک درجه دورانی را با استفاده از روش برآیند و قیود سینماتیکی زنجیره‌های سینماتیکی تحلیل کردند. نادری و همکاران [۱۲] نیز با ترکیب پایه‌های گروبنر و روش برآیند در فضای سینماتیک هفت بعدی، به تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی سه درجه آزادی صفحه‌ای پرداختند. ناگ و همکاران [۱۳]، با ساده‌سازی معادلات حلقه بسته، مسئله سینماتیک مستقیم یک ربات موازی RPRS-3 را به یک معادله تک‌متغیره از درجه ۱۶ کاهش دادند. مستشیری و همکاران [۱۴] با استفاده از روش هموتویی نشان دادند که زمان محاسبه سینماتیک مستقیم می‌تواند به‌طور محسوسی و در حدود ۴۳٪ نسبت به روش نیوتن-رافسون کاهش یابد.

در ادامه، ورشوی و همکاران [۱۵] با استفاده از پارامترهای اولیه در فضای سینماتیک هفت بعدی، الگوریتمی برای بررسی سینماتیک مستقیم ربات‌های موازی چهار درجه آزادی ارائه کردند که در آن، محدودیت‌های حرکتی مفاصل فعال نیز لحاظ شده‌است. وو و شیه [۱۶]، عملکرد سه روش مختلف شامل شبکه عصبی پس‌انتشار، بهینه‌سازی کلونی مورچه‌های ساده شده و روش نیوتن بهبود یافته را در تحلیل سینماتیک مستقیم یک ربات موازی سه درجه آزادی فضایی با یکدیگر مقایسه کردند. چائوهان و وونداولی [۱۷]، نیز با ترکیب یک شبکه عصبی پیش‌خور چندلایه با روش‌های مختلف بهینه‌سازی فراابتکاری از جمله بهینه‌سازی ازدحام ذرات، بهینه‌سازی علف‌های هرز مهاجم اصلاح شده و بهینه‌سازی مبتنی بر الگوریتم یادگیری معلمان، به تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی گاف-استوارت پرداختند. توسلیان و همکاران [۱۸]، نیز با ارائه یک رویکرد ترکیبی مبتنی بر طبقه‌بندی، شبکه‌های عصبی تکاملی و الگوریتم بهینه‌سازی

³ Interval Analysis

⁴ INTLAB

¹ Support Vector Regression

² Bacterial foraging optimization

مقدار میانگین تلفیق کند، برای تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی صفحه‌ای اعمال نشده‌است. بنابراین، سهم اصلی این مقاله، ارائه و اعتبارسنجی چارچوب محاسباتی ترکیبی است که با بهره‌گیری از تضمین پوشش کامل جواب‌ها توسط آنالیز بازه‌ای و قابلیت کاهش عرض اضافی بازه توسط فرم مقدار میانگین، دقت و قابلیت اطمینان حل مسئله سینماتیک مستقیم را به طور همزمان ارتقاء می‌دهد. بر این اساس، ساختار مقاله به شرح زیر تنظیم شده‌است: در بخش نخست، مطالب مقدماتی و پیشینه پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است. بخش دوم به تشریح روش پیشنهادی بر پایه آنالیز بازه‌ای و فرم مقدار میانگین اختصاص یافته‌است. در بخش سوم، روش ارائه شده بر روی مکانیزم موازی صفحه‌ای 3-RRR پیاده‌سازی شده و در بخش چهارم، نتایج حاصل از آن با نتایج روش تحلیلی برآیند مقایسه شده‌است. در نهایت، بخش پنجم به جمع‌بندی یافته‌ها و نتیجه‌گیری اختصاص پیدا کرده‌است.

۲- تحلیل سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی با استفاده از آنالیز بازه‌ای و فرم مقدار میانگین

آنالیز بازه‌ای با فراهم کردن چارچوبی ریاضی، امکان انجام محاسبات با درجه اطمینان بالا و تضمین پوشش کامل جواب را فراهم می‌آورد. الگوریتم‌های تحلیلی مبتنی بر آنالیز بازه به طور کلی شامل چند مرحله اصلی هستند. ابتدا، بازه‌های اولیه متغیرها بر اساس محدودیت هندسه مکانیزم تعیین می‌شوند. اگر بازه‌ها بزرگ باشند، به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم می‌گردند. سپس، بازه‌های فاقد پاسخ، محاسبه شده از طریق آنالیز بازه‌ای، حذف می‌گردند. این فرآیند بازگشتی ادامه می‌یابد تا بازه‌ای با اندازه کافی کوچک و مطابق با دقت مطلوب حاصل شود. در کنار آن، روش پالایش مبتنی بر فرم مقدار میانگین، دقت نتایج را ارتقا می‌بخشد. این پالایش به طور مؤثر عرض اضافی در محاسبات بازه‌ای را برای حل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی صفحه‌ای کاهش داده و منجر به نتایجی دقیق‌تر می‌شود. این رویکرد تلفیقی، به طور ذاتی خطاهای ناشی از گرد کردن را پوشش داده و نتایج تضمین‌شده‌ای را با پوشش جامع تمامی حالات پاسخ ممکن ارائه می‌دهد.

به تحلیل حساسیت ربات‌های موازی نسبت به تغییرات پارامترهای هندسی می‌پردازد. فرزانه-کلورزی و همکاران [۲۵] نیز از روش تحلیل بازه‌ای برای تعیین فضای کاری مکانیزم‌های موازی با در نظر گرفتن محدودیت‌های مکانیکی، برخورد بین بازوها و موانع و تداخل بین اجزای مکانیزم استفاده کردند. هرچند آنالیز بازه‌ای، تضمین پوشش کامل را در حل معادلات فراهم می‌آورد، اما در مواجهه با سیستم‌های غیرخطی پیچیده مانند معادلات سینماتیکی، مشکل وابستگی متغیرها می‌تواند منجر به پدیده عرض اضافی در بازه‌های جواب شود. این پدیده، در نهایت دقت نتایج محاسباتی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. به منظور غلبه بر این چالش، ابزارهای تخصصی پالایش در ریاضیات محاسباتی توسعه یافته‌اند. به عنوان نمونه، گوتفارده و همکاران [۲۶] با استفاده از الگوریتم‌های پالایش عمومی، فضای کاری ربات‌های موازی کابلی را به دست آوردند. پورکریمان و همکاران [۲۷] نیز با استفاده از الگوریتم‌های پالایش، یک روش بازه‌ای برای محاسبه فضای کاری ربات‌های موازی دلتا سه و چهار درجه آزادی معرفی کردند.

یکی از کارآمدترین ابزارهای پالایش، فرم مقدار میانگین است. این روش با استفاده از گرادینان تابع در مرکز بازه، یک ارزیابی محدودتر و دقیق‌تر از تابع بازه‌ای ارائه و به طور مؤثری عرض اضافی تابع را کاهش می‌دهد. به عنوان نمونه، ورشوی و همکاران [۲۸]، الگوریتمی مبتنی بر محاسبات بازه‌ای و در نظر گرفتن محدودیت حرکت مفاصل فعال ارائه دادند که به تحلیل فضای کاری مکانیزم موازی سه درجه آزادی 3-RRR می‌پرداخت. آنها نشان داده‌اند که بدون اعمال پالایش، فاصله محاسبه شده برای فضای کاری ربات موازی 3-RRR به طور قابل توجهی بزرگ‌تر از مقدار واقعی است.

در نهایت، انتخاب روش مناسب برای حل مسئله سینماتیک مستقیم به عواملی همچون پیچیدگی ساختار مکانیزم موازی، تعداد درجات آزادی، دقت مورد نیاز و سرعت محاسبات بستگی دارد. با این حال، توسعه روش‌هایی کارآمد با قابلیت دستیابی به پاسخ‌های منحصر به فرد و پایدار، همچنان به عنوان یک چالش باز در حوزه مکانیزم‌های موازی به شمار می‌رود. از طرف دیگر، مطالعات متعددی در زمینه آنالیز بازه‌ای در تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم انجام شده‌است. اما تا به امروز، مطابق دانش فعلی، یک رویکرد ساختاریافته که به طور سامان‌مند روش آنالیز بازه‌ای را با فرآیند پالایش مبتنی بر فرم

الگوریتم ۲ آمده است، به این صورت عمل می‌کند که ابتدا بازه اولیه برای متغیرها تعریف می‌شود و تابع بدون اعمال پالایش، محاسبه می‌گردد. سپس تا زمانی که عرض بازه‌ها بزرگ‌تر از مقدار آستانه ϵ نباشد، فرآیند تکرار می‌شود. در هر مرحله، نقطه میانی و عرض بازه‌ها تعیین شده و مقدار تابع و گرادیان آن در نقطه میانی ارزیابی می‌گردد. با استفاده از فرم مقدار میانگین، بازه پالایش شده‌ی جدید به دست می‌آید و اشتراک آن با بازه قبل، محاسبه می‌شود. اگر این اشتراک تهی باشد، بازه از فضای جستجو حذف می‌شود. در غیر این صورت، بازه به زیربازه‌هایی تقسیم شده و فرآیند مجدد تکرار می‌شود. این روش به طور مؤثری عرض اضافی تابع f_i را در محاسبات بازه‌ای کاهش داده و منجر به نتایجی دقیق‌تر می‌گردد.

الگوریتم ۱- شبه کد الگوریتم پیشنهادی برای محاسبه سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی صفحه‌ای

۱- مقداردهی اولیه مختصات نقاط A_i در چارچوب ثابت:

- به ازای هر i از ۱ تا ۳:

$$A_i^{\text{fixed}} = (x_{A_i}, y_{A_i})$$

۲- محاسبه مختصات نقاط B_i (نقاط اتصال بازوهای فعال):

- به ازای هر i از ۱ تا ۳:

$$B_i^{\text{fixed}} = (x_{A_i} + l_1 \cos \theta_i, y_{A_i} + l_1 \sin \theta_i)$$

۳- مقداردهی بردار موقعیت نقاط C_i در چارچوب متحرک:

$$\mathbf{d}_i^{\text{moving}} = [x_{C_i} \quad y_{C_i}]$$

۴- تبدیل مختصات نقاط C_i به چارچوب ثابت:

$$C_i^{\text{fixed}} = \mathbf{P} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_i$$

\mathbf{P} : بردار موقعیت چارچوب متحرک در چارچوب ثابت

\mathbf{R} : ماتریس دوران

۵- استخراج معادلات سینماتیکی زنجیره‌های مکانیزم موازی:

$$f_i = \|C_i^{\text{fixed}} - B_i^{\text{fixed}}\|^2 - l_2^2$$

۶- مقداردهی مقادیر ثابت:

- پارامترهای طراحی (l_1, b, a) و (l_2)

- مقادیر مفاصل فعال $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

- حداکثر تکرار الگوریتم (N_{max})

- مقیاس (SC)

- خطای الگوریتم (ϵ)

- شمارنده $(i = 0)$

۷- تعیین بازه اولیه فضای جستجو و ذخیره در ماتریس \mathbf{Box}_T :

$$x_p = [\underline{x} \quad \bar{x}]$$

$$y_p = [\underline{y} \quad \bar{y}]$$

$$\theta_p = [\underline{\theta} \quad \bar{\theta}]$$

برای تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم با استفاده از آنالیز بازه‌ای، ابتدا معادله سینماتیک مستقیم مربوط به هر یک از زنجیره‌های سینماتیکی مکانیزم موازی در فضای پیکربندی سه‌درجه آزادی (شامل جابه‌جایی‌های x و y و دوران θ حول محور عمود بر صفحه) استخراج می‌شود. این معادلات شامل پارامترهای طراحی مکانیزم موازی، زوایای مفاصل فعال و همچنین موقعیت و جهت‌گیری سکوی متحرک هستند. پارامترهای طراحی مکانیزم موازی شامل طول رابطةا، موقعیت اتصال پایه‌های مکانیزم به سکوی ثابت و همچنین ابعاد سکوی متحرک مشخص می‌باشند. با توجه به تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی، موقعیت یا جهت‌گیری مفاصل فعال نیز به صورت مقادیر حقیقی مشخص، به عنوان ورودی به سیستم معادلات غیرخطی وارد می‌شوند. در نتیجه، سیستمی از معادلات غیرخطی به صورت f_1, f_2 و f_3 با سه متغیر x, y و θ حاصل می‌شود.

در ادامه، برای هر یک از این متغیرها، بازه اولیه تعریف شده و در سیستم معادلات قرار داده می‌شود. با بهره‌گیری از آنالیز بازه‌ای و اعمال پالایش بر مبنای فرم مقدار میانگین، بازه خروجی هر یک از این معادلات محاسبه می‌گردد. شرط وجود جواب در سیستم معادلات بازه‌ای این است که عدد صفر در بازه خروجی هر سه معادله قرار داشته باشد ($0 \in f_i$). اگر حتی یکی از بازه‌ها شامل مقدار صفر نباشد، آن بخش از فضای جستجو حذف می‌شود. در گام بعد، بزرگ‌ترین بازه از میان متغیرهای x, y و θ شناسایی و به دو زیربازه تقسیم می‌گردد. هر زیربازه به‌طور جداگانه در سیستم معادلات قرار می‌گیرد، بازه‌های f_i ها مجدداً محاسبه و شرط وجود جواب در آن‌ها بررسی می‌شود. تنها زیربازه‌هایی که در آن‌ها، هر سه معادله بازه‌ای شامل صفر هستند، ذخیره شده و سایر نواحی حذف می‌شوند. این فرآیند تقسیم بازه‌ها و بررسی شرط وجود جواب تا زمانی ادامه می‌یابد که عرض بازه‌های x, y و θ به مقدار دقت مورد نظر (ϵ) برسد. در پایان الگوریتم، بازه‌های باقیمانده، تمامی جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی را با دقت مشخص شده نشان می‌دهند. شبه کد این فرآیند در الگوریتم ۱ نمایش داده شده است.

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، در الگوریتم شماره ۱، روشی برای پالایش دقیق بازه توابع f_i بر اساس فرم مقدار میانگین ارائه شده است. این الگوریتم که شبه کد آن در

در غیر این صورت

- بازه تقسیم شده و فرآیند تکرار می‌شود

۳- حل سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی

3-RRR با استفاده از الگوریتم پیشنهادی

در این بخش، با استفاده از الگوریتم پیشنهادی، مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی سه درجه آزادی صفحه‌ای 3-RRR تحلیل می‌شود. طرح کلی این مکانیزم در شکل ۱ نشان داده شده‌است. در این مکانیزم، سکوی متحرک توسط سه زنجیره سینماتیکی یکسان به سکوی ثابت متصل می‌شود. هر زنجیره سینماتیکی از سه مفصل لولایی (دورانی) تشکیل شده‌است. در هر زنجیره سینماتیکی، مفصل متصل به سکوی ثابت، فعال است و دو مفصل دیگر غیرفعال می‌باشند. دو مفصل متصل به سکوی ثابت و متحرک از A_i و C_i و مفصل قرار گرفته در بین این دو مفصل با B_i نشان داده می‌شود.

برای به دست آوردن معادله سینماتیک مستقیم هر زنجیره سینماتیکی از مکانیزم موازی مذکور، چارچوب ثابت O_{xyz} بر روی مفصل A_1 و چارچوب متحرک $O'_{x'y'z'}$ بر روی مرکز سکوی متحرک قرار می‌گیرد. با توجه حرکت صفحه‌ای این مکانیزم، جهت‌گیری محور z' از چارچوب متحرک همواره ثابت و در جهت محور z از چارچوب ثابت می‌باشد، در حالی که جهت‌گیری محورهای x' و y' با تغییر ورودی‌های مکانیزم تغییر می‌کنند. بردار $\mathbf{P} = [x, y]^T$ به عنوان بردار موقعیت نقطه O' در چارچوب ثابت (موقعیت سکوی متحرک نسبت به چارچوب ثابت) تعریف می‌شود. به طور مشابه، بردار \mathbf{d}_i نیز بردار موقعیت نقطه C_i در چارچوب متحرک است. همچنین، جهت‌گیری مفصل فعال در زنجیره سینماتیکی i ، با θ_i نشان داده می‌شود. در نتیجه، موقعیت نقاط C_i در چارچوب ثابت بر اساس پارامترهای x ، y و θ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} [x_{C_i} \ y_{C_i}]^T &= \mathbf{P} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_i \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta \\ s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{ix} \\ d_{iy} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x + c_\theta d_{ix} - s_\theta d_{iy} \\ y + s_\theta d_{ix} + c_\theta d_{iy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

۸- تا زمانی که $diam(x_p) < \varepsilon$ و $i < N_{max}$ یا $diam(y_p) < \varepsilon$ یا $sc \times diam(\theta_p) < \varepsilon$

الف: محاسبه بازه‌های خروجی توابع f_i بر اساس بازه‌های ورودی x_p ، y_p و θ_p

ب: اعمال پالایش بر توابع f_i بر اساس الگوریتم ۲ و حذف عرض اضافی آن‌ها

ج: اگر $0 \in f_1$ و $0 \in f_2$ و $0 \in f_3$

- تقسیم بزرگ‌ترین بازه بین بازه‌های x_p ، y_p و

$sc \times \theta_p$ به دو زیربازه

- حذف بازه قبل و ذخیره دو زیربازه‌های ایجاد شده

در ماتریس \mathbf{Box}_T

- ادامه جستجو با زیربازه‌های جدید

د: در غیر این صورت

- حذف بازه x_p ، y_p و θ_p مورد بررسی

- ذخیره بازه در ماتریس \mathbf{Box}_D

ه: اضافه کردن شمارنده $i = i + 1$

۹- نمایش نتایج

- ترسیم بازه‌های x_p ، y_p ممکن از ماتریس \mathbf{Box}_T

- ترسیم بازه‌های x_p ، y_p ناممکن از ماتریس \mathbf{Box}_D

- نمایش بازه‌های x_p ، y_p و θ_p باقیمانده در \mathbf{Box}_T

الگوریتم ۲- شبه کد پالایش بازه تابع f_i به روش فرم

مقدار میانگین

۱- مقداردهی بازه‌های اولیه متغیرها:

$$X = [x_p, y_p, \theta_p]$$

۲- محاسبه اولیه بازه تابع f_i بدون پالایش

۳- تا زمانی که $\varepsilon < \omega(X)$

الف: محاسبه نقاط میانی بازه‌های مورد نظر (m):

$$m = mid(X)$$

ب: محاسبه عرض بازه‌های مورد نظر (ω):

$$\omega(X) = diam(X)$$

ج: محاسبه مقدار تابع f_i در نقاط m

$$f_{m_i} = f_i(m)$$

د: محاسبه فرم مقدار میانگین تابع:

$$f_{MVF_i} = f_{m_i} + \nabla f_i(X) \cdot (X - m)^T$$

$\nabla f_i(X)$: گرادیان تابع f_i در بازه‌های X

ه: محاسبه بازه حاصل با بازه قبل:

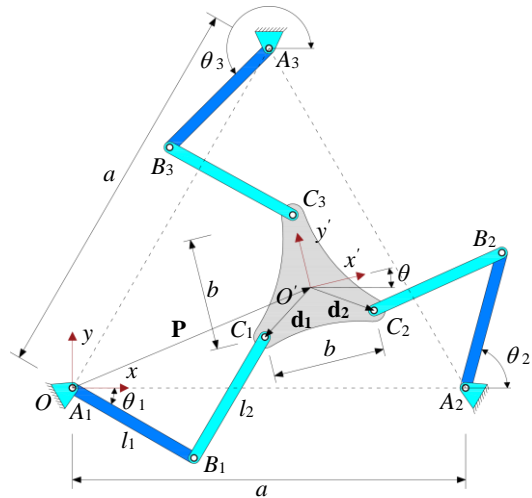
$$f_i = f_i \cap f_{MVF_i}$$

و: اگر $f_i = \emptyset$

- آنگاه بازه از فضای جستجو حذف می‌شود

$$\begin{aligned}
 & -100(xc_{\theta_1} + ys_{\theta_1}); \\
 f_2 = & x^2 + y^2 + (181600/9) \\
 & +4000(c_{\theta}s_{\theta_2} - s_{\theta}c_{\theta_2})/3 \\
 & +80(xs_{\theta} - yc_{\theta})/3 \\
 & -2000(s_{\theta}s_{\theta_2} + c_{\theta}c_{\theta_2}) \\
 & +40(xc_{\theta} + ys_{\theta}) \\
 & -100(xc_{\theta_2} + ys_{\theta_2}) \\
 & -5600c_{\theta} - (11200s_{\theta})/3 \\
 & +14000c_{\theta_2} - 280x; \\
 f_3 = & x^2 + y^2 + (182800/9) \\
 & -8000(c_{\theta}s_{\theta_3} - s_{\theta}c_{\theta_3})/3 \\
 & -160(xs_{\theta} - yc_{\theta})/3 \\
 & +11200(s_{\theta} - \sqrt{3}c_{\theta})/3 \\
 & -100(xc_{\theta_3} + ys_{\theta_3}) \\
 & +7000(c_{\theta_3} + \sqrt{3}s_{\theta_3}) \\
 & -140(x + \sqrt{3}y);
 \end{aligned}$$

پس از محاسبه معادله‌های سینماتیک مستقیم هر یک از زنجیره‌های مکانیزم موازی صفحه‌ای 3-RRR، مقادیر هر یک از مفاصل فعال $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ، حداکثر تکرار (N_{max}) ، مقیاس (sc) و مقدار خطا (ε) به الگوریتم وارد می‌شود. یک مقدار بزرگ برای حداکثر تعداد تکرار انتخاب می‌شود تا این پارامتر به عنوان عامل توقف الگوریتم در نظر گرفته نشود (مثلاً $N_{max} = 10000$). در واقع الگوریتم زمانی متوقف می‌شود که عرض بازه‌های مورد بررسی در هر تکرار کوچک‌تر از ε گردد. عدد مقیاس نیز برابر $180/\pi$ در نظر گرفته می‌شود تا سنجش عرض بازه θ_p بر حسب درجه انجام شود. در نهایت مقدار خطا نیز برابر $\varepsilon = 0.0001$ در نظر گرفته می‌شود. بازه‌های $\theta_p = [0^\circ \ 360^\circ]$ و $y_p = [-20 \ 140]$ ، $x_p = [-10 \ 150]$ نیز به عنوان بازه اولیه انتخاب می‌شوند تا تمامی فضای جستجوی قابل دسترس را پوشش دهند. در واقع، بازه‌های اولیه x_p و y_p در گام ۷ در الگوریتم ۱، بر این اساس انتخاب شدند که تمام فضای کاری ربات موازی 3-RRR، با در نظر گرفتن پارامترهای هندسی جدول ۱ پوشش داده شود. بدین ترتیب، تضمین می‌شود که هیچ یک از جواب‌های حقیقی و فیزیکی مسئله سینماتیک مستقیم ربات موازی، در فرآیند جستجو نادیده گرفته نخواهند شد. از طرفی، بازه $\theta_p = [0^\circ \ 360^\circ]$ نیز تمامی پیکربندی‌های دورانی ممکن سکوی متحرک را شامل می‌شود. با قرار دادن بازه‌های مورد بررسی $(x_p = [\underline{x} \ \bar{x}])$ ، $(y_p = [\underline{y} \ \bar{y}])$ ، $(\theta_p = [\underline{\theta} \ \bar{\theta}])$ ، سه معادله سینماتیکی به صورت بازه‌ای در هر تکرار حاصل خواهد شد. به عنوان نمونه، در صورت قرار دادن بازه‌های مذکور در بالا در رابطه (۳)، به ازای



شکل ۱- طرح شماتیک مکانیزم موازی سه درجه آزادی 3-RRR

جدول ۱- پارامترهای طراحی مکانیزم موازی 3-RRR

a (cm)	b (cm)	l_1 (cm)	l_2 (cm)
۱۴۰	۴۰	۵۰	۵۰

در رابطه فوق، R ماتریس دوران چارچوب متحرک (سکوی متحرک) نسبت به چارچوب ثابت، $\mathbf{d}_1 = [-\frac{b}{2}, -\frac{b}{3}]^T$ ، (رأس‌های مثلث متساوی الساقین سکوی متحرک در چارچوب متحرک)، $\mathbf{d}_2 = [\frac{b}{2}, -\frac{b}{3}]^T$ و $\mathbf{d}_3 = [0, \frac{2b}{3}]^T$ (رأس‌های مثلث متساوی و $c_{\theta} = \cos(\theta)$ می‌باشد. از طرفی، موقعیت مفاصل B_i به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{A_i} + l_1 c_{\theta} \\ y_{A_i} + l_1 s_{\theta} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

در این رابطه، $A_3 = [\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}]$ ، $A_2 = [a, 0]$ ، $A_1 = [0, 0]$ (رأس‌های مثلث متساوی‌الاضلاع سکوی ثابت در چارچوب ثابت) است. با نوشتن معادله $B_i C_i$ و قرار دادن مقادیر B_i ها و C_i ها، معادله سینماتیک مستقیم زنجیره نام (f_i) ، به ازای مقادیر ورودی‌ها و پارامترهای طراحی جدول ۱، به صورت روابط زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
 f_1 = & x^2 + y^2 + (5200/9) \\
 & +4000(c_{\theta}s_{\theta_1} - s_{\theta}c_{\theta_1})/3 \\
 & +80(xs_{\theta} - yc_{\theta})/3 \\
 & +2000(s_{\theta}s_{\theta_1} + c_{\theta}c_{\theta_1}) \\
 & -40(xc_{\theta} + ys_{\theta})
 \end{aligned} \quad (۳)$$

حاصل از اجرای الگوریتم پیشنهادی بر روی مکانیزم موازی صفحه‌ای 3-RRR به ازای مقادیر مختلف زوایای مفصلی در شکل‌های ۲-الف الی ۲-د، نشان داده شده‌است. لازم به توضیح است که با توجه به محدودیت ترسیم دوبعدی، فقط بازه‌های x و y به صورت گرافیکی قابل ترسیم است. اما، نتایج هر سه بازه خروجی الگوریتم (x_p, y_p, θ_p) ، متناظر با شکل‌های مذکور، در جدول ۲ آورده شده‌است. ملاحظه می‌گردد که تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم با استفاده از الگوریتم پیشنهادی به ازای زوایای مفصلی $\theta_1 = 60^\circ$ ، $\theta_2 = 150^\circ$ ، $\theta_3 = 240^\circ$ و $\theta_3 = 270^\circ$ ، $\theta_2 = 120^\circ$ ، $\theta_1 = 45^\circ$ بازه، به ازای $\theta_3 = 270^\circ$ و $\theta_2 = 180^\circ$ ، $\theta_1 = -30^\circ$ به چهار بازه و به ازای $\theta_1 = 90^\circ$ ، $\theta_2 = 120^\circ$ و $\theta_3 = 300^\circ$ به دو بازه منتج شده‌است. با توجه به اینکه خطا برابر با $\varepsilon = 0.0001$ در نظر گرفته شده‌است، کران پایین و بالای تمامی بازه‌های باقیمانده، تا سه رقم اعشار یکسان هستند. بنابراین هر بازه می‌تواند معادل یک عدد حقیقی با دقت سه رقم اعشار در نظر گرفته شود. به عنوان مثال، دو جواب به دست آمده از الگوریتم پیشنهادی به ازای مقادیر زوایای مفصلی $\theta_1 = 90^\circ$ ، $\theta_2 = 120^\circ$ و $\theta_3 = 300^\circ$ و خطای $\varepsilon = 0.0001$ در جدول ۲ آورده شده‌است. ملاحظه می‌گردد، با توجه به اینکه $\varepsilon = 0.0001$ انتخاب شده‌است، کران‌های پایین و بالای بازه‌ها تا سه رقم اعشار با هم برابر می‌باشند. این در حالی است که اگر مقدار خطا به ترتیب برابر با $\varepsilon = 0.001$ و $\varepsilon = 0.00001$ در نظر گرفته شود، کران‌های پایین و بالای تمامی بازه‌های باقیمانده تا دو و چهار رقم اعشار با هم برابر خواهند شد.

۴- مقایسه نتایج الگوریتم پیشنهادی با نتایج روش

حذفی برآیند

در این بخش، به منظور ارزیابی نتایج حاصل از الگوریتم پیشنهادی، از روش برآیند^۱ در تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم استفاده شده و نتایج این روش با نتایج بازه‌ای حاصل از الگوریتم پیشنهادی مقایسه می‌گردد. روش حذفی برآیند، روشی مؤثر برای کاهش گام‌به‌گام یک سیستم معادلات و تبدیل آن به یک عبارت تک‌متغیره^۲ می‌باشد. در این روش، یک یا چند متغیر از دستگاه معادلات حذف می‌شوند،

زوایای مفصلی $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ ، $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ و $\theta_3 = \frac{4\pi}{3}$ عبارت‌های سینماتیکی بازه‌ای به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} f_1 &= [-10 \ 150]^2 + [-20 \ 140]^2 + (5200/9) \\ &+ 4000 (\cos[0 \ 2\pi] \sin \frac{\pi}{3} - \sin[0 \ 2\pi] \cos \frac{\pi}{3}) / 3 \\ &+ 80([-10 \ 150] \sin[0 \ 2\pi] - [-20 \ 140] \cos[0 \ 2\pi]) / 3 \\ &+ 2000 (\sin[0 \ 2\pi] \sin \frac{\pi}{3} + \cos[0 \ 2\pi] \cos \frac{\pi}{3}) \\ &- 40([-10 \ 150] \cos[0 \ 2\pi] + [-20 \ 140] \sin[0 \ 2\pi]) \\ &- 100 ([-10 \ 150] \cos \frac{\pi}{3} + [-20 \ 140] \sin \frac{\pi}{3}); \\ f_2 &= [-10 \ 150]^2 + [-20 \ 140]^2 + (181600/9) \\ &+ 4000 (\cos[0 \ 2\pi] \sin \frac{5\pi}{6} - \sin[0 \ 2\pi] \cos \frac{5\pi}{6}) / 3 \\ &+ 80([-10 \ 150] \sin[0 \ 2\pi] - [-20 \ 140] \cos[0 \ 2\pi]) / 3 \\ &- 2000 (\sin[0 \ 2\pi] \sin \frac{5\pi}{6} + \cos[0 \ 2\pi] \cos \frac{5\pi}{6}) \\ &+ 40([-10 \ 150] \cos[0 \ 2\pi] + [-20 \ 140] \sin[0 \ 2\pi]) \\ &- 100 ([-10 \ 150] \cos \frac{5\pi}{6} + [-20 \ 140] \sin \frac{5\pi}{6}) \\ &- 5600 \cos[0 \ 2\pi] - (11200 \sin[0 \ 2\pi]) / 3 \\ &+ 14000 \cos \frac{5\pi}{6} - 280[-10 \ 150]; \\ f_3 &= [-10 \ 150]^2 + [-20 \ 140]^2 + (182800/9) \\ &- 8000 (\cos[0 \ 2\pi] \sin \frac{4\pi}{3} - \sin[0 \ 2\pi] \cos \frac{4\pi}{3}) / 3 \\ &- 160([-10 \ 150] \sin[0 \ 2\pi] - [-20 \ 140] \cos[0 \ 2\pi]) / 3 \\ &+ 11200 (\sin[0 \ 2\pi] - \sqrt{3} \cos[0 \ 2\pi]) / 3 \\ &- 100 ([-10 \ 150] \cos \frac{4\pi}{3} + [-20 \ 140] \sin \frac{4\pi}{3}) \\ &+ 7000 (\cos \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{4\pi}{3}) \\ &- 140([-10 \ 150] + \sqrt{3}[-20 \ 140]); \end{aligned} \quad (۴)$$

در ادامه با به‌کارگیری قوانین حساب بازه‌ای و انجام پلایش با استفاده از روش فرم مقدار میانگین مطابق با الگوریتم ۲، بازه هر یک از توابع f_1 ، f_2 و f_3 در هر تکرار حاصل خواهد شد. به عنوان مثال، با انجام عملیات پلایش بر روی معادله‌های رابطه (۴)، بازه هر یک از آن‌ها به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} f_1 &= [-1.1856 \ 1.2381] \times 10^5; \\ f_2 &= [-1.4849 \ 1.5252] \times 10^5; \\ f_3 &= [-1.3297 \ 1.3320] \times 10^5; \end{aligned} \quad (۵)$$

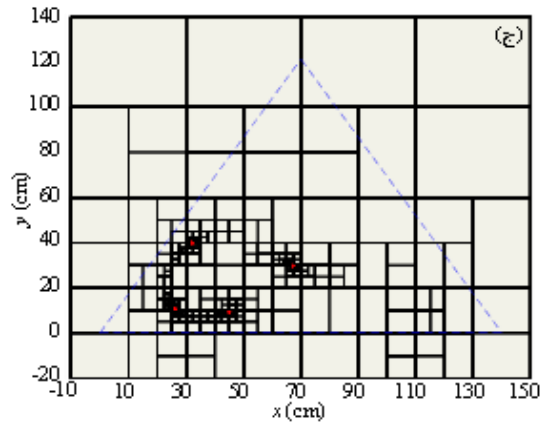
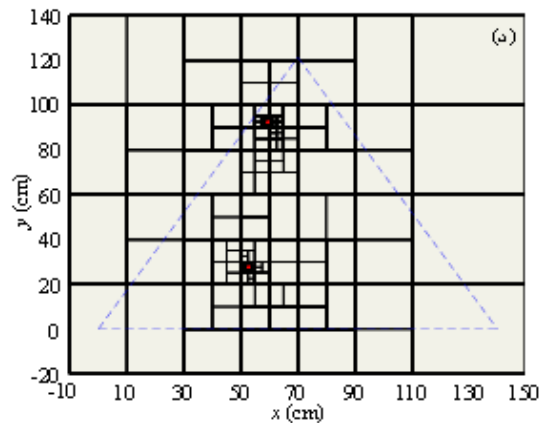
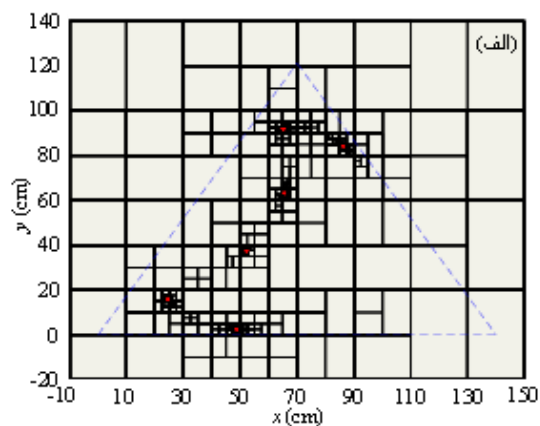
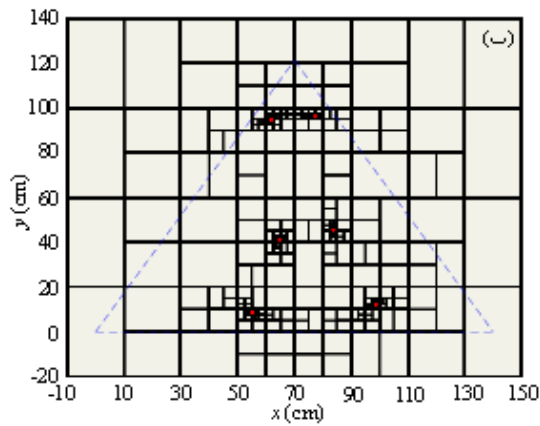
با توجه به اینکه مقدار صفر در تمام بازه‌های به دست آمده برای معادله‌های سینماتیک وجود دارد ($0 \in f_1$)، $0 \in f_2$ و $0 \in f_3$ ، بازه مورد بررسی به دو زیربازه تقسیم و این فرآیند بر روی آن‌ها انجام می‌شود. الگوریتم مذکور آن‌قدر تکرار می‌شود تا عرض بازه‌ها به دقت مورد نظر (ε) برسد. در نهایت، جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی به صورت بازه‌هایی با دقت ε حاصل می‌گردد. به عنوان نمونه، نتایج

² Univariate expression

¹ Resultant method

آنگاه برآیند آن‌ها برای حذف متغیر x ، به صورت دترمینان ماتریس رابطه (۸) با ابعاد $(m+n) \times (m+n)$ تعریف می‌شود

به‌گونه‌ای که معادله نهایی حاصل، بازتاب‌دهنده اثر تمامی معادلات اولیه خواهد بود. درجه عبارت تک متغیره‌ی نهایی نیز برابر با تعداد جواب‌های ممکن آن دستگاه معادلات خواهد بود. به‌طور خلاصه، اگر دو چندجمله‌ای f و g ، به ترتیب از درجات m و n ، به صورت روابط (۶) و (۷) بیان شده باشند،



شکل ۲- تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی 3-RRR به ازای زوایای مفصلی

الف) $\theta_1 = 60^\circ$, $\theta_2 = 150^\circ$, $\theta_3 = 240^\circ$ ب) $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 120^\circ$, $\theta_3 = 270^\circ$

ج) $\theta_1 = -30^\circ$, $\theta_2 = 180^\circ$, $\theta_3 = 270^\circ$ د) $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 120^\circ$, $\theta_3 = 300^\circ$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & a_2 & \ddots & a_0 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 \\ a_m & \vdots & \ddots & a_1 & b_n & \vdots & \ddots & b_1 \\ 0 & a_m & 0 & a_2 & 0 & b_n & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_m & 0 & 0 & 0 & b_n \end{vmatrix}$$

$$f = a_0x^m + \dots + a_m, a_0 \neq 0, m > 0 \quad (۶)$$

$$g = b_0x^n + \dots + b_n, b_0 \neq 0, n > 0 \quad (۷)$$

$$\text{Resultant}(f, g, x) = \quad (۸)$$

مقایسه نتایج حاصل از این روش با الگوریتم پیشنهادی فراهم گردد. با توجه به تحلیل مسئله سینماتیک مستقیم این مکانیزم، مقادیر θ_1 ، θ_2 و θ_3 مشخص می‌باشند. با قرار دادن این مقادیر در دستگاه معادلات مربوط به رابطه ۳ و اعمال زوایای مفصلی $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ ، $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ و $\theta_3 = \frac{4\pi}{3}$ سه معادله سینماتیکی f_1 ، f_2 و f_3 بر حسب متغیرهای x ، y و θ به دست می‌آیند. همان‌طور که در رابطه ۳ مشاهده می‌شود، این معادلات شامل توابع مثلثاتی از متغیر θ هستند. برای حذف این توابع و ساده‌سازی روابط، از تغییر متغیر تانژانت نصف زاویه θ به صورت $t = \tan(\theta/2)$ ، $\sin \theta = 2t/(1+t^2)$ و $\cos \theta = (1-t^2)/(1+t^2)$ استفاده می‌شود. در ادامه، با دو مرحله به‌کارگیری روش برآیند به صورت زیر، متغیرهای x ، y حذف و عبارت تک‌متغیره نهایی بر حسب t استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} f_{12}(y, t) &= \text{Resultant}(f_1, f_2, x); \\ f_{13}(y, t) &= \text{Resultant}(f_1, f_3, x); \\ f(t) &= \text{Resultant}(f_{12}, f_{13}, y); \end{aligned} \quad (9)$$

لازم به ذکر است که ترتیب حذف این دو متغیر در شکل‌گیری عبارت تک‌متغیره نهایی مؤثر است. به‌منظور اطمینان از صحت عبارت نهایی و عدم وابستگی آن به ترتیب حذف، فرآیند مذکور دو بار، یک بار با حذف متوالی x و سپس y ، و بار دیگر با حذف متوالی y و سپس x انجام می‌شود. در نهایت، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک میان دو نتیجه، به‌عنوان عبارت صحیح تک‌متغیره نهایی بر حسب t در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب، تنها عبارتهایی که ریشه‌های معتبر دستگاه را شامل می‌شوند، باقی خواهند ماند. با انجام این فرآیند بر روی معادلات سینماتیکی رابطه ۳ و برای مجموعه مشخصی از زوایای مفصلی $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ ، $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ و $\theta_3 = \frac{4\pi}{3}$ عبارت تک‌متغیره نهایی به صورت رابطه (۱۰) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} f(y, t) &= t^6 - 0.093366083t^5 \\ &- 1.435628702t^4 - 0.0904725157t^3 \\ &+ 0.092865918t^2 + 0.0028935669t \\ &- 0.0005490649 \end{aligned} \quad (10)$$

نتایج این تحلیل نشان می‌دهد که عبارت تک‌متغیره نهایی مکانیزم موازی 3-RRR به ازای هر مجموعه از زوایای مفصلی

در رابطه‌ی فوق، ضرایب a_i و b_i ، مقادیر ثابت یا چندجمله‌ای‌هایی بر حسب پارامترهایی غیر از x هستند و سایر درایه‌ها، صفر می‌باشند. در حالتی که بیشتر از دو متغیر در دستگاه معادلات وجود داشته باشد، فرآیند حذف متغیرها به دفعات بیشتری تکرار می‌شود. در این میان، جایگذاری معکوس در معادلات نیز از اهمیت بالایی برخوردار است. برای یافتن تمامی جواب‌های دستگاه، لازم است ریشه‌های عبارت تک‌متغیره نهایی در معادلات قبلی جایگذاری و جواب‌های مشترک استخراج گردد.

جدول ۲- بازه جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی 3-RRR به ازای زوایای مفصلی مختلف و $\varepsilon = 0.0001$

$\theta_1 = 60^\circ$ $\theta_2 = 150^\circ$ $\theta_3 = 240^\circ$	$x = [48.788 \ 48.788]$ $y = [2.572 \ 2.572]$ $\theta = [-11.07^\circ \ -11.07^\circ]$	$x = [24.495 \ 24.495]$ $y = [15.664 \ 15.664]$ $\theta = [25.90^\circ \ 25.90^\circ]$
	$x = [65.474 \ 65.474]$ $y = [63.176 \ 63.176]$ $\theta = [-94.60^\circ \ -94.60^\circ]$	$x = [52.281 \ 52.281]$ $y = [37.451 \ 37.451]$ $\theta = [102.71^\circ \ 102.71^\circ]$
	$x = [65.101 \ 65.101]$ $y = [91.954 \ 91.954]$ $\theta = [-30.55^\circ \ -30.55^\circ]$	$x = [86.280 \ 86.280]$ $y = [84.301 \ 84.301]$ $\theta = [7.61^\circ \ 7.61^\circ]$
$\theta_1 = 45^\circ$ $\theta_2 = 120^\circ$ $\theta_3 = 270^\circ$	$x = [98.711 \ 98.711]$ $y = [12.169 \ 12.169]$ $\theta = [-17.95^\circ \ -17.95^\circ]$	$x = [55.154 \ 55.154]$ $y = [8.573 \ 8.573]$ $\theta = [33.29^\circ \ 33.29^\circ]$
	$x = [83.748 \ 83.748]$ $y = [45.554 \ 45.554]$ $\theta = [-99.07^\circ \ -99.07^\circ]$	$x = [64.894 \ 64.894]$ $y = [41.097 \ 41.097]$ $\theta = [111.96^\circ \ 111.96^\circ]$
	$x = [61.856 \ 61.856]$ $y = [94.847 \ 94.847]$ $\theta = [-9.90^\circ \ -9.90^\circ]$	$x = [77.310 \ 77.310]$ $y = [96.357 \ 96.357]$ $\theta = [21.40^\circ \ 21.40^\circ]$
$\theta_1 = -30^\circ$ $\theta_2 = 180^\circ$ $\theta_3 = 270^\circ$	$x = [45.140 \ 45.140]$ $y = [9.314 \ 9.314]$ $\theta = [-63.40^\circ \ -63.40^\circ]$	$x = [67.182 \ 67.182]$ $y = [29.784 \ 29.784]$ $\theta = [87.72^\circ \ 87.72^\circ]$
	$x = [26.094 \ 26.094]$ $y = [10.578 \ 10.578]$ $\theta = [-18.84^\circ \ -18.84^\circ]$	$x = [32.144 \ 32.144]$ $y = [39.918 \ 39.918]$ $\theta = [25.80^\circ \ 25.80^\circ]$
$\theta_1 = 90^\circ$ $\theta_2 = 120^\circ$ $\theta_3 = 300^\circ$	$x = [59.545 \ 59.545]$ $y = [92.162 \ 92.162]$ $\theta = [-12.54^\circ \ -12.54^\circ]$	$x = [52.702 \ 52.702]$ $y = [27.493 \ 27.493]$ $\theta = [3.56^\circ \ 3.56^\circ]$

جدول ۳- بازه‌ی کامل جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی 3-RRR به ازای $\theta_1 = 90^\circ$ ، $\theta_2 = 120^\circ$ و $\theta_3 = 300^\circ$ و $\varepsilon = 0.0001$

$x = [52.70172119140624 \ 52.70187377929688]$ $y = [27.49259948730468 \ 27.49275207519532]$ $\theta = [3.55905532836860^\circ \ 3.55931282043463^\circ]$
$x = [59.54490661621092 \ 59.54505920410158]$ $y = [92.16201782226561 \ 92.16217041015626]$ $\theta = [-12.54312515258800^\circ \ -12.54278182983359^\circ]$

در ادامه، مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی 3-RRR با استفاده از روش برآیند بررسی می‌شود تا امکان

روش تضمین‌شده را در حوزه کنترل بلادرنگ روشن‌تر سازد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک رویکرد ترکیبی بر پایه آنالیز بازه‌ای و پالایش بر مبنای فرم مقدار میانگین برای حل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی 3-RRR و مقایسه با روش تحلیلی بر روی مکانیزم موازی 3-RRR و مقایسه با روش تحلیلی برآیند، نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی با بهره‌گیری از آنالیز بازه‌ای، امکان شناسایی جامع پاسخ‌های ممکن را فراهم کرده و با استفاده از الگوریتم پالایش، دقت محاسبات و اطمینان نتایج به صورت سامان‌مند بهبود یافته‌است. این تلفیق، به عنوان سهم اصلی نوآوری مقاله، یک چارچوب تضمین‌شده و کارآمد برای حل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم‌های موازی ارائه می‌دهد.

جدول ۴- جواب‌های حقیقی مسئله سینماتیک مستقیم

مکانیزم موازی 3-RRR به ازای زوایای مفصلی مختلف با

استفاده از روش حذفی برآیند

$\theta_1 = 60^\circ$ $\theta_2 = 150^\circ$ $\theta_3 = 240^\circ$	$x = 48.788$ $y = 2.572$ $\theta = -11.070^\circ$	$x = 24.495$ $y = 15.664$ $\theta = 25.90^\circ$
	$x = 65.474$ $y = 63.176$ $\theta = -94.60^\circ$	$x = 52.281$ $y = 37.451$ $\theta = 102.71^\circ$
	$x = 65.101$ $y = 91.954$ $\theta = -30.55^\circ$	$x = 86.280$ $y = 84.301$ $\theta = 7.61^\circ$
$\theta_1 = 45^\circ$ $\theta_2 = 120^\circ$ $\theta_3 = 270^\circ$	$x = 98.711$ $y = 12.169$ $\theta = -17.95^\circ$	$x = 55.154$ $y = 8.573$ $\theta = 33.29^\circ$
	$x = 83.748$ $y = 45.554$ $\theta = -99.07^\circ$	$x = 64.894$ $y = 41.097$ $\theta = 111.96^\circ$
	$x = 61.856$ $y = 94.847$ $\theta = -9.90^\circ$	$x = 77.310$ $y = 96.357$ $\theta = 21.40^\circ$
$\theta_1 = -30^\circ$ $\theta_2 = 180^\circ$ $\theta_3 = 270^\circ$	$x = 45.140$ $y = 9.314$ $\theta = -63.40^\circ$	$x = 67.182$ $y = 29.784$ $\theta = 87.72^\circ$
	$x = 26.094$ $y = 10.578$ $\theta = -18.84^\circ$	$x = 32.144$ $y = 39.918$ $\theta = 25.80^\circ$
$\theta_1 = 90^\circ$ $\theta_2 = 120^\circ$ $\theta_3 = 300^\circ$	$x = 59.545$ $y = 92.162$ $\theta = -12.54^\circ$	$x = 52.702$ $y = 27.493$ $\theta = 3.56^\circ$

θ_1 ، θ_2 و θ_3 همواره از درجه شش خواهد بود. این مسئله نشان می‌دهد که در حالت کلی، مکانیزم می‌تواند حداکثر شش جواب برای مسئله سینماتیک مستقیم داشته باشد. در حالتی که تمامی ریشه‌های عبارت تک متغیره نهایی حقیقی باشند، شش موقعیت و جهت‌گیری معتبر برای سکوی متحرک قابل استخراج خواهد بود. اما در صورتی که برخی از ریشه‌ها مختلط باشند، فقط ریشه‌های حقیقی به عنوان جواب‌های فیزیکی معتبر منظور می‌شوند. به عنوان مثال، اگر به ازای مجموعه‌ای از مقادیر مشخص θ_1 ، θ_2 و θ_3 ، چهار ریشه حقیقی و دو ریشه مختلط به دست آید، تنها چهار موقعیت و جهت‌گیری برای سکوی متحرک قابل پیاده‌سازی خواهد بود. در نهایت، با جایگذاری ریشه‌های حقیقی عبارت تک متغیره نهایی در معادلات قبل، تمامی جواب‌های مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی استخراج می‌شود. این نتایج، متناظر با مقادیر زوایای مفصلی ارائه شده در جدول ۲، در جدول ۴ آورده شده‌است. مقایسه نتایج حاصل از الگوریتم بازه‌ای پیشنهادی (شکل ۲ و جدول ۲) با نتایج حاصل از روش حذفی برآیند (جدول ۴) نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی از دقت بالایی در حل مسئله سینماتیک مستقیم مکانیزم موازی برخوردار است.

حل مسئله سینماتیک مستقیم در ربات‌های موازی برای طراحی کنترلر نیز حیاتی می‌باشد. زیرا کنترلر برای عملکرد صحیح، به موقعیت دقیق سکو نیاز دارد. رویکرد مبتنی بر آنالیز بازه‌ای با تضمین شناسایی تمامی جواب‌های ممکن و دقت دلخواه، از همگرایی کنترلر به پاسخ نادرست جلوگیری می‌کند. با این حال، ماهیت چند-پاسخی این ربات‌ها مستلزم انتخاب جواب فیزیکی صحیح از میان راه‌حل‌های شناسایی شده با استفاده از تاریخچه مسیر و ورودی‌های حسگرها است. در مقابل، روش‌های مبتنی بر هوش مصنوعی اگرچه برای محاسبات بلادرنگ سریع‌تر هستند، اما فاقد تضمین دقت و پوشش کامل می‌باشند. لذا، در تحقیقات آینده انجام مقایسه‌ای کمی از منظر زمان اجرا و پیچیدگی محاسباتی میان روش پیشنهادی و رویکردهای نوین هوش مصنوعی در کنترل ربات‌های موازی، می‌تواند جایگاه کاربردی این

مراجع

- [14] Mostashiri N, Akbarzadeh A, Rezaei A (2017) Implementing the homotopy continuation method in a hybrid approach to solve the kinematics problem of spatial parallel robots. *Intelligent Service Robotics* 10(3): 257–270.
- [15] Varshovi-Jaghargh P, Tale-Masouleh M, Naderi D (2019) Forward kinematic analysis of parallel mechanisms in seven-dimensional kinematic space by considering limitation of passive joints motion. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering* 43(2): 315–329.
- [16] Wu X, Xie Z (2019) Forward kinematics analysis of a novel 3-DOF parallel manipulator. *Scientia Iranica. Transaction B, Mechanical Engineering* 26(1): 346–357.
- [17] Chauhan DKS, Vundavilli PR (2022) Forward kinematics of the Stewart parallel manipulator using machine learning. *International Journal of Computational Methods* 19(8): 2142009.
- [18] Tavassolian F, Khotanlou H, Varshovi-Jaghargh P (2023) Forward kinematic analysis of spatial parallel robots using a parallel evolutionary neural networks. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering* 47(3): 1079–1092.
- [19] Huynh BP (2024) Adaptive ANN-BFO Hybrid Method for Solving the Forward Kinematics Problem of a Hexa Parallel Robot. *International Journal of Control, Automation and Systems* 22(9): 2891–2898.
- [20] Moore RE, Kearfott RB, Cloud MJ (2009) Introduction to interval analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [21] Merlet JP (2004) Solving the forward kinematics of a Gough-type parallel manipulator with interval analysis. *The International Journal of robotics research* 23(3): 221–235.
- [22] Hao F, Merlet JP (2005) Multi-criteria optimal design of parallel manipulators based on interval analysis. *Mechanism and machine theory* 40(2): 157–171.
- [23] Daney D, Andreff N, Chabert G, Papegay Y (2006) Interval method for calibration of parallel robots: Vision-based experiments. *Mechanism and Machine Theory* 41(8): 929–944.
- [24] Tannous M, Caro S, Goldsztejn A (2014) Sensitivity analysis of parallel manipulators using an interval linearization method. *Mechanism and Machine Theory* 71: 93–114.
- [25] Farzaneh-Kaloorazi M, Tale-Masouleh M, Caro S (2017) Collision-free workspace of parallel mechanisms based on an interval analysis approach. *Robotica* 35(8): 1747–1760.
- [1] Griffis M, Duffy J (1989) A forward displacement analysis of a class of Stewart platforms. *Journal of Robotic Systems* 6(6): 703–720.
- [2] Gosselin CM, Merlet JP (1994) The direct kinematics of planar parallel manipulators: special architectures and number of solutions. *Mechanism and Machine Theory* 29(8): 1083–1097.
- [3] Husty ML (1996) An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-Gough platforms. *Mechanism and Machine Theory* 31(4): 365–379.
- [4] Merlet JP (1996) Direct kinematics of planar parallel manipulators. in *Proceedings of IEEE international conference on robotics and automation*. 4: 3744–3749.
- [5] Seng Yee C, Lim KB (1997) Forward kinematics solution of Stewart platform using neural networks. *Neurocomputing* 16(4): 333–349.
- [6] Lee, TY, Shim JK (2001) Forward kinematics of the general 6–6 Stewart platform using algebraic elimination. *Mechanism and Machine Theory* 36(9): 1073–1085.
- [7] Parikh PJ, Lam SS (2005) A hybrid strategy to solve the forward kinematics problem in parallel manipulators. *IEEE Transactions on Robotics* 21(1): 18–25.
- [8] Gan D, Liao Q, Dai JS, Wei S, Seneviratne LD (2009) Forward displacement analysis of the general 6–6 Stewart mechanism using Gröbner bases. *Mechanism and Machine Theory* 44(9): 1640–1647.
- [9] Tale-Masouleh M, Gosselin C, Husty M, Walter DR (2011) Forward kinematic problem of 5-RPUR parallel mechanisms (3T2R) with identical limb structures. *Mechanism and Machine Theory* 46(7): 945–959.
- [10] Morell A, Tarokh M, Acosta L (2013) Solving the forward kinematics problem in parallel robots using Support Vector Regression. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 26(7): 1698–1706.
- [11] Varshovi-Jaghargh P, Naderi D, Tale-Masouleh M (2014) Forward kinematic problem of three 4-DOF parallel mechanisms (4-PRUR1, 4-PRUR2 and 4-PUU) with identical limb structures performing 3T1R motion pattern. *Scientia Iranica* 21(5): 1671–1682.
- [12] Naderi D, Tale-Masouleh M, Varshovi-Jaghargh P (2016) Gröbner basis and resultant method for the forward displacement of 3-DoF planar parallel manipulators in seven-dimensional kinematic space. *Robotica* 34(11): 2610–2628.
- [13] Nag A, Mohan S, Bandyopadhyay S (2017) Forward kinematic analysis of the 3-RPRS parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory* 116: 262–272.

- [28] Varshovi-Jaghargh P, Tale-Masouleh M, Karimi M, Pourkariman F (2023) Workspace of 3-RRR parallel robot using the combination of interval analysis and refinement methods by considering the limitation of active joints movement. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 13(3): 29–43.
- [26] Gouttefarde, M, Daney D, Merlet J.-P (2010) Interval-analysis-based determination of the wrench-feasible workspace of parallel cable-driven robots. *IEEE Transactions on Robotics* 27(1): 1–13.
- [27] Pourkariman, F, Karimi M, Varshovi-Jaghargh P, Tale-Masouleh M (2025) Workspace analysis of parallel mechanisms by considering active joints ranges of motion using a method based on interval analysis. *Meccanica*, 60: 1015–1034.