



شبیه‌سازی و تحلیل وقوع لرزش در فرایند تراش کاری متعامد با رویکرد انرژی

محمد قربانی^{۱*}، مصطفی سرجوقیان^۲^۱ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، پردیس شهرضا، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران^۲ دانش‌آموخته کارشناسی، گروه مهندسی مکانیک، پردیس شهرضا، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۰۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۶/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۱۵

چکیده

این مقاله به شبیه‌سازی و تحلیل ارتعاشات قطعه‌کار در فرایند تراش کاری متعامد، از لحظه شروع درگیری ابزار با قطعه‌کار، با هدف انجام یک مطالعه عمیق بر روی نحوه شروع پدیده لرزش با استفاده از رویکرد انرژی می‌پردازد. به این منظور، فرایند تراش کاری متعامد یک دیسک به دو مرحله تقسیم‌بندی شده است: دور اول چرخش قطعه‌کار و دوره‌های بعدی. معادلات ارتعاشی حاکم بر سیستم در هر مرحله به‌طور مجزا استخراج شده‌اند. معادله مرحله اول به‌صورت تحلیلی و معادله مرحله دوم با استفاده از روش نیمه گسسته‌سازی حل شده است. همچنین، روابط محاسبه توان و انرژی تزریق شده به سیستم توسط نیروی برشی و نیز تلف شده توسط میرایی سیستم ارائه شده‌اند. با انجام شبیه‌سازی، توصیف فیزیکی رفتار ارتعاشی سیستم در چند دور اول گردش قطعه‌کار به‌طور کامل ارائه شده است. بررسی‌ها نشان می‌دهد، رفتار ارتعاشی سیستم در سه دور اول چرخش قطعه‌کار، صرف‌نظر از عرض برشی، به پاسخ گذرای سیستم در دور اول ناشی از پیشروی ابزار بستگی دارد. همچنین، نتایج حاصل نشان می‌دهد که در حالت پایدار، توان کل برابر صفر؛ در مرز پایداری، نوسانی با دامنه ثابت و مقدار متوسط صفر و در حالت ناپایدار، نوسانی با دامنه افزایشنده و مقدار متوسط صفر است.

کلمات کلیدی: شبیه‌سازی؛ لرزش؛ تراش کاری متعامد؛ رویکرد انرژی.

Simulation and analysis of chatter onset in orthogonal cutting process using an energy-based approach

Mohammad Ghorbani^{1,*}, Mostafa Sarjoughian²

¹ Assist. Prof., Department of Mechanical Engineering, Shahreza Campus, University of Isfahan, Iran.

² BSc Graduate, Department of Mechanical Engineering, Shahreza Campus, University of Isfahan, Iran.

Abstract

This paper simulates workpiece vibrations in the orthogonal cutting process, from the initial engagement of the tool and workpiece, to conduct an in-depth investigation of chatter onset using an energy-based approach. For this purpose, the orthogonal cutting process of a disk is divided into two distinct stages: the first revolution of the workpiece and the subsequent revolutions. The governing vibration equations for each stage are derived separately. The first-stage equation is solved analytically, while the second-stage equation is solved using the semi-discretization method. Additionally, formulations for calculating the power and energy transmitted by the cutting force and dissipated due to system damping are presented. Through simulations, a comprehensive analysis of the system's vibrational behavior during the initial revolutions of the workpiece is conducted. The findings indicate that the system's behavior during the first three revolutions, regardless of cutting width, is determined by the transient response in the first revolution caused by the tool feed. Furthermore, the results show that in the stable condition, the total power is zero; in the critically stable condition, it oscillates with a constant amplitude and a zero average value; and in the unstable condition, it oscillates with an increasing amplitude and a zero average value.

Keywords: Simulation; Chatter; Orthogonal Cutting; Energy Approach.

۱- مقدمه

وقوع ارتعاشات در فرایندهای ماشین‌کاری امری اجتناب‌ناپذیر است، چرا که به دلیل انعطاف‌پذیری یک یا چند جزء از اجزای ماشین ابزار، ابزار برشی و قطعه‌کار و نیز وجود نیروهای متغیر با زمان، از لحاظ مکانیکی شرایط برای ایجاد ارتعاشات هرچند با دامنه کم فراهم است. وقوع ارتعاشات نه تنها موجب کاهش دقت ابعادی، کاهش کیفیت سطح و کاهش راندمان فرایند ماشین‌کاری می‌شود، بلکه موجب تشدید سایش ابزار و کاهش عمر مفید آن و همچنین آسیب به اجزای ماشین ابزار و افزایش هزینه‌های تعمیر و نگهداری آن می‌گردد [۱، ۲]. در فرایندهای ماشین‌کاری سه نوع ارتعاشات آزاد، اجباری و لرزش^۱ ممکن است رخ دهد که از میان آنها، لرزش نوعی ارتعاشات خودتحریک است که در اثر بازخورد داخلی خود فرایند ایجاد می‌شود و هیچ منبع تحریک خارجی علت به وقوع پیوستن آن نیست. تشخیص، مطالعه و کنترل لرزش در مقایسه با دو نوع دیگر ارتعاشات دشوارتر بوده و به عنوان مهمترین عامل ایجاد ناپایداری در فرایند و همچنین عامل محدود کننده در افزایش راندمان ماشین‌کاری و کیفیت قطعات تولیدی شناخته می‌شود [۳]؛ بنابراین، مدل‌سازی ارتعاشات لرزشی به‌منظور درک ماهیت آن از موضوعات مورد توجه در حوزه ماشین‌کاری بوده و لازمه پیشگیری از وقوع آن و کنترل پایداری فرایند است. مکانیزم‌های باززایی امواج^۲، اصطکاک و کوپلینگ مودها سه مکانیزم اصلی ایجاد لرزش و ناپایداری در فرایندهای ماشین‌کاری هستند [۴]. این سه مکانیزم را می‌توان به ترتیب متناظر با یک سیستم ارتعاشی دارای تأخیر زمانی، غیرخطی شدید و چند درجه آزادی کوپل در نظر گرفت [۵]. از میان این سه مکانیزم، باززایی امواج اصلی‌ترین مکانیزم وقوع ارتعاشات لرزشی در فرایندهای ماشین‌کاری است که در آن موج‌های ایجادشده بر روی سطح قطعه‌کار در عبورهای متوالی ابزار همپوشان شده و موجب تشدید ضخامت دینامیکی براده و نیروهای ماشین‌کاری و نهایتاً موجب ناپایداری فرایند می‌شود [۶]. مطالعات متعددی به بررسی لرزش در فرایندهای تراش کاری [۷]، فرزکاری [۸]، سوراخ‌کاری [۹]، داخل‌تراشی

[۱۰]، سنگ‌زنی [۱۱] و همچنین فرایندهای ترکیبی ماشین‌کاری مانند فرز-تراش [۱۲] پرداخته‌اند. در فرایند تراش‌کاری، مکانیزم‌های باززایی امواج و کوپلینگ مودها می‌توانند به‌طور هم‌زمان اتفاق بیفتند [۱۳]، اما سلیکاگ و همکاران [۱۴] نشان دادند که مکانیزم کوپلینگ مودها نمی‌تواند علت وقوع لرزش در فرایند فرزکاری باشد. در فرایندهای سنگ‌زنی نیز مکانیزم‌های باززایی امواج و اصطکاک با به‌طور غالب ظاهر می‌شوند [۱۵].

برای تحلیل لرزش در فرایندهای ماشین‌کاری، روش‌های حوزه فرکانس و حوزه زمان توسط محققین توسعه داده شده‌اند [۱۶]. در روش‌های حوزه فرکانس، معادله دیفرانسیل تأخیری حاکم بر سیستم با استفاده از تبدیل فوریه به حوزه فرکانس برده شده و سپس با استفاده از تئوری‌های کنترلی، مرزهای پایداری به‌صورت تحلیلی برای آن محاسبه می‌شوند. با توجه به ماهیت دینامیک سیستم و بسته به تعداد جمله هارمونیک مورد استفاده در بسط سری فوریه، روش‌های تقریب مرتبه صفر (ZOA)^۳ [۱۷] و تقریب مرتبه بالا (MOA)^۴ [۱۸، ۱۹] به ترتیب برای فرایندهای با دینامیک نسبتاً ثابت و فرایندها با دینامیک متغیر (مانند فرزکاری با میزان بار شعاعی کم) استفاده می‌شوند. در روش‌های حوزه فرکانس، تنها وضعیت پایداری و ناپایداری فرایند، بدون محاسبه پاسخ زمانی سیستم تعیین می‌شود؛ همچنین، امکان بررسی اثر عوامل غیرخطی بر روی پایداری فرایند وجود ندارد. به‌منظور بررسی اثر عوامل غیرخطی مانند وابستگی غیرخطی نیروهای ماشین‌کاری به ضخامت براده و سرعت برشی، اثر میرایی فرایند غیرخطی و دامنه ارتعاشات بزرگ، روش‌های حوزه زمان توسعه داده شده‌اند. متداول‌ترین روش‌های حوزه زمان روش نیمه گسسته‌سازی (SDM)^۵ [۲۰]، گسسته‌سازی کامل (FDM)^۶ [۲۱] و روش اجزاء محدود زمانی (TFEM)^۷ [۲۲] هستند که در آنها ابتدا معادلات حرکت با استفاده از فرم فضای حالت به شکل ماتریسی بیان می‌شوند. سپس، دوره تناوب چرخش اسپیندل به تعدادی بازه زمانی کوچک تقسیم‌بندی شده و با تقریب جمله تأخیری با استفاده از تقریب مرتبه صفر و یا

⁶ Full- discretization method

⁷ Time finite element method

¹ Chatter

² Wave regeneration

³ Zero-order approximation

⁴ Multi-order approximation

⁵ Semi-discretization method

و تفسیر شده است. به منظور اعتبارسنجی نتایج، از مقایسه آنها با نمونه‌های موجود در مراجع معتبر استفاده شده است.

۲- مدل سازی

۲-۱- مدل سازی ارتعاشی فرایند تراش کاری متعامد

شکل ۱ طرحواره‌ای از دینامیک فرایند تراش کاری متعامد را نشان می‌دهد. در قسمت الف، دیسکی به ضخامت a توسط ابزار برشی که تمام عرض آن را فراگرفته است، در حال برش خوردن است. در قسمت ب، مدل ارتعاشی یک درجه آزادی آن همراه با پارامترهای مورد استفاده در مدل سازی نشان داده شده است. جابجایی ارتعاشی قطعه کار با x ، انعطاف پذیری و میرایی معادل سیستم در راستای پیشروی ابزار به ترتیب با فنر با سختی K_x و دمپر با ضریب میرایی c_x نشان داده شده است. در این بخش، هدف استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات قطعه کار در دور اول و دوره‌های بعدی چرخش آن است.

چنانچه هیچ‌گونه ارتعاشی در سیستم وجود نداشته باشد و به بیان دیگر، براده‌ای به ضخامت ثابت h_0 توسط ابزار از روی قطعه کار برداشته شود، نیروی وارد بر قطعه کار در راستای پیشروی را می‌توان با استفاده از مدل مکانیستیک^۲ به صورت زیر بیان کرد [۲۶]:

$$F_f = K_f a h_0 \quad (1)$$

که در رابطه (۱)، K_f ضریب برشی^۳ ماده قطعه کار در راستای پیشروی است. با توجه به وجود انعطاف پذیری در سیستم، با شروع درگیری ابزار و قطعه کار، ارتعاشات قطعه کار در راستای پیشروی موجب تغییر ضخامت براده می‌شود. در دور اول چرخش که ابزار از یک سطح صاف براده برداری می‌کند، ضخامت دینامیکی براده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$h(t) = f(t) - x(t) \quad (2)$$

که در رابطه (۲)، $f(t)$ پیشروی ابزار و $x(t)$ ارتعاشات قطعه کار در راستای پیشروی است. توجه شود که در دور اول چرخش قطعه کار، پیشروی ابزار از مقدار صفر در لحظه شروع درگیری تا h_0 در انتهای دور اول افزایش می‌یابد. در این حالت نیروی پیشروی و معادله حاکم بر ارتعاشات قطعه کار به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$F_f(t) = K_f a h(t) = K_f a (f(t) - x(t)) \quad (3)$$

مرتبه‌های بالاتر در هر بازه زمانی کوچک، معادله دیفرانسیل تأخیری به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. با حل این معادله و اعمال شرایط زمانی در ابتدا و انتهای هر بازه، مجموعه‌ای از معادلات وابسته به یکدیگر در فضای گسسته حاصل می‌شوند. با بیان این معادلات به فرم ماتریسی، ماتریس انتقال سیستم در یک دوره تناوب چرخش اسپیندل استخراج شده و با محاسبه مقادیر ویژه آن و به کارگیری تئوری فلوکت^۱، پایداری سیستم بررسی می‌شود. در سال‌های اخیر روش‌های گسسته سازی دیگری مانند استفاده از فرمول سیمپسون [۲۳]، درون‌یابی‌های تکه‌ای با استفاده از چند جمله‌ای‌های هرمیتی [۲۴] و چند جمله‌ای‌های لاگرانژی [۲۵] برای تحلیل پایداری فرایندهای ماشین کاری نیز توسعه داده شده‌اند.

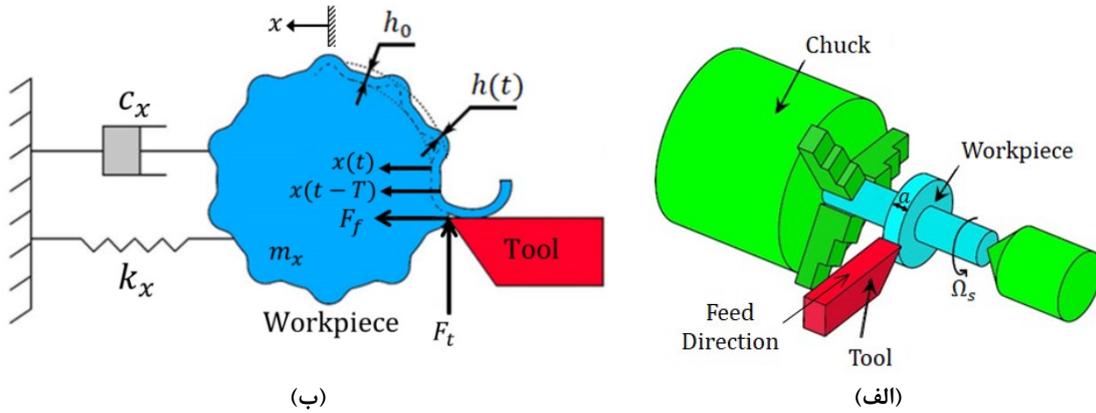
تراش کاری متعامد به عنوان یک حالت ساده و دوبعدی از فرایند تشکیل براده، حالتی مناسب برای بررسی پدیده‌های مختلف در فرایندهای ماشین کاری از جمله پدیده لرزش است. مطالعات متعددی برای بررسی لرزش در این فرایند تاکنون انجام شده است. بررسی مطالعات قبلی نشان می‌دهد تمرکز اصلی آنها یا بر شناسایی وضعیت پایداری فرایند به‌ازای پارامترهای مختلف ماشین کاری بوده است و یا به حل عددی معادلات حاکم بر ارتعاشات سیستم با صرف نظر از ارتعاشات سیستم در دور اول چرخش قطعه کار پرداخته‌اند. به عبارت دیگر، مدل سازی فرایند از لحظه شروع درگیری ابزار و قطعه کار تا رسیدن به هر کدام از وضعیت‌های پایدار و یا ناپایدار، با تقسیم بندی فرایند برش به یک مرحله تراش کاری از یک سطح صاف و یک مرحله تراش کاری از سطح ناهموار پرداخته نشده است. همچنین، تغییرات توان و انرژی تزریق شده به سیستم توسط نیروی برشی و نیز مقادیر تلف شده توسط میرایی سیستم با هدف توصیف رفتار فیزیکی سیستم در وضعیت‌های مختلف بررسی نشده است. در این مقاله، فرایند تراش کاری متعامد یک دیسک از لحظه شروع درگیری ابزار با قطعه کار مدل سازی شده و با استخراج و حل معادلات حاکم بر ارتعاشات فرایند، پاسخ زمانی سیستم در دور اول و دوره‌های بعدی چرخش اسپیندل محاسبه شده و رفتار ارتعاشی سیستم در چند دور اول به‌طور عمیق تحلیل شده است. همچنین، تغییرات توان و انرژی سیستم در وضعیت‌های مختلف پایداری بررسی

³ Cutting coefficient

¹ Floquet theory

² Mechanistic

$$m_x \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x = K_f a (f(t) - x(t)) \quad (۴)$$



شکل ۱- الف) طرحواره فرایند تراش کاری متعامد، ب) مدل یک درجه آزادی ارتعاشات لرزشی به همراه نیروهای وارده به قطعه کار و نمایش مکانیزم باززایی امواج

۲-۲- حل معادله حاکم بر ارتعاشات سیستم در دور اول چرخش قطعه کار

با ترکیب روابط (۴) و (۵)، معادله حاکم بر ارتعاشات قطعه کار در دور اول چرخش آن به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$m_x \ddot{x} + c_x \dot{x} + (k_x + K_f a)x = \frac{K_f a h_0}{T} t, \quad (0 \leq t \leq T) \quad (۸)$$

رابطه (۸) یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و غیرهمگن است که پاسخ کلی آن شامل یک بخش همگن (گذرا) و یک بخش خصوصی است. با اعمال شرایط اولیه صفر یعنی $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ، پاسخ معادله به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ x_h(t) &= e^{-\xi \Omega_n t} [A \cos(\Omega_d t) + B \sin(\Omega_d t)], \\ x_p(t) &= Ct + D, \\ \Omega_n &= \sqrt{\frac{k_x + K_f a}{m_x}}, \quad \xi = \frac{c_x}{2m_x \Omega_n}, \\ \Omega_d &= \Omega_n \sqrt{1 - \xi^2}, \quad C = \frac{K_f a h_0}{T(k_x + K_f a)}, \\ D &= -\frac{c_x K_f a h_0}{T(k_x + K_f a)^2}, \quad A = -D, \\ B &= -\frac{C + \xi \Omega_n D}{\Omega_d} \end{aligned} \quad (۹)$$

$$f(t) = \frac{h_0}{T} t, \quad (0 \leq t \leq T) \quad (۵)$$

پارامترهای m_x ، c_x و k_x در رابطه (۴) به ترتیب جرم، میرایی و سختی معادل قطعه کار در راستای پیشروی یعنی x و T در رابطه (۵) دوره تناوب چرخش اسپیندل است. از رابطه $T = \frac{60}{\Omega_s}$ محاسبه می‌شود که در آن Ω_s سرعت چرخش اسپیندل بر حسب دور بر دقیقه است.

در دورهای دوم به بعد چرخش قطعه کار، براده‌برداری از یک سطح موج‌دار انجام می‌شود؛ بنابراین، ضخامت دینامیکی براده و معادله حاکم بر ارتعاشات قطعه کار به صورت زیر بیان می‌شوند [۲۶]:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 - [x(t) - x(t - T)] \\ m_x \ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x &= K_f a h_0 - K_f a [x(t) - x(t - T)] \end{aligned} \quad (۶) \quad (۷)$$

که در رابطه (۶)، $x(t - T)$ ارتعاشات قطعه کار در یک دوره تناوب قبل است. واضح است که برای یافتن پاسخ زمانی سیستم در دورهای دوم به بعد، نیاز به داشتن پاسخ زمانی سیستم در دور اول چرخش قطعه کار است.

است. در این حالت، چنانچه پاسخ سیستم در لحظه t_i با y_i نشان داده شود؛ یعنی $y(t_i) = y_i$ ، در این صورت پاسخ در یک دوره تناوب قبل را می‌توان با $y(t_i - T) = y[(i - m)\Delta t]$ با y_{i-m} نشان داد. چنانچه بازه گسسته‌سازی Δt بسیار کوچک باشد، مقدار $y(t - T)$ را می‌توان با میانگین‌گیری مقادیر در دو لحظه متوالی به صورت زیر تقریب زد [۲۷]:

$$y(t - T) \approx \frac{y(t_i - T) + y(t_i - T + \Delta t)}{2} = \frac{y_{i-m} + y_{i-m+1}}{2}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۲)، معادله دیفرانسیل تأخیری به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرهمگن در هر بازه زمانی گسسته Δt تبدیل می‌شود [۲۷]:

$$\dot{y}_i(t) = Ly_i(t) + \frac{1}{2}R(y_{i-m} + y_{i-m+1}) + f_0, \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (14)$$

در هر بازه زمانی Δt ، معادله دیفرانسیل (۱۴) دارای حل همگن $y_{ih}(t)$ و خصوصی $y_{ip}(t)$ به صورت زیر است [۲۷]:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= y_{ih}(t) + y_{ip}(t) \\ y_{ih}(t) &= e^{L(t-t_i)}C_0 \\ y_{ip}(t) &= -\frac{1}{2}L^{-1}R(y_{i-m} + y_{i-m+1}) - L^{-1}f_0 \end{aligned} \quad (15)$$

با توجه به اینکه $y_i(t_i) = y_i$ ، با جایگذاری $t = t_i$ در پاسخ کلی سیستم در رابطه (۱۵)، مقدار C_0 محاسبه شده و در نهایت پاسخ کلی سیستم به صورت زیر به دست می‌آید [۲۷]:

$$y_i(t) = e^{L(t-t_i)}[y_i + \frac{1}{2}L^{-1}R(y_{i-m} + y_{i-m+1}) + L^{-1}f_0] - \frac{1}{2}L^{-1}R(y_{i-m} + y_{i-m+1}) - L^{-1}f_0 \quad (16)$$

از آنجایی که پاسخ $y_i(t)$ در بازه زمانی $[t_i, t_{i+1}]$ معتبر است، با جایگذاری $t = t_{i+1}$ در رابطه (۱۶) و تعریف $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ، به رابطه زیر خواهیم رسید [۲۷]:

که در رابطه (۹)، Ω_n فرکانس طبیعی نامیرای معادله، ξ نسبت میرایی و Ω_d فرکانس طبیعی میرای معادله است.

۲-۳- حل معادله حاکم بر ارتعاشات سیستم در دوره‌های بعدی چرخش قطعه کار

در دوره‌های دوم به بعد چرخش قطعه کار یعنی $t > T$ ، ارتعاشات سیستم توسط معادله دیفرانسیل تأخیری رابطه (۷) توصیف می‌شود. برای حل این معادله و یافتن پاسخ زمانی آن در اینجا از روش نیمه گسسته‌سازی استفاده می‌شود. با تعریف فرکانس طبیعی نامیرای ماشین ابزار به صورت $\omega_n = \sqrt{k_x/m_x}$ و نسبت میرایی آن به صورت $\zeta = c_x/(2m_x\omega_n)$ ، رابطه (۷) به شکل زیر بازنویسی می‌شود [۲۷]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x &= \frac{\omega_n^2}{k_x}K_fah_0 \\ &- \frac{\omega_n^2}{k_x}K_fa[x(t) - x(t - T)], \quad (t > T) \end{aligned} \quad (10)$$

رابطه (۱۰) را با استفاده از فرم فضای حالت می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۲۷]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t) \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{\omega_n^2}{k_x}K_fah_0 - \frac{\omega_n^2}{k_x}K_fa[x_1(t) \\ &- x_1(t - T)] - \omega_n^2x_2(t) - 2\zeta\omega_nx_2(t) \end{aligned} \quad (11)$$

و با بیان معادله (۱۱) به فرم ماتریسی، رابطه زیر به دست می‌آید [۲۷]:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Ly(t) + Ry(t - T) + f_0, \\ y(t) &= \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}, \quad y(t - T) = \begin{Bmatrix} x_1(t - T) \\ x_2(t - T) \end{Bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\omega_n^2}{k_x}(K_fa + k_x) & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega_n^2}{k_x}K_fa & 0 \end{bmatrix}, \quad f_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_n^2}{k_x}K_fah_0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

برای حل معادله دیفرانسیل رابطه (۱۲) با استفاده از روش نیمه گسسته‌سازی، ابتدا دوره تناوب T به تعدادی بازه زمانی گسسته کوچک Δt تقسیم‌بندی می‌شود؛ یعنی $T = m\Delta t$ ، که در اینجا نشان‌دهنده تعداد تقسیم‌بندی یک دوره تناوب

$$B_1 = \begin{bmatrix} e^{L\Delta t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & I & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \frac{1}{2}(e^{L\Delta t} - I)L^{-1}R \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & I & I \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال $[B]$ در رابطه (۱۹) برای مقادیر سرعت چرخش اسپیندل Ω_s و عرض برشی a مشخص، ماتریسی نامتغیر با زمان و ثابت است؛ بنابراین، با بررسی مقادیر ویژه آن می‌توان به تحلیل پایداری سیستم پرداخت [۲۸]:

$$\{Y_i\} = [B]\{Y_{i-1}\} \rightarrow |\lambda[I] - [B]| = 0 \quad (20)$$

چنانچه قدرمطلق بزرگترین مقدار ویژه ($|\lambda_{max}|$) رابطه (۲۰) کوچکتر از ۱ باشد، سیستم پایدار^۳ برابر با ۱ باشد، مرز پایداری^۳ و چنانچه بزرگتر از ۱ باشد، سیستم ناپایدار^۴ است. به این ترتیب با تغییر سرعت چرخش اسپیندل Ω_s در یک محدوده عملیاتی و افزایش عرض برشی a از صفر تا رسیدن به مرز پایداری a_{lim} هر سرعت چرخش اسپیندل، می‌توان نمودار حلقه‌های پایداری را برای سیستم استخراج کرد.

۲-۵- محاسبه توان و انرژی ارتعاشی سیستم

با داشتن پاسخ زمانی $x(t)$ سیستم در حضور ارتعاشات لرزشی بازاء، می‌توان ضخامت دینامیکی براده $h(t)$ و نیروی $F_f(t)$ وارده به قطعه‌کار را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{h_0}{T}t - x(t), & 0 \leq t \leq T \\ h_0 - [x(t) - x(t-T)], & t > T \end{cases} \quad (21)$$

$$F_f(t) = K_f ah(t) \quad (22)$$

طبق تعریف توان که ضرب داخلی نیرو در سرعت نقطه اثر نیرو می‌باشد، توان منتقل شده به قطعه‌کار توسط نیروی برشی

$$y_{i+1} = e^{L\Delta t}y_i + \frac{1}{2}(e^{L\Delta t} - I)L^{-1}R(y_{i-m} + y_{i-m+1}) + (e^{L\Delta t} - I)L^{-1}f_0, \quad (i > m) \quad (17)$$

که در رابطه (۱۷)، I ماتریس همانی است. مشاهده می‌شود که پاسخ سیستم در لحظه جاری t_{i+1} ، به مقدار قبلی y_i و همچنین مقادیر در یک دوره تناوب قبل یعنی y_{i-m} و y_{i-m+1} بستگی دارد. با استفاده از روابط (۹) و (۱۷) می‌توان پاسخ زمانی سیستم از لحظه شروع درگیری ابزار و قطعه‌کار را تا هر زمان دلخواه محاسبه کرد.

۲-۴- تحلیل پایداری ارتعاشات لرزشی قطعه‌کار

در قسمت‌های قبل، پاسخ زمانی ارتعاشات قطعه‌کار محاسبه شد که می‌توان به‌ازای پارامترهای ورودی عرض برش a ، سرعت چرخش اسپیندل Ω_s و ضخامت استاتیکی براده h_0 ، پاسخ زمانی سیستم و به دنبال آن سرعت، شتاب و نیروهای وارده به قطعه‌کار را بر حسب زمان محاسبه کرد. تحلیل پایداری سیستم بدون یافتن پاسخ زمانی آن نیز برای تشخیص وضعیت پایداری سیستم به‌ازای مجموعه‌ای از پارامترهای برشی ضروری است که به این منظور می‌توان مجدداً از روش نیمه گسسته‌سازی کمک گرفت. از آنجایی که ضخامت استاتیکی براده h_0 تأثیری در پایداری مسئله ندارد، با حذف جمله f_0 از رابطه (۱۲) و پیاده‌سازی روش نیمه گسسته‌سازی طبق روال بخش ۲-۳، نهایتاً رابطه زیر حاصل می‌شود [۲۸]:

$$y_{i+1} = e^{L\Delta t}y_i + \frac{1}{2}(e^{L\Delta t} - I)L^{-1}R(y_{i-m} + y_{i-m+1}) \quad (18)$$

اکنون با نوشتن پاسخ‌ها برای یک دور چرخش اسپیندل و بیان آنها به فرم ماتریسی رابطه زیر به دست می‌آید [۲۸]:

$$\{Y_i\} = [B]\{Y_{i-1}\}, \quad [B] = [B_1] + [B_2]$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \\ \cdot \\ y_{i-(m-1)} \\ y_{i-m} \end{bmatrix}, \quad Y_{i-1} = \begin{bmatrix} y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ \cdot \\ y_{i-m} \\ y_{i-(m+1)} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

³ Critically stable

⁴ Unstable

¹ Transition matrix

² Stable

یابد. به این منظور، ابتدا با انتخاب یک مقدار بزرگ برای m ، پاسخ دقیق مسئله محاسبه شده و سپس با تغییر مقدار m و بررسی دقت نتایج، مقدار بهینه برای آن تعیین می‌گردد. در اینجا با انتخاب $m = 500$ و با استفاده از پارامترهای ارتعاشی و برشی ارائه شده در جدول ۱، نمودار حلقه‌های پایداری برای سیستم استخراج شده‌اند. در شکل ۲، نمودار حلقه‌های پایداری با استفاده از روش نیمه گسسته‌سازی محاسبه و با نتایج حاصل از روش حوزه فرکانس و همچنین نتایج تجربی ارائه شده در مرجع [۲۸] مقایسه شده‌اند. تطابق نتایج حاصل از دو روش نیمه‌گسسته‌سازی و حوزه فرکانس، علاوه بر تضمین صحت فرمول‌بندی ارائه شده و کدنویسی، نشان می‌دهد به‌ازای مقدار $m = 500$ در روش نیمه گسسته‌سازی می‌توان به نتایج دقیق دست یافت. چنانچه درصد خطای متوسط بین نتایج روش نیمه‌گسسته‌سازی با نتایج حوزه فرکانس در مرجع [۲۸] به‌صورت زیر تعریف شود:

$$Error = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|a_{lim(i)} - a_{lim(i)}^{ref}|}{a_{lim(i)}^{ref}} \times 100 \quad (27)$$

که در آن n تعداد کل داده‌ها در محدوده سرعتی مدنظر است، مقدار عددی محاسبه شده برای خطای فوق برابر با 0.27% درصد است که نشان‌دهنده تطابق دقیق نتایج است؛ همچنین، نتایج تجربی ارائه شده برای دو حالت پایدار و ناپایدار در سرعت 3000 دور بر دقیقه در شکل ۲ الف نشان می‌دهد که روش نیمه گسسته‌سازی به‌خوبی توانسته است، مرزهای پایداری را پیش‌بینی نماید.

به‌منظور یافتن مقدار بهینه پارامتر m ، در چند سرعت چرخش اسپیندل Ω_s و برای حالت‌های پایدار، مرز پایداری و ناپایدار، مسئله به‌ازای $m = 500$ حل شده و مقدار دقیق λ_0 (یعنی بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس انتقال $[B]$) محاسبه می‌شود. سپس، با حل مسئله به‌ازای پارامتر m از صفر تا 500 و یافتن مقدار ویژه ماکزیمم در هر m و مقایسه با مقدار λ_0 ، نحوه همگرایی مسئله با افزایش m بررسی می‌شود. در جدول ۲، مقادیر λ_0 در چهار سرعت چرخش اسپیندل و در عرض‌های برشی مختلف به‌ازای $m = 500$ ارائه شده‌است. همچنین، در شکل ۳ نحوه همگرایی مسئله با تغییر پارامتر m نشان داده شده‌است. بررسی نمودارهای همگرایی این شکل در مقادیر

و نیز توان تلف شده توسط میرایی سیستم را می‌توان به‌کمک روابط زیر محاسبه کرد:

$$P_f(t) = F_f(t)\dot{x}(t) \quad (23)$$

$$P_c(t) = -[c_x\dot{x}(t)]\dot{x}(t) \quad (24)$$

علامت منفی در رابطه (۲۴) برای رعایت این نکته که نیروی دمپر همواره در خلاف جهت سرعت اعمال می‌شود، لحاظ شده است. در واقع علامت منفی نشان‌دهنده اتلاف انرژی توسط دمپر است. جمع دو توان $P_f(t)$ و $P_c(t)$ نشان‌دهنده توان کل وارد شده به سیستم در هر لحظه است:

$$P(t) = P_f(t) + P_c(t) \quad (25)$$

چنانچه توان کل $P(t)$ مثبت باشد، نشان‌دهنده تزریق انرژی به سیستم و چنانچه منفی باشد، نشان‌دهنده گرفتن انرژی از سیستم در هر لحظه است. مجموع انرژی ورودی به قطعه‌کار از لحظه صفر تا لحظه t را با انتگرال‌گیری از توان $P(t)$ می‌توان به‌دست آورد:

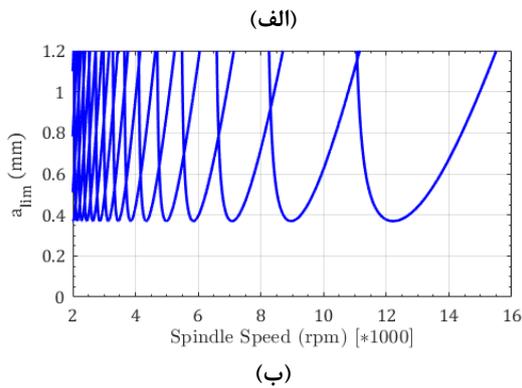
$$E(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau \quad (26)$$

با توجه به اینکه در بخش‌های قبل مقادیر $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ حوزه زمان و به‌صورت گسسته محاسبه شده‌اند، برای محاسبه انتگرال رابطه (۲۶) می‌توان از انتگرال‌گیری عددی استفاده کرد. با بررسی تغییرات توان محاسبه شده از رابطه (۲۵) و یا انرژی از رابطه (۲۶)، می‌توان وضعیت پایداری سیستم را مشخص کرد. چنانچه انرژی وارد شده به سیستم با گذشت زمان در مقدار محدودی باقی بماند، سیستم نیز در وضعیت پایدار باقی خواهد ماند؛ اما چنانچه انرژی وارد شده با گذشت زمان در حال افزایش باشد، دامنه ارتعاشات سیستم نیز افزایش یافته و سیستم ناپایدار می‌شود.

۳- ارائه و تفسیر نتایج

۳-۱- بررسی همگرایی روش نیمه گسسته‌سازی و اعتبارسنجی

در روش نیمه گسسته‌سازی ابتدا باید مقدار مناسب پارامتر m که نشان دهنده تعداد تقسیم‌بندی‌های دوره تناوب T است، به گونه‌ای تعیین گردد که ضمن دست‌یابی به نتایج با دقت مناسب، هزینه و زمان انجام محاسبات تا حد امکان کاهش

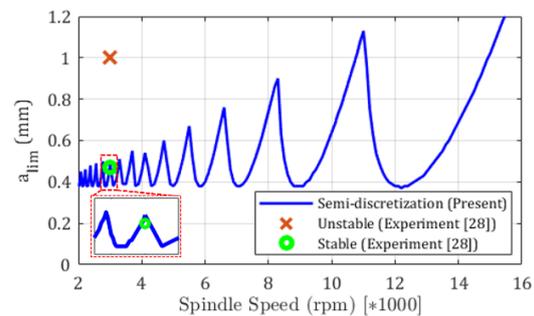


شکل ۲- نمودار حلقه‌های پایداری محاسبه شده با: الف) روش نیمه گسسته‌سازی به‌ازای پارامتر $m = 500$ به همراه نتایج تجربی استخراج شده از مرجع [۲۸]، ب) روش حوزه فرکانس ارائه شده در مرجع [۲۸]

مختلف m و سرعت‌های دوران مختلف نشان می‌دهد که به‌ازای $m = 200$ ، نتایج با خطایی کمتر از ۰/۱ درصد همگرا می‌شوند؛ بنابراین، مقدار $m = 200$ به‌عنوان مقدار بهینه برای استخراج نتایج انتخاب و در تحلیل‌ها و شبیه‌سازی‌های بعدی استفاده می‌شود.

جدول ۱- پارامترهای ارتعاشی و برشی فرایند تراش کاری متعام مورد استفاده در شبیه‌سازی‌های عددی [۲۹]

$K_f (N/m^2)$	$k_x (N/m)$	$c_x (N.s/m)$	$m_x (kg)$
1.384×10^6	6.48×10^6	۱۴۵	۰/۵۶۱



جدول ۲- مقدار λ_0 در چهار سرعت چرخش اسپیندل و در عرض‌های برشی پایدار، مرز پایداری و ناپایدار به‌ازای $m = 500$

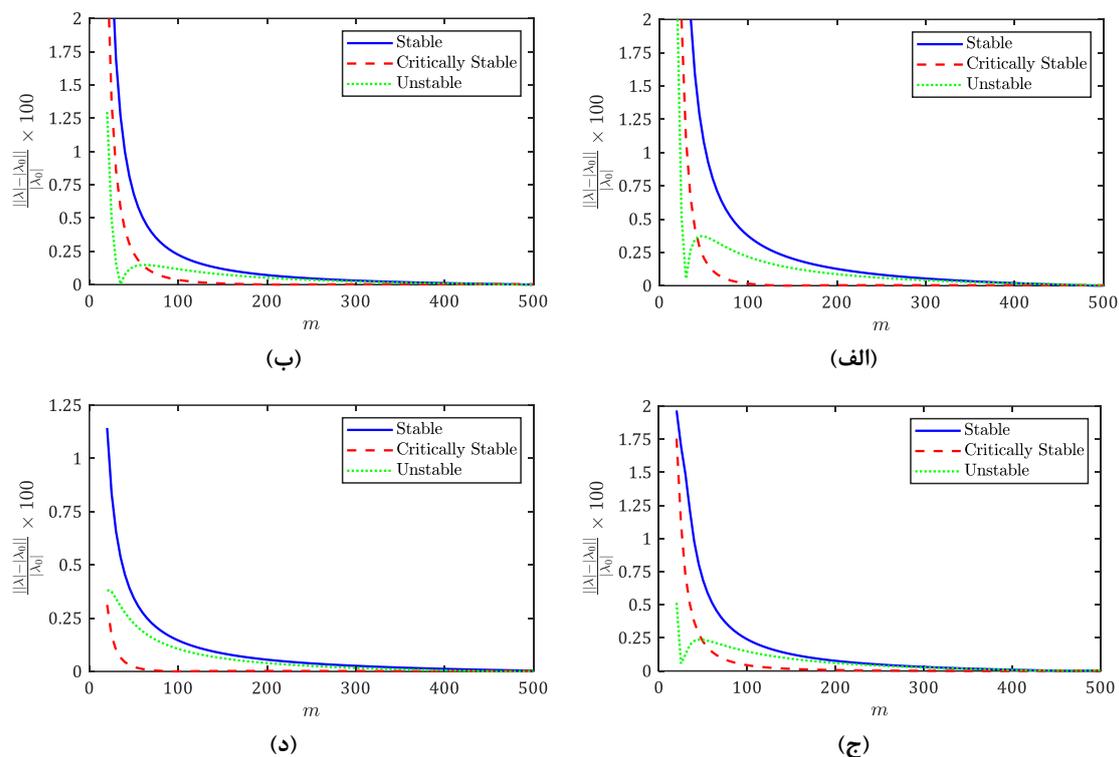
$\Omega_s = 2000 (rpm)$		$\Omega_s = 1500 (rpm)$		$\Omega_s = 1000 (rpm)$		$\Omega_s = 500 (rpm)$		
λ_0	$a (mm)$	λ_0	$a (mm)$	λ_0	$a (mm)$	λ_0	$a (mm)$	
۰/۹۹۹۷	۰/۲	۰/۹۹۹۵	۰/۸	۰/۹۹۹۶	۰/۵	۰/۹۹۹۲	۰/۲	پایدار
۱/۰۰۰	۰/۴	۱/۰۰۰	۱/۰۲	۱/۰۰۰	۰/۶۴۵	۱/۰۰۰	۰/۳۸	مرز پایداری
۱/۰۰۰۳	۰/۶	۱/۰۰۰۵	۱/۳	۱/۰۰۰۴	۰/۸	۱/۰۰۰۵	۰/۶	ناپایدار

چرخش قطعه‌کار هستند. در توضیحاتی که در ادامه ارائه می‌شود، هدف بررسی و تفسیر دقیق رفتار سیستم در سه دور اول چرخش قطعه‌کار است.

مطابق شکل ۴ الف، در دور اول جابجایی x قطعه‌کار از مقدار صفر تا ۰/۲ میلی‌متر افزایش می‌یابد. این مقدار در واقع تغییر شکل استاتیکی فنر سیستم ناشی از نیروی برشی حاصل از پیشروی ابزار در انتهای دور اول است که با در نظر گرفتن رابطه (۸)، به کمک فرمول $K_f a h_0 / (k_x + K_f a)$ نیز قابل محاسبه است.

۳-۲- پاسخ زمانی سیستم در حالت‌های مختلف پایداری و بررسی نحوه شروع لرزش

در شکل ۴، پاسخ‌های ارتعاشی سیستم در حالت پایدار شامل جابجایی، سرعت، ضخامت دینامیکی براده و نیروی برشی از لحظه شروع درگیری ابزار با قطعه‌کار نشان داده شده‌است. شرایط برشی متناظر با نمودارهای این شکل شامل سرعت چرخش اسپیندل ۱۰۰۰ دور بر دقیقه، میزان پیشروی به‌ازای یک دور h_0 برابر با ۰/۲ میلی‌متر و عرض برشی a برابر ۰/۵ میلی‌متر است. خط‌چین‌های عمودی در نمودارهای این شکل نیز مشخص‌کننده زمان‌های متناظر با دورهای اول تا سوم

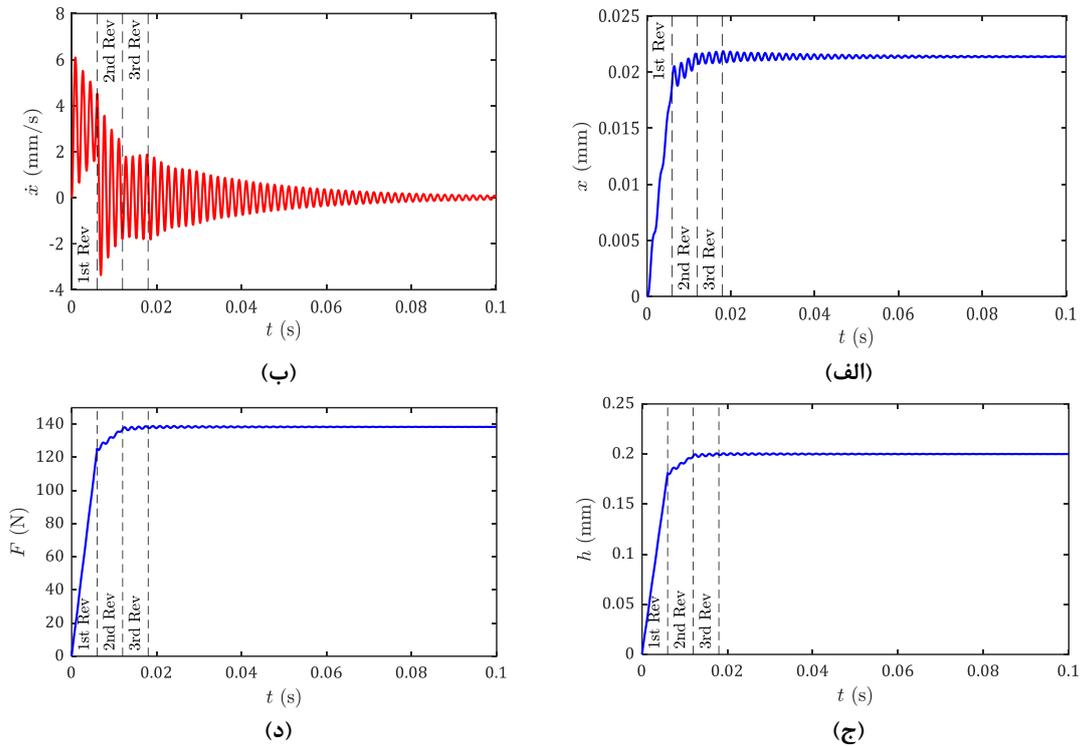


شکل ۳- بررسی همگرایی نتایج برای یافتن مقدار بهینه پارامتر m در سرعت‌های مختلف چرخش اسپیندل Ω_s : (الف) ۵۰۰۰، (ب) ۱۰۰۰۰، (ج) ۱۵۰۰۰ و (د) ۲۰۰۰۰ (دور بر دقیقه)

در این دور نوسانی است، اما مقدار آن همواره مثبت است؛ یعنی حرکت قطعه‌کار همواره به یک جهت بوده و حالت رفت و برگشتی ندارد و تنها مقدار سرعت آن کم و زیاد می‌شود. بخش نوسانی سرعت ناشی از بخش گذرای پاسخ سیستم و مثبت بودن آن ناشی از اثر غالب حرکت سیستم در جهت مثبت حاصل از نیروی پیشروی ابزار است. بنابراین، در دور اول سطحی ناهموار و نه لزوماً موج‌دار بر روی قطعه‌کار ایجاد می‌شود.

در شکل ۴ ج، تغییرات ضخامت دینامیکی براده و در قسمت د، تغییرات نیروی برشی بر حسب زمان نشان داده شده است. ضخامت دینامیکی براده و نیروی برشی در دور اول چرخش قطعه‌کار به ترتیب از روابط (۲) و (۳) محاسبه می‌شوند. اگرچه در این نمودارها بخش مربوط به پیشروی ابزار که رفتاری خطی با زمان دارد در دور اول غالب است، اما باید توجه کرد که نوسانات کوچکی ناشی از ارتعاشات سیستم نیز در آنها وجود دارد.

با توجه به نکته بالا، هنگامی که ضخامت استاتیکی براده در دور اول به صورت خطی با زمان زیاد می‌شود، نیروی وارده به قطعه‌کار نیز با زمان افزایش یافته و این رفتار صعودی در نمودار جابجایی را نتیجه می‌دهد. باید توجه شود که اگرچه نیروی برشی ناشی از پیشروی ابزار به صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد، اما منحنی جابجایی قطعه‌کار در دور اول به صورت کاملاً خطی نیست و با نوسانات کوچکی همراه است. زیرا طبق رابطه (۹)، پاسخ کلی سیستم در دور اول شامل دو بخش است: یک بخش خصوصی که به صورت خطی با زمان زیاد می‌شود و یک بخش گذرا که نوسانی است و دامنه آن به صورت نمایی کاهش می‌یابد. بخش گذرای پاسخ در واقع اثر جرم و میرایی سیستم بر حرکت آن است. بنابراین، در دور اول سطحی با ناهمواری‌های کوچک، ناشی از بخش گذرای پاسخ سیستم به نیروی حاصل از پیشروی، بر روی قطعه‌کار ایجاد می‌شود. توجه شود که در دور اول، سطح قطعه‌کار هنوز موج‌دار نشده است؛ چرا که طبق شکل ۴ ب، اگرچه سرعت \dot{x} سیستم



شکل ۴- پاسخ‌های ارتعاشی سیستم در حالت پایدار (Ω_s برابر ۱۰۰۰۰ دور بر دقیقه، h_0 برابر ۰/۲ میلی‌متر و a برابر ۰/۵ میلی‌متر): (الف) جابجایی، (ب) سرعت، (ج) ضخامت دینامیکی براده و (د) نیروی برشی

سیستم نیز رفتار صعودی خواهد داشت (شکل ۴ الف). به بیان دیگر، همان‌طور که افزایش ضخامت استاتیکی براده h_0 از صفر تا ۰/۲ میلی‌متر در دور اول موجب رفتار صعودی در پاسخ سیستم شد؛ روند افزایشی پاسخ x سیستم از صفر تا ۰/۲ میلی‌متر در دور اول، منجر به رفتار صعودی پاسخ سیستم در دور دوم می‌شود. با بررسی معادلات ارتعاشی سیستم نیز دقیق‌تر می‌توان این موضوع را بررسی کرد. با بازنویسی رابطه (۷) برای دور دوم داریم:

$$m_x \ddot{x} + c_x \dot{x} + (k_x + K_f a)x = K_f a [h_0 + x(t - T)], \quad (T \leq t \leq 2T) \quad (28)$$

حال با جایگذاری پاسخ به‌دست آمده برای دور اول طبق رابطه (۹) به‌جای عبارت $x(t - T)$ در رابطه (۲۸) خواهیم داشت:

$$m_x \ddot{x} + c_x \dot{x} + (k_x + K_f a)x = K_f a \{ h_0 + e^{-\xi \Omega_n (t-T)} [A \cos(\Omega_d (t-T)) + B \sin(\Omega_d (t-T))] + C(t-T) + D \} \quad (29)$$

نکته مهم دیگر در شکل ۴ ج اینکه در انتهای دور اول، ضخامت دینامیکی (واقعی) براده هنوز به مقدار h_0 برابر ۰/۲ میلی‌متر یعنی پیشروی به ازای یک دور نرسیده است؛ زیرا طبق رابطه (۲)، ضخامت واقعی براده متأثر از جابجایی فعلی سیستم بوده و به اندازه x از مقدار h_0 کمتر است.

در دور دوم چرخش قطعه‌کار، ضخامت دینامیکی براده و نیز نیروی برشی تا رسیدن به مقادیر ماکزیمم خود همچنان روند صعودی دارند. هرچند در دور دوم، پیشروی ابزار در مقدار ثابت h_0 باقی می‌ماند و افزایش نمی‌یابد؛ اما طبق رابطه (۶)، اثر ناهمواری‌های ایجاد شده بر روی سطح قطعه‌کار در دور اول با علامت مثبت در ضخامت دینامیکی براده وارد شده و موجب افزایش ضخامت براده می‌شود. باید توجه شود که $x(t - T)$ در دور دوم، همان $x(t)$ دور اول است که طبق نمودار شکل ۴ الف، در دور اول مقداری مثبت و صعودی داشت؛ در نتیجه این امر، نیروی برشی که تابعی از ضخامت دینامیکی براده است روند افزایشی داشته (شکل ۴ ج) و به دنبال آن، جابجایی x

در شکل ۵ و شکل ۶ پاسخ‌های ارتعاشی سیستم به ترتیب در مرز پایداری و در حالت ناپایدار، برای همان سرعت چرخش اسپیندل و پیشروی متناظر با شکل ۴، نشان داده شده‌اند. مقادیر عرض برشی در این دو شکل به ترتیب برابر با ۰/۶۴۵ و ۰/۸ میلی‌متر هستند. رفتار مشاهده شده در سه دور اول چرخش قطعه‌کار در حالت پایدار در شکل ۴، به‌طور مشابه در شکل‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌شود؛ بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت رفتار ارتعاشی سیستم در دوره‌های اولیه چرخش قطعه‌کار، متأثر از پیشروی ابزار و پاسخ گذرای سیستم به آن است و چندان تابع عرض برشی نیست. در واقع شروع هر گونه ارتعاش در سیستم، صرف‌نظر از نحوه ادامه یافتن آن، از پاسخ گذرای سیستم در دور اول ناشی از پیشروی ابزار نشأت می‌گیرد؛ اما در مقابل، مقایسه شکل‌های ۴، ۵ و ۶ نشان می‌دهد که رفتار ارتعاشی سیستم از دور سوم به بعد، مستقیماً به عرض برشی وابسته است. به‌عنوان نمونه، شکل ۴ نشان می‌دهد که دامنه نوسانات جابجایی و سرعت سیستم از دور سوم به بعد کاهش یافته و نهایتاً سیستم به وضعیت پایدار می‌رسد؛ همچنین، شکل ۵ نشان می‌دهد که رفتارهای نوسانی سیستم در دور سوم، در دوره‌های بعدی نیز با دامنه ثابت تکرار می‌شود. با گذشت زمان، این نوسانات بدون آنکه میرا شوند ادامه پیدا کرده و سیستم در مرز پایداری باقی می‌ماند. در شکل ۶ نیز مشاهده می‌شود که از دور سوم، نوساناتی با دامنه‌های افزاینده ایجاد می‌شود که نشان‌دهنده شروع وضعیت ناپایدار است. در دوره‌های بعدی، نوسانات به‌وضوح تشدید شده و دامنه آنها به‌طور پیوسته افزایش می‌یابد که باعث می‌شود سیستم در وضعیت ناپایدار باقی بماند.

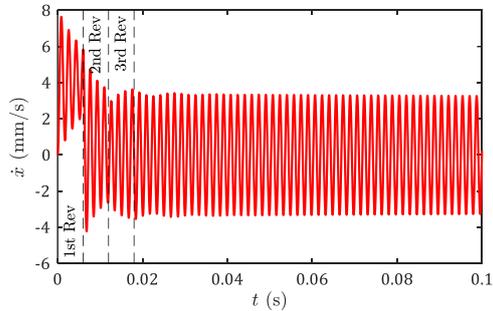
بررسی رفتار ارتعاشی سیستم در چند دور اول گردش قطعه‌کار در این بخش نشان داد که صرف‌نظر از مقادیر پارامترهای ماشین‌کاری، شروع فرایند تراش‌کاری همواره با ارتعاشات همراه است. در واقع، نیروی برشی یک اثر استاتیکی شامل تغییر شکل سیستم تا رساندن آن به نقطه تعادلی و یک اثر دینامیکی شامل ایجاد نوسان حول آن نقطه دارد. اثر استاتیکی نیرو از پیشروی ابزار در دور اول حاصل می‌شود. اثر دینامیکی آن در دور اول از پاسخ گذرای سیستم به نیروی حاصل از پیشروی؛ در دور دوم، از ارتعاشات فعلی قطعه‌کار و ناهمواری‌های ایجاد شده در دور اول ناشی از پاسخ گذرای سیستم و از دور سوم به بعد، از ارتعاشات قطعه‌کار و موج‌های

جملات سمت راست معادله (۲۹) را می‌توان در سه نوع تحریک دسته‌بندی کرد: تحریک ثابت، تحریک خطی و تحریک هارمونیک با دامنه نامی. اکنون رفتار مشاهده شده در دور دوم در شکل ۴ الف را می‌توان به کمک دسته‌بندی بالا به این صورت تفسیر کرد که پاسخ سیستم به جمله ثابت در واقع نشان‌دهنده نقطه تعادلی سیستم در ابتدای دور دوم است. پاسخ سیستم به نیروی تحریک خطی نشان‌دهنده رفتار صعودی در نمودار است؛ همچنین، پاسخ سیستم به نیروی تحریک هارمونیک نشان‌دهنده نوسانات هارمونیک سوار شده بر رفتار صعودی سیستم است.

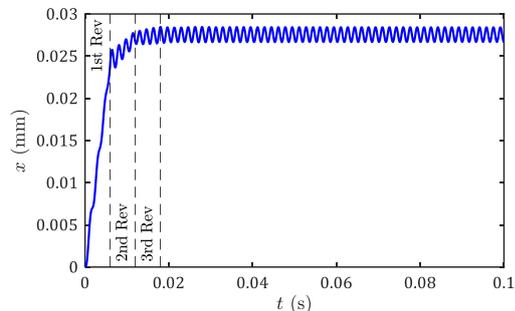
نکته حائز اهمیت دیگر تغییرات نمودار سرعت \dot{x} سیستم در دور دوم است. مطابق شکل ۴ ب، در دور دوم سرعت سیستم رفتار نوسانی حول مقداری مثبت و نزدیک به صفر دارد؛ به این معنی که در این دور حرکت قطعه‌کار به یک جهت نبوده و به‌صورت رفت و برگشتی است؛ در نتیجه، در این دور سطحی با موج هارمونیک بر روی قطعه‌کار باقی می‌ماند. طبق شکل ۴ الف، مقدار متوسط این موج تا انتهای دور دوم در حال افزایش است که در بالا علت آن توضیح داده شد. در انتهای دور دوم، سیستم تقریباً به نقطه تعادلی خود یعنی ۰/۲۱۵ میلی‌متر رسیده و از آن پس حول آن نقطه نوسان می‌کند. نقطه تعادلی سیستم در واقع تغییر شکل استاتیکی فنر در اثر ماکزیمم نیروی برشی حاصل از پیشروی ابزار است که به کمک فرمول $K_f h_0 / k_x$ نیز قابل محاسبه است. هنگامی که در دور سوم، از سطح موج‌دار باقی مانده از دور دوم براده‌برداری انجام می‌شود، مجدداً سطح موج‌دار هارمونیک دیگری ایجاد می‌شود. از آنجایی که جمع یا تفریق دو موج هارمونیک صرف‌نظر از دامنه و فاز آنها، یک موج با دامنه و فاز متفاوت ولی با همان مقدار متوسط است؛ با در نظر گرفتن عبارت $x(t) - x(t - T)$ در ضخامت دینامیکی براده در رابطه (۶) به‌عنوان تفاضل دو موج هارمونیک می‌توان گفت از انتهای دور سوم به بعد، مقدار متوسط ضخامت براده همان h_0 باقی مانده و همان‌طور که در شکل ۴ قسمت‌های ج و د مشاهده می‌شود، رفتار صعودی در نمودارهای ضخامت دینامیکی براده و نیروی برشی متوقف می‌شود و تنها حالت نوسانی به خود می‌گیرد؛ در نتیجه، جابجایی سیستم نیز که تحت تأثیر نیروی برشی است، تنها حول نقطه تعادلی خود به‌صورت نوسانی انجام می‌شود.

ارتعاشی سیستم در دوره‌های بعدی چرخش قطعه کار پرداخته می‌شود.

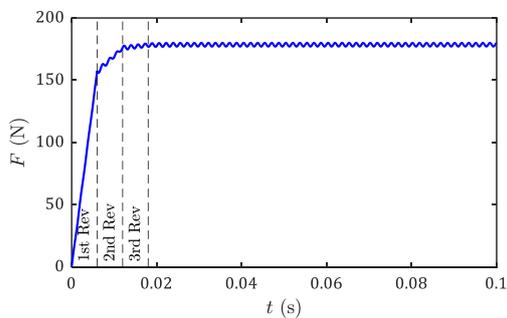
ایجاد شده بر روی سطح در دوره‌های قبلی نتیجه می‌شود. در بخش بعد، با استفاده از رویکرد توان و انرژی، به بررسی رفتار



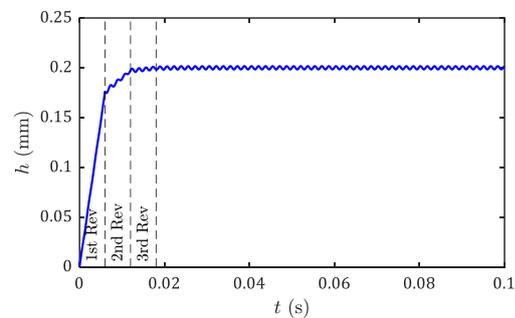
(ب)



(الف)

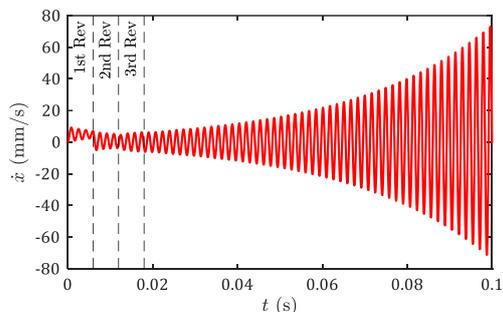


(د)

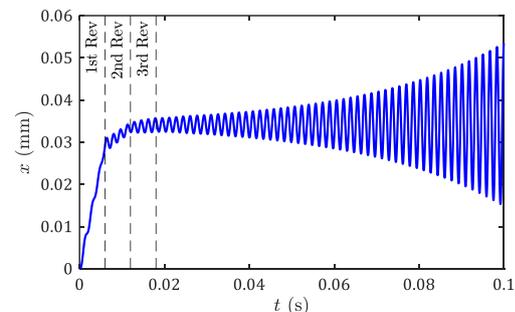


(ج)

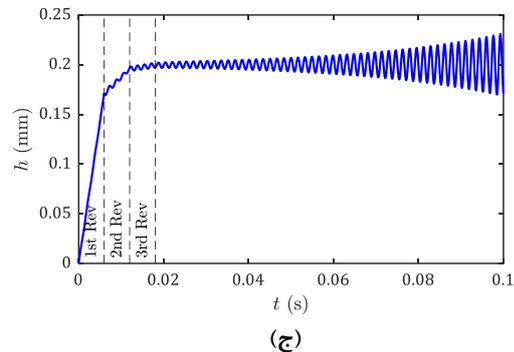
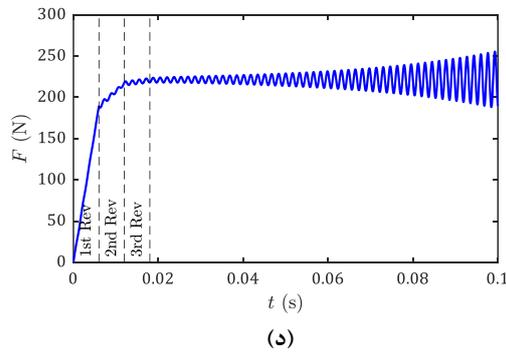
شکل ۵- پاسخ‌های ارتعاشی سیستم در مرز پایداری در Ω_s برابر ۱۰۰۰۰ دور بر دقیقه، h_0 برابر ۰/۲ میلی‌متر و a برابر ۰/۶۴۵ میلی‌متر: (الف) جابجایی، (ب) سرعت، (ج) ضخامت دینامیکی براده و (د) نیروی برشی



(ب)



(الف)



شکل ۶- پاسخ‌های ارتعاشی سیستم در حالت ناپایدار Ω_s برابر ۱۰۰۰۰ دور بر دقیقه، h_0 برابر ۰/۲ میلی‌متر و a برابر ۰/۸ میلی‌متر: (الف) جابجایی، (ب) سرعت، (ج) ضخامت دینامیکی براده و (د) نیروی برشی

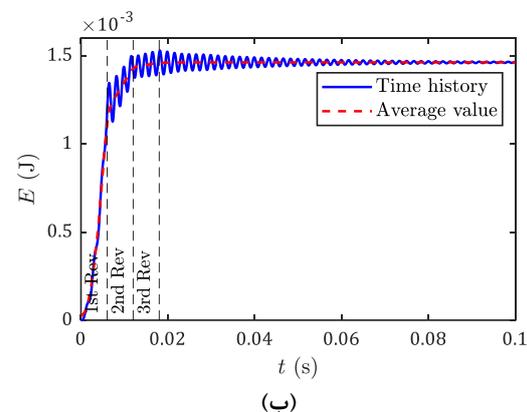
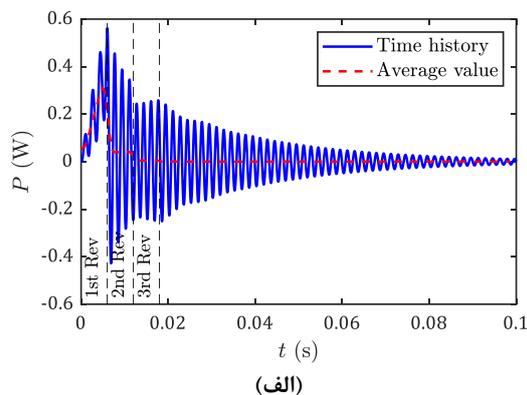
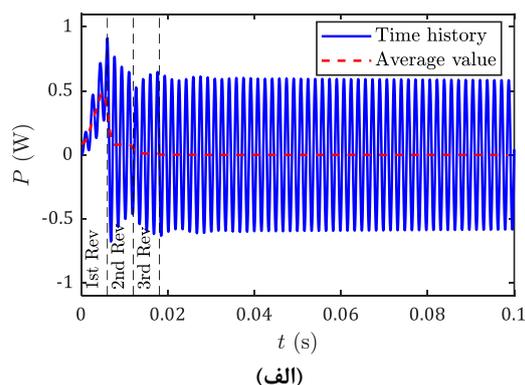
داشته و در نتیجه انرژی سیستم که مساحت زیر نمودار توان- زمان است، در این دور به صورت صعودی افزایش یافته است. با رجوع به شکل ۴ ب، سرعت در دور اول مثبت و نوسانی است و با توجه به مثبت بودن نیروی برشی، ضرب داخلی آنها نیز مقداری مثبت و نوسانی خواهد داشت؛ بنابراین، در دور اول نیروی برشی تنها نقش تزریق انرژی به سیستم ایفا می‌کند. البته توان اتلافی دمپر همواره منفی است، اما شکل ۷ الف نشان می‌دهد که در دور اول، توان تزریق شده توسط نیروی برشی از توان اتلافی دمپر همواره بیشتر است. این توان تزریق شده که سبب افزایش صعودی انرژی سیستم شده است، در واقع به صورت انرژی پتانسیل در فنر ذخیره شده و موجب تغییر شکل آن تا نزدیکی وضعیت تعادلی سیستم می‌شود. در دور دوم، توان لحظه‌ای تغییراتی نوسانی با دامنه‌های مثبت و منفی و مقدار متوسط مثبت دارد. در نتیجه، در این دور نیز انرژی سیستم کمی افزایش یافته و رفتار نوسانی به خود می‌گیرد. مطابق شکل ۴ ب، سرعت سیستم در دور دوم حول مقداری نزدیک به صفر حالت نوسانی دارد؛ به همین دلیل توان لحظه‌ای نیز حالت نوسانی با مقدار متوسط مثبت و نزدیک به صفر به خود گرفته است. در این دور، انرژی تزریق شده به سیستم توسط نیروی برشی، از مجموع انرژی گرفته شده توسط این نیرو و انرژی اتلافی دمپر بیشتر است.

۳-۳- تحلیل تغییرات انرژی و توان سیستم در حالت‌های مختلف پایداری

چنانچه بار دیگر مدل دینامیکی فرایند در نظر گرفته شود، نیروی دمپر همواره در خلاف جهت حرکت جرم به آن وارد می‌شود و کار آن همیشه منفی است که به معنی اتلاف انرژی از سیستم است. نیروی برشی $F_f(t)$ نیز اگرچه همواره در جهت مثبت به جرم وارد می‌شود، اما کار آن بسته به جهت حرکت جرم، ممکن است مثبت یا منفی باشد و لذا می‌تواند به‌عنوان عامل تزریق و یا گرفتن انرژی از سیستم عمل کند؛ بنابراین، در این قسمت از سه لفظ تزریق انرژی، گرفتن انرژی و اتلاف انرژی به ترتیب برای اشاره به کار مثبت نیروی برشی، کار منفی نیروی برشی و انرژی اتلافی دمپر استفاده می‌شود. منظور از سیستم نیز المان‌های جرم و فنر هستند که تبدیل انرژی جنبشی و پتانسیل بین آنها اتفاق می‌افتد. از آنجایی که دامنه ارتعاشات جرم در هر لحظه متأثر از مقدار انرژی سیستم است، مجموع انرژی‌های تزریق شده، گرفته شده و تلف شده در طول زمان تعیین کننده وضعیت پایداری سیستم خواهد بود. همچنین، با توجه به اینکه عامل تزریق یا جذب انرژی دیگری در سیستم وجود ندارد، مجموع انرژی‌های مذکور از لحظه شروع حرکت تا هر لحظه دلخواه، با انرژی کل سیستم یعنی مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل تا آن لحظه برابر است. در شکل ۷ تغییرات توان و انرژی کل سیستم بر حسب زمان در حالت پایدار نشان داده شده است. در این شکل، خط پر نشان دهنده تغییرات لحظه‌ای و خط چین نشان دهنده مقدار متوسط توان و انرژی است. مشاهده می‌شود که در دور اول چرخش قطعه کار، توان لحظه‌ای مقداری مثبت و نوسانی

در شکل ۸، تغییرات توان و انرژی برای حالتی که سیستم در مرز پایداری است، نشان داده شده‌است. صرف‌نظر از مقادیر عددی، رفتار نمودارها در دوره‌های اول تا سوم مشابه با حالت پایدار است. اما از ابتدای دور چهارم به بعد، توان لحظه‌ای با دامنه ثابت حول مقدار صفر نوسان می‌کند. در نتیجه، انرژی سیستم نیز حول مقدار متوسط خود با دامنه ثابت نوسان می‌کند. در واقع، در این حالت مجموع انرژی تزریق شده به سیستم، گرفته شده و تلف شده در یک سیکل نوسان برابر صفر است؛ یعنی در نیمی از سیکل به سیستم انرژی تزریق شده و در نیمه دیگر انرژی از آن گرفته می‌شود. این تبادل انرژی مساوی موجب می‌شود سیستم با دامنه ثابت حول نقطه تعادلی خود نوسان کند که نشان‌دهنده مرز پایداری است.

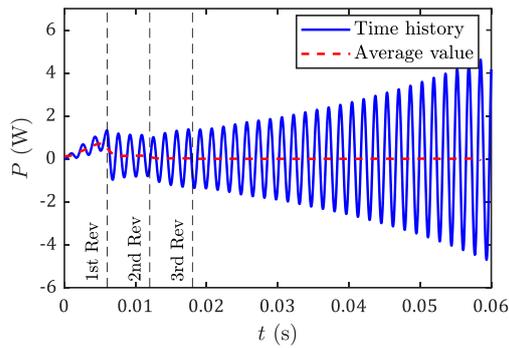
در شکل ۹، تغییرات توان و انرژی سیستم برای حالت ناپایدار نشان داده شده‌است. در اینجا نیز تغییرات نمودارها در سه دور اول چرخش از نظر رفتار شبیه به حالت پایدار است؛ اما از دور چهارم به بعد، توان لحظه‌ای سیستم با دامنه‌ای افزایشده حول مقدار صفر نوسان کرده و انرژی سیستم حول مقدار متوسط خود با دامنه‌ای افزایشده نوسان می‌کند. در این حالت انرژی تزریق شده به سیستم از مجموع انرژی گرفته شده و تلف شده در یک سیکل بیشتر است. این افزایش انرژی سیستم موجب افزایش پیوسته دامنه ارتعاشات شده که نشان‌دهنده حالت ناپایدار است.



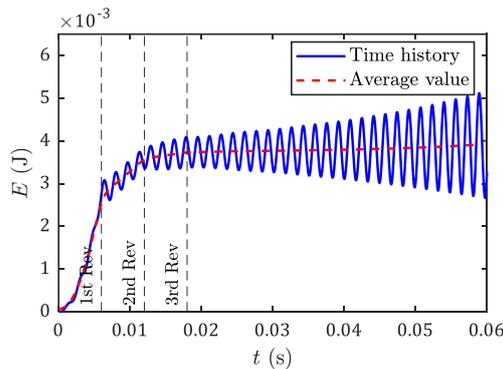
شکل ۷- (الف) تغییرات توان بر حسب زمان و مقدار متوسط آن، (ب) تغییرات انرژی بر حسب زمان و مقدار متوسط آن (حالت پایدار با Ω_s برابر ۱۰۰۰۰ دور بر دقیقه، t_0 برابر ۰/۲ میلی‌متر و a برابر ۰/۵ میلی‌متر)

در دور سوم، توان لحظه‌ای تغییراتی نوسانی حول مقدار صفر دارد و دامنه آن تقریباً ثابت است. به این معنی که در این دور مجموع انرژی تزریق شده، گرفته شده و تلف شده برابر صفر است و انرژی سیستم در همان سطح باقی مانده و با دامنه‌ای تقریباً ثابت، رفتار نوسانی به خود می‌گیرد. از دور چهارم به بعد، توان لحظه‌ای مقداری نوسانی با مقدار متوسط صفر داشته و دامنه آن به‌صورت نمایی در حال کاهش است. به‌طور مشابه، انرژی سیستم نیز حول مقدار متوسط قبلی خود رفتاری نوسانی داشته و در طول زمان دامنه نوسانات آن کاهش یافته تا به مقداری ثابت برسد. در واقع از دور چهارم به بعد، مجموع انرژی تلف‌شده و گرفته شده، از انرژی تزریق شده به سیستم بیشتر است. با تلف‌شدن انرژی توسط دمپر، دامنه ارتعاشات جرم نیز کاهش یافته و نهایتاً طبق شکل ۴ الف، در نقطه تعادلی خود می‌ایستد.

از سرعت و شتاب سیستم در معادله حرکت اضافه گردد و یا ضخامت دینامیکی براده تابعی غیرخطی از جابه‌جایی سیستم باشد، این رویکرد به خوبی می‌تواند به توصیف و تفسیر فیزیکی رفتار سیستم کمک نماید.

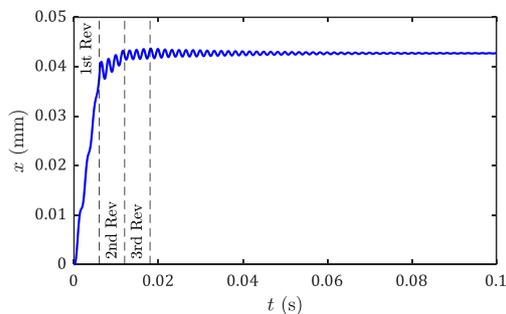


(الف)

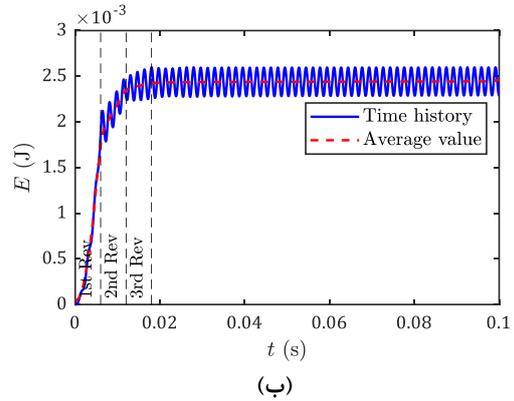


(ب)

شکل ۹- (الف) تغییرات توان بر حسب زمان و مقدار متوسط آن، (ب) تغییرات انرژی بر حسب زمان و مقدار متوسط آن (حالت ناپایدار با Ω_s برابر ۱۰۰۰۰ دور بر دقیقه، h_0 برابر ۰/۲ میلی‌متر و a برابر ۰/۸ میلی‌متر)



(الف)



شکل ۸- (الف) تغییرات توان بر حسب زمان و مقدار متوسط آن، (ب) تغییرات انرژی بر حسب زمان و مقدار متوسط آن (مرز پایداری با Ω_s برابر ۱۰۰۰۰ دور بر دقیقه، h_0 برابر ۰/۲ میلی‌متر و a برابر ۰/۶۴۵ میلی‌متر)

۳-۴- بررسی اثر پارامترهای برشی بر نتایج

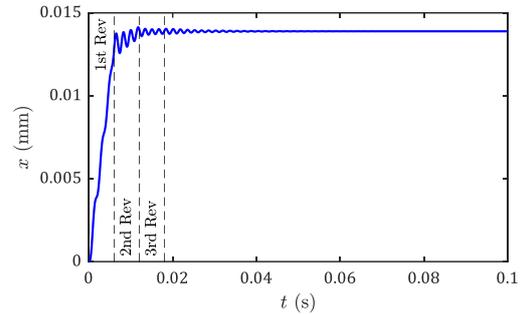
در بخش‌های قبل، تحلیل رفتار سیستم به‌ازای پارامترهای h_0 برابر ۰/۲ میلی‌متر، K_f برابر 1.384×10^6 نیوتون بر متر مربع و Ω_s برابر ۱۰۰۰۰ دور بر دقیقه ارائه شد. به‌منظور بررسی عدم وابستگی تحلیل‌های انجام شده به این پارامترها، در شکل ۱۰ پاسخ زمانی ارتعاشی سیستم به‌ازای مقادیر h_0 برابر ۰/۴ میلی‌متر، K_f برابر 9.0×10^6 نیوتون بر متر مربع و Ω_s برابر ۶۵۰۰ دور بر دقیقه ارائه شده است. با مقایسه نمودارهای این شکل با نمودارهای شکل ۴ الف، مشاهده می‌گردد که تغییر مقدار ضخامت براده و ضریب برشی تنها بر مقدار دامنه پاسخ تأثیر گذاشته است. تغییر سرعت دوران نیز با تغییر دوره تناوب چرخش اسپیندل، تنها تعداد نوسانات سیستم در هر دور چرخش را تغییر داده است، اما هیچ کدام بر ماهیت رفتار سیستم تأثیری نگذاشته است. با بررسی حالت‌های مرزپایداری و ناپایدار نیز رفتارهای مشابه ملاحظه شد؛ بنابراین، مطالب ارائه‌شده در بخش‌های قبل در رابطه با نحوه رفتار سیستم در چند دور اول چرخش قطعه‌کار و شروع پدیده لرزش، مستقل از پارامترهای ضخامت براده، ضریب برشی و سرعت دوران اسپیندل است.

رویکرد ارائه‌شده در این مقاله برای شبیه‌سازی توان و انرژی سیستم را می‌توان برای مدل‌های پیچیده‌تر از فرایند تراش کاری و یا سایر فرایندهای ماشین‌کاری به‌کار برد. به‌عنوان نمونه، هنگامی که اثرات میرایی فرایند به‌صورت جملات متأثر

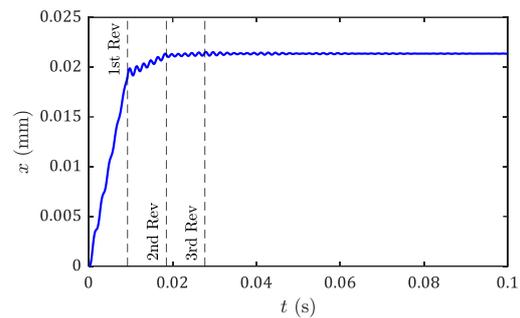
پاسخ‌های به‌دست آمده در حوزه زمان، توان و انرژی سیستم که متأثر از کار نیروی برشی و انرژی اتلافی دمپر است نیز محاسبه شد. تحلیل عمیق بر روی پاسخ‌های ارتعاشی سیستم نشان داد که رفتار سیستم در سه دور اول چرخش قطعه‌کار، به‌طور قابل توجهی به تعامل بین پیشروی ابزار و ارتعاشات قطعه‌کار بستگی دارد و چندان تحت تأثیر پارامترهای برشی نیست. همچنین، بررسی تغییرات توان و انرژی سیستم نشان داد که در دور اول، نیروی برشی نقش اصلی در تزریق انرژی به سیستم را ایفا کرده و انرژی سیستم به‌طور صعودی افزایش می‌یابد. در دور دوم، توان لحظه‌ای دارای نوساناتی با مقدار متوسط مثبت است که در نتیجه، انرژی سیستم همچنان در این دور افزایش یافته و رفتار نوسانی آن شروع می‌شود. در دور سوم، توان لحظه‌ای تغییراتی نوسانی حول مقدار صفر دارد و دامنه آن تقریباً ثابت است؛ بنابراین، انرژی سیستم نیز رفتار نوسانی با دامنه ثابت به خود می‌گیرد. در دورهای بعدی، تغییرات توان و انرژی سیستم تحت تأثیر پارامترهای برشی است. در حالت پایدار، توان لحظه‌ای دارای نوسانات با دامنه کاهنده حول مقدار صفر است و انرژی سیستم نیز به مقداری ثابت همگرا می‌شود. در مرز پایداری، توان لحظه‌ای دارای نوسانات با دامنه ثابت حول مقدار صفر است و انرژی سیستم نیز رفتار نوسانی با دامنه افزایشی حول مقدار صفر است. در حالت ناپایدار، توان لحظه‌ای دارای نوسانات با دامنه افزایشی با دامنه افزایشی را نشان می‌دهد. این نتایج ضمن فراهم آوردن درک عمیق‌تری از رفتار دینامیکی سیستم و مکانیزم لرزش در فرایند تراش کاری، نشان می‌دهد که مدل‌سازی دقیق و تحلیل رفتار سیستم در حوزه زمان و با رویکرد انرژی می‌تواند به‌عنوان ابزاری کارآمد برای شبیه‌سازی و پیش‌بینی پایداری فرایند در شرایط مختلف عمل کند.

مراجع

- [1] Yuan L, Pan Z, Ding D, Sun S, Li W (2018) A review on chatter in robotic machining process regarding both regenerative and mode coupling mechanism. IEEE/ASME Trans Mechatronics 23(5): 2240-2251.
- [2] Pour M, Aliabadi A, Rahman nia S (2015) Identifying Process Damping of Turning Process Using Time Series Analysis. J Solid Fluid Mech 5(4): 35-45.



(ب)



(ج)

شکل ۱۰- تغییرات پاسخ زمانی سیستم با تغییر پارامترهای شبیه‌سازی نسبت به شکل ۴: (الف) h_0 برابر $0/4$ میلی‌متر، (ب) K_f برابر 900×10^6 نیوتون بر متر مربع، (ج) Ω_s برابر 6500 دور بر دقیقه

در پایان اشاره به این نکته ضروری است که مدل حاضر به‌صورت سیستم یک درجه آزادی ارائه شده است و بنابراین اثرات موده‌های ارتعاشی بالاتر سازه ماشین ابزار، غیرخطی بودن میرایی و پدیده‌های حرارتی در فرایند براده‌برداری در آن در نظر گرفته نشده‌اند. این موضوع می‌تواند دقت نتایج را در شرایط خاص محدود نماید. توسعه مدل به‌صورت چنددرجه آزادی همراه با لحاظ کردن مدل‌های میرایی پیشرفته‌تر می‌تواند مسیر مناسبی برای پژوهش‌های آینده باشد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، پدیده لرزش در فرایند تراش کاری متعامد با رویکرد انرژی مورد بررسی و شبیه‌سازی قرار گرفت. با استفاده از یک مدل ارتعاشی، دینامیک سیستم به‌طور دقیق در دو مرحله مختلف شامل دور اول چرخش قطعه‌کار و دورهای بعدی براده‌برداری، بررسی و معادلات حاکم بر سیستم به‌صورت تحلیلی و نیمه تحلیلی حل شدند. با استفاده از

- [16] Perrelli M, Cosco F, Gagliardi F, Mundo D (2021) In-process chatter detection using signal analysis in frequency and time-frequency domain. *Machines* 10(1): 1-24.
- [17] Altintas Y, Budak E (1995) Analytical prediction of stability lobes in milling. *CIRP Ann-Manuf Technol* 44(1): 357-362.
- [18] Budak E, Altintas Y (1998) Analytical Prediction of Chatter Stability in Milling - Part I: General Formulation. *J Dyn Syst Meas Control Trans ASME* 120(1): 22-30.
- [19] Merdol S, Altintas Y (2004) Multi frequency solution of chatter stability for low immersion milling. *J Manuf Sci Eng* 126(3): 459-466.
- [20] Insperger T, Stepan G (2004) Updated semi-discretization method for periodic delay-differential equations with discrete delay. *Int J Numer Methods Eng* 61(1): 117-141.
- [21] Ding Y, Zhu L, Zhang X, Ding H (2010) A full-discretization method for prediction of milling stability. *Int J Mach Tools Manuf* 50(5): 502-509.
- [22] Bayly PV, Halley JE, Mann BP, Davies MA (2003) Stability of interrupted cutting by temporal finite element analysis. *J Manuf Sci Eng* 125(2): 220-225.
- [23] Zhan D, Jiang S, Li S, Sun Y (2022) A hybrid multi-step method based on 1/3 and 3/8 Simpson formulas for milling stability prediction. *Int J Adv Manuf Technol* 120(1-2): 265-277.
- [24] Liu A, Wu Y, Deng B, Ye T (2020) Two novel prediction methods for milling stability analysis based on piecewise polynomial interpolations. *Int J Adv Manuf Technol* 109(7-8): 2113-2132.
- [25] Xia Y, Wan Y, Luo X, Liu Z, Song Q (2021) Milling stability prediction based on the hybrid interpolation scheme of the Newton and Lagrange polynomials. *Int J Adv Manuf Technol* 112(5-6): 1501-1512.
- [26] Altintas Y, Weck M (2004) Chatter stability of metal cutting and grinding. *CIRP Ann-Manuf Technol* 53(2): 619-242.
- [27] Insperger T, Stepan, G (2002) Semi-discretization method for delayed systems. *Int J Numer Methods Eng* 55(5): 503-518.
- [28] Altintas Y (2012) *Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design*. 2nd edn. Cambridge University Press, New York.
- [29] Altintas Y, Eynian M, Onozuka H (2008) Identification of dynamic cutting force coefficients and chatter stability with process damping. *CIRP Ann-Manuf Technol* 57(1): 371-374.
- [3] Altintas Y, Stepan G, Budak E, Schmitz T, Kilic ZM (2020) Chatter stability of machining operations. *J Manuf Sci Eng* 142(11): 110801.
- [4] Wiercigroch M, Budak E (2001) Sources of nonlinearities, chatter generation and suppression in metal cutting. *Philos Trans R Soc Lond A* 359(1781): 663-693.
- [5] Zhang X, Wan L, Ran X (2024) Research progress on the chatter stability in machining systems. *Int J Adv Manuf Technol* 131(1): 29-62.
- [6] Dong X, Shen X, Fu Z (2021) Stability analysis in turning with variable spindle speed based on the reconstructed semi-discretization method. *Int J Adv Manuf Technol* 117(11-12): 3393-3403.
- [7] Urbikain G, Olvera D, Lopez de Lacalle LN, Beranoagirre A, Elias-Zuniga A (2019) Prediction methods and experimental techniques for chatter avoidance in turning systems: a review. *Appl Sci* 9(21): 4718.
- [8] Zhu L, Liu C (2020) Recent progress of chatter prediction, detection and suppression in milling. *Mech Syst Signal Process* 143(1): 106840.
- [9] Ozturk OM, Kilic Z, Altintas Y (2018) Mechanics and dynamics of orbital drilling operations. *Int J Mach Tools Manuf* 129(1): 37-47.
- [10] Khalili M, Rafeian M, Abootorabi MM (2020) Prediction of chatter phenomenon in the internal turning process using the results of experimental tests and artificial neural network. *J Solid Fluid Mech* 10(3): 121-133.
- [11] Fazel R, Jalili MM, Abootorabi MM (2017) Determination of Stability Regions of Wheel and Workpiece in Plunge Grinding Process Using a 3-D Workpiece Model. *J Solid Fluid Mech* 7(3): 67-82.
- [12] Zheng Z, Jin X, Sun Y, Zhang Z, Sun H, Li Q (2020) Prediction of chatter stability for enhanced productivity in parallel orthogonal turn-milling. *Int J Adv Manuf Technol* 110(9-10): 2377-2388.
- [13] Jafarzadeh E, Movahhedy MR (2017) Numerical simulation of interaction of mode-coupling and regenerative chatter in machining. *J Manuf Process* 27(1): 252-260.
- [14] Celikag H, Ozturk E, Sims ND (2021) Can mode coupling chatter happen in milling?. *Int J Mach Tools Manuf* 165(1): 103738.
- [15] Weremczuk A, Rusinek R (2017) Influence of frictional mechanism on chatter vibrations in the cutting process—analytical approach. *Int J Adv Manuf Technol* 89(9-12): 2837-2844.