



استفاده از مشتق کسری در تحلیل جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی در کانال واگرا همراه تزریق جریان دارای غلظت از دیوارها با سرعت تغییرپذیر

محمد تولمی^۱، اکبر نظری گلشن^{۲*}، سید سلمان نورآذر^۳

^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

^۲ دانشیار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران.

^۳ استاد، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۰/۱۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۲/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۱۷

چکیده

در این تحقیق تأثیر مشتق کسری بر مساله تزریق جریان دارای غلظت از دیوارها به داخل جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی غیر غلیظ در کانال‌های واگرا بررسی می‌شود. در معادلات حاکم یک جمله اصلی مربوط به سرعت مماسی در نظر گرفته شده و سایر جملات سرعت مماسی نادیده گرفته شده‌اند. مشتقات نسبت به r با مشتقات کسری جایگزین شده و با استفاده از روش تبدیل تشابهی به یک دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی با مشتق کسری تبدیل و سپس با به کارگیری روش‌های نیمه تحلیلی و عددی حل گردیده است. یافته‌ها نشان می‌دهند که افزایش عدد رینولدز منجر به افزایش قابل توجهی در مقادیر سرعت در مرکز کانال می‌شود، در حالی که کاهش جزئی در نواحی نزدیک به دیوارها مشاهده می‌گردد. افزایش عدد هارتمن به کاهش قابل توجهی در حداکثر سرعت منجر می‌شود؛ همچنین خطوط بردار سرعت در موقعیت‌های شعاعی ثابت، یکنواخت‌تر می‌شوند و دو سرعت بیشینه کوچکتر در نزدیکی دیوارهای کانال ایجاد می‌گردد. افزایش عدد هارتمن منجر به کاهش غلظت در سراسر کانال و افزایش عدد رینولدز و عدد پکلت منجر به کاهش غلظت در مرکز کانال می‌گردند. افزایش مرتبه مشتق کسری معادله غلظت، غلظت را در سراسر کانال افزایش می‌دهد.

کلمات کلیدی: کانال همگرا و واگرا؛ تزریق؛ غلظت؛ جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی؛ مشتق کسری.

Using fractional derivatives in the analysis of magnetohydrodynamic flow in a diverging channel with concentrated flow injection from the walls with mutable velocity

M. Tolami ¹, A. Nazari-Golshan ^{2,*}, S. S. Nourazar ³

¹ PhD student, Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.

² Assoc. Prof., Physics Department, Shahed University, Tehran, Iran.

³ Prof., Mechanical Engineering Department, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.

Abstract

This study examines the influence of fractional derivatives on the issue of concentrated flow injection from the walls into a non-concentrated magnetohydrodynamic flow within diverging channels. A main tangential velocity term is considered in the governing equations and other tangential velocity terms are ignored. In the governing nonlinear partial differential equations, the derivatives with respect to r are replaced by fractional derivatives and transformed into a system of nonlinear ordinary differential equations with fractional derivatives using the similarity transformation method and then solved using semi-analytical and numerical methods. The findings show that increasing Re leads to a significant increase in the values of the velocity at the center of the channel, while a slight decrease is observed in the regions near the walls. Increasing Ha leads to a significant decrease in the maximum velocity. Also, the velocity vector lines at fixed radial positions become more uniform and two smaller maximum velocities are created near the channel walls. Increasing the Hartmann number leads to lower concentration throughout the channel, whereas higher Reynolds or Peclet numbers result in reduced concentration at the channel's center. Increasing the order of the fractional derivative of the concentration equation increases the concentration throughout the channel.

Keywords: Converging and diverging channels; injection; concentration; magneto hydrodynamic flow; fractional derivative

۱- مقدمه

تزریق و مکش تأثیرات قابل توجهی بر ویژگی‌های جریان دارند که شامل رفتار لایه مرزی، مدیریت جدایش و پایداری جریان، کاهش نیروی پسا و همچنین بهبود فرآیندهای انتقال گرما و جرم می‌شود. مکش به عنوان یک عامل اساسی در حفظ پایداری لایه مرزی شناخته می‌شود. تزریق می‌تواند به تسریع رشد ناپایداری‌ها کمک کند. با این حال، هر دو روش به طور مؤثری قادر به کاهش جدایش جریان می‌باشند و تأثیر قابل توجهی در کاهش نیروی پسا دارند؛ همچنین تزریق می‌تواند برای افزایش دما مورد استفاده قرار گیرد و از طرفی به عنوان یک عایق حرارتی با ایجاد یک لایه عایق در امتداد دیوارها عمل کند. در زمینه کنترل لایه مرزی، پژوهشگران متعددی تأثیر تزریق و مکش را بر پایداری جریان مورد بررسی قرار داده‌اند. نتایج تحقیقات المالکی و همکاران [۱]، گائو [۲]، فریدریش و کلورک [۳] و کانت و همکاران [۴] نشان می‌دهد که مکش با به تأخیر انداختن گذار جریان و کاهش ناپایداری‌های ثانویه، نقش کلیدی در پایداری لایه مرزی ایفا می‌کند. از سوی دیگر، تزریق به عنوان عامل ناپایدارکننده جریان با تغییر پروفیل‌های سرعت شناخته می‌شود که می‌تواند به تسهیل رشد ناپایداری‌ها منجر شود. تأثیر تزریق و مکش در مدیریت جدایش جریان به طور جامع مورد بررسی قرار گرفته است. مطالعات شو و همکاران [۵]، دببسی و همکاران [۶]، رایلی [۷] و سیله و همکاران [۸] نشان می‌دهد که هر دو روش می‌توانند به طور مؤثری جدایش جریان را کاهش دهند؛ با این حال، در سطوح مومنوم پایین‌تر، مکش معمولاً عملکرد بهتری را با افزایش جریان نزدیک دیوار نشان می‌دهد. به کارگیری روش‌های تزریق و مکش تأثیرات قابل توجهی در کنترل نیروی پسا دارد. همان‌طور که اندرسون [۹] و شلیختینگ و گرسن [۱۰] اشاره کرده‌اند، مکش می‌تواند به طور مؤثری با به تأخیر انداختن جدایش لایه مرزی، نیروی پسا را کاهش دهد. استفاده نادرست از تزریق می‌تواند باعث تسریع جدایش لایه مرزی گردد که به افزایش درگ منجر می‌شود. این اثر توسط کوئت و چو [۱۱] و لیسمن [۱۲] به اثبات رسیده است. از سوی دیگر روش‌های مختلف تزریق به‌طور مؤثری برای بهبود انتقال حرارت به کار گرفته شده‌اند. کیتاگاو و همکاران [۱۳] شواهدی ارائه کرده‌اند که نشان می‌دهد، تزریق حباب‌های میلی‌متری در نزدیکی

دیوارهای گرم شده، به‌طور قابل توجهی ضرایب انتقال حرارت را افزایش می‌دهد و این امر به بهبود اختلاط عمود بر دیوار کمک می‌کند. علاوه بر کاربردهای شناخته‌شده، دامنه کنترل احتراق نیز با استفاده از روش‌های تزریق گسترش یافته است. تحقیقات کوکجان و رایتز [۱۴] و جهانگیریان و همکاران [۱۵] نشان می‌دهد که روش‌های تزریق می‌توانند بر فاز احتراق تأثیر بگذارند؛ انتشار گازهای مضر را کاهش دهند و انتقال حرارت به دیواره‌های محفظه احتراق را به حداقل برسانند. سلجاک و همکاران [۱۶] مفهوم رقت انتخابی مکانی^۱ را برای مدیریت مؤثر انتشار گرما معرفی کرده‌اند؛ همچنین، کاهش نویز آیرودینامیکی از طریق تزریق جریان جرمی مورد بررسی قرار گرفته است. سونگ و همکاران [۱۷] و هافستاینسون و همکاران [۱۸] به این نتیجه رسیده‌اند که تزریق می‌تواند به‌طور قابل توجهی هم صدای حفره‌زایی و هم نویز ناشی از شوک را در جریان‌های مافوق صوت کاهش دهد. در نهایت، تزریق و مکش نقش کلیدی در کنترل جریان‌ها ایفا می‌کنند. تحقیقات انجام شده توسط اشمیت و همکاران [۱۹] و وانگ و همکاران [۲۰] نشان می‌دهد که تزریق منجر به ایجاد شوک‌های مایل و لایه‌های مرزی آشفته می‌گردد، در حالی که مکش به تثبیت قطارهای شوک^۲ کمک می‌کند؛ همچنین، مطالعات چانگ و همکاران [۲۱] و لیو و همکاران [۲۲] در زمینه خنک‌سازی فیلم نشان داده است که تزریق، یک لایه عایق حرارتی در امتداد دیوارها ایجاد می‌کند که در شرایط با دماهای بالا ضروری است. در حوزه‌های مهندسی شیمی، مهندسی محیط زیست و داروسازی، کاربرد تزریق به زمینه‌های انتقال جرم و اختلاط سیالات گسترش یافته است [۲۳-۵۵].

استفاده از مشتقات کسری در مکانیک سیالات دارای کاربردهای متعددی است. مشتقات کسری به عنوان ابزاری مؤثر در تحلیل جریان‌های هیدرودینامیکی مغناطیسی و واکنش‌های شیمیایی مرتبط با آن مورد استفاده قرار می‌گیرند. این ابزارها در مطالعه پدیده‌هایی مانند همرفت آزاد، تأثیر تشعشعات حرارتی، مدل‌سازی دینامیک محیط‌های متخلخل، تأثیرات غیرمحلی و اثرات حافظه در آشفتگی، همچنین پدیده‌های لایه مرزی و انتقال حرارت در مقیاس نانو نقش کلیدی دارند. به کارگیری مشتقات کسری می‌تواند به افزایش

² Shock Trains¹ Spatially Selective Dilution

مرتبه صحیح فرض می‌کنند که تعاملات محلی هستند و به سادگی نمی‌توانند این تعاملات دامنه وسیع را نشان دهند [۶۷].

جفری و هم‌اولین محققینی بودند که جریان داخل کانالهای همگرا یا واگرا را با روش تحلیلی حل نمودند. جفری با استفاده از مختصات خمیده متعامد^۳، دستگاه مختصاتی را برگزیده است که خطوط جریان یا خطوط چرخش^۴ ثابت، بر یکی از محورهای مختصات منطبق شوند. معادلات سپس با بکارگیری تبدیل تشابهی^۵ مناسب به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و حل شده‌اند [۶۸]. هم‌اکنون از دستگاه مختصات استوانه‌ای استفاده کرد و با لحاظ تقارن مساله، وابستگی به θ را حذف کرد. سپس با استفاده از یک تبدیل تشابهی مناسب، معادلات را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل و حل نمود [۶۹]. جریان جفری-هم‌اکنون در بررسی ناپایداری‌های جریان، فرآیندهای انتقال جرم و اثرات تزریق، کاربردهای قابل توجهی دارد.

هدف این مطالعه، بررسی تأثیر میدان مغناطیسی و تزریق جریان با سرعت تغییرپذیر از دیوارها بر توزیع سرعت و غلظت جریان در یک کانال واگرا است. این تحقیق تأثیر پارامترهای کلیدی مانند عدد رینولدز، عدد هارتمن، عدد پکلت و مرتبه مشتق کسری را بر ویژگی‌های جریان ارائه می‌دهد. این مقاله به چندین بخش تقسیم شده است. در بخش ۲، مسئله معرفی و معادلات حاکم استخراج می‌شود. بخش ۳ به تشریح جزئیات فرآیند استخراج راه‌حل تحلیلی می‌پردازد. در بخش ۴، روش حل معادلات حاکم معرفی می‌شود. بخش ۵ روش حل، با استفاده از روشهای عددی تحقیق حاضر و پژوهش‌های مشابه اعتبار سنجی می‌شود. بخش ۶ نتایج را ارائه کرده و به تحلیل مفاهیم آن‌ها می‌پردازد. در نهایت بخش ۷ مطالعه را با خلاصه‌ای از نتایج کلیدی به پایان می‌رساند.

۲- روابط حاکم

همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود کانال واگرا با زاویه باز شدن $\alpha = 0.7 \text{ rad}$ و شعاع بین $r=1$ و $r=4$ است. جریان

دقت پیش‌بینی‌ها کمک کند. به عنوان نمونه، اشتیاق و همکاران [۵۶] و احمد و همکاران [۵۷] از مشتقات کسری برای تحلیل رفتارهای سیال مغناطیسی و پدیده همرفت آزاد بهره بردند. همچنین، عباس و همکاران [۵۸] و ریاض و همکاران [۵۹] تأثیر تشعشعات حرارتی و واکنش‌های شیمیایی در جریان‌های هیدرودینامیکی مغناطیسی را با استفاده از مشتقات کسری مورد بررسی قرار دادند. علاوه بر این، مشتقات کسری در مدل‌سازی دینامیک محیط‌های متخلخل و جریان‌های آشفته نیز به کار رفته‌اند. یانگ و همکاران [۶۰] و ژو و همکاران [۶۱] مدل‌های کسری مرتبط با جریان دارسی و غیردارسی را استخراج کرده‌اند. عباس و همکاران [۵۸] و سوزوکی و همکاران [۶۲] از مشتقات کسری به منظور تبیین تأثیرات غیرمحلی و اثرات حافظه در آشفته‌گی استفاده کرده‌اند. میلوانوف و راسموسن [۶۳] نیز از سینتیک کسری برای توضیح مکانیسم‌های پراکندگی تلاطم بهره برده‌اند. علاوه بر این، مشتقات کسری در مطالعه پدیده‌های لایه مرزی به کار رفته است، همان‌طور که در تحقیق احمد و همکاران [۵۷] نشان داده شده است؛ آن‌ها توزیع سرعت، غلظت و دما را با استفاده از حساب کسری بهبود بخشیده‌اند. ریاض و همکاران [۶۴] به بررسی جریان‌های هیدرودینامیکی مغناطیسی بر روی صفحات ریکا پرداخته‌اند؛ در حالی که شهریم و همکاران [۶۵] دینامیک جریانات روی صفحات شتابدار را مورد بررسی قرار داده‌اند. استفاده از مشتقات کسری در انتقال حرارت در مقیاس نانو، نمای دقیق‌تری از اثرات حافظه حرارتی ارائه می‌دهد [۶۶]. انتشار جرم ممکن است به دلیل فعل و انفعالات در مقیاس نانو، از قوانین سنتی فیک انحراف داشته باشد که به این پدیده انتشار غیرعادی اطلاق می‌شود. این انحراف می‌تواند به صورت زیرانتشار^۱ که با سرعتی کمتر از آنچه در انتشار کلاسیک پیش‌بینی شده، یا فوق‌انتشار^۲ ظاهر شود که با سرعتی بیشتر از انتشار کلاسیک رخ می‌دهد. به طور کلی، انتشار غیرعادی با استفاده از روش مشتق کسری مدل‌سازی می‌شود که در مقایسه با روش مشتق مرتبه صحیح، توانایی بهتری در توصیف پدیده‌ها دارد. مشتقات کسری مکانی امکان لحاظ اثرات غیرمحلی را فراهم می‌آورند و تأثیر حرکت یک ذره بر سیال اطراف و ذرات دور را در نظر می‌گیرند؛ در حالی که مدل‌های

^۴ Vorticity

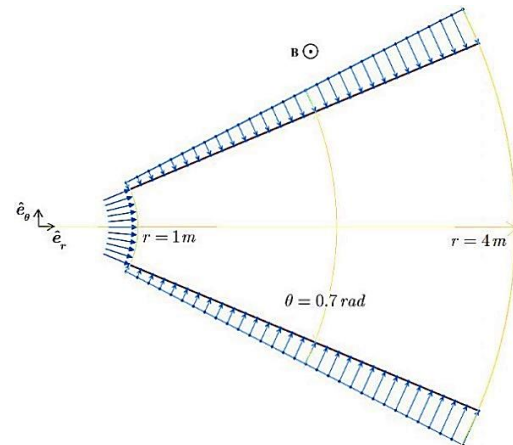
^۵ Similarity Transformation

^۱ Sub-Diffusion

^۲ Super-Diffusion

^۳ Orthogonal Curved Coordinates

اصلی بدون غلظت و به صورت شعاعی وارد کانال می‌شود و جریان ثانویه دارای غلظت و از دیوارهای کانال تزریق می‌شود.



شکل ۱- هندسه مساله

معادله تکانه سیال غیر قابل تراکم (ناویر استوکس) و معادله غلظت به صورت زیر بیان می‌شود [۷۰ و ۷۱]:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (۱)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla C = D \nabla^2 C + S \quad (۲)$$

که در آن ρ چگالی، $\vec{V}$ بردار سرعت، P فشار، $\vec{g}$ بردار شتاب گرانش، $\vec{\tau}$ تانسور تنش، $\vec{J}$ چگالی جریان الکتریکی (جریان الکتریکی بر واحد سطح مقطع)، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی، C غلظت، D ضریب پخش جرم و S تولید یا اضمحلال جرم است که در اینجا $S=0$ است. برای سیال نیوتنی غیر قابل تراکم داریم:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} = \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (۳)$$

چگالی جریان الکتریکی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \quad (۴)$$

که $\vec{E}$ میدان الکتریکی و σ رسانش الکتریکی سیال است. جمله $\sigma \vec{V} \times \vec{B}$ بیانگر چگالی جریان الکتریکی تولید شده بر اثر حرکت سیال رسانا در میدان مغناطیسی است. در اینجا فرض می‌کنیم $\vec{E} = 0$ است.

معادلات (۳) و (۴) را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} + \sigma (\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (۵)$$

در مختصات استوانه‌ای داریم $\vec{V} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z$ با فرض اینکه میدان مغناطیسی در راستای Z باشد و داشته باشیم $\vec{B} = B \hat{e}_z$ ؛ معادلات (۵) و (۲) را در مختصات استوانه ای باز می‌کنیم:

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) - \sigma B^2 v_r \quad (۶)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (۷)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \left(v_r \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (۸)$$

که در آن v_r سرعت شعاعی، v_θ سرعت مماسی، v_z سرعت در راستای محور Z و v لزجت سینماتیکی است.

مفروضات اصلی این تحلیل به شرح زیر است:

۱. جریان به صورت دو بعدی، پایا و غیر تراکم‌پذیر در نظر گرفته شده است و اثرات گرانش نادیده گرفته می‌شود.

$$v_r \cdot D_r^\xi C + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} = D_r(D_r^\xi C + \frac{1}{r} \cdot D_r^\xi C + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2}) \quad (12)$$

شرایط مرزی معادلات (۱۱) و (۱۲) به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} \theta = 0 \rightarrow v_\theta = V_{\theta w1}, v_r = V_{rw1}, C = C_{w1} \\ \theta = \alpha \rightarrow v_\theta = -V_{\theta w2}, v_r = V_{rw2}, C = C_{w2} \end{cases} \quad (13)$$

$V_{rw1}, V_{\theta w1}, V_{rw2}, V_{\theta w2}$ به ترتیب نمایانگر سرعت مماسی تزریق از دیوار پایینی، سرعت مماسی تزریق از دیوار بالایی، سرعت شعاعی تزریق از دیوار پایینی و سرعت شعاعی تزریق از دیوار بالایی هستند. فرض می کنیم روابط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} V_{\theta w1} &= v_{w1} \cdot D_r^\beta r^{\frac{\alpha}{r}}, & V_{\theta w2} &= v_{w2} \cdot D_r^\beta r^{\frac{\alpha}{r}} \\ V_{rw1} &= \frac{v_{w1}}{\alpha} r^{\frac{\alpha}{r}}, & V_{rw2} &= \frac{v_{w2}}{\alpha} r^{\frac{\alpha}{r}} \end{aligned} \quad (14)$$

که v_{w1} و v_{w2} مقادیر ثابت می باشند. تعاریف زیر ارائه می شوند:

$$\begin{cases} v_w = v_{w1} & \text{if } |v_{w1}| \geq |v_{w2}| \\ v_w = v_{w2} & \text{if } |v_{w2}| \geq |v_{w1}| \end{cases} \quad (15)$$

$$V_{\theta w} = \max[|V_{\theta w1}|, |V_{\theta w2}|]$$

متغیر C_{w1} نشان دهنده غلظت در دیواره پایینی است در حالی که C_{w2} نشان دهنده غلظت در دیواره بالایی است. علاوه بر این، فرض بر این است که $C_{w1} = c_{w1} r$ و $C_{w2} = c_{w2} r$ که c_{w1} و c_{w2} ثابت هستند. تعاریف زیر ارائه می شوند:

$$c_w = \max[c_{w1}, c_{w2}] \quad (16)$$

$$C_w = \max[C_{w1}, C_{w2}]$$

در این تحقیق فرض می شود، $v_{w1} = v_{w2}$ ، $C_{w1} = C_{w2}$ ، تبدیل های تشابهی بدون بعد به صورت زیر اعمال می شوند:

$$\eta = \frac{\theta}{\alpha} \quad (17)$$

۲. مولفه سرعت شعاعی نسبت به مولفه سرعت زاویه ای از اهمیت بیشتری برخوردار است. در معادلات تکانه، یک جمله غالب سرعت شعاعی لحاظ شده است و سایر جملات نادیده گرفته می شوند. تغییرپذیری سرعت مماسی در عرض کانال مدنظر قرار گرفته است، در حالی که در مطالعات پیشین مشتق این سرعت در امتداد محور y یا θ صفر فرض می شد.

با اعمال مفروضات فوق و حذف فشار از دو معادله (۶) و (۷)، معادلات تکانه به یک معادله دیفرانسیل جزئی با مرتبه بالاتر تبدیل می شوند.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right. \\ & \left. - \frac{\partial v_r}{\partial r} v_\theta - v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) = v \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} \right) - \frac{\sigma B_r^2}{\rho} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (9)$$

با اعمال مفروضات، معادله غلظت به صورت زیر در می آید:

$$v_r \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial C}{\partial \theta} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \right) \quad (10)$$

در رابطه (۹) مشتق مرتبه اول نسبت به r با مشتق کسری کاپوتو از مرتبه β که به صورت D_r^β نمایش داده می شود جایگزین می گردد که در آن $0 \leq \beta \leq 1$ است. در نتیجه به رابطه زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \cdot D_r^\beta v_r + v_r \cdot D_r^\beta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - v_\theta \cdot D_r^\beta v_r - v_r \cdot D_r^\beta v_\theta \right) = \\ & v \left(D_r^\beta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{r} \cdot D_r^\beta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{\sigma B_r^2}{\rho} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (11)$$

در معادله (۱۰) مشتق مرتبه اول نسبت به r با مشتق کسری کاپوتو از مرتبه ξ که با D_r^ξ نشان داده می شود، جایگزین می گردد که در آن $0 \leq \xi \leq 1$ است. داریم:

$$v \left(D_r^{\beta} \left(\frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F'' \right) + \frac{1}{r^{\frac{\tau}{\alpha}}} \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F^{(IV)} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^{\frac{\tau}{\alpha}}} \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F'' - \frac{1}{r} \cdot D_r^{\beta} \left(\frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F'' \right) \right) \\ - \frac{\sigma B_0^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\rho} \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F''$$

$$\frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F' \cdot D_r^{\beta} (rc_w G) + \frac{1}{r} \left(-\frac{\Delta}{\gamma} r^{\frac{\tau}{\alpha}} v_w F \right) \frac{C_w}{\alpha} r G' \\ = D \left(D_r^{\beta} (rc_w G) + \frac{1}{r} \cdot D_r^{\beta} (rc_w G) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^{\frac{\tau}{\alpha}}} \frac{C_w}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} r G'' \right) \quad (26)$$

مشتق کسری کاپوتو تابع توانی از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۷۲]:

$$D_t^{\gamma} r^a = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\gamma+1)} r^{a-\gamma} \quad (27)$$

با بهره‌گیری از رابطه (۲۷) و استفاده از رابطه $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ و همچنین اعمال پارامترهای بدون بعد عدد رینولدز^۱، عدد هارتمن^۲، عدد اشویتز^۳ و عدد پکلت^۴ که به ترتیب به صورت $Re = \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}} v_w}{\nu}$ ، $Ha = rB \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$ ، $Sc = \frac{\nu}{D}$ و $Pe = Re \cdot Sc$ تعریف می‌شوند؛ روابط (۲۵) و (۲۶) به شکل نهایی زیر تبدیل می‌شود:

$$\psi = r^{\frac{\tau}{\alpha}} v_w F(\eta) \quad (18)$$

$$C = rc_w G(\eta) \quad (19)$$

که در آن η موقعیت زاویه‌ای بی‌بعد، F و G به ترتیب تابع بی بعد معادله ممنوم و معادله غلظت و ψ تابع جریان است. به این ترتیب داریم:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha} v_w F' \quad (20)$$

$$v_{\theta} = -D_r^{\beta} \psi = -D_r^{\beta} (r^{\frac{\tau}{\alpha}} v_w F) = \\ -v_w F \cdot D_r^{\beta} r^{\frac{\tau}{\alpha}} \quad (21)$$

مشتقات نسبت به θ از طریق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{d}{d\eta} \frac{d\eta}{d\theta} = \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\eta} \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = -\frac{1}{\alpha} v_w F' \cdot D_r^{\beta} r^{\frac{\tau}{\alpha}} \quad (23)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F'' \quad , \quad \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} = \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F''' \\ , \quad \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} = \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F^{(4)} \quad (24)$$

با جایگذاری روابط (۱۷) تا (۲۴) در معادلات (۱۱) و (۱۲) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F'' \cdot D_r^{\beta} \left(\frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F' \right) + \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F' \cdot D_r^{\beta} \left(\frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F'' \right) \\ - \frac{1}{r\alpha} v_w F' \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F'' \cdot D_r^{\beta} r^{\frac{\tau}{\alpha}} - \frac{\Delta}{\gamma} r^{\frac{\tau}{\alpha}} v_w F \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F'' \\ - \left(-\frac{\Delta}{\gamma} r^{\frac{\tau}{\alpha}} v_w F \right) \cdot D_r^{\beta} \left(\frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F' \right) \\ - \frac{r^{\frac{\tau}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{\tau}{\alpha}}} v_w F' \cdot D_r^{\beta} \left(-\frac{\Delta}{\gamma} r^{\frac{\tau}{\alpha}} v_w F \right) = \quad (25)$$

³ Schmidt Number

⁴ Peclet Number

¹ Reynolds Number

² Hartman Number

$\hat{C}$ به طور مستقیم تغییرات مربوط به متغیرهای V ، v_θ ، v_r و C را بیان می کند.

۳- روش تحلیلی

روش کسر تطبیقی^۱ به منظور حل معادلات دیفرانسیل معمولی به کار می رود [۷۳]. این روش ابتدا با حل بخش خطی معادله دیفرانسیل آغاز می شود و سپس متغیرها را با تابع کسری چند جمله ای جایگزین می کند. ضرایب اولیه چند جمله ای ها به گونه ای انتخاب می شوند که معادله دیفرانسیل خطی را ارضا نمایند. پس از آن، ضرایب نهایی از طریق بهینه سازی که با مقادیر اولیه مرتبط با معادله دیفرانسیل خطی آغاز می شود به دست می آید. هدف بهینه سازی، کاهش واریانس بین پاسخ معادله و معادله دیفرانسیل غیرخطی است. در نهایت، ضرایب ثابت براساس شرایط مرزی از پیش تعیین شده مشخص می شوند. معادله دیفرانسیل معمولی زیر را در نظر می گیریم:

$$H(F(\eta)) = L(F(\eta)) + N(F(\eta)) = 0. \quad (35)$$

در اینجا، H به عنوان یک عملگر معرفی می شود در حالی که L به عنوان یک عملگر خطی و N به عنوان یک عملگر غیرخطی می باشند. در مرحله اول، بخش خطی معادله مورد بررسی قرار می گیرد.

$$L(F_L(\eta)) = 0. \quad (36)$$

جواب معادله (۳۶) به شکل زیر قابل بیان است:

$$F_L(\eta) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(\eta) \quad (37)$$

به منظور دستیابی به پاسخ معادله (۳۵)، معادله (۳۷) مورد استفاده قرار می گیرد و به جای متغیر η ، یک تابع کسری چند جمله ای مناسب جایگزین می شود.

$$F(\eta) = \sum_{i=1}^m c_i f_i \left(\frac{\sum_{j=0}^l p_{ij} \eta^j}{\sum_{k=0}^l q_{ik} \eta^k} \right) \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & F^{(IV)} + \frac{\Delta}{\gamma} \alpha \operatorname{Re} F''' F \\ & - \frac{\Gamma(\frac{\Delta}{\gamma}) \alpha}{\Gamma(\frac{\Delta}{\gamma} - \beta)} \left(\gamma - \frac{\Delta}{\gamma} \right) \operatorname{Re} r^{1-\beta} F'' F' + \\ & \left[\alpha' \Gamma(\frac{\Delta}{\gamma}) r^{-\beta+1} \left(\frac{r^{1-\beta}}{\Gamma(\frac{\Delta}{\gamma} - \gamma \beta)} - \frac{1}{\Gamma(\frac{\Delta}{\gamma} - \beta)} \right) \right] F'' \\ & + \alpha' \gamma (1 - \operatorname{Ha}^\gamma) \\ & - \frac{\gamma \alpha' \Gamma(\frac{\Delta}{\gamma})}{\Gamma(\frac{\Delta}{\gamma} - \beta)} \operatorname{Re} r^{1-\beta} F' F = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & G'' + \frac{\Delta}{\gamma} \alpha \operatorname{Pe} G' F - \alpha \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \xi)} r^{1-\xi} \operatorname{Pe} G F' \\ & + \alpha' \Gamma(\gamma) \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma - \gamma \xi)} r^{1-\xi} + \frac{1}{\Gamma(\gamma - \xi)} \right] r^{1-\xi} G = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

با اعمال روابط (۱۴) تا (۲۱) به رابطه (۱۳)، شرایط مرزی روابط (۲۸) و (۲۹) به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} \eta = 0 \rightarrow F = -1, F' = 1, G = 1 \\ \eta = 1 \rightarrow F = 1, F' = 1, G = 1 \end{cases} \quad (30)$$

زمانی که بر روی یک متغیر نماد $\wedge$ قرار داده می شود؛ نشانگر بی بعد شدن آن متغیر است. برای بی بعدسازی از سرعت مماسی و غلظت در نقطه ابتدایی دیوارهای کانال به عنوان مقادیر مرجع استفاده می شود:

$$\hat{V}_r = \frac{V_r}{V_{\theta w}|_{r=1}} \quad (31)$$

$$\hat{V}_\theta = \frac{V_\theta}{V_{\theta w}|_{r=1}} \quad (32)$$

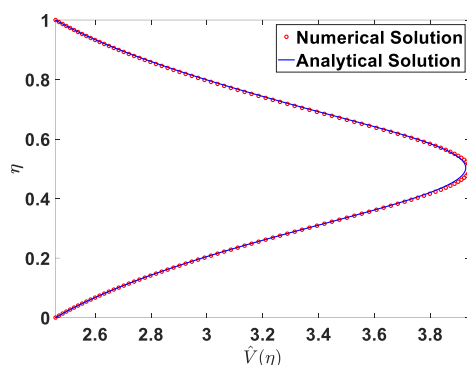
$$\hat{V} = \frac{|V|}{V_{\theta w}|_{r=1}} \quad (33)$$

$$\hat{C} = \frac{C}{C_w|_{r=1}} \quad (34)$$

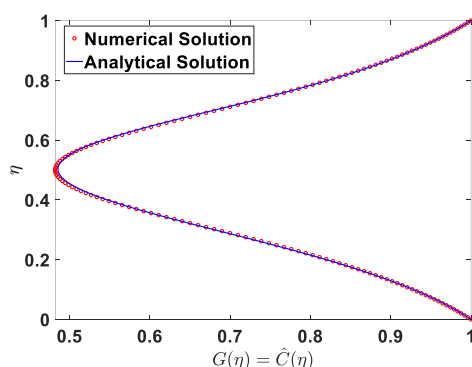
ثابت بودن مخرج در روابط (۳۱) تا (۳۴) نشان دهنده این است که تغییرات مشاهده شده در متغیرهای بی بعد $\hat{V}_r$ ، $\hat{V}_\theta$ ، $\hat{V}$ و

^۱ Adaptive Fraction Method (AFM)

که در آن f_A و f_N به ترتیب نمایانگر پاسخ‌های تحلیلی و عددی هستند. متغیر n تعداد نقاط تحلیل را در بازه $0 \leq \eta \leq 1$ مشخص می‌کند که در اینجا برابر با ۱۰۱ است.



شکل ۳- حل تحلیلی و عددی $\hat{V}$ در شرایط $Re = 40, Ha = 0.2, Sc = 0.3, b = 0.8, x = 0.8$



شکل ۴- حل تحلیلی و عددی G در شرایط $Re = 40, Ha = 0.2, Sc = 0.3, b = 0.8, x = 0.8$

مقادیر میانگین مربعات خطا در شرایط $Re = 40, Ha = 0.2, Sc = 0.3, \beta = 0.8, \xi = 0.8$ برای $F, \hat{V}_r, \hat{V}_\theta$ و G به ترتیب برابر با $0.0070, 0.0078, 0.0011$ و 0.0020 است. وجود همبستگی و سازگاری در نتایج عددی و تحلیلی، اعتبار روش تحلیلی را تأیید می‌کند.

ژائو و همکاران [۷۴] تاثیر میدان مغناطیسی را بر جریان گاز هادی الکتریسته از درون یک لوله مدور رسانا به صورت عددی مطالعه کردند. مطابق شکل ۵ با افزایش عدد هارتمن، جت پر

برای تعیین ضرایب q_{ik} و p_{ij} ، معادله (۳۸) در معادله (۳۵) گنجانده می‌شود و با بهره‌گیری از روش‌های بهینه‌سازی، خطای به‌دست‌آمده به حداقل می‌رسد. در نهایت، ضرایب c_i با رعایت شرایط مرزی محاسبه می‌شوند.

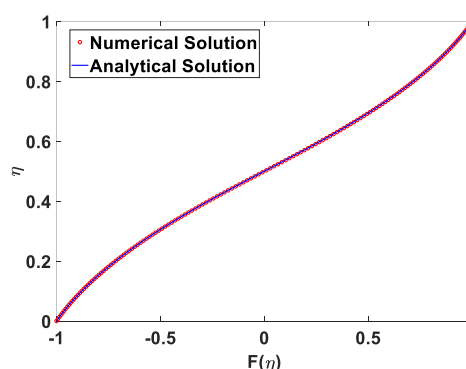
۴- روش حل دستگاه معادلات

برای دستیابی به حل تحلیلی دستگاه معادلات (۲۸) و (۲۹) روش کسر تطبیقی به کار گرفته شده است؛ همچنین از نرم‌افزار متلب که روش تفاضل محدود را در ترکیب با فرمول سه مرحله‌ای لوباتو به کار می‌برد استفاده شده است تا پاسخ‌های عددی معادلات (۲۸) و (۲۹) محاسبه گردد. به دنبال آن، متغیرهای $\hat{V}_r, \hat{V}_\theta$ و $\hat{V}$ از روی F محاسبه شدند.

۵- اعتبار سنجی روش حل

مقایسه نتایج حل تحلیلی و عددی متغیرهای $F, \hat{V}$ و G در شکل‌های ۲ تا ۴ ارائه شده است. تفاوت بین پاسخ‌های تحلیلی و عددی با استفاده از ریشه میانگین مربعات خطا^۱ مورد بررسی قرار گرفته است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_A - f_N)^2} \quad (39)$$



شکل ۲- حل تحلیلی و عددی تابع F در شرایط $Re = 40, Ha = 0.2, Sc = 0.3, b = 0.8, x = 0.8$

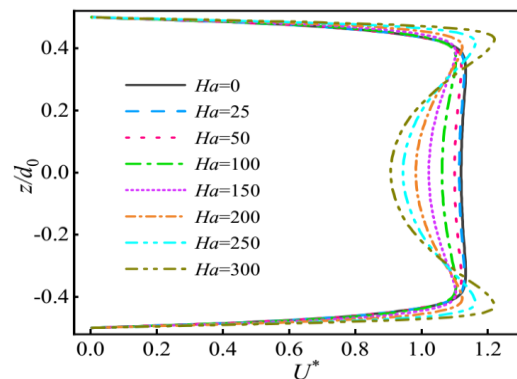
^۱ Root Mean Square Error (RMSE)

هندسه و شرایط مساله مورد مطالعه حاضر با پژوهش ژائو و همکاران و تحقیق رحمتی و ملایی تفاوت زیادی دارد. با این وجود، رفتار سرعت بی‌بعد مشاهده شده در شکل ۹ تحقیق حاضر، مشابه رفتار سرعت در پژوهش‌های این محققین است؛ به این معنی که افزایش عدد هارتمن تاثیر مشابهی در ایجاد پروفیل سرعت M شکل دارد. این مساله بیانگر اعتبار روش تحلیل حاضر است.

۶- نتایج

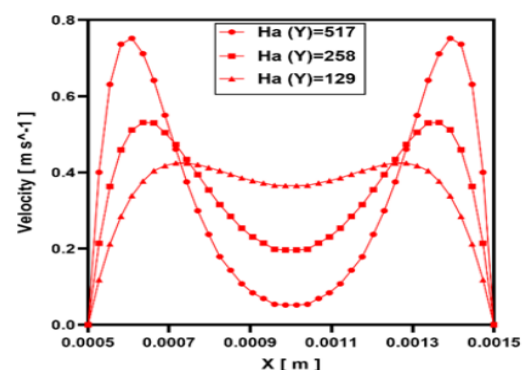
پارامترهای مؤثر بر این مساله شامل Re ، Ha ، Pe و β و ξ می باشد که به ترتیب عدد رینولدز، عدد هارتمن، عدد پکلت، مرتبه مشتق کسری معادله ممنتوم و مرتبه مشتق کسری معادله غلظت هستند. این مساله شامل چندین متغیر بدون بعد F ، $\hat{v}_r$ ، $\hat{v}_\theta$ و $\hat{C}$ است که به ترتیب نمایانگر تابع F ، سرعت مماسی بدون بعد، سرعت شعاعی بدون بعد، سرعت بدون بعد و غلظت بدون بعد هستند. شکل ۷ نشان می‌دهد که افزایش عدد رینولدز منجر به افزایش بسیار جزئی در $|F|$ در نتیجه در $\hat{v}_\theta$ می‌شود. با این حال، این افزایش در مرکز کانال که در آن سرعت $\hat{v}_\theta$ به دلیل تقارن صفر است، اهمیت چندانی ندارد. با افزایش Re ، مقادیر $\hat{v}_r$ و $\hat{v}_\theta$ در مرکز کانال افزایش و در دیگر نواحی کاهش جزئی نشان می‌دهد. افزایش رینولدز منجر به کاهش قابل ملاحظه غلظت بی‌بعد در مرکز کانال و افزایش جزئی آن در نزدیکی دیوارها می‌شود. افزایش Re به طور همزمان باعث افزایش جریان غیر غلیظ اولیه و افزایش جریان غلیظ ثانویه تزریق شده از دیوارها می‌شود. جریان غیر غلیظ اولیه غلظت را کاهش می‌دهد، در حالی که جریان غلیظ ثانویه آن را افزایش می‌دهد؛ بنابراین، با افزایش Re ، انتظار می‌رود در نزدیکی دیوارها که تزریق غالب است غلظت افزایش اندکی پیدا کند. در همان زمان در مرکز کانال که $\hat{v}_\theta$ کمینه است و جریان اولیه غالب است؛ غلظت کاهش قابل توجهی می‌یابد.

سرعت در لایه‌های مرزی رابرتز^۱ ایجاد می‌شود و پروفیل سرعت بی‌بعد M شکل پدیدار می‌گردد. لایه مرزی رابرتز بر روی دیواری که موازی میدان مغناطیسی است تشکیل می‌شود.



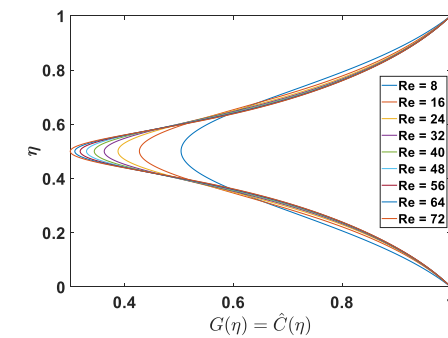
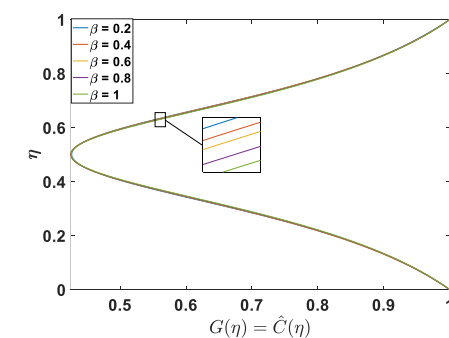
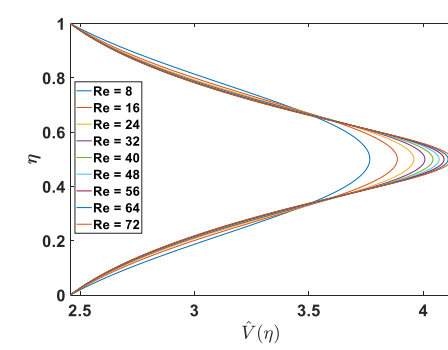
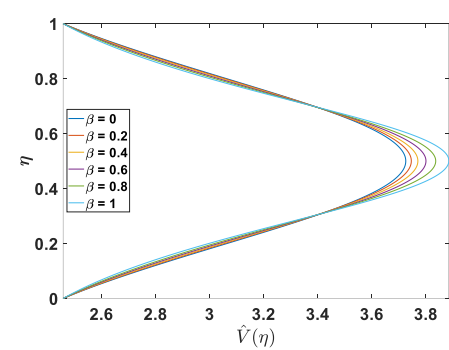
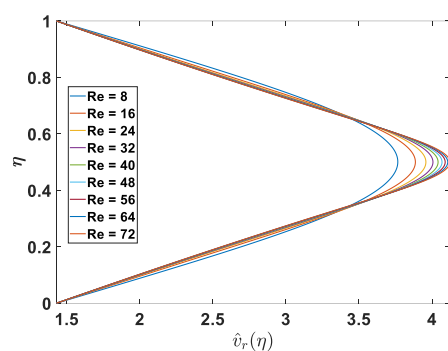
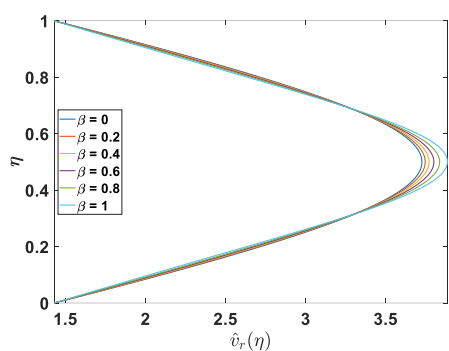
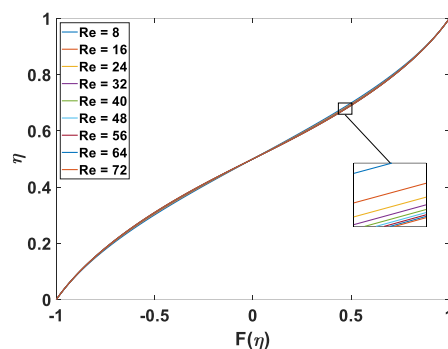
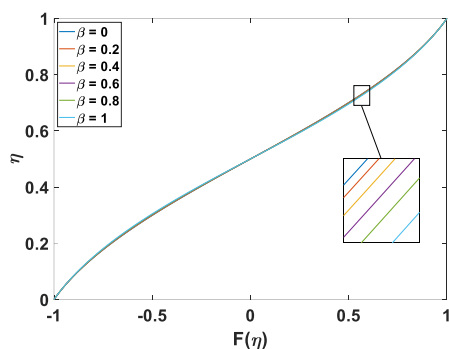
شکل ۵- تغییرات سرعت بی‌بعد در مقطع لوله، بر حسب پارامتر Ha ، پژوهش ژائو و همکاران [۷۴]

رحمتی و ملایی [۷۵] جریان فلز مایع داخل میکرو کانال با مقطع مستطیلی تحت میدان مغناطیسی را به صورت عددی تحلیل کردند. در شکل ۶ توزیع سرعت بین دیوارهای موازی با جهت میدان مغناطیسی نمایش داده شده است. با افزایش عدد هارتمن، توزیع سرعت M شکل در کانال مشاهده می‌شود.



شکل ۶- تغییرات سرعت در عرض کانال بر حسب Ha ، پژوهش رحمتی و ملایی [۷۵]

^۱ Robert Boundary Layers

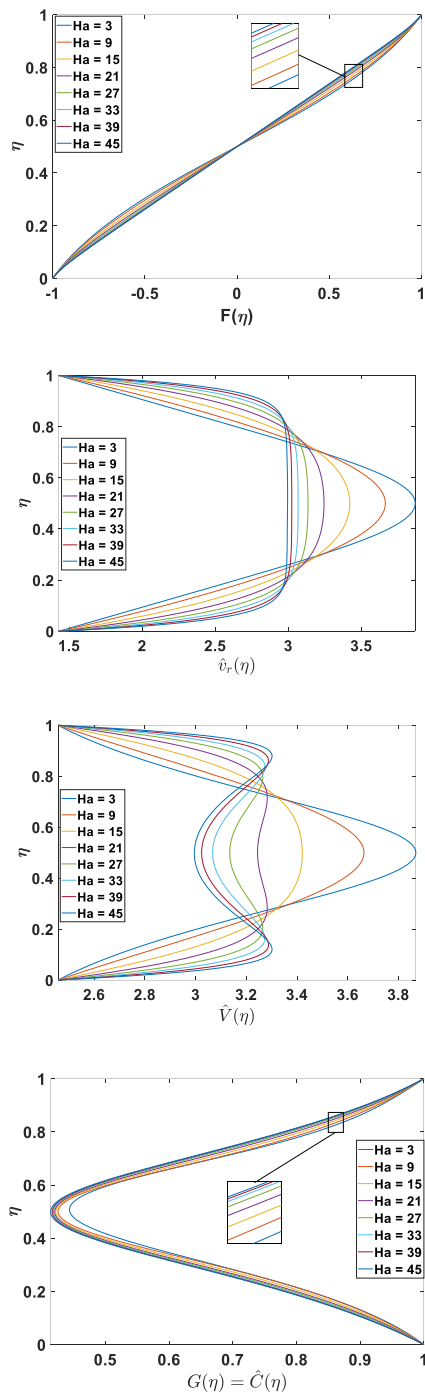


شکل ۸- تغییرات F ، $\hat{v}_r$ ، $\hat{V}$ و G بر حسب پارامتر

β در شرایط $Re = 16$ ، $Ha = 2$ ، $Sc = 1/5$ ، $x = 1$

شکل ۷- تغییرات F ، $\hat{v}_r$ ، $\hat{V}$ و G بر حسب پارامتر

Re در شرایط $Ha = 2$ ، $Sc = 1/5$ ، $b = 1$ ، $x = 1$



شکل ۹- تغییرات F ، $\hat{v}_r$ ، $\hat{v}_\theta$ و G بر حسب پارامتر Ha در شرایط $Re = 16$ ، $Sc = 1/5$ ، $b = 1$ ، $x = 1$

طبق شکل ۸ افزایش β تأثیر مشابه و هم جهتی با افزایش عدد رینولدز بر متغیرها دارد. البته افزایش β تأثیر ناچیزی بر متغیرهای $|F|$ و $\hat{C}$ دارد به نحوی که می توان گفت تقریباً بی تأثیر است.

افزایش عدد هارتمن نشان دهنده رفتاری معکوس نسبت به افزایش عدد رینولدز است. طبق شکل ۹ افزایش عدد هارتمن باعث کاهش $|F|$ و در نتیجه $|\hat{v}_\theta|$ می شود. بر طبق رابطه (۲۰) سرعت شعاعی تابعی از مشتق تابع F است. با توجه به شکل ۹ با افزایش عدد هارتمن، منحنی F در مرکز کانال به خط مستقیم نزدیک تر می شود و در نتیجه سرعت شعاعی بدون بعد در مرکز کانال تقریباً یکنواخت باقی می ماند. افزایش عدد هارتمن موجب افزایش $\hat{v}_r$ در نزدیکی دیوارها و کاهش آن در مرکز کانال می گردد.

افزایش عدد هارتمن منجر به کاهش $\hat{V}$ در مرکز کانال و افزایش آن در کنار دیوارهای کانال می شود. کاهش سرعت در مرکز کانال به توزیع یکنواخت تری از سرعت بدون بعد در ناحیه مرکزی کانال تا عدد هارتمن حدود ۲۱ منجر می شود. افزایش بیشتر عدد هارتمن باعث ظهور دو سرعت بیشینه در نزدیکی دیوارهای کانال خواهد شد. کاهش سرعت در مرکز کانال ناشی از تأثیر نیروی لورنز^۱ می باشد که به عنوان یک نیروی مقاوم در برابر جریان عمل می کند. از طرفی بر اثر پیوستگی، سرعت در کنار دیوارها افزایش می یابد و این منجر به ایجاد یک لایه مرزی نازک با نام لایه کناری^۲ یا لایه مرزی رابرتز می شود. با افزایش عدد هارتمن ضخامت لایه مرزی رابرتز کاهش می یابد [۷۴-۷۶].

افزایش عدد هارتمن منجر به کاهش اندک غلظت بی بعد در سراسر کانال می شود. قبلاً بیان گردید که افزایش عدد هارتمن منجر به کاهش $|\hat{v}_\theta|$ در کانال می گردد. به نظر می رسد، این مساله عامل کاهش غلظت است.

² Sidewall Layer

¹ Lorentz Force

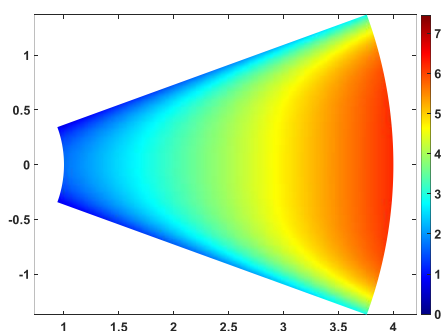
بررسی تاثیرات افزایش عدد رینولدز بر خطوط کانتور سرعت بدون بعد که در شکل ۱۲ نمایش داده شده است، الگوهای مشابهی را با خطوط کانتور سرعت شعاعی بدون بعد نشان می دهد که در شکل ۱۱ مشاهده شد.

همانطور که در شکل ۱۳ نشان داده شده است؛ افزایش عدد رینولدز باعث می شود که خطوط کانتور غلظت به تدریج به سمت مرکز کانال حرکت کنند و همزمان غلظت در ناحیه مرکزی کاهش یابد. این رفتار توسط دو اثر همزمان توضیح داده می شود: افزایش سرعت جریان بدون غلظت اولیه از ابتدای کانال و افزایش سرعت جریان سیال غلیظ ثانویه تزریق شده از دیوارهای کانال. افزایش جریان اولیه باعث کاهش غلظت در هسته کانال می گردد. در عین حال، افزایش جریان سیال ثانویه منجر به غلظت های بالاتر در اطراف هسته کانال می شود.

شکل ۱۴ بر تأثیر عدد رینولدز بر بردارهای سرعت بدون بعد تمرکز دارد. با افزایش عدد رینولدز، بردارهای سرعت توزیع زنگوله ای را از خود نشان می دهند که در آن سرعت های بالاتر در مرکز و سرعت های پایین تر در حاشیه مشخص می شود.

طبق شکل های ۱۵ تا ۱۷، در حالت کلی از نظر جهت تاثیر، افزایش عدد β تأثیری هم جهت با افزایش عدد رینولدز بر رفتار جریان نشان می دهد. در شکل های ۱۵ و ۱۶ افزایش β باعث حرکت بسیار جزئی کانتورهای $\hat{V}_r$ و $\hat{V}_\theta$ به سمت مرکز کانال می گردد و بیشینه سرعت شعاعی بی بعد و سرعت بی بعد اندکی افزایش می یابد.

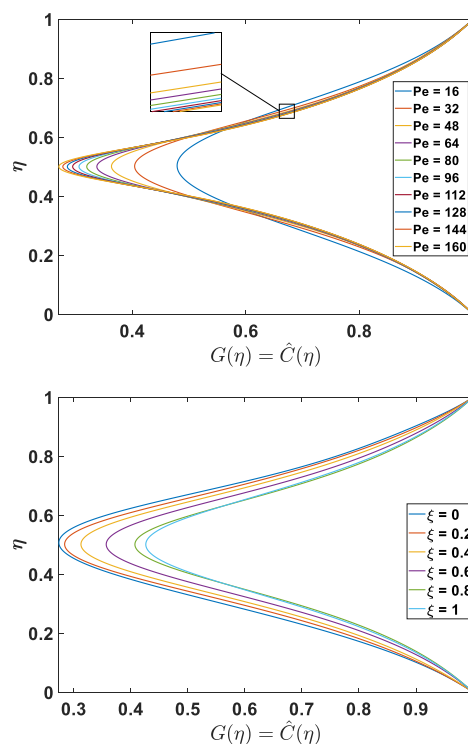
طبق شکل ۱۷ افزایش β تأثیر قابل مشاهده ای بر غلظت بی بعد نمی گذارد.



(الف)

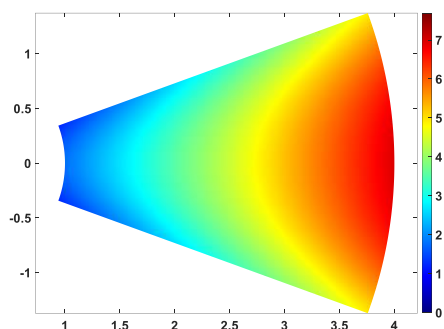
بنابر شکل ۱۰، افزایش عدد پکلت منجر به کاهش غلظت بی بعد در مرکز کانال و افزایش بسیار جزئی و ناچیز در باقی کانال می شود. عدد پکلت حاصل ضرب عدد رینولدز در عدد اشمیت است. اگر فرض کنیم عدد اشمیت ثابت باشد، تغییرات عدد پکلت هم جهت با تغییرات عدد رینولدز است که در مرکز کانال این هم جهتی مشاهده می شود و افزایش عدد پکلت مشابه افزایش عدد رینولدز منجر به کاهش غلظت بی بعد در مرکز کانال می گردد.

در شکل ۱۰ مشاهده می شود که افزایش ξ منجر به افزایش غلظت بی بعد در سراسر کانال می شود.

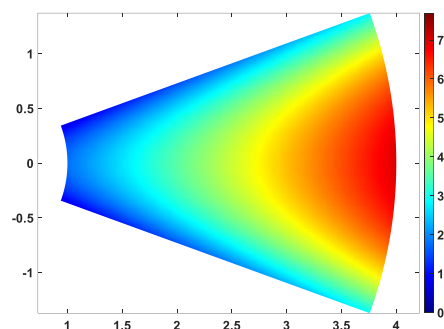


شکل ۱۰- تغییرات تابع G برحسب پارامتر Pe و ξ در شرایط $Re = 16$, $Ha = 2$, $b = 1$, $x = 1$

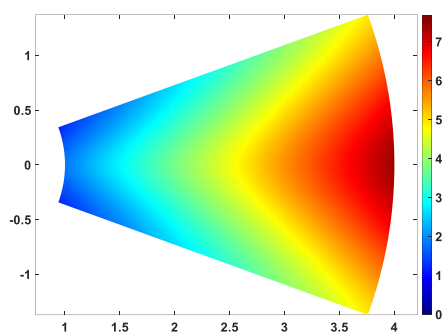
شکل ۱۱ نشان می دهد که با افزایش مقادیر عدد رینولدز، خطوط کانتور سرعت شعاعی بدون بعد به سمت مرکز کانال تغییر می کنند و در راس مخروط کانتور، برجستگی بیشتری ایجاد می شود؛ همچنین، افزایش در حداکثر سرعت شعاعی بدون بعد نیز مشاهده می گردد.



(ب)



(ب)

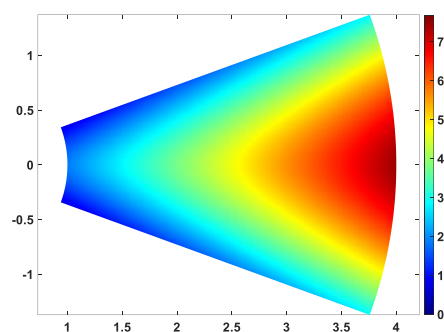


(ج)

شکل ۱۲- کانتورهای $\hat{V}$ در شرایط

$Sc = 3$, $Ha_{in} = 6$, $b = 0.5$, $x = 0.5$ و (الف)

$Re_{in} = 14$ (ج) $Re_{in} = 4$ (ب) $Re_{in} = 0.4$

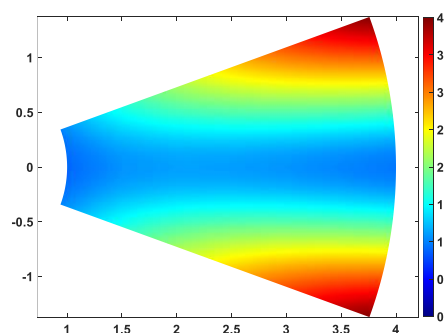


(ج)

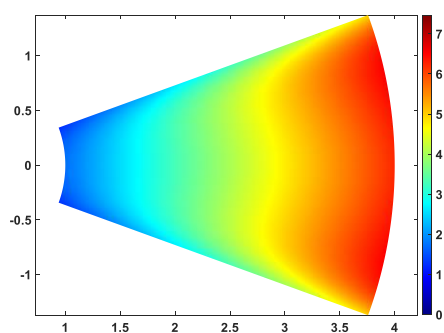
شکل ۱۱- کانتورهای $\hat{v}_r$ در شرایط

$Sc = 3$, $Ha_{in} = 6$, $b = 0.5$, $x = 0.5$ و (الف)

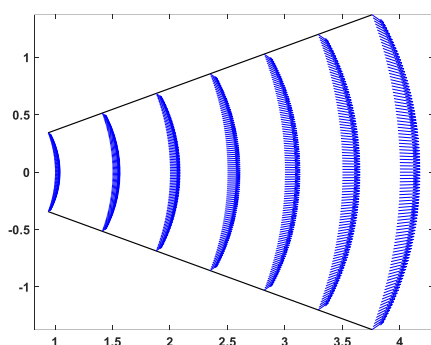
$Re_{in} = 14$ (ج) $Re_{in} = 4$ (ب) $Re_{in} = 0.4$



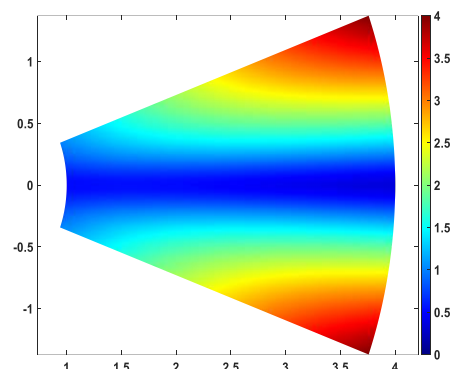
(الف)



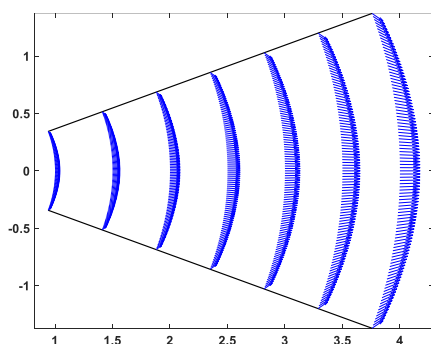
(الف)



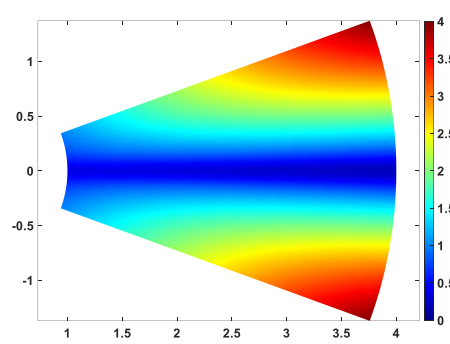
(ب)



(ب)



(ج)



(ج)

شکل ۱۴- بردارهای $\hat{V}$ در شرایط

$Sc = 3$, $Ha_{in} = 6$, $b = 0.5$, $x = 0.5$ و (الف)

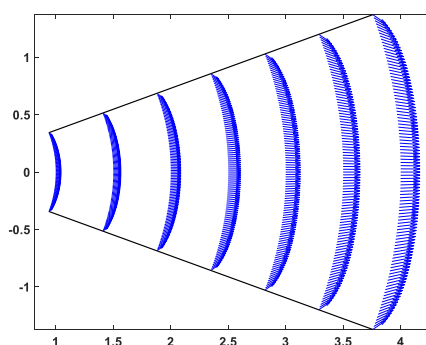
$Re_{in} = 14$ (ج) $Re_{in} = 4$ (ب) $Re_{in} = 0.4$

شکل ۱۳- کانتورهای $\hat{C}$ در شرایط

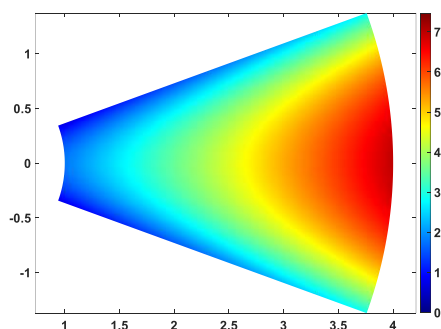
$Sc = 3$, $Ha_{in} = 6$, $b = 0.5$, $x = 0.5$ و (الف)

$Re_{in} = 14$ (ج) $Re_{in} = 4$ (ب) $Re_{in} = 0.4$

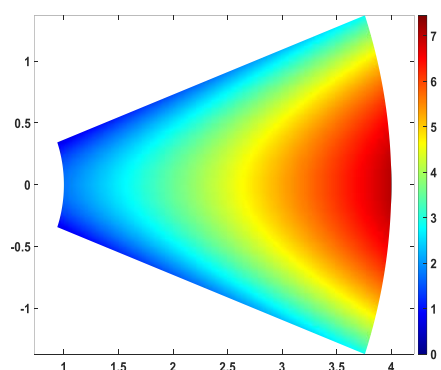
تحلیل داده‌های موجود در شکل‌های ۱۸ تا ۲۲ حاکی از آن است که افزایش عدد هارتمن معمولاً نتایج متضاد با آنچه در زمان افزایش عدد رینولدز مشاهده می‌شود به همراه دارد. شکل ۱۸ نشان می‌دهد که با افزایش عدد هارتمن، خطوط کانتورهای سرعت مماسی بدون بعد به‌طور مستقیم‌تر و دورتر از مرکز کانال قرار می‌گیرند؛ همچنین، شکل‌های ۱۹ و ۲۰ نشان می‌دهند که با افزایش عدد هارتمن، کاهش قابل توجهی در هر دو مقدار حداکثر سرعت شعاعی بدون بعد و حداکثر سرعت بدون بعد ایجاد می‌گردد. در اعداد هارتمن بالا، خطوط کانتور در موقعیت‌های شعاعی ثابت یکنواخت‌تر می‌شوند.



(الف)



(ب)

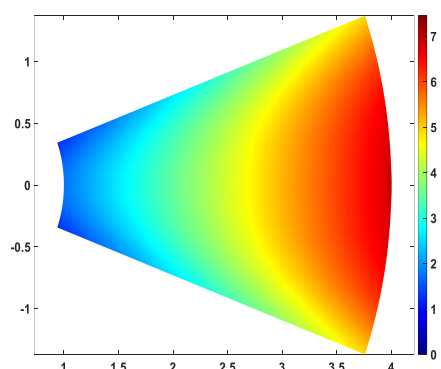


(ج)

شکل ۱۵- کانتورهای $\hat{v}_r$ در شرایط

$Re_{in} = 4$, $Ha_{in} = 6$, $Sc = 3$, $x = 0.5$ و (الف)

$b = 1$ (ج) $b = 0.5$ (ب) $b = 0.1$

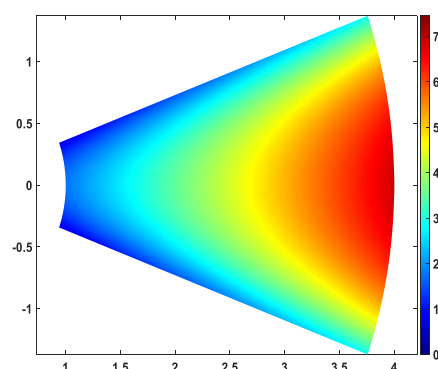


(الف)

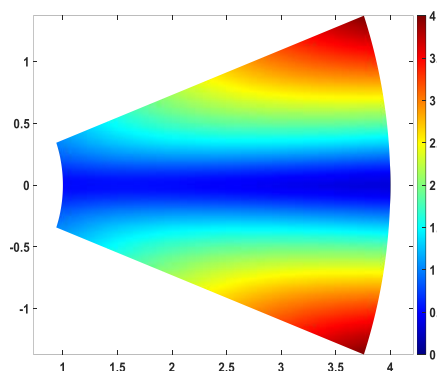
براساس شکل ۲۰، در مقادیر کافی بزرگ از عدد هارتمن، دو سرعت بی‌بعد بیشینه کوچک در نزدیکی دیواره‌های کانال شکل می‌گیرد. همانطور که در شکل ۲۱ نشان داده شده است افزایش عدد هارتمن باعث می‌شود که خطوط کانتور غلظت بدون بعد از مرکز کانال دورتر شوند و در نتیجه سطح غلظت در سراسر کانال کاهش یابد. شکل ۲۲ افزایش عدد هارتمن منجر به یکنواختی بردارهای سرعت بدون بعد می‌گردد.

همانطور که در شکل ۲۳ نشان داده شده است؛ افزایش عدد اشمیت باعث می‌شود که خطوط کانتور غلظت به مقدار بسیار جزئی به سمت مرکز کانال جابجا شوند و به‌طور همزمان غلظت در مرکز کانال کاهش یابد. در حالی که جریان غلیظ ثانویه تزریق شده از دیواره‌ها تأثیر قابل توجهی در نزدیکی دیواره‌ها دارد؛ با حرکت به سمت مرکز کانال تأثیر آن کاهش می‌یابد و جریان بدون غلظت اولیه غالب می‌شود. عدد اشمیت منعکس کننده نسبت بین همرفت و انتشار در توزیع غلظت است و نقش مهمی در توضیح این رفتار ایفا می‌کند. با افزایش عدد اشمیت، اثرات همرفت برجسته‌تر می‌شود؛ بنابراین در نزدیک دیواره‌ها تا حوالی هسته کانال که جریان تزریقی غالب است افزایش اشمیت منجر به افزایش غلظت می‌گردد. از طرفی در هسته کانال که جریان اصلی غالب است افزایش اشمیت منجر به کاهش غلظت می‌شود.

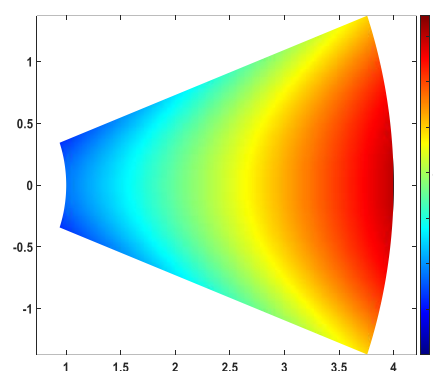
طبق شکل ۲۴ با افزایش Sc ، خطوط کانتور غلظت بی‌بعد به سمت مرکز کانال متمایل می‌شود و غلظت در سراسر کانال افزایش می‌یابد.



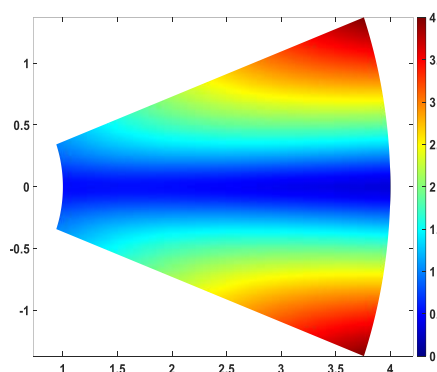
(الف)



(ب)



(ب)

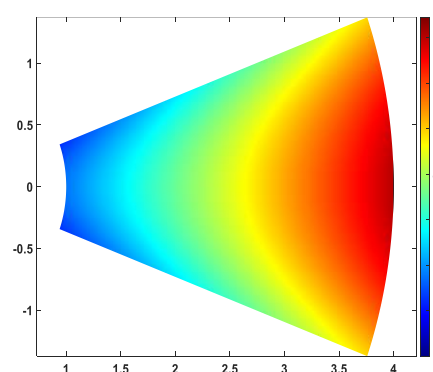


(ج)

شکل ۱۷- کانتورهای $\hat{C}$ در شرایط

$Re_{in} = 4$, $Ha_{in} = 6$, $Sc = 3$, $x = 0/5$ و (الف)

$b = 1$ (ج) $b = 0/5$ (ب) $b = 0/1$

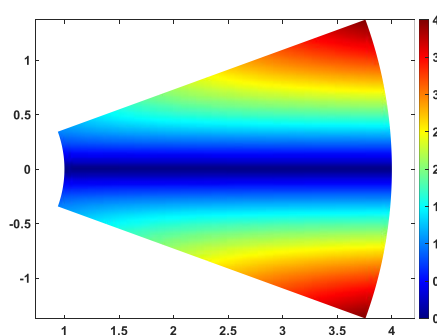


(ج)

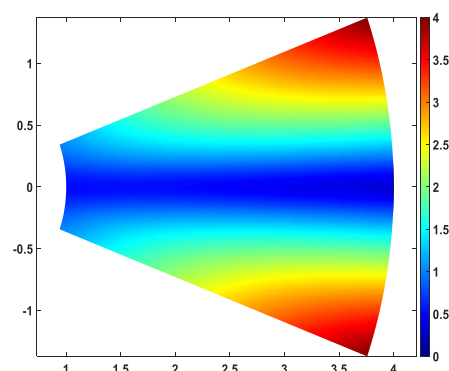
شکل ۱۶- کانتورهای $\hat{V}$ در شرایط

$Re_{in} = 4$, $Ha_{in} = 6$, $Sc = 3$, $x = 0/5$ و (الف)

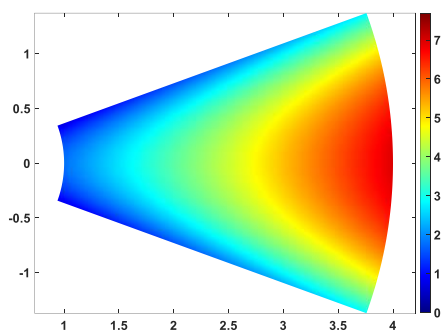
$b = 1$ (ج) $b = 0/5$ (ب) $b = 0/1$



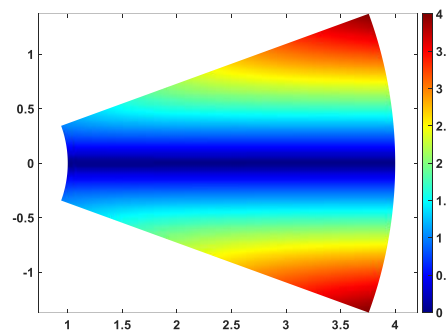
(الف)



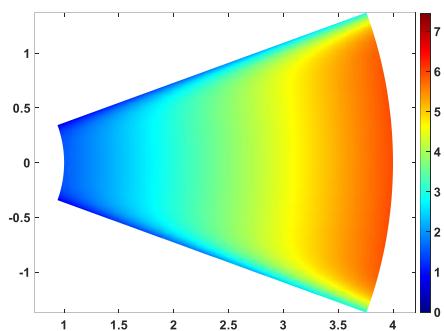
(الف)



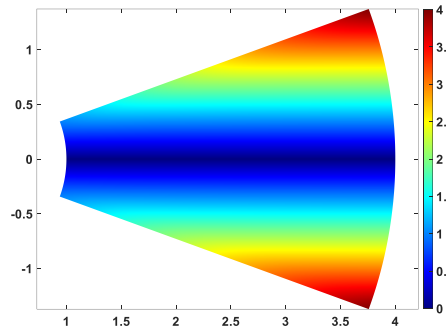
(ب)



(ب)



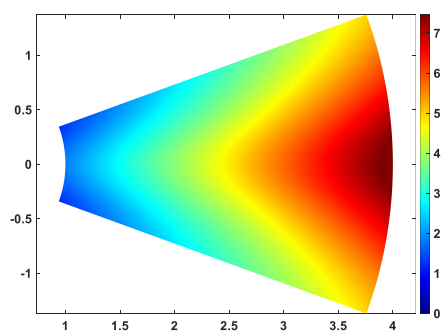
(ج)



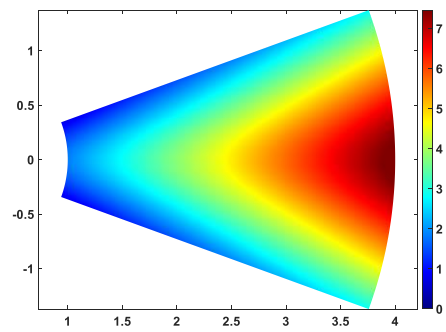
(ج)

شکل ۱۹- کانتورهای $\hat{v}_r$ در شرایط
 $\text{Re}_{in} = 4, \text{Sc} = 3, b = 0.5, x = 0.5$ و (الف)
 $\text{Ha}_{in} = 20$ (ج) $\text{Ha}_{in} = 6$ (ب) $\text{Ha}_{in} = 0$

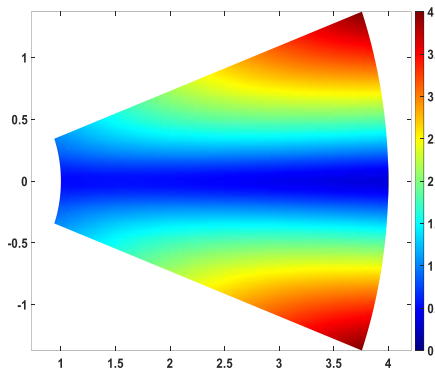
شکل ۱۸- کانتورهای $\hat{v}_\theta$ در شرایط
 $\text{Re}_{in} = 4, \text{Sc} = 3, b = 0.5, x = 0.5$ و (الف)
 $\text{Ha}_{in} = 20$ (ج) $\text{Ha}_{in} = 6$ (ب) $\text{Ha}_{in} = 0$



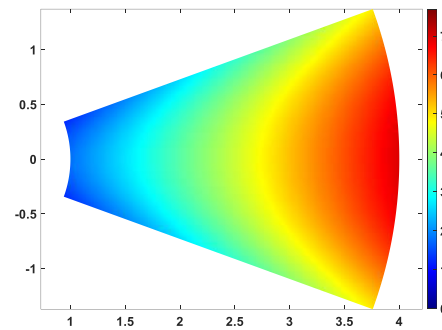
(الف)



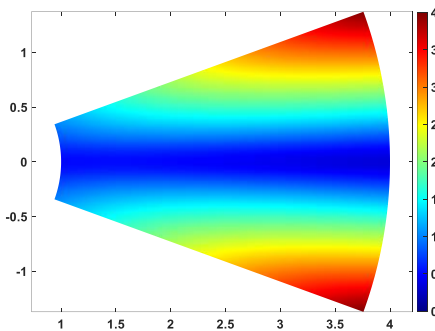
(الف)



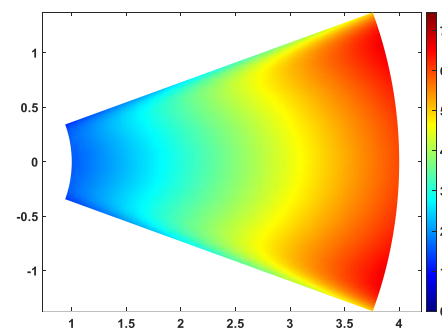
(ب)



(ب)



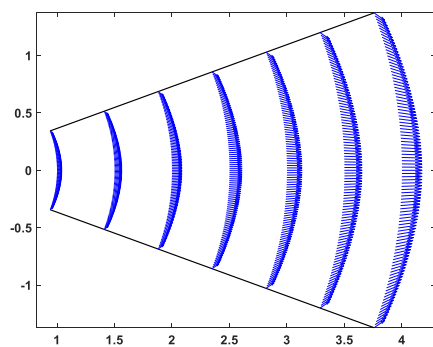
(ج)



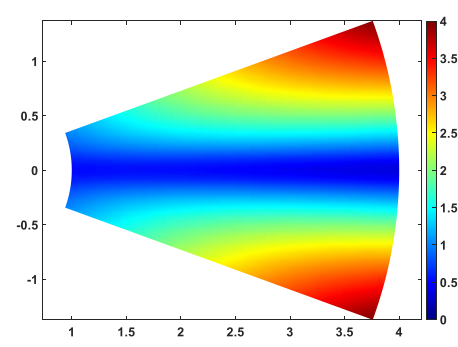
(ج)

شکل ۲۱- کانتورهای $\hat{C}$ در شرایط
 $Re_{in} = 4, Sc = 3, b = 0.5, x = 0.5$ و (الف)
 $Ha_{in} = 20$ (ج) $Ha_{in} = 6$ (ب) $Ha_{in} = 0$

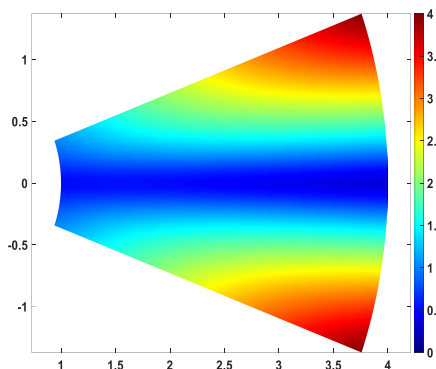
شکل ۲۰- کانتورهای $\hat{V}$ در شرایط
 $Re_{in} = 4, Sc = 3, b = 0.5, x = 0.5$ و (الف)
 $Ha_{in} = 20$ (ج) $Ha_{in} = 6$ (ب) $Ha_{in} = 0$



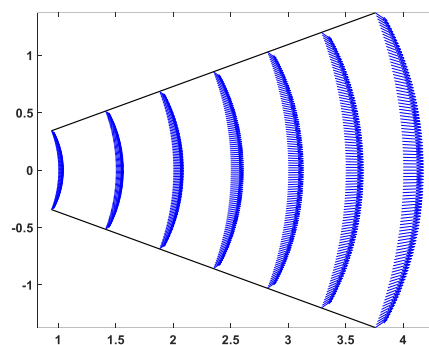
(الف)



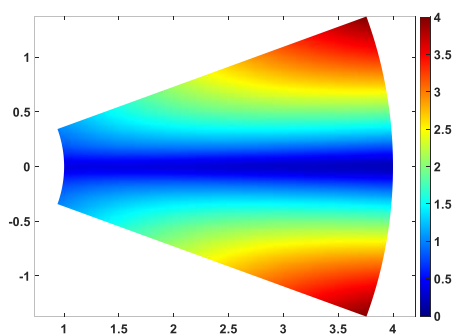
(الف)



(ب)



(ب)

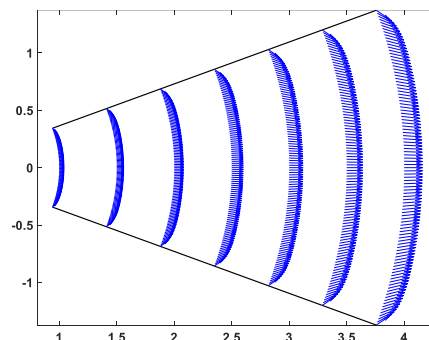


(ج)

شکل ۲۳- کانتورهای $\hat{C}$ در شرایط

$\text{Re}_{in} = 4$, $\text{Ha}_{in} = 6$, $b = 0.5$, $x = 0.5$ (الف)

$\text{Sc} = 13$ (ج) $\text{Sc} = 3$ (ب) $\text{Sc} = 0.3$

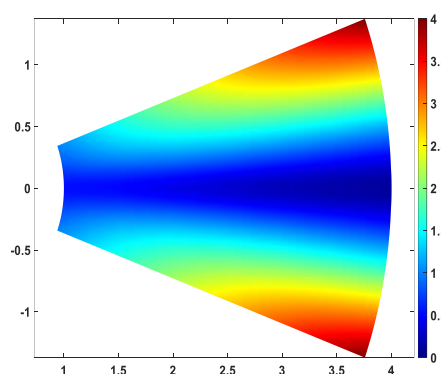


(ج)

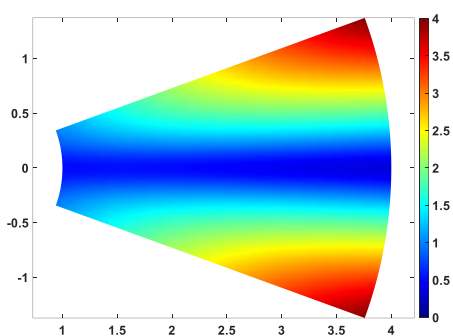
شکل ۲۲- بردارهای $\hat{V}$ در شرایط

$\text{Re}_{in} = 4$, $\text{Sc} = 3$, $b = 0.5$, $x = 0.5$ (الف)

$\text{Ha}_{in} = 20$ (ج) $\text{Ha}_{in} = 6$ (ب) $\text{Ha}_{in} = 0$



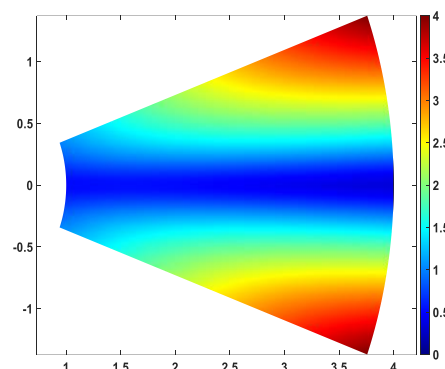
(الف)



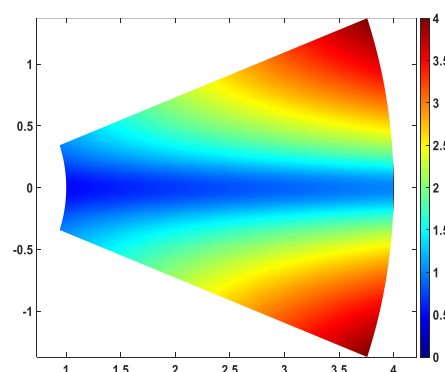
(الف)

نواحی نزدیک به دیوارها کاهش جزئی مشاهده می شود. این تغییرات منجر به شکل گیری توزیع زنگوله ای در بردارهای سرعت بدون بعد می شود که به نوبه خود باعث تیزتر شدن رأس مخروط کانتورهای سرعت می گردد.

- افزایش عدد هارتمن به تغییر در خطوط کانتور سرعت مماسی بدون بعد منجر می شود به گونه ای که این خطوط مستقیم تر و از مرکز کانال دورتر می شوند؛ همچنین، بردارهای سرعت شعاعی بدون بعد به حالت یکنواخت تری در می آیند. بعلاوه کاهش قابل توجهی در حداکثر سرعت بدون بعد و حداکثر سرعت شعاعی بدون بعد ایجاد می گردد. خطوط کانتور در موقعیت های شعاعی ثابت، یکنواختی بیشتری را نشان می دهند و افزایش بیشتر عدد هارتمن به ظهور دو نقطه حداکثر سرعت بدون بعد در نزدیکی دیوارها منجر می شود.
- افزایش عدد هارتمن منجر به کاهش غلظت در سراسر کانال و افزایش عدد رینولدز و عدد پکلت منجر به کاهش غلظت در مرکز کانال می گردند.
- افزایش مرتبه مشتق کسری معادله غلظت، غلظت را در سراسر کانال افزایش می دهد.



(ب)



(ج)

شکل ۲۴- کانتورهای $\hat{C}$ در شرایط

$$x = 0.1 \text{ (الف)}, \text{Re}_{in} = 4, \text{Ha}_{in} = 6, \text{Sc} = 3, b = 0.5$$

$$x = 1 \text{ (ج)}, x = 0.5 \text{ (ب)}$$

۷- نتیجه گیری

تزریق و مکش بر روی سطوح به منظور دستیابی به اهداف مختلفی نظیر کنترل جریان، افزایش انتقال حرارت، تنظیم احتراق و تسهیل انتقال جرم صورت می گیرد. در این پژوهش، تزریق جریان از دیوارهای کانال به جریان هیدرودینامیکی مغناطیسی در کانال های واگرا با روش تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفته است. یافته های اصلی این مطالعه به شرح زیر است:

- افزایش عدد رینولدز به طور قابل توجهی موجب افزایش مقادیر سرعت بدون بعد و سرعت شعاعی بی بعد در مرکز کانال می گردد؛ در حالی که در

علامت انگلیسی

میدان مغناطیسی	$\vec{B}$
شدت میدان مغناطیسی	B_z
غلظت	C
غلظت روی دیوار پایینی	C_{w1}
غلظت روی دیوار بالایی	C_{w2}
مقادیر ثابت	C_{w1}, C_{w2}
ضریب ثابت	C_i
ضریب پخش جرم	D
مشتق مرتبه b معادله تکانه در جهت r	D_r^b
مشتق مرتبه x معادله غلظت در جهت r	D_r^x
میدان الکتریکی	$\vec{E}$
تابع بی بعد معادله تکانه	F
جملات خطی ضابطه F	F_L
پاسخ تحلیلی	f_A
پاسخ عددی	f_N

مراجع

- [1] M. Al-Malki, Z. Hussain, S. Garrett, and S. Calabretto, "Effects of parietal suction and injection on the stability of the Blasius boundary-layer flow over a permeable, heated plate," *Phys. Rev. Fluids*, vol. 6, 2021.
- [2] P. Gao "Effects of wall suction/injection on the linear stability of flat Stokes layers," *J. Fluid Mech.*, vol. 551, pp. 303-308, 03/25 2006.
- [3] T. Friederich and M. J. Kloker, "Control of the secondary cross-flow instability using localized suction," *J. Fluid Mech.*, Article vol. 706, pp. 470-495, 2012.
- [4] R. Kant, N. Vinod, and U. Ghosh, "Stability and Control of the Flow in a Porous Channel," in *IUTAM Bookseries*, vol. 38, 2022, pp. 419-437.
- [5] Y. Y. Xu, X. Li, H. J. Tan, H. X. Huang, and Y. Zhang, "Compression Corner Shock Wave/Boundary Layer Interaction Flow Control Based on Local Particles Injection," *Tuijin Jishu/ J. Propul. Technol.*, Article vol. 44, no. 2, 2023, Art no. 2205088.
- [6] M. Debiassi, M. Herberg, Y. Zeng, H. M. Tsai, and S. Dhanabalan, "Control of Flow Separation in S-Ducts via Flow Injection and Suction," in *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, (Aerospace Sciences Meetings: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
- [7] N. Riley, "On the control of laminar flow separation," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Article vol. 57, no. 2, pp. 237-24, 2004.
- [8] R. Seele, C. Chen, C. Bhamburkar, and I. Wygnanski, "Some effects of blowing, suction and trailing edge bluntness on flow separation from thick airfoils; computations & measurements," in *29th AIAA Applied Aerodynamics Conference* 2011.
- [9] J. D. Anderson, *Fundamentals of Aerodynamics*, fifth ed. McGraw-Hill Education, 2011.
- [10] H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory*. Springer, 2017.
- [11] A. M. Kuethe and C.-Y. Chow, *Foundations of Aerodynamics: Bases of Aerodynamic Design*, Fifth edition ed. John Wiley and Sons, 1998, p. 572.
- [12] P. B. S. Lissaman, "Low-Reynolds-Number Airfoils," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 15(1), pp. 223-239, 1983.
- [13] A. Kitagawa, P. Denissenko, and Y. Murai, "Effect of heated wall inclination on natural convection heat transfer in water with near-wall injection of millimeter-sized bubbles," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Article vol. 113, pp. 1200-1211, 2017.
- [14] S. L. Kokjohn and R. D. Reitz, "Investigation of charge preparation strategies for controlled premixed charge compression ignition combustion

تابع بی بعد معادله غلظت	G
بردار شتاب گرانش	$\vec{g}$
عملگر	H
عدد هارتمن	Ha
چگالی جریان الکتریکی	$\vec{J}$
عملگر خطی	L
عملگر غیر خطی	N
فشار	P
عدد پکلت	Pe
ضرایب ثابت	P_{ij}, q_{ik}
عدد رینولدز	Re
عدد رینولدز در ورودی کانال	Re_{in}
مختصات شعاعی	r
تولید یا اضمحلال جرم	S
عدد اشمیت	Sc
بردار سرعت	$\vec{V}$
سرعت مماسی جریان تزریقی از دیوار پایینی	V_{qw1}
سرعت مماسی جریان تزریقی از دیوار بالایی	V_{qw2}
سرعت شعاعی	v_r
سرعت مماسی	v_q
مولفه سرعت در راستای محور z	V_z
مقادیر ثابت	V_{w1}, V_{w2}
علامه یونانی	
زاویه باز شدگی کانال	a
مرتبه مشتق کسری تکانه	b
موقعیت زاویه‌ای بی بعد	η
مختصات مماسی	q
لزجت دینامیکی	m
لزجت سینماتیکی	n
مرتبه مشتق کسری غلظت	x
چگالی	r
رسانش الکتریکی	s
تانسور تنش	$\vec{t}$
تابع جریان	y
بالانویس	
کمیت بی بعد شده	$\wedge$

- [26] F. A. Versteeg, F. Picchioni, and G. F. Versteeg, "On the mass transfer of supercritical fluids, specifically super critical CO₂: An overview," Chem. Eng. J., Review vol. 493, 2024, Art no. 152521.
- [27] B. Özkaya, A. H. Kaksonen, E. Sahinkaya, and J. A. Puhakka, "Fluidized bed bioreactor for multiple environmental engineering solutions," Water Res., Review vol. 150, pp. 452-465, 2019.
- [28] P. Le Cloirec, S. Giraudet, N. Cimetiere, P. F. Biard, A. Couvert, and D. Wolbert, "Process modeling and environmental engineering," Actual. Chim., Article no. 450, pp. 19-24, 2020.
- [29] A. Sharifi Haddad, H. Hassanzadeh, J. Abedi, and Z. Chen, "Impact of adsorption on mass transfer in fractured reservoirs," in Society of Petroleum Engineers - SPE Heavy Oil Conference Canada 2012, 2012, vol. 2, pp. 1131-1138.
- [30] J. Fan, S. Li, Z. Wu, and Z. Chen, "Diffusion and mixing in microfluidic devices," in Microfluid. Pharm. Appl.: From Nano/Micro Systems Fabrication to Controlled Drug Delivery, 2019, pp. 79-100.
- [31] W. Y. Liu, W. Wang, X. J. Ju, Z. Liu, R. Xie, and L. Y. Chu, "Functional microparticles from multiscale regulation of multiphase emulsions for mass-transfer intensification," Chem. Eng. Sci., Article vol. 231, 2021, Art no. 116242.
- [32] S. Shaheen, M. B. Arain, N. Ijaz, F. Z. Duraihem, and J. Hu, "Insights into metachronal propulsion's influence on Ellis fluid flow across tri-layers amid dynamic thermal transport: Theoretical study," ZAMM Z. Angew. Math. Mech., Article 2024.
- [33] L. Reid, "An Introduction to Biomedical Computational Fluid Dynamics," in Adv. Exp. Med. Biol., vol. 1334, 2021, pp. 205-222.
- [34] P. J. Cullen, Food Mixing: Principles and Applications (Food Mixing: Principles and Applications), 2009, pp. 1-292.
- [35] J. Y. Oldshue, "Agitation," in Fermentation and Biochemical Engineering Handbook: Principles, Process Design, and Equipment: Third Edition, 2014, pp. 109-133.
- [36] M. Farid, "Heat and Mass Transfer in Food Processing," in Handbook of Farm Dairy and Food Machinery, 2007, pp. 367-390.
- [37] Q. Yuan, X. Zhou, F. Zeng, K. D. Knorr, and M. Imran, "Investigation of concentration-dependent diffusion on frontal instabilities and mass transfer in homogeneous porous media," Can. J. Chem. Eng., Article vol. 96, no. 1, pp. 323-338, 2018.
- [38] M. A. Miranda, A. K. Yegya Raman, D. M. Lavenson, H. J. Subramani, S. A. Mohammad, and C. P. Aichele, "Gas Evolution Rates in Supersaturated Water-in-Oil Emulsions at Elevated using a variable pressure injection system," Int. J. Engine Res., Article vol. 11, no. 4, pp. 257-282, 2010.
- [15] S. Jahangirian, A. Ghafourian, M. Abarham, and M. H. Saidi, "Effect of vortex flow on heat transfer to combustion chamber wall," in Energy Conversion and Resources 2004: Fuels and Combustion Technologies, Energy, Nuclear Engineering, 2004, pp. 37-44.
- [16] T. Seljak, U. Žvar Baškovič, and T. Katrašnik, "Spatially selective dilution - A novel approach for heat release control in continuous combustion," J. Environ. Manage., Article vol. 316, 2022, Art no. 115068.
- [17] Z. Song, D. Chang, H. Sun, X. Cheng, and H. Wang, "Suppression of flow-induced resonant cavity noise using mass flow injection," Shengxue Xuebao/Acta Acustica, Article vol. 48, no. 1, pp. 225-237, 2023.
- [18] H. E. Hafsteinsson, L. E. Eriksson, N. Andersson, D. R. Cuppoletti, E. Gutmark, and E. Prisell, "Supersonic jet noise reduction using steady injection and flapping injection," in 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2013, p. 140.
- [19] B. E. Schmidt, N. P. Bitter, H. G. Hornung, and J. E. Shepherd, "Injection into supersonic boundary layers," in AIAA J., 2016, vol. 54, 1 ed., pp. 161-173.
- [20] Z. Wang, J. Chang, Y. Li, and C. Kong, "Investigation of shock wave control by suction in a supersonic cascade," Aerosp. Sci. Technol., Article vol. 108, 2021, Art no. 106382.
- [21] J. Chang, Y. Du, S. Zheng, X. Duan, and Y. Liu, "Performance analysis of different influencing factors on film cooling and the internal relations with vortex structures," AIP Adv., Review vol. 9, no. 7, 2019, Art no. 070701.
- [22] Z. Liu, W. Zhang, Y. Xie, Y. Ding, and Z. Feng, "Experimental Study on Influence of Mid-Passage Gap Leakage on Turbine Endwall Film Cooling Characteristics," Hsi-An Chiao Tung Ta Hsueh/ J. Xi'an Jiaotong Univ., Article vol. 57, no. 5, pp. 1-10, 2023.
- [23] N. Balcazar-Arciniega, J. Rigola, and A. Oliva, "DNS of Mass Transfer in Bi-dispersed Bubbly Flows in a Vertical Pipe," in ERCOFTAC Series, vol. 31, 2024, pp. 55-61.
- [24] A. K. Ray, Coulson and Richardson's Chemical Engineering: Volume 2B: Separation Processes (Coulson and Richardson's Chemical Engineering: Volume 2B: Separation Processes), 2023, pp. 1-833.
- [25] H. Alvarez, "Teaching control into a mass transfer operations course," in Proceedings of the 2021 IEEE 5th Colombian Conference on Automatic Control, CCAC 2021, 2021, pp. 303-308.

- microscopic," *Heat Mass Transf./Waerme-Stoffuebertrag*, Review vol. 55, no. 8, pp. 2061-2072.
- [52] J. X. Duan, L. Y. Zhu, and Z. B. Wang, "Research Progress of Liquid Heterogeneous Mixing Process," *petchem equipment.*, Review vol. 50, no. 1, pp. 47-52.
- [53] B. N. Arzamasov and V. N. Simonov, "Circulation method for depositing diffusion coatings," *Met. Sci. Heat Treat.*, Article vol. 52, no. 9-10, pp. 403-407.
- [54] A. Brun, H. Dihang, and L. Brunel, "Film formation of coatings studied by diffusing-wave spectroscopy," *Progress in Organic Coatings*, Article vol. 61, no. 2-4, pp. 181-191.
- [55] M. S. Tirumkudulu and V. S. Punati, "Solventborne Polymer Coatings: Drying, Film Formation, Stress Evolution, and Failure," *Langmuir*, Article vol. 38, no. 8, pp. 2409-2414.
- [56] B. Ishtiaq, S. Nadeem, and J. Alzabut, "Thermal analysis of magnetized Walter's-B fluid with the application of Prabhakar fractional derivative over an exponentially moving inclined plate," *Phys. Fluids*, vol. 35.
- [57] S. Ahmad, S. Ul Haq, F. Ali, I. Khan, and S. Eldin, "Free convection channel flow of couple stress casson fluid: A fractional model using Fourier's and Fick's laws," *Front. Phys.*, vol. 11, p. 1031.
- [58] S. Abbas, Z. Nisa, M. Nazar, M. Amjad, H. Ali, and A. Jan, "Application of Heat and Mass Transfer to Convective Flow of Casson Fluids in a Microchannel with Caputo-Fabrizio Derivative Approach," *Arabian J. Sci. Eng.*, vol. 49.
- [59] R. Reyaz, A. Q. Mohamad, Y. Lim, M. Saqib, and S. Shafie, "Analytical Solution for Impact of Caputo-Fabrizio Fractional Derivative on MHD Casson Fluid with Thermal Radiation and Chemical Reaction Effects," *Fractal Fract.*, vol. 6, p. 38.
- [60] S. Yang, H. W. Zhou, and W. G. Ren, "A Unified Fractional Derivative Model for Darcian and Non-Darcian Flow in Porous Media," presented at the ISRM International Symposium - EUROCK 2020, 2020.
- [61] H. W. Zhou and S. Yang, "Fractional derivative approach to non-Darcian flow in porous media," *J. Hydrol.*, vol. 566.
- [62] J. Suzuki, M. Gulian, M. Zayernouri, and M. D'Elia, "Fractional Modeling in Action: a Survey of Nonlocal Models for Subsurface Transport, Turbulent Flows, and Anomalous Materials," *J. Peridynamics Nonlocal Model.*, vol. 5.
- [63] A. Milovanov and J. Rasmussen, "Turbulence spreading by resonant wave-wave interactions: A fractional kinetics approach," *Phys. Rev. E*, vol. 109.
- [64] R. Reyaz, A. Q. Mohamad, Y. Lim, and S. Shafie, "Analytical Treatment for Accelerated Riga Plate on Pressures," *Energy Fuels*, Article pp. 8176-8183, 2019.
- [39] T. Kajiwarra and Y. Nakayama, "Capturing the efficiency of a melt-mixing process for polymer processing," *J. Chem. Eng. Jpn.*, Article vol. 44, no. 11, pp. 831-839, 2011.
- [40] N. Balcázar, O. Antepara, J. Rigola, and A. Oliva, "DNS of Drag-Force and Reactive Mass Transfer in Gravity-Driven Bubbly Flows," in *ERCOFTAC Ser.*, vol. 27, 2020, pp. 119-125.
- [41] B. Sundén, "On computational heat transfer in industrial applications," in *ASME 2013 Heat Transfer Summer Conf. Collocated with the ASME 2013 7th Int. Conf. on Energy Sustainability and the ASME 2013 11th Int. Conf. on Fuel Cell Science, Engineering and Technology*, HT 2013, 2013, vol. 3.
- [42] J. D. Ramsey and K. Bell, "Applications: Heat exchangers for the process and energy industries," in *CRC Handbook of Thermal Engineering*, Second Edition, 2017, pp. 459-500.
- [43] R. Herrmann-Heber, S. F. Reinecke, and U. Hampel, "Dynamic aeration for improved oxygen mass transfer in the wastewater treatment process," *Chem. Eng. J.*, Article vol. 386, 2020, Art no. 122068.
- [44] D. S. N. Bharghava, T. Jana, and M. Kaushik, "A survey on synthetic jets as active flow control," *Aerospace Systems*, Review vol. 7, no. 3, pp. 435-451, 2024.
- [45] M. Krstić, "Mixing control for jet flows," in *Combustion Processes in Propulsion: Control, Noise, and Pulse Detonation*, 2005, pp. 87-96.
- [46] A. Meyer, B. M. Sloyan, K. L. Polzin, H. E. Phillips, and N. L. Bindoff, "Mixing variability in the Southern Ocean," *J. Phys. Oceanogr.*, Article vol. 45, no. 4, pp. 966-987, 2015.
- [47] C. Aeppli, M. Berg, O. A. Cirpka, C. Holliger, R. P. Schwarzenbach, and T. B. Hofstetter, "Influence of mass-transfer limitations on carbon isotope fractionation during microbial dechlorination of trichloroethene," *Environ. Sci. Technol.*, Article vol. 43, no. 23, pp. 8813-8820.
- [48] A. Vailati et al., "Diffusion in liquid mixtures," *npj Microgravity*, Review vol. 9, no. 2023, 1, Art no. 1.
- [49] N. Ghasem, "Mass transfer modeling in nanofluids: Theoretical basics and model development," in *Nanofluids and Mass Transfer*, 2021, pp. 247-271.
- [50] C. Kleinstreuer and Z. Xu, "Mathematical modeling and computer simulations of nanofluid flow with applications to cooling and lubrication," *Fluids*, Article vol. 1, no. 2, 2016, Art no. 16.
- [51] J. Z. Jiang, S. Zhang, X. L. Fu, L. Liu, and B. M. Sun, "Review of gas-liquid mass transfer enhancement by nanoparticles from macro to

- [72] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Academic Press, 1998.
- [73] H. Ravanbod, M. Hajihasani, Y. Farjami, and E. Norouzi, "Developing an Adaptive Fractional Model of a Magnetic Structure using Evolutionary Algorithm," In 2008 IEEE International Conference on Computational Cybernetics, pp. 189-192. IEEE, 2008.
- [74] Q. Zhao, B. Mao, X. Bai, J. Guo, and C. Chen, "Anisotropy of Flow and Heat Transfer of Gaseous MHD Flows in a Circular Tube Under the Control of Transverse Magnetic Field: A Preliminary Study," In Heat Transfer Summer Conference, vol. 85796, p. V001T20A004. American Society of Mechanical Engineers, 2022.
- [۷۵]. رحمتی و ع. ملایی "شبیه‌سازی عددی انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری فلزات مایع در یک چاه گرمایی میکروکانال تحت میدان مغناطیسی"، مکانیک سازه‌ها و شماره‌ها، جلد ۱۳، شماره ۶، ۱۳۷-۱۲۱، ۲۰۲۴.
- [76] H. Kobayashi, H. Shionoya, and Y. Okuno, "Turbulent duct flows in a liquid metal magnetohydrodynamic power generator," *J. Fluid Mech.*, Article vol. 713, pp. 243-270, 2012.
- Fractional Caputo-Fabrizio Casson Fluid," *CFD Lett.*, vol. 15.
- [65] M. Shahrim et al., "Exact Solution of Fractional Convective Casson Fluid Through an Accelerated Plate," *CFD Lett.*, vol. 13, pp. 15-25.
- [66] A. Abouelregal, M. Marin, A. Foul, and S. S. Askar, "Coupled responses of thermomechanical waves in functionally graded viscoelastic nanobeams via thermoelastic heat conduction model including Atangana–Baleanu fractional derivative," *Sci. Rep.*, vol. 14.
- [67] V. Morales Delgado, J. F. Gómez-Aguilar, and M. Taneco-Hernández, "Analytical solution of the time fractional diffusion equation and fractional convection-diffusion equation," *Rev. Mex. Fis.*, vol. 65, 2019.
- [68] G. B. Jeffery, "L. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid," *Lond. Edinb. Phil. Mag.*, vol. 29, no. 172, pp. 455-465, 1915.
- [69] G. Hamel, "Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten," *Math. Ann.*, vol. 84, no. 1, pp. 148-148, 1921.
- [70] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena* (no. v. 1). Wiley, 2006.
- [71] P. A. Davidson, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001.