



بررسی رزونانس داخلی یک تیر متصل به یک چاه انرژی غیرخطی دوپایا محلی متقارن

سید سجاد حسینی^۱، حبیب احمدی^{۲*}، سید سجاد میرهاشمی^۳

^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

^۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

^۳ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۲۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۵/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۶/۱۱

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات غیرخطی و رزونانس داخلی یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده متصل به یک چاه انرژی غیرخطی (NES) دوپایای محلی، بررسی شده‌است. این مطالعه روی تأثیرات رزونانس داخلی بر رفتار دینامیکی تیر و چگونگی کنترل ارتعاشات توسط NES متمرکز است. چاه‌های انرژی دو پایا به دلیل کارایی بهتر آنها در مقایسه با انواع تک پایا به طور گسترده‌ای مورد توجه هستند. در چنین مسائلی، تشدیدهای داخلی که در آن مقدار انرژی وارد شده از تیر به NES پیشینه است، مورد توجه است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از روش نیوتن بدست آمده و پس از بی‌بعد کردن این معادلات، روش گالرکین برای گسسته‌سازی آن‌ها بکار رفته است. در ادامه، با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، رزونانس‌های اولیه و داخلی 1:3 مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که منحنی‌های پاسخ فرکانسی به شدت تحت تأثیر تغییرات جزئی در پارامترهای NES، به‌ویژه میرایی قرار می‌گیرند. با این حال، به دلیل رفتار NES در حوزه فرکانس که بر خلاف تیر، نرم شونده است، محدودیت‌های اعمال شده فیزیکی ناشی از جابجایی جرم NES می‌تواند بر کارایی آن تأثیر منفی بگذارد. همچنین، استفاده از NES در تیرها می‌تواند به طور قابل توجهی رفتار دینامیکی را بهبود بخشد و عمر مفید سازه‌ها را افزایش دهد. یافته‌های این مطالعه می‌تواند به طراحی بهینه‌تر و استفاده مؤثرتر از NES در کاربردهای مهندسی کمک کند.

کلمات کلیدی: انتقال انرژی هدفمند؛ روش گالرکین؛ چاه انرژی غیرخطی دو پایا؛ رزونانس داخلی.

Investigation of the internal resonances of a beam with a local bistable nonlinear energy sink

Seyed Sajjad Hoseini¹, Habib Ahmadi^{2*}, Seyed Sajad Mirhashemi³

¹ MSc., Mech. Eng., Shahrood University of Technology., Shahrood, Iran

² Prof., Mech. Eng., Shahrood University of Technology., Shahrood, Iran

³ PhD student, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

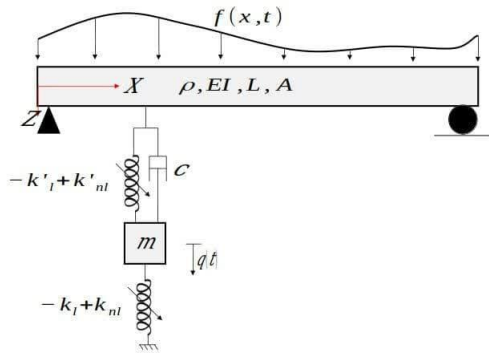
In this article, the nonlinear vibrations and internal resonance of a simply supported beam with a locally attached bistable nonlinear energy sink (NES) have been studied. This study focuses on the effects of internal resonance on the dynamic behavior of beams and how vibrations can be controlled by an NES. Bistable nonlinear energy sinks are increasingly utilized due to their higher efficiency compared to monostable nonlinear energy sinks. A key area of interest in such problems is the internal resonances, where the energy transferred from the beam to the nonlinear energy sink is substantial. To address this, the system's equations of motion were derived and made dimensionless and discretized using Galerkin's method. The method of multiple scales (MMS) was then applied to investigate the primary and 3:1 internal resonance. The findings indicate that the frequency response curves are highly sensitive to slight changes in NES parameters, particularly damping. However, the nonlinear energy sink's softening behavior in the frequency domain, as opposed to the beam's behavior, means that physical limitations due to nonlinear energy sink mass displacement can adversely impact its efficiency. Additionally, the use of NES in beams can significantly improve dynamic stability and extend the service life of structures. The findings of this study can contribute to more optimal design and effective utilization of NES in engineering applications.

Keywords: Targeted energy transfer; Galerkin's method; Bistable nonlinear energy sink; Internal resonance.

۱- مقدمه

در هر سیستم چند درجه آزادی نوعی انتقال انرژی بین اجزا سیستم وجود دارد که می‌تواند منجر به رزونانس داخلی شود. رزونانس داخلی یک عامل مهم نوسانات نامطلوب در سازه‌های مکانیکی است که منجر به تخریب، فرسودگی و خستگی می‌شود. ارتعاشات می‌توانند بر عملکرد یک سیستم مکانیکی تأثیر منفی بگذارند و در مواردی باعث آسیب به مکانیزم و یا سازه شوند. وقتی صحبت از سازه‌های بزرگ می‌شود، جلوگیری از هر نوع شکست یا آسیب جدی حیاتی خواهد بود. تأثیر ارتعاشات و رزونانس بر سازه‌ها می‌تواند سیستم‌ها را به شدت تحت تأثیر پدیده خستگی قرار دهد. یک راه‌حل، استفاده از جاذب‌های انرژی است. جاذب ارتعاشی، سیستمی است که با انتقال انرژی حاصل از ارتعاش به یک جرم دوم، ارتعاش سازه را در یکی از فرکانس‌های طبیعی حذف می‌کند و در نتیجه از وارد شدن خسارت و کاهش بازدهی سیستم اصلی جلوگیری می‌کند. کنترل ارتعاشات، لرزش دستگاه‌ها و سازه‌ها را کاهش داده و آن‌ها را از سایش ناشی از ارتعاشات محافظت می‌کند و نویز ناشی از ارتعاشات را محدود می‌کند. به منظور جلوگیری از نوسانات ناخواسته سازه‌ها در پل‌ها، ساختمان‌های بلند، ماشین‌آلات و قطعات متحرک مکانیزم‌های صنعتی، مطالعات گسترده‌ای در زمینه کنترل و کاهش دامنه ارتعاشات انجام شده است. یکی از معروف‌ترین و رایج‌ترین روش‌ها برای کنترل ارتعاشات، استفاده از چاه‌های غیرخطی انرژی است که می‌توانند در تنوع گسترده‌ای برای طیف وسیعی از کاربردها طراحی شوند. یک چاه انرژی غیرخطی دارای دو المان اصلی شامل یک عامل فتر غیرخطی (و یا یک ایجادکننده پدیده غیرخطی) و عاملی جهت استهلاک انرژی است. المان اول در واقع شرایطی را ایجاد می‌کند تا چاه انرژی غیرخطی بتواند با در تمام مودهای ارتعاشی سیستم رزونانس ایجاد کرده و آن‌ها را کنترل نماید. المان دوم وظیفه دارد تا انرژی ارتعاشی منتقل شده از سیستم اصلی را مستهلک نماید. در این مقاله، چاه غیرخطی انرژی از یک سو به زمین و از سوی دیگر با یک فتر با سفتی کم به سیستم اصلی وصل می‌شود تا ارتعاشات سیستم اصلی را تحت کنترل درآورد. در ادامه مقالات مهم در این زمینه ارائه می‌شود. در این خصوص، جین فنگ وانگ و همکاران، تأثیر جذب‌کننده‌های انرژی را در پل راه‌آهن تایوان، مخصوص قطارهای سریع‌السیر، بررسی کردند و نتایج تحقیقات

آنها نشان می‌دهد که جاذب‌ها کارایی مناسبی در کاهش ارتعاشات عرضی پل دارند [1]. مرادی و همکاران نوسانات ابزار حفاری را با استفاده از مدل تیر بررسی کرده و نشان دادند که استفاده از جاذب انرژی بهینه، باعث کاهش ارتعاشات خود برانگیخته و افزایش پایداری ابزار می‌شود [2]. گرجی و همکاران از چاه انرژی غیرخطی برای بهبود رفتار دینامیکی ورق مستطیلی تحت جریان آیرودینامیکی مافوق صوت، در زوایای مختلف، استفاده کردند [3]. خزائی و همکاران [4]، یک جاذب غیرخطی هندسی را برای کنترل ارتعاشات غیرخطی لوله انتقال سیال، با تکیه گاه‌های ساده، مورد مطالعه قرار دادند. میرهاشمی و همکاران [5]، رزونانس اولیه یک لوله انتقال سیال مجهز به NES را مطالعه کرده‌اند که توسط یک نیروی هارمونیک خارجی برانگیخته شده‌است، را مطالعه کرده‌اند. ممقانی و همکاران [6]، ارتعاشات یک تیر اوپلر-برنولی به وسیله یک NES کنترل می‌شود. نتایج این مقاله نشان می‌دهد که نقطه میانی یک تیر دوسر لولا بهترین موقعیت برای اتصال NES است. نتایج این مقاله به مطالعه حاضر کمک می‌کند تا نقطه میانی تیر پیوسته را به عنوان محل پیش فرض اتصال NES دوپایا در نظر گرفته شود. علاوه بر این، ممقانی و همکارانش [7]، انتقال هدفمند انرژی از تیر دوسرگیردار تحت تحریک هارمونیک خارجی به چاه غیرخطی انرژی مورد مطالعه قرار داده است. ژو و همکاران [8]، کنترل ارتعاشات غیرخطی یک لوله انتقال سیال توسط مدل تیر یک سر گیردار به کمک یک NES مورد مطالعه قرار گرفته است. دوان و همکاران [9]، با استفاده از تئوری پایداری لیاپانوف، نقش یک NES در کنترل ارتعاشات لوله‌های انتقال سیال مورد بررسی قرار گرفته است. ژائو و همکاران [10]، یک رویکرد انتقال انرژی هدفمند (TET) برای تجزیه و تحلیل کاهش ارتعاش لوله‌های انتقال سیال استفاده شده‌است. در این مقاله، پارامترهای NES در فرکانس تشدید بهینه‌سازی شده‌اند. با این حال، بن وانگ و همکاران [11]، طراحی و تجزیه و تحلیل عملکرد ارتعاشی ساختمان‌های بلند مجهز به NES بررسی شده‌است، جین پاک وانگ و همکاران [12]، از NES برای کنترل واکنش سریع ساختمان‌های بلند و گندلمن و همکاران عملکرد یک NES ارتعاشی بررسی کرده‌اند [13]. فانگ و همکاران [14]، برداشت همزمان انرژی برای کاهش ارتعاش مورد مطالعه قرار گرفته است. یونسیان و همکاران [15]، نمونه دیگری از کاهش ارتعاش



شکل ۱- مدل یک تیر تکیه گاه ساده با NES دوپایا محلی

معادلات حاکم بر تیر را می‌توان با اعمال اصل همپلتون بر لاگرانژین یک تیر اویلر-برنولی بدست آورد که به صورت: $\mathcal{L} = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 dx - \frac{1}{2} EI w''^2 dx \right\}$ با اعمال قانون دوم نیوتن بر روی دیانگرام آزاد جرم متمرکز چاه انرژی نیز، سمت راست معادله ۱.الف، معادله ۱.ب و معادله ۲ بدست می‌آیند.

$$\rho A \ddot{w} + EI w^{IV} = f(x,t) + f_{NES} \delta_d(x - x_{NES}) \quad (۱. الف)$$

$$m \ddot{q} - k_l q + k_{nl} q^3 = -f_{NES} \quad (۱. ب)$$

که این معادلات، با شرایط مرزی دو سر لولا به صورت: $w(0,t) = w''(0,t) = w(L,t) = w''(L,t) = 0$ حل می‌شوند. همچنین، نیروی وارد شده از طرف چاه انرژی غیرخطی دوپایا به صورت زیر خواهد بود:

$$f_{NES} = -k'_l (q(t) - w(x_{NES}, t)) + k'_{nl} (q(t) - w(x_{NES}, t))^3 + c(\dot{q}(t) - \dot{w}(x_{NES}, t)) \quad (۲)$$

در معادلات فوق $w = w(x,t)$ جابجایی عرضی تیر است. برای بی‌بعد سازی، از پارامترهای بی بعد زیر استفاده می‌شود:

سازه‌های در مقیاس بزرگ را می‌توان یافت. در این مقاله، کنترل ارتعاش یک پل توسط یک NES نشان داده شده‌است و جابجایی پل را تا 43 درصد کاهش می‌دهد.

در این مقاله، بر روی چاه‌های انرژی غیرخطی دوپایا تمرکز شده‌است. تحلیل ریاضی بررسی جذب انرژی با استفاده از چاه انرژی غیرخطی دوپایا تنظیم شده با پتانسیل‌های محلی و کلی توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده‌است به عنوان مثال، فروتن و همکاران، یک چاه انرژی غیرخطی دوپایا تنظیم شده (TBNES) را با در نظر گرفتن پتانسیل‌های محلی و کلی برای کاهش ارتعاشات یک سیستم گسسته مطالعه کرده‌اند [16-22]. این مقالات مروری بر انواع چاه انرژی غیرخطی طراحی، تحلیل، کاربرد پرداخته‌است [23-28].

بررسی ادبیات موضوع نشان می‌دهد که کاربرد یک NES دوپایا محلی متصل به سیستم‌های پیوسته برای بررسی رزونانس داخلی یک سیستم پیوسته، هنوز مورد مطالعه قرار نگرفته‌است. لذا در این مقاله، بررسی ارتعاشات و تحلیل رزونانس داخلی یک چاه انرژی غیرخطی دوپایا محلی که به یک تیر با تکیه‌گاه ساده متصل می‌شود، پیشنهاد شده و پاسخ‌های فرکانسی تیر به دست آمده و مورد بحث قرار می‌گیرد. علاوه بر این، یک تحلیل عددی بر روی تاریخچه زمانی چاه انرژی غیرخطی متصل محلی انجام شده است تا مزایا و معایب پیگیربندی مربوطه را نشان دهد.

۲- مدل‌سازی سیستم

شکل 1 شماتیک یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده با طول L ، سطح مقطع A ، چگالی ρ ، مدول یانگ E ، و ممان اینرسی مقطع I ، یک نیروی خارجی توزیع شده $f(x,t)$ مجهز به یک NES دوپایا را نشان می‌دهد. جاذب دوپایای غیرخطی، شامل فنر با ضریب سفتی خطی k_l ، فنر به سفتی غیرخطی k_{nl} ، جرم m و ضریب میرایی خطی c می‌باشد. علاوه بر این، فاصله اتصال NES به تیر از مبدا با x_{NES} نشان داده می‌شود.

استفاده از شکل موده‌های تطبیقی طبق مراجع [6,5]، برای یک تیر دوسرلولا موجود و قابل استفاده است. جایگزینی معادله (۷-۵) در معادله (۴)، صرفاً برای شکل مود اول ($n = 1$) برای جستجوی تشدید داخلی اولیه سیستم استفاده می‌شود. با توجه به تقارن هندسی ($\xi = \frac{1}{2}$) و در نظر گیری $\theta = \psi \pm \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}$ برای نوشتن معادلات حرکت بی بعد حول نقاط تعادل پایدار فنر دوبایا، و یک پارامتر طراحی $\alpha_3 = \frac{\alpha_2 \beta_2}{\beta_1}$ می‌توان شکل نهایی معادلات حرکت بی بعد را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & -4\beta_1\psi - 6\beta_2\Delta\beta\psi^2 - 2\beta_2\psi^3 - 2\beta_3\dot{\psi} \\ & + \frac{4}{\pi}f_0\cos(\Omega\tau) + \ddot{q} + 2\beta_3\dot{q} \\ & + 4\beta_1q + 12\beta_2\Delta\beta q\psi \\ & - 6\beta_2\Delta\beta q^2(1 + \psi) \\ & + 6\beta_2q\psi^2 + 2\beta_2q^3 + \omega_1^2q = 0 \\ & \alpha_1\dot{\psi} + 3\alpha_3\Delta\beta\psi^2 + \alpha_3\psi^3 \\ & + 2\left(\frac{\alpha_1}{2}\omega_2^2 + \beta_1\right)\psi \\ & + 3\beta_2\Delta\beta\psi^2 + \beta_2\psi^3 + \beta_3\dot{\psi} \\ & \beta_3\dot{q} - 2\beta_1q - 6\beta_2\Delta\beta q\psi \\ & + 3\beta_2\Delta\beta q^2 \\ & + 3\beta_2q^2\psi - 3\beta_2q\psi^2 - \beta_2q^3 = 0 \end{aligned} \quad (۸)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pi^2 \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{2\alpha_2}{\alpha_1}} \\ \Delta\beta &= \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \end{aligned}$$

بنابراین، مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) به دست آمده است که حرکت نوسانی سیستم شکل 1 را در اطراف نقاط تعادل پایدار آن توصیف می‌کند. این معادلات، به صورت تحلیلی و عددی برای ارزیابی کاربرد و مزایای اتصال NES دو پایا به تیرهای ارتعاشی در بخش‌های بعدی حل خواهند شد.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{w}{L}, \theta = \frac{q}{L}, \xi = \frac{x}{L}, t_0 = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \\ \tau &= \frac{t}{t_0}, F_1 = \frac{fL^3}{EI}, F_{NES} = \frac{f_{NES}L^3}{EI}, \\ \alpha_1 &= \frac{m}{\rho AL}, \alpha_2 = \frac{k_l L^3}{EI}, \alpha_3 = \frac{k_{nl} L^5}{EI}, \\ \beta_1 &= \frac{k'_l L^3}{EI}, \beta_2 = \frac{k'_{nl} L^5}{EI}, \beta_3 = \frac{cL}{\rho AEI} \end{aligned} \quad (۳)$$

با استفاده از معادله (۳) معادلات (۲ و ۱) بصورت معادلات زیر بدست می‌آید که معادلات حرکت بی بعد سیستم هستند.

$$\begin{aligned} \eta_{\tau\tau} + \eta_{\xi\xi\xi\xi} &= F_1 + F_{NES}\delta_d(\xi - \xi_{NES}) \\ \alpha_1\theta_{\tau\tau} - \alpha_2\theta + \alpha_3\theta^3 &= -F_{NES} \end{aligned} \quad (۴)$$

$$F_{NES} = -\beta_1(\theta - \eta(\xi_{NES}, \tau)) + \beta_2(\theta - \eta(\xi_{NES}, \tau))^3 + \beta_3(\theta_\tau - \eta_\tau(\xi_{NES}, \tau))$$

شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} \eta(0, \tau) &= \eta_{\xi\xi}(0, \tau) = \eta(1, \tau) = \\ \eta_{\xi\xi}(1, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (۵)$$

در این مرحله، معادلات سیستم بی بعد شده‌است تا در بخش‌های بعدی مورد مطالعه قرار گیرد. قابل ذکر است که معادله (۴) از دو معادله دیفرانسیل جزئی (PDEs) کوپل شده غیرخطی تشکیل شده‌است که حرکت تیر و NES دو پایا را توصیف می‌کند. در این قسمت، روش گالرکین برای گسسته کردن PDEهای فوق معرفی شده‌است. لذا رابطه زیر برای گسسته‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\xi) q_n(\tau) \quad (۶)$$

که در رابطه فوق، شکل مود بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_n(\xi) = \sin(n\pi\xi) \quad n \in N \quad (۷)$$

$$\begin{aligned} q(T_0, T_1) &= q_0(T_0, T_1) + \epsilon q_1(T_0, T_1) \\ &\quad + O(\epsilon^2) \\ \psi(T_0, T_1) &= \psi_0(T_0, T_1) + \epsilon \psi_1(T_0, T_1) \\ &\quad + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_0 + \omega_1^2 q_0 &= 0 \\ D_0^2 \psi_0 + \omega_2^2 \psi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} f_0(e^{iarg} + e^{-iarg}) \\ &\quad + 4\beta_1 q_0 - 6\beta_2 \Delta \beta q_0^2 \\ &\quad + 2\beta_2 q_0^3 + \omega_1^2 q_1 - 4\beta_1 \psi_0 \\ &\quad + 12\beta_2 \Delta \beta q_0 \psi_0 - 6\beta_2 q_0^2 \psi_0 \\ &\quad \quad - 6\beta_2 \Delta \beta \psi_0^2 \\ &\quad \quad + 6\beta_2 q_0 \psi_0^2 - 2\beta_2 \psi_0^3 \\ &\quad \quad + 2\beta_3 D_0 q_0 - 2\beta_3 D_0 \psi_0 \\ &\quad + 2D_0 D_1 q_0 + D_0^2 q_1 = 0 \\ &\quad - 2\beta_1 q_0 + 3\beta_2 \Delta \beta q_0^2 - \beta_2 q_0^3 \\ &\quad + 2\beta_1 \psi_0 - 6\beta_2 \Delta \beta q_0 \psi_0 + 3\beta_2 q_0^2 \psi_0 \\ &\quad \quad + 3\alpha_3 \Delta \beta \psi_0^2 + 3\beta_2 \Delta \beta \psi_0^2 \\ &\quad \quad - 3\beta_2 q_0 \psi_0^2 + \alpha_3 \psi_0^3 + \beta_2 \psi_0^3 \\ &\quad + \alpha_1 \omega_2^2 \psi_1 - \beta_3 D_0 q_0 + \beta_3 D_0 \psi_0 \\ &\quad + 2\alpha_1 D_0 D_1 \psi_0 + \alpha_1 D_0^2 \psi_1 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

و همچنین با استفاده از روابط $\Omega = \omega_1 + \epsilon \sigma_2$ و $\Omega T_0 = \omega_1 T_0 + \sigma_2 T_1$ داریم:

$$\begin{aligned} q_0(T_0, T_1) &= c_1(T_1) e^{(i\omega_1 T_0)} + cc \\ \psi_0(T_0, T_1) &= d_1(T_1) e^{(i\omega_2 T_0)} + cc \end{aligned} \quad (15)$$

با جایگزینی معادله (۱۵) در (۱۴) و با استفاده از رابطه $\omega_2 = 3\omega_1 + \epsilon \sigma_1$ می‌توان ضریب جمله سکولار ساز را بصورت زیر حذف کرد.

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi} f_0 e^{(i\sigma_2 T_1)} + 4\beta_1 c_1(T_1) \\ &\quad + 2i\beta_3 \omega_1 c_1(T_1) \\ &\quad + 6\beta_2 c_1(T_1)^2 c_2(T_1) \\ &\quad - 6\beta_2 e^{(iT_1 \sigma_1)} c_2(T_1)^2 d_1(T_1) \end{aligned}$$

۳- رزونانس داخلی: مورد اولیه $\omega_1 \simeq \Omega$ ، $\omega_2 \simeq 3\omega_1$

در این بخش از روش مقیاس‌های چندگانه (Method of Multiple Scales) برای به دست آوردن جواب معادله (8) استفاده شده‌است. رزونانس داخلی 1:3 در این تحقیق مورد مطالعه قرار گرفته است. دلایل این انتخاب به شرح زیر است: فرکانس طبیعی اول تیر در ساختارهای بزرگ به اندازه کافی کم است که فرکانس تحریک در مجاورت فرکانس بی‌بعد ω_1 فرض شود.

پیکربندی و اندازه NES در مقایسه با اندازه تیر نشان می‌دهد که اولین فرکانس طبیعی تیر هرگز نمی‌تواند به مضربی از فرکانس طبیعی NES یا به عبارتی $n\omega_2 \neq \omega_1 (n \in \mathbb{N})$ نزدیک شود. همچنین، فرض بر این است که بالاترین نرخ انتقال انرژی بین تیر و NES در مواقع تشدید داخلی وجود دارد. برای پیاده‌سازی روش مقیاس‌های چندگانه، می‌توان ضرایب معادله (۸) را بصورت زیر تغییر مقیاس داد. این امر، برای نگاشت مقادیر ضرایب معادلات دیفرانسیل حرکت به مقیاس‌های مدل واقعی انجام می‌شود که مرسوم است و به عنوان مثال، در مرجع [29] نیز قابل مشاهده است.

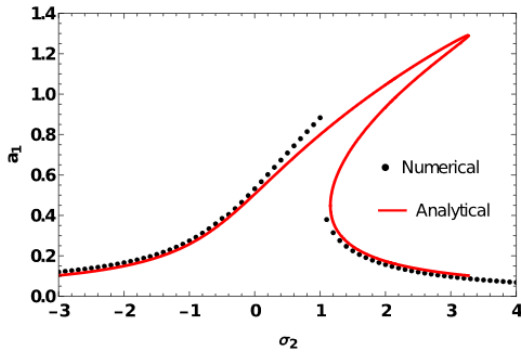
$$\begin{aligned} f_0 &\rightarrow \epsilon f_0 \\ \alpha_{1,2} &\rightarrow \alpha_{1,2} \\ \alpha_3 &\rightarrow \epsilon \alpha_3 \\ \beta_i &\rightarrow \epsilon \beta_i \end{aligned} \quad (9)$$

معادله (۹) نشان می‌دهد که β_1 در معادلات مرتبه اول اغتشاشات ظاهر نمی‌شود. علاوه بر این، می‌توان مقیاس‌های زمانی را با توجه به پارامتر اغتشاش ϵ به صورت زیر معرفی کرد:

$$T_0 \triangleq \tau, T_1 \triangleq \epsilon \tau, \dots \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &\equiv D_0 + \epsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &\equiv D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، نمودار عددی پاسخ فرکانسی هماهنگی زیادی با پاسخ تحلیلی به دست آمده با روش MMS دارد.



شکل ۲- اعتبارسنجی نتایج MMS با روش عددی

شکل ۳ اثرات پارامترهای بی‌بعد بر نمودار پاسخ-فرکانسی سیستم را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش β_1 در شکل مربوط به a_1 ، نمودارها بدون هیچ تغییری در مقدار حداکثر دامنه، به سمت راست جابجا می‌شوند و رفتار سخت‌شوندگی سیستم ثابت می‌ماند. بنابراین، سفت شدن فنر متصل به تیر باعث تأخیر در تشدید می‌شود. با نگاهی به شکل 3b مشاهده می‌شود که با افزایش β_1 ، دامنه a_2 و یا همان جرم جاذب نیز به سمت راست جابجا می‌شود و تشدید در رفتار جرم جاذب نیز رخ می‌دهد. با این حال، برخلاف شکل ۳ الف، نمودار ستون فقراتی (Backbone curve) دامنه دوم به سمت چپ خم شده است که نمایانگر نرم‌شوندگی است. قابل توجه است که در شکل ۳ ب، نیمه سمت چپ منحنی ناپایدار است و منحنی سمت راست، شاخه پایدار است. بنابراین، افزایش β_1 می‌تواند دامنه NES دوپایا را افزایش دهد، که این امر ممکن است به دلیل جابجایی فیزیکی محدود جرم NES در ساختارهای واقعی محدودیت‌هایی ایجاد کند.

$$\begin{aligned}
 &+12\beta_2 c_1(T_1) d_1(T_1) d_2(T_1) \\
 &+2i\omega_1 c_1'(T_1) = 0 \\
 &-\beta_2 e^{-i T_1 \sigma_1} c_1(T_1)^3 + 2\beta_1 d_1(T_1) \\
 &+i\beta_3 \omega_2 d_1(T_1) \\
 &+6\beta_2 c_1(T_1) c_2(T_1) d_1(T_1) \\
 &+3\alpha_3 d_1(T_1)^2 d_2(T_1) \\
 &+3\beta_2 d_1(T_1)^2 d_2(T_1) \\
 &+2i\alpha_1 \omega_2 d_1'(T_1) = 0
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

در ادامه، حل زیر برای حل معادله (۱۶) پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned}
 c_1(T_1) &= \frac{1}{2} a_1(T_1) e^{i\theta_1(T_1)} \\
 d_1(T_1) &= \frac{1}{2} a_2(T_1) e^{i\theta_2(T_1)}
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

همچنین، تعاریف زیر نیز در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= T_1 \sigma_2 - \theta_1(T_1) \\
 \gamma_2 &= T_1 \sigma_1 - 3\theta_1(T_1) + \theta_2(T_1)
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

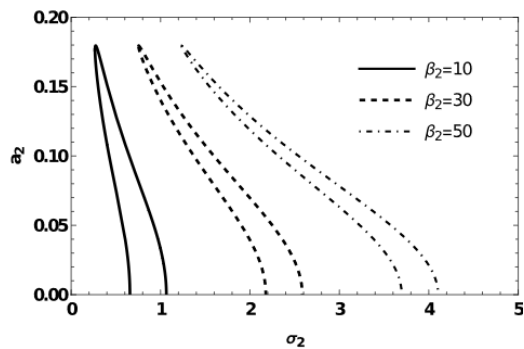
با لحاظ کردن رابطه (۱۸) و جایگزین کردن رابطه (۱۷) در معادله (۱۶) و جداکردن بخش حقیقی و موهومی و در نظر داشتن حالت ماندگار $a_i' = \gamma_i' = 0$ داریم:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\pi^2 (a_1^2 \beta_3 \omega_1 + 3a_2^2 \beta_3 \omega_2)^2}{4a_1^2 f_0^2} \\
 &+ \left(\frac{\pi^2}{64a_1^2 f_0^2} \right) (\Gamma)^2 = 1
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= 9\alpha_3 a_2^4 - 8a_1^2 \beta_1 + 24a_2^2 \beta_1 \\
 &- 3a_1^4 \beta_2 + 12a_1^2 a_2^2 \beta_2 + 9a_2^4 \beta_2 \\
 &+ a_1^2 \sigma_2 \omega_1 + 24\alpha_1 a_2^2 \sigma_1 \omega_2 \\
 &+ 72\alpha_1 a_2^2 \sigma_2 \omega_2
 \end{aligned}$$

۴- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش، جهت اعتبارسنجی ابتدا یک حل عددی برای معادله (۸) به دست می‌آید و مطابق آن، حل تحلیلی معادله (۱۹) مورد بررسی قرار می‌گیرد که نتایج آن در شکل ۲ ارائه شده‌است. پس از آن، یک تحلیل زمانی عددی برای نشان دادن اثرات NES دو پایا در کاهش ارتعاش سیستم ارائه می‌شود.

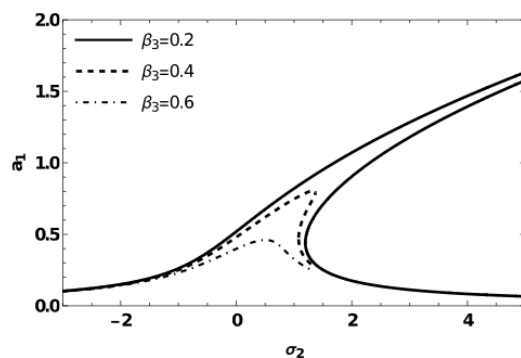


شکل ۴ ب- پاسخ فرکانسی جاذب برای مقادیر مختلف β_2

همانطور که در شکل ۵ الف و ۵ ب می‌توان مشاهده کرد، تاثیر ضریب دمپر β_3 در پاسخ فرکانسی تیر و پاسخ فرکانسی چاه انرژی غیرخطی رسم شده است. با افزایش مقدار β_3 یا همان میرایی بی بعد، دامنه سیستم کاهش می‌یابد. در نمودارهای شکل ۵، دامنه نوسانات بسیار به مقدار ضریب میرایی جاذب وابسته است. به طوریکه تغییرات اندک در این ضریب، باعث تغییرات شدید در بیشینه دامنه تشدید می‌شود.

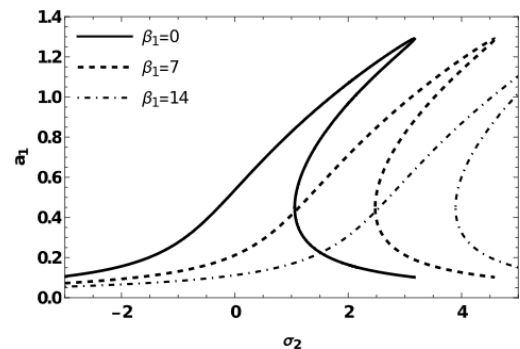
همچنین، پدیده جهش (Jump) نیز برای هر دو حالت فرکانس تحریک افزایشی و کاهش رخ می‌دهد.

به عبارتی، با افزایش β_3 ، دامنه a_1 در مقادیر σ_2 نزدیک به صفر کاهش می‌یابد. این نشان می‌دهد که دمپر قوی تر می‌تواند نوسانات بزرگتر را در مقادیر پایین σ_2 کاهش دهد.

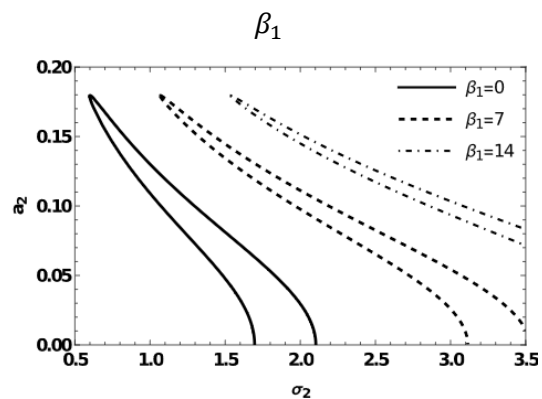


شکل ۵ الف- پاسخ فرکانسی سیستم برای مقادیر مختلف β_3

شکل ۵ ب نیز، تاثیر ضریب میرایی بر دامنه a_2 را نشان می‌دهد. مطابق این شکل، افزایش ضریب میرایی β_3 باعث کاهش دامنه نوسانات جاذب نیز می‌گردد.

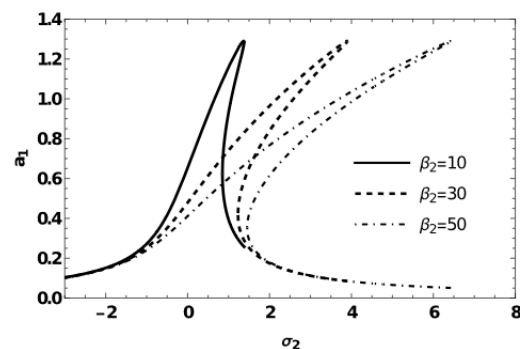


شکل ۳ الف- پاسخ فرکانسی سیستم برای مقادیر مختلف β_1



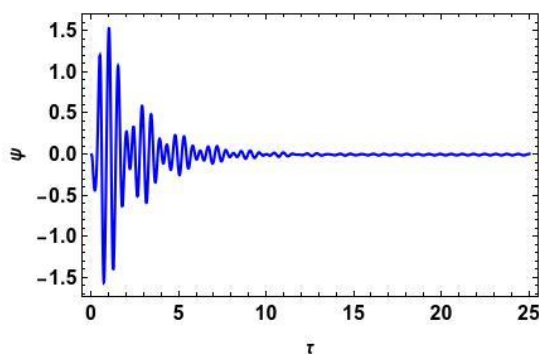
شکل ۳ ب- پاسخ فرکانسی جاذب برای مقادیر مختلف β_1

همانطور که در شکل ۴ الف و ۴ ب نشان داده شده است، افزایش β_2 که معرف ثابت غیرخطی فنر متصل به تیر است، باعث افزایش رفتار سخت‌شوندگی تیر می‌شود، و دامنه a_2 را به سمت راست جابه‌جا می‌کند. اما، تغییری در بیشینه دامنه تشدید مشاهده نمی‌شود.



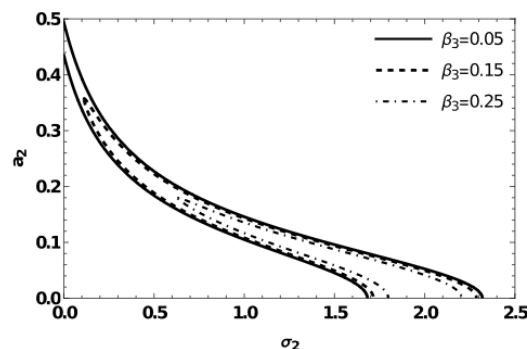
شکل ۴ الف- پاسخ فرکانسی سیستم برای مقادیر مختلف β_2

همانطور که از شکل ۶ برداشت می‌شود، در زمان‌های ابتدایی نوسان (0 تا حدود 7 واحد زمانی)، دامنه نوسانات تیر بدون NES دوپایا (خط قرمز) بزرگ‌تر از دامنه نوسانات تیر با NES دوپایا (خط آبی) است. این نشان می‌دهد که در زمان شروع، NES دوپایا تاثیر قابل توجهی در کاهش دامنه نوسانات دارد. اما با گذشت زمان، دامنه نوسانات تیر با میرایی داخلی بدون NES دوپایا به تدریج و به کندی کاهش یافته و به مقدار ثابت می‌رسد، اما این کاهش نسبتاً کند است. باید توجه داشت که میرایی داخلی در یافتن نتایج مربوط به تیر با جاذب نیز در نظر گرفته شده‌است. در مقابل، تیر با NES دوپایا (خط آبی) سریع‌تر به دامنه نوسان صفر می‌رسد. این نشان می‌دهد که NES دوپایا توانایی زیادی در کاهش سریع‌تر و مؤثرتر دامنه نوسانات دارد. اما، این امر برای زمان‌های ابتدا تا حدود 5 واحد زمانی بی بعد که انرژی سیستم زیاد است، صادق است. پاسخ تیر با NES دوپایا به شرایط اولیه، سریعتر در طول زمان به دامنه نوسان کوچکتر می‌رسد که این نشان دهنده قابل قبول NES دوپایا در کاهش نوسانات تیر است. این نشان می‌دهد که NES دوپایا می‌تواند به عنوان یک راهکار موثر برای کاهش نوسانات و افزایش پایداری سازه‌ها در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار گیرد.



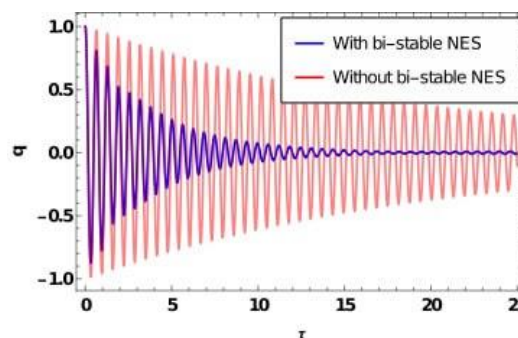
شکل ۸- پاسخ زمانی جرم متمرکز جاذب انرژی دوپایا به اغتشاش

همانطور که در شکل ۸ دیده می‌شود، پاسخ زمانی خود جاذب انرژی نیز قابل محاسبه است. می‌توان محدودیت‌های موجود در مدل واقعی جاذب انرژی مانند حداکثر جابجایی را تعیین کرد و پس از محاسبه پارامترهای مطلوب برای جاذب دوپایا،

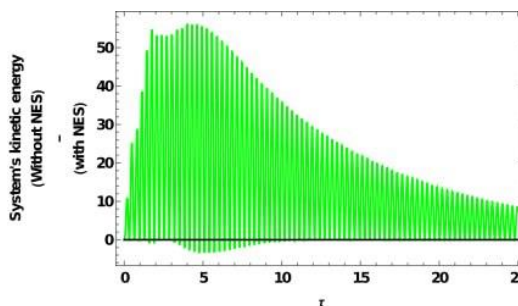


شکل ۵ ب- پاسخ فرکانسی جاذب برای مقادیر مختلف β_3

اکنون که تحلیل‌های حوزه فرکانس مورد بحث قرار گرفته است، می‌توان از تحلیل‌های حوزه زمان عددی برای نشان دادن رفتار حوزه زمان سیستم استفاده کرد. در این رابطه، شکل ۶ برای نشان دادن تاثیر یک NES دوپایا با شرایط اولیه غیر صفر بر کاهش ارتعاشات یک تیر دوسرلولو در حوزه زمان نشان داده شده‌است. تاثیر وجود یک جاذب دوپایا در کاهش ارتعاشات تیر، به وضوح قابل مشاهده است.



شکل ۶- تاریخچه زمانی دامنه تیر با NES دوپایا در مقایسه با تیر بدون NES دوپایا



شکل ۷- تاریخچه زمانی اختلاف انرژی جنبشی جرم NES دوپایا در مقایسه با تیر بدون NES دوپایا

- nonlinear absorber: a tuning optimal design. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 91, 105439.
- [5] Mirhashemi, S., Saeidiha, M., & Ahmadi, H. (2023). Dynamics of a harmonically excited nonlinear pipe conveying fluid equipped with a local nonlinear energy sink. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 118, 107035.
- [6] Mamaghani, A. E., Khadem, S. E., & Bab, S. (2016). Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dyn.*, 86, 1761-1795.
- [۷] ابراهیمی ممقانی، & سرپرست. (۲۰۱۸). انتقال هدفمند انرژی از تیر دوسرگردار تحت تحریک هارمونیک خارجی به چاه غیرخطی انرژی. مکانیک سازه ها و شاره ها، ۸(۴)، ۱۶۵-۱۷۷.
- [8] Zhou, K., Xiong, F. R., Jiang, N. B., Dai, H. L., Yan, H., Wang, L., & Ni, Q. (2019). Nonlinear vibration control of a cantilevered fluid-conveying pipe using the idea of nonlinear energy sink. *Nonlinear Dyn.*, 95, 1435-1456.
- [9] Duan, N., Wu, Y., Sun, X. M., & Zhong, C. (2021). Vibration control of conveying fluid pipe based on inerter enhanced nonlinear energy sink. *IEEE TCAS-I*, 68(4), 1610-1623.
- [10] Zhao, X. Y., Zhang, Y. W., Ding, H., & Chen, L. Q. (2018). Vibration suppression of a nonlinear fluid-conveying pipe under harmonic foundation displacement excitation via nonlinear energy sink. *Int. J. Appl. Mech.*, 10(09), 1850096.
- [11] Wang, J., Wierschem, N. E., Wang, B., & Spencer Jr, B. F. (2020). Multi-objective design and performance investigation of a high-rise building with track nonlinear energy sinks. *Struct. Des. Tall Build.*, 29(2), e1692.
- [12] Wang, J., Wierschem, N. E., Spencer Jr, B. F., & Lu, X. (2015). Track nonlinear energy sink for rapid response reduction in building structures. *J. Eng. Mech.*, 141(1), 04014104.
- [13] Gendelman, O. V. (2012). Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink. *JSV*, 331(21), 4599-4608.
- [14] Fang, S., Chen, K., Xing, J., Zhou, S., & Liao, W. H. (2021). Tuned bistable nonlinear energy sink for simultaneously improved vibration suppression and energy harvesting. *Int. J. Mech. Sci.*, 212, 106838.
- [15] Younesian, D., Nankali, A., & Motieyan, M. E. (2010, January). Application of the nonlinear energy sink systems in vibration suppression of railway bridges. *ESDA (Vol. 49194, pp. 227-231)*.
- [16] Foroutan, K., Jalali, A., & Ahmadi, H. (2019). Investigations of energy absorption using tuned
- بررسی کرد که حداکثر پاسخ آن بیش از حد مجاز تعیین شده توسط مهندسان طراح نباشد.
- ### ۵- نتیجه گیری
- در این مقاله، رزونانس داخلی یک تیر دو سر لولا متصل به یک چاه انرژی غیرخطی دوپایا محلی متقارن بررسی شده است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از قانون دوم حرکت نیوتن به دست آمده است. سپس، با معرفی پارامترهای بی بعد، و همچنین، با اجرای روش گالرکین، معادلات حرکت سیستم به صورت بی بعد و گسسته سازی شده تبدیل شده است. تغییر متغیری استفاده شده است که باعث می شود معادلات حرکت سیستم در مجاورت نقاط تعادل پایدار خود قرار بگیرند. در ادامه، با استفاده از روش مقیاس های چندگانه، پاسخ فرکانسی تیر و جاذب انرژی دوپایا با پاسخی که با روش عددی به دست آمده است، مقایسه و راستی آزمایی شده است. تأثیر پارامترهای بی بعد بر پاسخ فرکانسی تیر و جاذب مورد بحث قرار گرفته است و در نهایت، یک تحلیل حوزه زمانی برای ارزیابی کارایی NES دوپایا ارائه شده است. به طور کلی، رفتار تیر، سخت شونده، و رفتار جاذب، نرم شونده است. همچنین، کارایی جاذب در طول زمان کاهش می یابد. در واقع، جاذب انرژی دوپایا نیز همچون دیگر جاذب های غیرخطی، در صورتی بسیار خوب عمل میکند که مقدار انرژی کل سیستم از یک مقدار بحرانی کمتر باشد.
- ### مراجع
- [1] Wang, J. F., Lin, C. C., & Chen, B. L. (2003). Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers. *Int. J. Solids struct.*, 40(2), 465-491.
- [2] Moradi, H., Bakhtiari-Nejad, F., & Movahhedy, M. R. (2008). Tuneable vibration absorber design to suppress vibrations: an application in boring manufacturing process. *JSV*, 318(1-2), 93-108.
- [۳] اسدی گرجی، کرمی محمدی، & اردشیر. (۲۰۲۱). استفاده از چاه انرژی غیرخطی، برای بهبود رفتار دینامیکی ورق مستطیلی تحت جریان آیرودینامیکی مافوق صوت با زوایای مختلف. نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر، ۵۳(۶)، ۳۵۱۱-۳۵۲۸.
- [4] Khazaei, M., Khadem, S. E., Moslemi, A., & Abdollahi, A. (2020). Vibration mitigation of a pipe conveying fluid with a passive geometrically

- [23] Saeed, A. S., Abdul Nasar, R., & AL-Shudeifat, M. A. (2023). A review on nonlinear energy sinks: designs, analysis and applications of impact and rotary types. *Nonlinear Dyn.*, 111(1), 1-37.
- [24] Geng, X. F., Ding, H., Mao, X. Y., & Chen, L. Q. (2022). A ground-limited nonlinear energy sink. *Acta Mech. Sin.*, 38(5), 521558.
- [25] Song, W., Liu, Z., Lu, C., Li, B. and Fuquan, N., 2023. Analysis of vibration suppression performance of parallel nonlinear energy sink. *JVC*, 29(11-12), pp.2442-2453.
- [26] Geng, X. F., & Ding, H. (2022). Two-modal resonance control with an encapsulated nonlinear energy sink. *JSV*, 520, 116667.
- [27] Jin, Y., Liu, K., Xiong, L., & Tang, L. (2022). A non-traditional variant nonlinear energy sink for vibration suppression and energy harvesting. *MSSP*, 181, 109479.
- [۲۸] عبداللهی دمنه، ع. اسماعیل زاده خادم، س. (1398). تحلیل ارتعاشات غیرخطی سیستم تحت اثر نیروهای خارجی همراه با چاه غیرخطی انرژی از نوع ارتعاش ضربه. کنفرانس ملی توسعه فناوری در مهندسی مکانیک و هوافضا.
- [29] Nayfeh, A. H., & Mook, D. T. (2008). *Nonlinear oscillations*. JWS.
- bistable nonlinear energy sink with local and global potentials. *JSV*, 447, 155-169.
- [17] Habib, G., & Romeo, F. (2017). The tuned bistable nonlinear energy sink. *Nonlinear Dyn.*, 89(1), 179-196.
- [18] Iurasov, V., & Mattei, P. O. (2020). Bistable nonlinear damper based on a buckled beam configuration. *Nonlinear Dyn.*, 99(3), 1801-1822.
- [19] Wang, T., Tang, Y., Yang, T., Ma, Z. S., & Ding, Q. (2023). Bistable enhanced passive absorber based on integration of nonlinear energy sink with acoustic black hole beam. *JSV*, 544, 117409.
- [20] Fang, S., Chen, K., Xing, J., Zhou, S., & Liao, W. H. (2021). Tuned bistable nonlinear energy sink for simultaneously improved vibration suppression and energy harvesting. *Int. J. Mech. Sci.*, 212, 106838.
- [21] Ding, H., & Chen, L. Q. (2020). Designs, analysis, and applications of nonlinear energy sinks. *Nonlinear Dynamics*, 100(4), 3061-3107.
- [22] Al-Shudeifat, M. A. (2014). Highly efficient nonlinear energy sink. *Nonlinear Dyn.*, 76, 1905-1920.