مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۳/ دوره ۱۴/ شماره ۵/ صفحه ۱۰۹-۱۲۰
نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها
DOI: **10.22044/jsfm.2025.14362.3849**

مقایسه کنترل‌کننده‌های غیرکلاسیک در نانو تشدیدگر پیزوالکتریک: تحلیل بسامد طبیعی و ولتاژ پولین

سید حبیب اله هاشمی کچپی[۱*]، سیده قدسیه هاشمی کچبی[۲]

[۱] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

[۲] دانشجوی دکتری، دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۱۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۴/۱۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۶/۱۱

چکیده

در مقاله حاضر اثرات کنترل‌کننده های غیرکلاسیک مانند نظریه گرادیان کرنش (SGT)، نظریه غیر موضعی (NLT) و نظریه های سطح/رابط گورتین-مرداک (GMSIT) برای تحلیل بسامدهای طبیعی در نانو تشدیدگر پیزوالکتریک (PENR) در مقایسه با نظریه کلاسیک (CT) ارائه شده‌است. نانو تشدیدگر تحت تحریک الکترواستاتیک غیرخطی با ولتاژ مستقیم (DC) و متناوب (AC) و محیط ویسکو پاسترناک قرار دارد. برای تحلیل این سیستم، از اصل همیلتون و روش گالرکین برای بدست آوردن معادلات حرکت و تبدیل معادلات دیفرانسیل جزئی به معمولی استفاده شده‌است. نتایج نشان می‌دهد که نادیده گرفتن اثرات مقیاس کوچک و سطح/رابط پیش بینی‌های نادرستی از پاسخ ارتعاشی نانو تشدیدگر را ارائه می‌دهد. همچنین در شرایط مرزی مختلف، مقیاس طول ماده و پارامترهای مقیاس غیر موضعی به ترتیب منجر به کاهش و افزایش سفتی نانو تشدیدگر می‌شوند و با افزایش نسبت طول به شعاع، افزایش مقیاس طول و غیر موضعی به دلیل تغییر سفتی نانوسیستم، بسامد های طبیعی بدون بعد به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند. در نهایت با مقایسه سه نظریه غیرکلاسیک با نظریه کلاسیک، در نظر گرفتن اثرات سطح/رابط نوع اول باعث کاهش سفتی سیستم شده که منجر به کاهش بسامد طبیعی و در نتیجه افزایش ولتاژ DC برای رسیدن به ولتاژ پولین نسبت به سایر حالت‌ها می‌شود.

کلمات کلیدی: نانو تشدیدگر پیزوالکتریک؛ نظریه گرادیان کرنش غیر موضعی؛ نظریه سطح/رابط گورتین–مورداک؛ بسامد طبیعی؛ ولتاژ پولین.

Comparison of nonclassical controllers on piezoelectric nanoresonator: natural frequency and pull in voltage analysis

Sayyid H. Hashemi Kachapi [1,*], S. Gh. Hashemi Kachabi[2]

[1] Assist. Prof., Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

[2] Ph.D. Student, Department of Physics, University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract

In current work, some nonclassical controller effects such as strain gradient (SGT), nonlocal (NLT) and Gurtin–Murdoch surface/interface (GMSIT) theories are presented for analyzing of nonlinear vibration in piezoelectric nanoresonator (PENR) compared to classical theory (CT). PENR subjected to nonlinear electrostatic excitation with direct (DC) and alternating (AC) voltages and also visco-pasternak medium. For this analysis, Hamilton’s principle, Galerkin technique, combination of Complex averaging method and arc-length continuation are used to analyze nonlinear frequency response and stability analysis of PENR. The results show that ignoring small-scale and surface/interface effects give inaccurate predictions of vibrational response of the PENR. It is indicated that in different boundary condition, material length scale and nonlocal scale parameters respectively lead to decreasing and increasing of PENR stiffness and also the amplitude of oscillation and the range of instability of non-classic theories of NLT and SGT are greater than that of the classical one. Also changes of surface/interface parameters lead to decreasing or increasing the dimensionless natural frequency, resonant frequency, resonance amplitude, nonlinear behavior and the system's instability of PENR.

Keywords: Piezoelectric nanoresonator; Nonlocal strain gradient theory; Gurtin–Murdoch surface/interface theory, Natural frequency; Pullin voltage.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۳۵۸۰۲۷۴۸۹

آدرس پست الکترونیک: shhashemi.kachapi@umz.ac.ir , sha.hashemi.kachapi@gmail.com

۱- مقدمه

نانوساختارها به دلیل دارا بودن جرم و اندازه کوچک به طور گسترده برای کاربرد در زمینه‌های مختلف علم و فناوری، مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱]. از جمله مهمترین نانوساختارها، نانو تشدیدگر است [۲]. اساس کار نانو تشدیدگر، تشخیص تغییرات در بسامد های تشدید شده یا سرعت امواج حسگرهای نانو، با استفاده از اتم‌های خارجی و مولکول‌های اطراف سطح خود است. این سازه‌ها از نظر مفهومی به عنوان حسگر عمل می‌نمایند که ورود جرم به داخل آن ها منجر به تغییر بسامد آن‌ها خواهد شد. مطالعات تجربی نشان می‌دهد که نانو تشدیدگرها، بستگی زیادی به شرایط محیطی مانند دما، سروصدای محیط دارد. رزوناتورها کاربردهای فراوانی دارند ازجمله در ارتباطات امنیتی، سنجش‌های جرمی، سنجش‌های بارالکتریکی، مخلوط مایعات، حسگرهای حرارتی و زیستی، دریافت، پردازش و تقویت سیگنال، فیلتر کردن سیگنال‌های شیمیایی، کاهش صدا، کاربردهای پزشکی مانند تشخیص مولکول DNA، نظارت بر قند دیابتی‌ها و در وسایلی مانند آنتن، تلفن همراه و غیره از آن ها استفاده می‌شود. نانو تشدیدگرها بنابر کاربردی که دارند، ممکن است به شکل‌های گوناگون لوله‌ای، ورق و غیره تولید شوند [۲]. امروزه برای تحلیل دینامیک و مدل‌سازی ریاضی این نانوساختارها، پارامترهای وابسته به اندازه باید در مدل‌های نظری گنجانده شوند. برای این منظور، نظریه‌های غیرکلاسیک مانند نظریه غیرمحلی یا غیرموضی [۳]، گرادیان کرنش [۴] و نظریه‌های سطح/رابط گورتین-مورداک [۵] برای بررسی ارتعاشات غیرخطی و تحلیل دینامیکی نانوساختارها ارائه شده‌اند.

بر اساس نظریه الاستیسیته غیرمحلی، نجفی و همکاران [۶] به تحلیل ارتعاشات آزاد نانوتیر پیزوالکتریک استفاده کرده‌اند و اثرات پارامترهای مختلف مانند پارامتر غیرمحلی، نسبت طول به ضخامت و ولتاژ اعمالی خارجی را مورد بررسی قرار داده‌اند. نجفی و همکاران [۶] در تحلیل ارتعاشات آزاد نانوتیر پیزوالکتریک، اثرات پارامترهای مختلف مانند پارامتر غیرمحلی، نسبت طول به ضخامت و ولتاژ اعمالی خارجی را مورد بررسی قرار داده‌اند. همچنین تحلیل ارتعاشات آزاد پنل های مخروطی مدرج تابعی تقویت شده با نانو صفحات گرافن با شرایط مرزی مختلف توسط میرزایی و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است [۷]. همچنین در بررسی صورت گرفته توسط عارفی [۸] نشان داده شده‌است که افزایش پارامتر غیرموضعی منجر به افزایش چرخش‌ها، جابجایی‌های درون صفحه و انحراف عرضی یک پوسته نانو پیزوالکتریک با منحنی‌های دوگانه می‌شود. بر اساس نظریه گرادیان کرنش غیرموضعی، کمانش نانوپوسته توسط دیندارلو و همکاران مورد مطالعه قرار گرفته است [۹]. ابراهیمی و همکاران [۱۰] از نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی برای بررسی تحلیل ارتعاشات نانوتیرهای ویسکوالاستیک استفاده کرده‌اند. با بکارگیری نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی و روش تحلیلی مقیاس‌های زمانی چندگانه، ارتعاشات غیرخطی نانوتیر غیرموضعی اویلر-برنولی بعنوان یک ساختار نانوالکترومکانیک توسط کارامد و همکاران بررسی شده است [۱۱].

با توجه به نظریه الاستیسیته سطح گورتین-مرداک، کمانش - پس کمانش غیرخطی و تحلیل ارتعاشی نانوساختارهای پیزوالکتریک توسط فانگ و همکاران مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۲،۱۳]. ژانگ و همکاران نیز با بکارگیری نظریه سطحی غیرموضی به بررسی برهمکنش‌های بین سطح و محیط توده‌ای نانوساختارها بویژه نانوتیرها پرداختند [۱۴]. اخیرا هاشمی کچپی و همکاران [۱۹-۱۵] برخی از روش‌های مهم تحلیلی با رویکردهایی در مقیاس کوچک مانند نظریه غیرمحلی ارینجن، گرادیان کرنش غیرمحلی، نظریه‌های سطح/رابط گورتین-مورداک و همچنین ترکیب این روش‌های مختلف را ارائه کرده اند تا اثرات مقیاس کوچک بر بسامدهای طبیعی، ارتعاشات غیرخطی و تحلیل پایداری نانو ساختارهای پیزوالکتریک تک جداره، دوجداره و چند جداره را تحت تحریکات مختلفی چون الکترواستاتیک غیرخطی، ویسکوپاسترناک و هارمونیک مورد بررسی قرار دهند. رفتار نانوصفحه کریشهف با در نظر گرفتن نیروی میرایی سیال، نیروی کزمیر و استفاده از نظریه تنش‌کوپل سازگار و نظریه سطح گورتین- مورداک توسط شیخلو و همکاران مورد مطالعه قرار گرفته می‌شود [۲۰].

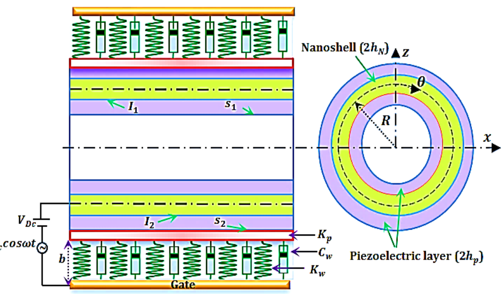
لازم به ذکر است که علاوه بر نویسنده مذکور [۱۷] تعداد بسیار محدودی از مطالعات به طور همزمان تأثیر سطح و اثرات در مقیاس کوچک را برای نانوساختارها خصوصا نانوساختارهای پیزوالکتریک در نظر گرفته‌اند. یی یوآن و همکاران با بکارگیری روش سطح غیرموضعی به بررسی برهمکنش‌های سطح- توده و کاربرد آن در مکانیک نانو تیرها پرداختند [۲۱]. قربانپور و همکاران [۲۲] تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانو ورق تک و دو

جداره را با استفاده از نظریه‌های پیزوالاستیسیته غیرمحلی و انرژی سطحی مورد بررسی قرار داده‌اند. همچنین قربانی و همکاران [۲۳] نشان داده‌اند که پارامتر مقیاس طول ماده و پارامتر پارامتر غیرمحلی به ترتیب بسامد طبیعی را افزایش و کاهش می‌دهند و اثرات انرژی سطح روی پاسخ‌ها در مقادیر بالاتر پارامتر مقیاس طول و مقادیر پایین تر پارامتر غیرمحلی، قوی‌تر است؛ همچنین پاسخ تحلیلی پس کمانش نانوساختارهای تیر مانند با استفاده از اثرات سطحی و غیرمحلی توسط کیانی [۲۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. در تحقیق صورت گرفته توسط سون و همکاران [۲۵]، از اثرات غیرمحلی و انرژی سطحی برای تحلیل کمانش نانوپوسته‌های پیزوالکتریک تحت ولتاژهای خارجی و بارهای فشاری استفاده شده است.

در تمام کارهای قبلی که تا کنون توسط نویسندگان انجام شده است، پژوهش‌های بسیار کمی در تحلیل ارتعاشات و پایداری نانوساختارهای پیزوالکتریک با در نظر گرفتن همزمان اثرات گرادیان کرنش، سطح/رابط گورتین-مورداک و اثرات غیرمحلی صورت گرفته است. تحقیق حاضر ادامه کارهای صورت گرفته [۱۷] نویسنده مقاله حاضر است، اما موضوع مورد مطالعه به ویژه نیروهای تحریک اعمالی کاملا متفاوت از کار قبلی بوده و در نتیجه نتایج متفاوتی از مقاله قبلی حاصل می‌شود و برخلاف کار قبلی، نانوساختار حاضر به طور همزمان تحت تحریک الکترواستاتیکی غیرخطی با ولتاژهای مستقیم (DC) و متناوب (AC) و همچنین محیط ویسکو پاسترناک قرار می‌گیرد. در تحقیق حاضر، اثرات غیرکلاسیک نامبرده برای بررسی بسامد طبیعی و تحلیل ناپایداری ولتاژ پولین نانو تشدیدگر پیزوالکتریک در مقایسه با نظریه کلاسیک مورد مطالعه قرار می‌گیرند. برای این کار، از روش های اصل همیلتون و گالرکین استفاده شده است تا تاثیر پارامترهای مختلفی چون اثرات مقیاس کوچک، سطح/رابط، بسترهای ویسکو پاسترناک، ولتاژهای الکترواستاتیک و پیزوالکتریک و سایر پارامترها بر بسامد طبیعی بدون بعد DNF و ولتاژ پولین نانو تشدیدگر پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گیرد.

۲- مدل‌سازی هندسی و فیزیکی

نانو تشدیدگر پیزوالکتریک مبتنی بر نانوپوسته استوانه‌ای که در معرض محیط ویسکو پاسترناک با ضرایب K_W، K_p و C_W به ترتیب ضریب سختی وینکلر، لایه برشی پاسترناک و ضریب میرایی محیط ویسکو و تحریک الکترواستاتیکی غیرخطی شامل ولتاژ مستیم V_{DC} و ولتاژ متناوب V_{AC} قرار گرفته است، در شکل ۱ نشان داده شده‌است.



شکل ۱- یک نانو تشدیدگر پیزوالکتریک تحت تحریک الکترواستاتیکی غیرخطی

سایر پارامترهای هندسی پوسته استوانه ای عبارت از طول نانو پوسته L، شعاع سطح میانی R، ضخامت پوسته استوانه‌ای $2h_N$ و ضخامت لایه مواد پیزوالکتریک $2h_p$ است. همچنین ولتاژ پیزوالکتریک V_p نیز در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک به سیستم اعمال می‌شود. با قرار گرفتن مبدأ سیستم مختصات در سطح میانی نانوپوسته، مختصات یک نقطه معمولی در جهت محوری، محیطی و شعاع به ترتیب با x، θ و z توصیف می‌گردند. سایر خصوصیات فیزیکی و هندسی نانوساختار ذکر شده در مرجع هاشمی کچپی و همکاران [۱۵] قابل مشاهده است.

۳- معادلات حاکم بر سیستم

در این بخش، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی متناظر پوسته پیزوالکتریک با اعمال اصل همیلتون زیر به دست می آید:

$$\int_0^t (\delta T - \delta\pi + \delta w_{vf} + \delta w_e)dt = 0, \qquad (۱)$$

که در آن δT، $\delta\pi$، δw_{vf} و δw_e به ترتیب اولین تغییر انرژی کرنش، انرژی جنبشی، پایه ویسکوالاستیک و تحریک الکترواستاتیک غیرخطی هستند. توجه به این نکته ضروری است که تمامی روابط، ضرایب و عبارات برای نظریه‌های

گرادیان کرنش غیرمحلی و سطح/رابط و گرادیان کرنش غیرمحلی سطح/رابط و روابط تنش-کرنش در مقیاس کوچک و غیره با جزئیات کامل در مرجع هاشمی کچپی [۱۷] ذکر شده است. اولین تغییر انرژی کرنش به صورت زیر نوشته می شود:

$$\delta\pi = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{c} N_{xx}\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right) \\ -M_{xx}\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\right) \\ +N_{\theta\theta}\left(\begin{array}{c} \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \delta w\right) \\ +\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \end{array}\right) \\ -M_{\theta\theta}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2}\right) \\ +N_{x\theta}\left(\begin{array}{c} \frac{1}{R}\frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \\ +\frac{1}{R}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} \\ +\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \end{array}\right) \\ -M_{x\theta}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial \theta}\right) \end{array} \right\} R d\theta dx \qquad (۲)$$

همچنین اولین تغییر انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = -\int_{t_1}^{t_2} \iint \left\{ I\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\delta v + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w \right) \right\} R d\theta dx dt \qquad (۳)$$

که

$$I = \int_{-h_N}^{h_N} \rho_N\, dz + \int_{-h_N-h_p}^{-h_N} \rho_p\, dz + \int_{h_N}^{h_N+h_p} \rho_p\, dz + \rho^{S,I} = 2\rho_N h_N + 2\rho_p h_p + 2\rho^S + 2\rho^I \qquad (۴)$$

و اولین تغییر کار انجام شده توسط بستر ویسکوالاستیک و تحریک الکترواستاتیک غیرخطی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta W_{vf} = -\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^w \left(\begin{array}{c} K_w w \\ -K_p \nabla^2 w \\ +C_w \frac{\partial w}{\partial t} \end{array} \right) \delta w\, R d\theta dx, \qquad (۵)$$

$$\delta W_e = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^w \frac{\pi \Upsilon (V_{DC} + V_{AC} cos(\omega t))^{\,2}}{\left(\begin{array}{c} \sqrt{\begin{array}{c}(b-w) \\ \times (2R+b-w)\end{array}} \\ \times \left[\cosh^{-1}\left(1 + \frac{b-w}{R}\right)\right]^2 \end{array} \right)} \delta w\, R d\theta dx \qquad (۶)$$

که در آن تمام ضرایب و عبارات بیان شده در معادلات (۲)-(۶) را می‌توان با جزئیات کامل در مراجع هاشمی کچپی و همکاران [۱۵] مشاهده کرد.

با جایگزینی معادلات (۲)- (۶) در معادله (۱)، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی برای PENR به دست آمده است. مطابق با مراجع [۱۵،۱۷] و با در نظر گرفتن اثرات مقیاس غیرمحلی و طول مواد و بنابراین اثرات غیرمحلی گرادیان کرنش سطح/رابط مرجع [۱۷] و با در نظر گرفتن پارامترهای بی بعد مراجع ذکر شده، معادلات بی بعد حاکم بر حرکت و شرایط مرزی بی بعد مرتبط با آن بدست می‌آیند که به ترتیب در پیوست‌های ۱ و ۲ ضمیمه شده‌اند.

در مطالعه حاضر برای بیان نیروی الکترواستاتیک معادله (۶) و با توجه به مشکل برازش منحنی غیرخطی ایجاد شده در این حالت غیرخطی، از شکل تابع چند جمله‌ای که توسط روش عددی lsqcurvefit در جعبه ابزار Matlab و با استفاده از روش حداقل مربعات حل می‌شود، استفاده می‌کنیم؛ در نتیجه کار بدون بعد انجام شده توسط نیروی الکترواستاتیک را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱۷، ۱۵]:

$$\delta W_e = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\overline{w}} \bar{F}_e (\bar{V}_{DC} + \bar{V}_{AC}\cos(\Omega\tau))^2 (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 \overline{w} + \bar{C}_3 \overline{w}^2 + \cdots + \bar{C}_n \overline{w}^{n-1})\, \delta\overline{w} \right\} \delta\theta \delta\xi \qquad (۷)$$

که $\bar{C}_1 - \bar{C}_n$ ثابت هستند.

۴- روش حل تحلیلی

در این پژوهش، از روش گالرکین برای تبدیل معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می‌شود؛ بنابراین جابجایی‌ها برحسب مختصات تعمیم یافته و تابع حالت به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۷]:

$$\begin{bmatrix} u(x,\theta,t)\\ v(x,\theta,t)\\ w(x,\theta,t)\end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{M_1}\sum_{j=1}^{N}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{m,j,c}(\tau)\cos(j\theta)\\ +u_{m,j,s}(\tau)\sin(j\theta)\end{bmatrix}\chi_{mj}(\xi)\\ \begin{bmatrix} v_{m,j,c}(\tau)\sin(j\theta)\\ +v_{m,j,s}(\tau)\cos(j\theta)\end{bmatrix}\phi_{mj}(\xi)\\ \begin{bmatrix} w_{m,j,c}(\tau)\cos(j\theta)\\ +w_{m,j,s}(\tau)\sin(j\theta)\end{bmatrix}\beta_{mj}(\xi)\end{bmatrix} + \sum_{m=1}^{M_2}\begin{bmatrix} u_{m,0}(\tau)\chi_{m0}(\xi)\\ v_{m,0}(\tau)\phi_{m0}(\xi)\\ w_{m,0}(\tau)\beta_{m0}(\xi)\end{bmatrix} = \sum_{(i,r,s)=1}^{M_2+M_1\times N}\begin{bmatrix} u_i(\tau)\chi_i(\xi)\vartheta_i(\theta)\\ v_r(\tau)\phi_r(\xi)\alpha_r(\theta)\\ w_s(\tau)\beta_s(\xi)\psi_s(\theta)\end{bmatrix} \qquad (۸)$$

در روش گالرکین، توابع $\chi_i(\xi)$، $\phi_r(\xi)$ و $\beta_s(\xi)$ باید تمام شرایط مرزی هندسی و طبیعی را برآورده کنند. با جایگزینی معادلات (۸) در معادلات بی‌بعد حاکم بر حرکت و شرایط مرزی بی بعد پیوست‌های ۱ و ۲ و معادله (۷) و با استفاده از روش گالرکین، معادله مرتبه کاهش یافته حرکت به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&[(K)_u^u + (K_{bc})_u^u]\{\bar{u}\} + [(K)_u^v + (K_{bc})_u^v]\{\bar{v}\}\\ &\quad + [(K)_u^w + (K_{bc})_u^w]\{\bar{w}\}\\ &\quad + [(NL)_u^w + (NL_{bc})_u^w]\{\bar{w}^2\}\\ &\quad = [(M)_u^u]\{\ddot{\bar{u}}\} + \bar{F}_{up}^{bc},\end{aligned} \qquad (۹)$$

$$\begin{aligned}&[(K)_v^u + (K_{bc})_v^u]\{\bar{u}\} + [(K)_v^v + (K_{bc})_v^v]\{v\}\\ &\quad + [(K)_v^w + (K_{bc})_v^w]\{\bar{w}\}\\ &\quad + [(NL)_v^w + (NL_{bc})_v^w]\{\bar{w}^2\}\\ &\quad = [(M)_v^v]\{\ddot{\bar{v}}\} + \bar{F}_{vp}^{bc},\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

$$\begin{aligned}&[(K)_w^u]\{\bar{u}\} + [(K)_w^v]\{\bar{v}\}\\ &+ \left[(K)_w^w + (K_{bc})_w^w - \left(K_{vp}\right)_w^w - (K_{e2})_w^w\right]\{\bar{w}\}\\ &+ [(NL)_w^u + (NL_{bc})_w^u]\{\bar{w}\bar{u}\}\\ &+ [(NL)_w^v + (NL_{bc})_w^v]\{\bar{w}\bar{v}\}\\ &+ [(NL)_{w2}^w + (NL_{bc})_{w2}^w - (NL_{2e})_{w2}^w]\{\bar{w}^2\}\\ &+ [(NL)_{w3}^w + (NL_{bc})_{w3}^w - (NL_{3e})_{w3}^w]\{\bar{w}^3\}\\ &= ([(M)_w^w + (M_{bc})_w^w])\{\ddot{\bar{w}}\} + ([(C)_w^w]\\ &+ [(C_{bc})_w^w])\{\dot{\bar{w}}\}) + \bar{F}_{wp} + \bar{F}_{wp}^{bc} - \bar{F}_{we}\\ &- \bar{F}_e\left\{\begin{matrix}((\bar{V}_{AC}\cos\bar{\omega}\tau)^2 + 2\bar{V}_{AC}\bar{V}_{DC}\cos\bar{\omega}\tau)\times\\ \begin{pmatrix}\bar{C}_4(NL_e)_{w3}^w + \bar{C}_3(NL_e)_{w2}^w\\ +\bar{C}_2(K_e)_w^w + \bar{C}_1\bar{F}_1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که تمام ضرایب و عبارات معادلات (۱۷)- (۱۹) در مرجع هاشمی کچپی [۱۷] تعریف شده‌است و تنها ضرایب محیط ویسکو-پاسترناک $\left(K_{vp}\right)_w^w$ در پیوست ۱ مقاله حاضر ارائه شده است.

۵- نتایج و بحث

در این بخش، ابتدا صحت پاسخ نانو تشدیدگر پیزوالکتریک با در نظر گرفتن اثرات غیرمحلی، گرادیان کرنش و سطح/رابط با روش عددی رانگ- کوتا بررسی می‌شود. سپس اثرات پارامترهای مختلف مواد و هندسی با و بدون اثرات غیرمحلی، گرادیان کرنش و سطح/رابط بر بسامد طبیعی بی‌بعد و ولتاژ پولین ارائه می‌شود. برای این منظور، شرایط مرزی مختلف مانند لبه گیره (CC)، لبه ساپورت شده (SS)، لبه گیره دار-ساده حمایت شده (CS) و لبه بدون گیره (CF) ارائه شده‌است. خواص سطحی و توده‌ای مواد نانوپوسته آلومینیوم (Al) و لایه پیزوالکتریک PZT به ترتیب در جداول ۱ و ۲ نشان داده شده است [۱۵, ۱۶].

جدول ۱- خواص سطحی و حجیم آلومینیوم

E_N (GPa)	υ_N	ρ_N $(\frac{kg}{m^3})$	λ^I (N/m)	μ^I $N/m)$	τ_0^I $(N/\imath$	ρ^I (kg/m^2)
70	0/33	2700	3/786	1/95	0/9108	$5/46\times10^{-7}$

جدول ۲- خواص سطحی و حجیم PZT-۴

C_{11p} (GPa)	C_{22p} (GPa	C_{12p} (GPa)	C_{21p} (GPa)	C_{66p} (GPa)	E_p (GPa)
139	139	77/8	77/8	30/5	95
υ_p	ρ_p $m^{-3})$	η_{33p} $(10^{-8}$ F/m)	λ^S(N/m)	μ^S(N/m)	τ_0^S (N/m
0/3	750(	8/91	4/488	2/774	0/6048
e_{31p} $C/m^2)$	e_{32p} (C/n	e_{31p}^S (C/m)	e_{32p}^S (C/m)	$\rho^S(kg/m^2)$	
−5/2	−5/2	-3×10^{-8}	-3×10^{-8}	$5/61\times10^{-6}$	

سایر پارامترهای فیزیکی و هندسی نانوساختار در تمام نتایج زیر در جدول ۳ [۱۵, ۱۶, ۲۲] نشان داده شده‌است.

جدول ۳- مواد و پارامترهای هندسی

R(m)	L/R	h_N/R, /R		b/R	$C_w\left(\frac{N.S}{m}\right)$
1×10^{-9}	10	0/01	0/005	0/1	1×10^{-3}
$K_w(N/m^3$	K_p(N/m)	V_p(V)	V_0	V_{DC}(V	V_{AC}(V)
9×10^{17}	2/07	1×10^{-5}	1	1/5	0/5
$\mu(m^2)$	$\eta(m^2)$				
$(1\times10^{-10}$	$(1\times10^{-11}$				

۵-۱- صحه‌گذاری نتایج

در این بخش، بررسی و صحت پاسخ نانو تشدیدگر پیزوالکتریک با روش عددی رانگ- کوتا را با کارهای منتشر شده قبلی توسط محققین مقایسه می‌کنیم. در این حالت، صحت نتایج را با کار قربانی و همکاران [۲۳] که با در نظر گرفتن اثرات غیرمحلی، گرادیان کرنش و گرادیان کرنش غیرمحلی با و بدون در نظر گرفتن اثرات انرژی سطحی برای بسامدهای طبیعی نانولوله استوانه‌ای دوسر مفصل SS و با پارامترهای ماده و هندسی زیر است، مقایسه می‌کنیم؛
, $v = 0/24$, $\rho = 2331\, kg\, m^{-3}$, $\lambda^s = -4/488\, N\, m^{-1}$, $\mu^s = -2/774\, N\, m^{-1}$, $\tau_0^s = 0/605\, N\, m^{-1}$, $\rho_s = 3/17 \times 10^{-7}\, kg\, m^{-2}$, $h_N = 1\, nm$, $R\, /h_N = 2/5$, $(m,n) = (3,3)$ و $E = 210\, GP$. برای این صحت سنجی از تحریک الکترواستاتیک غیرخطی، نیروی هارمونیک، میرایی ساختاری و لایه های پیزوالکتریک صرفنظر می‌کنیم. این مقایسه در جدول ۴ ارائه شده‌است.

جدول ۴- مقایسه بسامدهای طبیعی بدون کار حاضر برای نانوپوسته SS با تحقیق قربانی و همکاران [۲۳] بر اساس نظریه‌های مختلف مکانیک پیوسته

نظریه	با اثرات انرژی سطحی			بدون اثرات انرژی سطحی		
	مطالعه حاضر	قربانی و همکاران [۲۳]	اختلاف نتایج	مطالعه حاضر	قربانی و همکاران [۲۳]	اختلاف نتایج
کلاسیک	۰/۰۷۲۴۵	۰/۰۷۲۴۱	۰/۰۰۰۰۴	۰/۰۱۷۰۹	۰/۰۱۷۰۱	۰/۰۰۰۰۸
غیرمحلی	۰/۰۱۴۰۴	۰/۰۱۴۰۳	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۳۳۱	۰/۰۰۳۲۹	۰/۰۰۰۰۲
گرادیان کرنش	۰/۱۰۳۱۰	۰/۱۰۳۰۳	۰/۰۰۰۰۷	۰/۰۲۴۲۶	۰/۰۲۴۲۱	۰/۰۰۰۰۵
گرادیان کرنش غیرمحلی	۰/۰۱۹۹۹	۰/۰۱۹۹۷	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۴۷۳	۰/۰۰۴۶۹	۰/۰۰۰۰۴

از جدول ۴ می‌توان مشاهده کرد که نتایج حاضر با پاسخ مرجع مذکور بسیار نزدیک و مناسب است که نشان می‌دهد، روش ارائه شده در این مقاله مناسب و از دقت بالا برخوردار است و تفاوت‌های ناچیز مشاهده شده در نتایج ممکن است به نظریه های مختلف پوسته ارائه شده و روش‌های مختلف حل مورد استفاده در تحقیق قبلی و در این مقاله مربوط گردد.

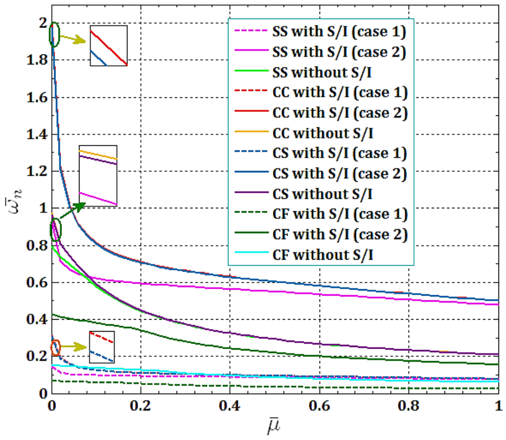
۵-۲- مطالعه پارامتری و تحلیل بسامد طبیعی

پس از اعتبارسنجی مسأله و اطمینان از صحت نتایج در قسمت قبل، هدف اصلی این بخش، مقایسه سه نظریه غیرکلاسیک NLT، SGT و GMSIT با نظریه کلاسیک CT است. برای این منظور، تأثیر پارامترهای هندسی و مواد مختلف با و بدون گرادیان کرنش، اثرات غیرمحلی و سطحی/رابط بر بسامد طبیعی بدون بعد (DNF) برای PENR با مشخصات ذکر شده در جداول ۱-۳ تجزیه و تحلیل خواهد شد. لازم به ذکر است که در تمام نتایج حاصله، در NLT اثر پارامتر $\bar{\mu}$; در SGT اثرات پارامترهای $\bar{\mu}$ و $\bar{\eta}$ و در GMSIT اثرات S/I بررسی شده خواهند شد. در ادامه، بسامدهای طبیعی بی‌بعد نانو تشدیدگر پیزوالکتریک در مقابل پارامتر مقیاس غیرمحلی $\bar{\mu}$ و پارامتر مقیاس طول مواد بی‌بعد $\bar{\eta}$ با و بدون پارامترهای انرژی سطح/رابط به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ ارائه شده‌اند. با توجه به اهمیت بالای چگالی سطح/رابط و تاثیر زیادی که در تحلیل ارتعاشات خطی و غیرخطی نانوساختارها دارد، دو مورد از چگالی سطح/رابط مطابق جدول ۴ ارائه می‌گردد.

جدول ۴- دو حالت از چگالی سطح/رابط

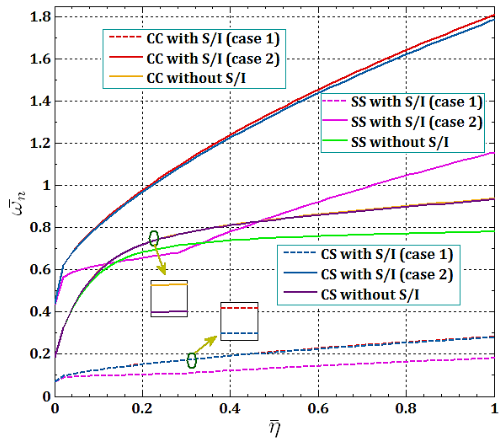
حالت ۱		حالت ۲	
$\boldsymbol{\rho^I (kg/m^2)}$	$\rho^S (kg/m^2)$	$\rho^I (kg/m^2)$	$\rho^S (kg/m^2)$
$\boldsymbol{5/46 \times 10^{-7}}$	$5/61 \times 10^{-6}$	$5/46 \times 10^{-8}$	$5/61 \times 10^{-7}$

از شکل ۲ مشخص است که چگالی سطح/رابط حالت ۱ (حالت ۲) منجر به کاهش (افزایش) سفتی PENR می‌شود و در نتیجه باعث کاهش (افزایش) بسامد طبیعی بدون بعد در مقایسه با حالت بدون اثرات S/I می‌شود؛ همچنین در همه موارد، به دلیل کاهش سفتی PENR، DNF با افزایش پارامتر مقیاس غیرمحلی $\bar{\mu}$ با $\bar{\eta} = 0/01$ کاهش می‌یابد.



شکل ۲- تأثیر سطح/ واسط بر بسامد طبیعی در مقابل پارامتر بدون بعد مقیاس غیرمحلی $\bar{\mu}$ با $\bar{\eta} = 0/01$ برای شرایط مرزی مختلف

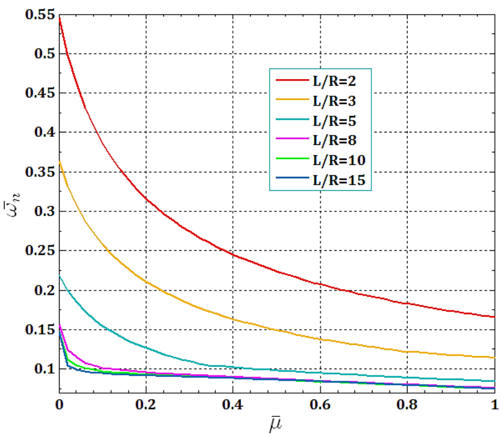
در شکل ۳، علاوه بر نتایج ذکر شده برای اثر چگالی سطح/رابط، مشخص است که در همه موارد، به دلیل افزایش سختی PENR، DNF با افزایش پارامتر مقیاس طول مواد بدون بعد $\bar{\eta}$ با $\bar{\mu} = 0/1$ افزایش می‌یابد. نتایج ۲ و ۳ همچنین نشان می‌دهند که پارامتر مقیاس غیرمحلی $\bar{\mu}$ و پارامتر مقیاس طول ماده $\bar{\eta}$ به ترتیب منجر به افزایش و کاهش سفتی PENR می‌شوند که بر این اساس DNF برای PENR به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد.



شکل ۳- اثرات سطح/ رابط بر بسامد طبیعی در مقابل پارامتر بدون بعد مقیاس طول مواد $\bar{\eta}$ با $\bar{\mu} = 0/1$ برای شرایط مرزی مختلف

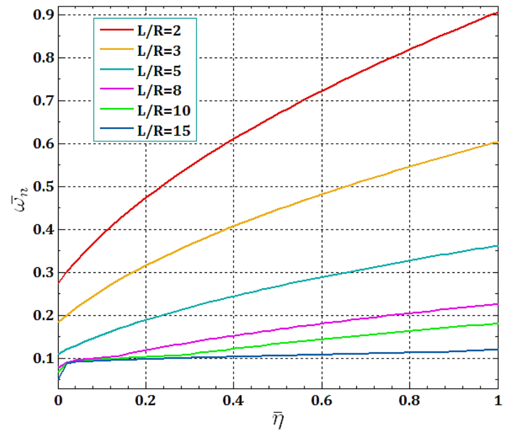
علاوه بر این، در هر دو حالت پارامترهای غیر محلی و مقیاس طول مواد، بسامد طبیعی بدون بعد مربوط به شرایط مرزی CC بیشتر از SS ،CS و CF است. این به این دلیل است که شرایط مرزی CC نسبت به سایر شرایط مرزی سفت‌تر می باشد.

تأثیر نسبت طول به شعاع مختلف L/Rبر بسامد طبیعی بدون بعد در مقابل پارامتر مقیاس غیرمحلی بدون بعد $\bar{\mu}$ برای SS PENR در شکل ۴ با در نظر گرفتن تمام اثرات سطح / رابط و $\bar{\eta} = 0/01$ ارائه شده‌است. از این شکل مشخص می‌شود که به دلیل کاهش سفتی PENR ، با افزایش هر دو پارامتر نسبت L/R و پارامتر مقیاس کوچک غیر محلی، بسامد های طبیعی بدون بعد کاهش می‌یابد.



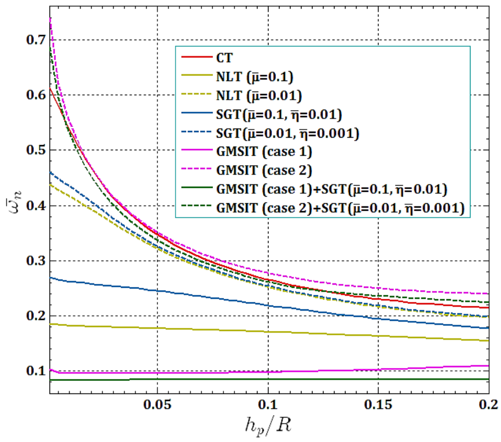
شکل ۴- اثرات نسبت L/R بر بسامد طبیعی در مقابل پارامتر بدون بعد مقیاس غیرمحلی $\bar{\mu}$ با تمام اثرات سطح / رابط و $\bar{\eta} = 0/01$

تأثیر نسبت طول به شعاع مختلف L/R بر بسامد طبیعی بدون بعد در مقابل پارامتر بدون بعد مقیاس طول ماده $\bar{\eta}$ برای SS PENR در شکل ۵ با در نظر گرفتن تمام اثرات سطح / رابط و $\bar{\mu} = 0/1$ ارائه شده‌است. از این شکل مشخص می‌شود که با افزایش پارامتر غیرمحلی و نسبت L/R به ترتیب بسامدهای طبیعی بدون بعد افزایش و کاهش می‌یابد.



شکل ۵- اثرات نسبت L/R بر بسامد طبیعی در مقابل پارامتر بدون بعد مقیاس طول مواد $\bar{\eta}$ با تمام اثرات سطح / رابط و $\bar{\mu} = 0/1$

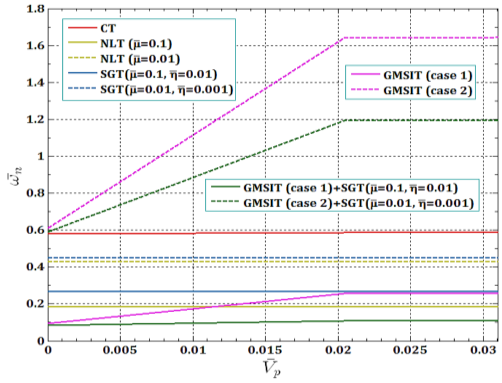
شکل ۶ مقایسه سه نظریه غیرکلاسیک NLT، SGT و GMSIT را با نظریه کلاسیک CT بر روی بسامد طبیعی بدون بعد برای نسبت ضخامت پیزوالکتریک به شعاع مختلف h_p/R در SS PENR نشان می‌دهد. از این شکل می‌توان دریافت که بیشترین بسامد مربوط به GMSIT (چگالی حالت ۲) است و نشان می‌دهد که در این حالت، صلبیت سیستم بیشتر از سایر موارد است. کمترین بسامد نیز مربوط به در نظر گرفتن همزمان GMSIT (حالت ۱) و SGT $(\bar{\mu} = 0/1, \bar{\eta} = 0/01)$، یعنی GMSIT+SGT، است و نشان می‌دهد که در این حالت، سختی سیستم از سایر موارد کمتر است. واضح است که بسامد طبیعی نظریه کلاسیک بیشتر از نظریه‌های NLT و SGT است و نشان‌دهنده کاهش صلبیت سیستم به دلیل در نظر گرفتن این دو نظریه است؛ همچنین نظریه NLT به دلیل صلبیت بیشتر، بسامد بالاتری نسبت به نظریه SGT دارد؛ همچنین با در نظر گرفتن اثرات سطح / رابط و استفاده از چگالی سطح / رابط بالاتر یا پایین تر می‌تواند بسامدهای کمتر یا بیشتری نسبت به بسامدهای کلاسیک ایجاد کند، اما استفاده از هر دو نظریه NLT و SGT بسامد طبیعی کمتری نسبت به حالت کلاسیک خواهد داشت.



شکل ۶- مقایسه نظریه‌های غیر کلاسیک با نظریه کلاسیک در بسامد طبیعی بدون بعد در مقابل ضخامت پیزوالکتریک به شعاع مختلف h_p/R

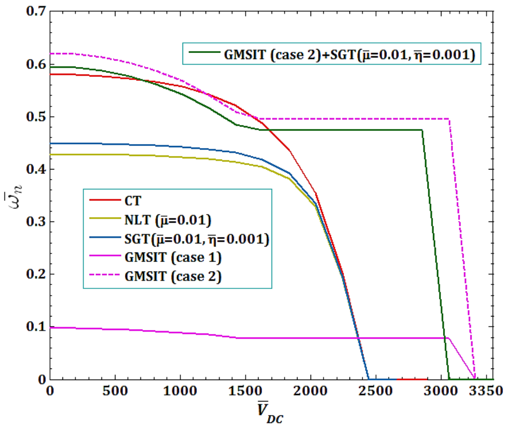
همچنین می‌توان نتیجه گرفت که در همه موارد، نسبت h_p/R می‌تواند تأثیر قابل‌توجهی بر DNF داشته باشد و با افزایش این نسبت، به دلیل کاهش سفتی PEN ، بسامد طبیعی کاهش می‌یابد.

شکل ۷ مقایسه بسامد طبیعی بدون بعد سه نظریه غیرکلاسیک برای NLT، SGT و GMSIT را با نظریه کلاسیک CT در ولتاژهای مختلف تحریک پیزوالکتریک $\bar{V}_p$ برای SS PENR نشان می‌دهد. تمام نتایج ارائه شده در شکل قبل در مورد تأثیر نظریه‌های مختلف بر بسامدهای طبیعی در این شکل به وضوح مشاهده می‌شود و نتایج قبلی را تایید می‌کند. با توجه به تأثیر ولتاژ پیزوالکتریک بر بسامد طبیعی در نظریه های مختلف (شکل ۷)، بیشترین تغییرات در GMSIT و حالت های ۱ و ۲ و همچنین در نظر گرفتن همزمان GMSIT و SGT، به ویژه در موارد با چگالی کم مشاهده می‌شود. در این موارد، با افزایش ولتاژ و در نتیجه افزایش صلبیت سیستم، بسامد افزایش یافته و سپس با شیب کمی و تقریباً ثابت ادامه می‌یابد. در سایر نظریه‌ها، تغییرات ولتاژ پیزوالکتریک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر در بسامد طبیعی PENR ندارد.



شکل ۷- مقایسه نظریه‌های غیر کلاسیک با نظریه کلاسیک در بسامد طبیعی بدون بعد در مقابل ولتاژهای مختلف پیزوالکتریک $\bar{V}_p$

مقایسه سه نظریه غیرکلاسیک NLT، SGT و GMSIT با نظریه کلاسیک CT برای بسامد طبیعی در مقابل ولتاژ پولین مستقیم DC نانوپوسته SS در شکل ۸ ارائه شده‌است. همانطور که مشخص است، در نظر گرفتن اثرات انرژی سطح/رابط باعث سفتی سیستم شده و منجر به افزایش ولتاژ DC برای رسیدن به ولتاژها پولین می‌گردد. به دلیل سفتی کم در نظریه‌های NLT، SGT و CT، زودتر به ولتاژ پولین (و تقریباً برابر) خواهند رسید؛ همچنین، برای بسامد طبیعی صفر، SS PENR ناپایدار می‌شود و این از نظر فیزیکی نشان می‌دهد که ابتدا PENR به دلیل واگرایی ناشی از انشعاب چنگالی (pitchfork bifurcation)، پایداری خود را از دست می‌دهد.



شکل ۸- مقایسه نظریه های غیر کلاسیک با نظریه کلاسیک در بسامد طبیعی بدون بعد در مقابل ولتاژ پولین مستقیم DC برای SS PENR

۶- جمع‌بندی

در مطالعه حاضر، نظریه‌های غیرمحلی، گرادیان کرنش و سطح/رابط گورتین-مرداک برای بررسی تحلیل بسامد طبیعی بدون بعد نانو تشدیدگر پیزوالکتریک تحت تحریک الکترواستاتیک غیرخطی و بستر ویسکوپسترناک در مقایسه با نظریه کلاسیک ارائه شده‌است. برای این تحلیل، از اصل همیلتون و روش گالرکین برای مقایسه سه نظریه غیرکلاسیک NLT، SGT و GMSIT با نظریه کلاسیک CT استفاده شده است.

برخی از نتایج این مطالعه به صورت زیر دست آمده است:

- ✓ در تمام شرایط مرزی، پارامتر مقیاس غیرمحلی $\bar{\mu}$ و پارامتر مقیاس طول ماده $\bar{\eta}$ به ترتیب منجر به افزایش و کاهش سفتی PENR و در نتیجه منجر به افزایش و کاهش DNF در PENR می‌شوند.
- ✓ در هر دو مورد پارامترهای غیرمحلی و مقیاس طول مواد، بسامد طبیعی بدون بعد مربوط به شرایط مرزی CC بدلیل سفت بودن سیستم نسبت به سایر شرایط مرزی در این حالت بیشتر از SS، CS و CF است.
- ✓ با افزایش نسبت L/R و در هر دو حالت مختلف از $\bar{\mu}$ و $\bar{\eta}$، به دلیل کاهش سفتی PENR، بسامدهای طبیعی بدون بعد کاهش می‌یابد.
- ✓ بیشترین بسامد مربوط به GMSIT (حالت ۲) است و نشان می‌دهد که در این حالت سختی سیستم بیشتر از سایر موارد است. کمترین بسامد نیز مربوط به در نظر گرفتن همزمان GMSIT (حالت ۱) و SGT $(\bar{\mu} = 0/1, \bar{\eta} = 0/01)$ است، یعنی GMSIT+SGT است و نشان می‌دهد که در این حالت، سختی سیستم کمتر از موارد دیگر است.
- ✓ بسامد طبیعی نظریه کلاسیک بیشتر از نظریه‌های NLT و SGT است که نشان‌دهنده کاهش سختی سیستم به دلیل در نظر گرفتن این دو نظریه است.
- ✓ نظریه NLT به دلیل افزایش صلبیت بسامد بالاتری نسبت به نظریه SGT دارد.
- ✓ در نظر گرفتن اثرات سطح / رابط و استفاده از چگالی سطح / رابط بالاتر یا کمتر می‌تواند بسامدهای کمتر یا بیشتری نسبت به بسامد های کلاسیک ایجاد کند.
- ✓ با توجه به تأثیر ولتاژ پیزوالکتریک بر بسامد طبیعی، حالت ای ۱ و ۲ GMSIT و همچنین در نظر گرفتن همزمان

GMSIT و SGT، به ویژه در حالت چگالی کم، بیشترین تغییرات در بسامد طبیعی مشاهده می‌شود. در این موارد با افزایش ولتاژ و در نتیجه افزایش صلبیت سیستم، بسامد افزایش یافته و سپس با شیب کمی و تقریباً ثابت ادامه می‌یابد. در سایر نظریه‌ها، تغییرات ولتاژ پیزوالکتریک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر بسامد طبیعی PENR ندارد.

- ✓ در مقایسه سه نظریه غیرکلاسیک NLT، SGT و GMSIT با نظریه کلاسیک CT، در نظر گرفتن اثرات سطح/رابط باعث سفتی سیستم شده و منجر به افزایش ولتاژ DC برای رسیدن به ولتاژهای پولین می‌شود. به دلیل سفتی کم در نظریه‌های NLT، SGT و CT، زودتر به ولتاژ پولین خواهند رسید و برای بسامد طبیعی صفر، SS PENR، به دلیل واگرایی ناشی از انشعاب چنگالی، پایداری خود را از دست می‌دهد.

۵- ضمایم

پیوست ۱

معادلات بی بعد حاکم بر حرکت:

$$(1-\bar{\eta}\,\bar{\nabla}^2)\begin{pmatrix}\alpha_{1u}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi^2}+\alpha_{2u}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\theta^2}+\alpha_{3u}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi\partial\theta}\\ +\alpha_{4u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{5u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\\ +\alpha_{6u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}+\alpha_{7u}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\end{pmatrix} = (1-\bar{\mu}\,\bar{\nabla}^2)\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\tau^2}, \tag{۱,۱}$$

$$(1-\bar{\eta}\,\bar{\nabla}^2)\begin{pmatrix}\alpha_{1v}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi\partial\theta}+\alpha_{2v}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi^2}\\ +\alpha_{3v}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\theta^2}+\alpha_{4v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\\ +\alpha_{5v}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}+\alpha_{6v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\ +\alpha_{7v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}\end{pmatrix} = (1-\bar{\mu}\,\bar{\nabla}^2)\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\tau^2}, \tag{۱,۲}$$

$$(1-\bar{\eta}\,\bar{\nabla}^2)\begin{pmatrix}\alpha_{1w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}+\alpha_{2w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}+\alpha_{3w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}\\ +\alpha_{4w}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{5w}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi\partial\theta}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}+\alpha_{6w}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi\partial\theta}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\ +\alpha_{7w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}+\alpha_{8w}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\theta^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{9w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\\ +\alpha_{10w}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}+\alpha_{11w}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi\partial\theta}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{12w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}\\ +\alpha_{13w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}+\alpha_{14w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}+\alpha_{15w}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\theta^2}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\ +\alpha_{16w}\bar{w}+\alpha_{17w}\bar{w}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}+\alpha_{18w}\bar{w}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}\\ +\alpha_{19w}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}+\alpha_{20w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\ +\alpha_{21w}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2+\alpha_{22w}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2\\ +\alpha_{23w}\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\xi^4}+\alpha_{24w}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2+\alpha_{25w}\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\xi^2\partial\theta^2}\\ +\alpha_{26w}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}+\alpha_{27w}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}+\alpha_{28w}\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\theta^4}\\ +\alpha_{29w}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2+\alpha_{30w}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2\\ +\alpha_{31w}\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\xi^2\partial\tau^2}+\alpha_{32w}\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\theta^2\partial\tau^2}+\alpha_{33w}\end{pmatrix} = (1-\bar{\mu}\,\bar{\nabla}^2)\times\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\tau^2}+\bar{C}_w\frac{\partial\bar{w}}{\partial\tau}+\bar{K}_w\bar{w}-\bar{K}_p\bar{\nabla}^2\bar{w}\\ -\dfrac{\bar{F}_e(\bar{V}_{DC}+\bar{V}_{AC}\cos(\bar{\omega}\tau))^2}{\left(\sqrt{\begin{matrix}(m_1\bar{b}-\bar{w})\times\\(2m_4\bar{R}+m_1\bar{b}-\bar{w})\end{matrix}}\right)\times\left[\cosh^{-1}\left(1+\frac{m_1\bar{b}-\bar{w}}{m_4\bar{R}}\right)\right]^2}\end{pmatrix}, \tag{۱,۳}$$

که در آن $\bar{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+m_0^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ است و کلیه ضرایب مطرح شده $\alpha_{iu}(i=1\ldots7),\alpha_{jv}(j=1\ldots7)$ و $\alpha_{kw}(k=1\ldots33)$ در مرجع [۱۷] معرفی شده‌اند.

پیوست ۲

شرایط مرزی بی بعد:

$$\bar{u}=0:\left.\begin{pmatrix}\alpha_{1u}^{bc}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}+\alpha_{2u}^{bc}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}+\alpha_{3u}^{bc}\bar{w}\\ +\alpha_{4u}^{bc}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2+\alpha_{5u}^{bc}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2\\ +\alpha_{6u}^{bc}\end{pmatrix}\delta\bar{u}_\xi\right|_0^1+\left.\begin{pmatrix}\alpha_{7u}^{bc}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}+\alpha_{8u}^{bc}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\\ +\alpha_{9u}^{bc}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\end{pmatrix}\delta\bar{u}_\theta\right|_0^{2\pi}=0, \tag{۲,۱}$$

$$\delta\bar{v}=0: \tag{۲,۲}$$

$$\left.\begin{pmatrix}\alpha_{1v}^{bc}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}+\alpha_{2v}^{bc}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\\ +\alpha_{3v}^{bc}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\end{pmatrix}\delta\bar{v}_{\xi}\right|_{0}^{1}$$

$$+\left.\begin{pmatrix}\alpha_{4v}^{bc}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}+\alpha_{5v}^{bc}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}+\alpha_{6v}^{bc}\bar{w}\\ +\alpha_{7v}^{bc}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^{2}+\alpha_{8v}^{bc}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^{2}\\ +\alpha_{9v}^{bc}\end{pmatrix}\delta\bar{v}_{\theta}\right|_{0}^{2\pi}=0,$$

$$\delta\bar{w}=0:$$

$$\left.\begin{pmatrix}+\alpha_{1w}^{bc}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{2w}^{bc}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\ +\alpha_{3w}^{bc}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}+\alpha_{4w}^{bc}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\\ +\alpha_{5w}^{bc}\bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{6w}^{bc}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\\ +\alpha_{7w}^{bc}\frac{\partial^{3}\bar{w}}{\partial\xi^{3}}\\ +\alpha_{8w}^{bc}\frac{\partial^{3}\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta^{2}}+\alpha_{9w}^{bc}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^{2}\\ +\alpha_{10w}^{bc}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^{2}+\alpha_{11w}^{bc}\frac{\partial^{3}\bar{w}}{\partial\xi\partial\tau^{2}}\end{pmatrix}\delta\bar{w}_{\xi}\right|_{0}^{1} \qquad (۲,۳)$$

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}=0$$

$$:\left.\begin{pmatrix}\alpha_{23w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\xi^{2}}+\alpha_{24w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\theta^{2}}\\ +\alpha_{25w}^{bc}+\alpha_{26w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\xi^{2}}\\ +\alpha_{27w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\theta^{2}}+\alpha_{28w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\tau^{2}}\end{pmatrix}\delta\left(\frac{\partial\bar{w}_{\xi}}{\partial\xi}\right)\right|_{0}^{1} \qquad (۲,۴)$$

$$+\left.\left(\alpha_{29w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\right)\delta\left(\frac{\partial\bar{w}_{\theta}}{\partial\xi}\right)\right|_{0}^{2\pi}=0,$$

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}$$

$$=0:\left.\left(\alpha_{30w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\right)\delta\left(\frac{\partial\bar{w}_{\xi}}{\partial\theta}\right)\right|_{0}^{1}$$

$$+\left.\begin{pmatrix}\alpha_{31w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\xi^{2}}+\alpha_{32w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\theta^{2}}\\ +\alpha_{33w}^{bc}+\alpha_{34w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\xi^{2}}\\ +\alpha_{35w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\theta^{2}}+\alpha_{36w}^{bc}\frac{\partial^{2}\bar{w}}{\partial\tau^{2}}\end{pmatrix}\delta\left(\frac{\partial\bar{w}_{\theta}}{\partial\theta}\right)\right|_{0}^{2\pi}=0 \qquad (۲,۵)$$

که ضرایب $\alpha_{lu}^{bc}(l=1..9)$، $\alpha_{mv}^{bc}(m=1..9)$ و $\alpha_{nw}^{bc}(n=1..36)$ در مرجع [۱۷] معرفی شده‌اند.

پیوست ۳

$$(K_{vp})_{w}^{w}=\iint\begin{pmatrix}\bar{k}_{w}\left(\beta_{r}\beta_{o}\psi_{s}\psi_{p}-\bar{\mu}\begin{pmatrix}\beta_{r}\beta_{o}''\psi_{s}\psi_{p}\\ +m_{0}^{2}\beta_{r}\beta_{o}\psi_{s}\psi_{p}''\end{pmatrix}\right)\\ -\bar{k}_{p}\left(\beta_{r}\beta_{0}''\psi_{s}\psi_{p}+m_{0}^{2}\beta_{r}\beta_{o}\psi_{s}\psi_{p}''\right)\\ +\bar{k}_{p}\bar{\mu}\begin{pmatrix}\beta_{r}\beta_{0}''''\psi_{s}\psi_{p}+2m_{0}^{2}\beta_{r}\beta_{0}''\psi_{s}\psi_{p}''\\ +m_{0}^{4}\beta_{r}\beta_{o}\psi_{s}\psi_{p}''''\end{pmatrix}\end{pmatrix}d\xi$$

مراجع

[1] Duan WH, Wang Q, Quek ST (2010) Applications of piezoelectric materials in structural health monitoring and repair: Selected research examples. Materials. 3(12): 5169–94.

[2] Schmid S, Villanueva LG, Roukes ML (2016) Fundamentals of Nanomechanical Resonators. Springer. Berlin, Heidelberg, Germany.

[3] Eringen AC (2002) Nonlocal Continuum Field Theories. Springer. New York. USA.

[4] Lim CW, Zhang G, Reddy JN (2015) A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. J. Mech. Phys. Solids. 78: 298–313.

[5] Gurtin ME, Murdoch AI (1978) Surface stress in solids. Int. J. Solids Struct. 14(6): 431–40.

[6] Najafi M, Ahmadi I (2022) Free Vibration Analysis of Piezoelectric Nanobeam Based on a 2D- Formulation and Non-local Elasticity Theory. Journal of Solid and Fluid Mechanics. 12(4): 59–72 (In Persian).

[7] Mirzaei M, Hashemi R (1401) Analysis of free vibrations of functionally graded conical panels reinforced with graphene nanoplates with different boundary conditions. Mechanics of Structures and Fluids, 12(2): 49-64 (In Persian).

[8] Arefi M (2018) Analysis of a doubly curved piezoelectric nano shell: Nonlocal electro-elastic bending solution. Eur. J. Mech. A. Solids. 70: 226–237.

[9] Dindarloo MH, Zenkour AM (2020) Nonlocal strain gradient shell theory for bending analysis of FG spherical nanoshells in thermal environment. Eur. Phys. J. Plus. 135, 785.

[10] Ebrahimi F, Barati MR (2017) Hygrothermal effects on vibration characteristics of viscoelastic FG nanobeams based on nonlocal strain gradient theory. Compos. Struct. 159: 433–444.

[11] Karamad H, Andakhshideh A, Maleki S. (2020) Study of Primary and Secondary Nonlinear Resonances of Nanobeam Based on Nonlocal Strain Gradient Theory. Physica B. 10(2): 163–175.

[12] Fang XQ, Zhu CS, Liu JX, Liu XL (2018) Surface energy effect on free vibration of nano-sized piezoelectric double-shell structures. Physica B. 529: 41–56.

[13] Fang XQ, Zhu CS, Liu JX, Zhao J (2018) Surface energy effect on nonlinear buckling and postbuckling behavior of functionally graded piezoelectric cylindrical nanoshells under lateral pressure. Mater. Res. Express. 5.4: 045017.

[14] Jiang Y, Li L, Hu Y (2022) A nonlocal surface theory for surface–bulk interactions and its application to mechanics of nanobeams. Int. J. Eng. Sci.. 172. 103624

[15] Hashemi Kachapi SH, Dardel M, Mohamadi daniali H, Fathi A (2019) Pull-in instability and

nonlinear vibration analysis of electrostatically piezoelectric nanoresonator with surface/interface effects. Thin Walled Struct. 143: 106210.

[16] Hashemi Kachapi SH, Dardel M, Mohamadi daniali H, Fathi A (2019) Nonlinear dynamics and stability analysis of piezo-visco medium nanoshell resonator with electrostatic and harmonic actuation. Appl. Math. Modell. 75: 279–309.

[17] Hashemi Kachapi Sayyid H (2020) Nonlinear vibration and stability analysis of piezo-harmo-electrostatic nanoresonator based on surface/interface and nonlocal strain gradient effects. J. Braz. Soc. Mech. Sci. 42(107).

[18] Hashemi Kachapi Sayyid H (2022) Surface/interface approach in pull-in instability and nonlinear vibration analysis of fluid-conveying piezoelectric nanosensor. Mech. Based Des. Struct. Mach. 50(3): 741-766.

[19] Hashemi Kachapi Sayyid H (2023) Nonlinear vibration response of piezoelectric nanosensor: influences of surface/interface effects, Facta Univ. Ser. Mech. Eng. 2(2): 259-272.

[20] Sheikhlo M., Delbari SA, Sabahi Nemini A, Abdul Maleki A (1401) Vibration analysis of circular nanoplates under nonlinear electrostatic excitation with respect to surface and size effects. Mechanics of structures and fluids, 12(5): 133-146 (In Persian).

[21] Yiyuan J, Li L, Yujin H (2022) A nonlocal surface theory for surface-bulk interactions and its application to mechanics of nanobeams, Int. J. Eng. Sci. 172:103624.

[22] Ghorbanpour Arani A, Kolahchi R, Hashemian M (2014) Nonlocal surface piezoelasticity theory for dynamic stability of double-walled boron nitride nanotube conveying viscose fluid based on different theories. P I Mech Eng C-J Mec. 228: 3258–80.

[23] Ghorbani K, Mohammad K, Rajabpour i, Ghadiri M (2019) Surface and size-dependent effects on the free vibration analysis of cylindrical shell based on Gurtin-Murdoch and nonlocal strain gradient theories. J. Phys. Chem. Solids. 129: 140–150.

[24] Kiani K (2017) Postbuckling scrutiny of highly deformable nanobeams: A novel exact nonlocal-surface energy-based model. J. Phys. Chem. Solids. 110: 327–343.

[25] Sun J, Wang Z, Zhou Z, Xu Xg, Lim CW (2018) Surface effects on the buckling behaviors of piezoelectric cylindrical nanoshells using nonlocal continuum model. Appl. Math. Modell. 59: 341–356.

[26] Farokhi H, Païdoussis MP, Misra A (2016) A new nonlinear model for analyzing the behaviour of carbon nanotube-based resonators. J. Sound Vib. 378: 56–75.

[27] Amabili M (2008) Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press. New York.