



## بررسی کارایی معیار انتگرال J برای پیش‌بینی شکست در فوم سخت پلی‌اورتان دارای ترک در موده‌های ترکیبی I/II و I/III

محمد مهدی تویسرکانی<sup>۱</sup>، مهدی حیدری میبدی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

یادداشت پژوهشی، تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۲/۰۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۰۶

### چکیده

پژوهش حاضر به بررسی و ارزیابی معیار انتگرال J برای فوم پلی‌اورتان سخت با استفاده از دیسک دارای ترک لبه‌ای تحت خمش می‌پردازد که تحت موده‌های ترکیبی I/II و I/III بارگذاری می‌شود. هدف اصلی این مطالعه، اولاً ارائه روابط انتگرال J با رهیافتی جدید مبتنی بر چگالی انرژی کرنشی در یک ماده الاستیک خطی بارگذاری شده تحت موده‌های ترکیبی است. بدین منظور، ابتدا روابط مربوطه برای شیار V شکل استخراج شده و سپس به ترک تعمیم داده شده است. هدف ثانویه این پژوهش، پیش‌بینی بار شکست با استفاده از معیار انتگرال J در موده‌های ترکیبی I/II و I/III در فوم‌های پلی‌اورتان سخت است. برای بررسی صحت معیار، با بهره‌گیری از نتایج تجربی پژوهشی پیشین و با استفاده از مدل‌سازی عددی یک نمونه دیسک تضعیف شده با ترک، بار شکست نمونه در موده‌های ترکیبی I/II و I/III طبق معیار انتگرال J پیش‌بینی شده است. نتایج نشان از دقت بالای معیار در پیش‌بینی بار شکست نمونه‌ها در موده‌های ترکیبی دارد؛ به گونه‌ای که حداکثر درصد خطا ۰.۸٪ بوده است.

**کلمات کلیدی:** ترک؛ انتگرال J؛ فوم سخت پلی‌اورتان؛ موده‌های ترکیبی I/II و I/III؛ چگالی انرژی کرنشی متوسط؛ تحلیل المان محدود.

## On the use of J-integral criterion for fracture assessment of cracked rigid polyurethane foam loaded in mixed mode I/II and I/III

Mohammad Mahdi Touiserkani<sup>1</sup>, Mahdi Heydari-Meybodi<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> M.Sc. Student, Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

<sup>2</sup> Assis. Prof., Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

### Abstract

The present study investigates and evaluates the J-integral criterion for rigid polyurethane foam using a cracked disk specimen subjected to bending with mixed mode I/II and I/III loading conditions. The primary objective of this study is to assess relationships for the J-integral based on a new approach involving the strain energy density in a linear elastic material loaded under mixed mode conditions. To do so, the relevant relationships for a V-notch specimen are first derived and then extended to a cracked sample. The secondary aim of this research is to predict the fracture load using the J-integral criterion in mixed mode I/II and I/III loading conditions in rigid polyurethane foams. To validate the criterion, finite element modeling of a cracked disk specimen is carried out and the fracture load of the specimen under mixed mode I/II and I/III conditions is predicted according to the J-integral criterion. The results reveal the high accuracy of the criterion in predicting the fracture load of specimens under mixed mode conditions, with a maximum error percentage of 8%.

**Keywords:** Crack; J-integral; Rigid polyurethane foam; Mixed mode I/II and I/III; Average strain energy density; Finite element analysis.

## ۱- مقدمه

با توجه به خصوصیات مکانیکی و فیزیکی، فوم‌های پلیمری سخت مانند پلی‌اورتان (PUR)<sup>۱</sup> در طی سالیان گذشته در صنایع متفاوت کاربردهای متنوعی پیدا کرده‌اند. داشتن چگالی کم (متخلخل بودن) و ظرفیت جذب انرژی بالا (به ویژه در بارگذاری ضربه‌ای) تنها دو ویژگی این مواد است که باعث شده است، آنها به عنوان هسته در سازه‌های ساندویچی مورد استفاده در صنعت خودرو، هوافضا، دریا و ... مناسب باشند [۱-۶]. فوم‌های پلیمری سخت معمولاً دارای یک رفتار الاستیک خطی هستند و به عنوان یک ماده با رفتار ترد در نظر گرفته می‌شوند. با وجود اینکه این دسته از مواد در بارگذاری فشاری استحکام بالایی از خود نشان می‌دهند، ولی ایجاد و رشد ترک در بارگذاری کششی در فوم‌ها، یکی از نگرانی‌های عمده در این مواد است [۷].

از این‌رو، با توجه به کاربردهای گسترده فوم در سازه‌های مهندسی و همچنین حساسیت بالا در امنیت سازه‌ها، بررسی شکست فوم‌های دارای عوامل تمرکز تنش مانند ترک امری ضروری است. علت آن است که به دلیل ماهیت رفتاری مواد ترد، لحظه شروع رشد ترک در این مواد، همان لحظه شکست قطعه است و شکست بدون هیچ‌گونه نشانه‌ی هشداردهنده‌ای بصورت ناگهانی روی می‌دهد و می‌تواند باعث صدمات جبران‌ناپذیری به مجموعه شود. در سازه‌های دارای ترک، با توجه به موقعیت و تمرکز تنش بالا در نوک ترک، امکان رشد ترک از این نواحی وجود دارد؛ بنابراین لازم است که مطالعاتی درباره وجود ترک در فوم‌ها انجام شود تا با استفاده از اقدامات پیشگیرانه، امکان وقوع شکست در قطعات را از قبل پیش‌بینی کرد.

بر اساس مبانی مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM)<sup>۲</sup>، شکست هنگامی رخ می‌دهد که ضرایب شدت تنش (برحسب حالات بارگذاری یا ترکیب آنها) به یک مقدار بحرانی برسند. این نظریه بر این فرض استوار است که ماده کاملاً الاستیک خطی بوده و در نتیجه بتوان از اثر ناحیه پلاستیک در اطراف نوک ترک به علت کوچکی صرف نظر کرد. در

حقیقت انرژی کرنشی آزاد شده از نظر توازن انرژی به این صورت است که نرخ انرژی آزاد شده برای شروع رشد ترک که در نهایت به شکست منجر می‌گردد، باید با انرژی سطح ترک برابر باشد. انرژی سطح در واقع مقدار انرژی لازم بر واحد سطح برای گسیختن تمامی پیوندهای بین دو سطح ترک است که در آستانه جدایش قرار دارند [۸].

انتگرال J<sup>۳</sup> یک پارامتر برای ارزیابی در علم مکانیک شکست است که برای توصیف و تحلیل شروع و رشد ترک استفاده می‌شود. روش‌های عددی این امکان را می‌دهد، انتگرال J برای هر ماده‌ی دارای ترک و همچنین باتوجه به نوع بارگذاری ارزیابی شود. در واقع، رایس<sup>۴</sup> [۹] برای نخستین بار جهت مشخص کردن رفتار غیرخطی مواد در نوک ترک پارامتری معرفی نمود و با معادل‌سازی رفتار الاستیک-پلاستیک به رفتار الاستیک غیرخطی توانست رابطه‌ای برای نرخ آزادسازی انرژی در مواد غیرخطی به دست آورد. او نشان داد که این مقدار را می‌توان به صورت انتگرال خط مستقل از مسیر عنوان کرد. رایس این انتگرال خطی را انتگرال J نامید. شیه<sup>۵</sup> و همکاران [۱۰] نشان دادند که بین انتگرال J و CTOD<sup>۶</sup> رابطه‌ای وجود دارد که از هر دوی این پارامترها برای سنجش وضعیت شکست در اجسام می‌توان استفاده نمود. در ادامه تحقیقات در مورد انتگرال J در سال ۱۹۸۱، آمستوی<sup>۷</sup> و همکاران [۱۱] انتگرال J تحت شرایط سه بعدی را معرفی کردند. انتگرال J در این حالت از مجموع دو انتگرال تشکیل شده است. یکی از این انتگرال‌ها، انتگرال خط و دیگری انتگرال سطح است. آنها نشان دادند که هر کدام از این اجزاء وابسته به مسیر بوده؛ اما مجموع آنها مستقل از مسیر است. شیه و همکاران در پژوهشی دیگر [۱۲] رابطه انتگرال J را برای حالتی که جسم سه بعدی تحت تنش حرارتی قرار داشته به دست آوردند؛ همچنین، ساکاتا<sup>۸</sup> [۱۳] انتگرال J را برای حالتی که جسم ترک‌دار تحت نیروهای اینرسی قرار داشته باشد، بسط داد. در حوزه بررسی انتگرال J به عنوان یک معیار شکست، سینگ<sup>۹</sup> و همکاران [۱۴] در سال ۱۹۸۶، رفتار شکست یک ترموپلاستیک پلی کربنات را با انجام آزمایش‌های شکست بر

<sup>7</sup> Amestoy<sup>8</sup> Sakata<sup>9</sup> Singh<sup>1</sup> Polyurethane<sup>2</sup> Linear Elastic Fracture Mechanics<sup>3</sup> J-integral<sup>4</sup> Rice<sup>5</sup> Shih<sup>6</sup> Crack Tip Opening Displacement

[۱۹] به منظور محاسبه ضرایب شدت تنش در نوک ترک نمونه پیشنهادی با پارامترهای هندسی و بارگذاری مختلف، نمونه‌ای به نام نیم‌دیسک حاوی ترک سه‌بعدی که دارای ترک مورب بوده را تحت آزمون خمش سه نقطه قرار دادند. در نهایت، آنها نشان دادند که این نمونه قادر به ایجاد مود مرکب I/III بوده، به طوری که با افزایش زاویه ترک، سهم مود III افزایش می‌یابد. در سال ۲۰۱۸، علیها<sup>۴</sup> و همکاران [۲۰] فوم پلی‌اورتان سخت با چگالی‌های مختلف را استفاده کرده و چقرمگی شکست تجربی و تئوری این فوم را تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی I/III به دست آوردند. آنها از معیار حداکثر چگالی انرژی کرنشی مماسی (MTSED)<sup>۵</sup> استفاده کرده و نتایج شکست مود ترکیبی I/III را با موفقیت پیش‌بینی کردند. علاوه بر این، آنها تست‌های تجربی را با استفاده از یک نمونه جدید به نام دیسک دارای ترک لبه‌ای تحت خمش (ENDB)<sup>۶</sup> انجام دادند که توسط نویسندگان برای انجام تحقیقات مود ترکیبی I/III به تازگی توسعه یافته است [۲۰]. علیها و همکاران [۲۱] در سال ۲۰۱۹، از هندسه‌های مختلف (از جمله ENDB) استفاده کرده و شکست مود ترکیبی I/II و I/III فوم پلی‌اورتان سخت را از نظر تجربی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که چقرمگی شکست، زاویه شروع شکست و مسیر شکست به نوع نمونه و مود بارگذاری بستگی دارد. شهبازیان<sup>۷</sup> و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۲۲، شکست ترد در فوم پلی‌اورتان سخت را به صورت تجربی و تئوری تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی I/II و I/III مورد بررسی قرار دادند. برای این منظور، آنها نمونه‌ی دیسک دارای ترک لبه‌ای تحت خمش (ENDB) را بکار برده و متعاقباً، زاویه‌های شکست و مقادیر چقرمگی شکست را به صورت تجربی به دست آوردند. هم‌چنین، سه معیار مختلف شکست، از جمله حداقل چگالی انرژی کرنشی (SED)<sup>۸</sup>، حداکثر تنش اصلی (MPS)<sup>۹</sup> و معیار جدیدی مبتنی بر کرنش به نام ECD-SN<sup>۱۰</sup> که بر اساس در نظر گرفتن یک فاصله بحرانی مؤثر ایجاد شده است، برای تخمین تئوری بار شکست فوم پلی‌اورتان در نظر گرفتند. مقایسه بین نتایج تجربی و تئوری نشان داد که معیار ECD-SN پیش‌بینی بهتری از زاویه شکست و چقرمگی

روی نمونه‌های شیاردار تک لبه بررسی کردند و معیار انتگرال J را با استفاده از تفسیر نرخ انرژی ارزیابی کردند؛ هم‌چنین، آنها نشان دادند، مقدار انتگرال J به دست آمده مستقل از طول ترک و طول نمونه است و انتگرال J به خوبی با ضریب شدت تنش بحرانی به دست آمده مطابقت دارد. در تحقیق دیگری در سال ۲۰۱۱، ووکلیک<sup>۱</sup> و همکاران [۱۵] چقرمگی شکست دو نوع فولاد AISI 420 و AISI 431 را به طور عددی ارزیابی کردند و از انتگرال J به عنوان معیاری برای مقایسه رفتار شکست نمونه‌های ساخته شده از فولادهای ذکر شده استفاده کردند. در نهایت، آنها مقادیر انتگرال J را از طریق یک الگوریتم جدید توسعه یافته با استفاده از نتایج تحلیل تنش المان محدود (FE) تعیین نمودند.

در حوزه بررسی شکست در فوم‌های پلیمری سخت طی سالیان گذشته پژوهش‌هایی صورت پذیرفته است. مارساوینا<sup>۲</sup> و همکاران [۱۶] موفق به انجام آزمون شکست نمونه‌های نیم‌دایره‌ای نامتقارن تحت خمش (ASCB)<sup>۳</sup> از جنس فوم سخت پلی‌اورتان با چگالی‌های ۱۰۰، ۱۴۵ و ۳۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب تحت بارگذاری ترکیبی درون صفحه‌ای (I/II) شدند. نتایج تجربی حاصل شده توسط چقرمگی شکست مود I (K<sub>IC</sub>)، بی‌بعد شده و سپس به صورت نقاط با نسبت‌های بین دو مود I و II ارائه شدند و در نهایت با حد شکست معیارهای مختلف مورد بررسی قرار گرفتند. هم‌چنین، مارساوینا و همکاران در پژوهشی دیگر [۱۷] با استفاده از آزمون‌های مختلف به بررسی چقرمگی شکست فوم سخت پلی‌اورتان تحت بارگذاری I/II پرداختند و در نهایت نتایج تجربی حاصل شده از هر نمونه را با یکدیگر مقایسه کردند. سلیمانی و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۱۸، گسترش ترک در نمونه‌های کامپوزیتی فوم را با استفاده از معیار بسته شدن مجازی ترک و روش اجزای محدود توسعه یافته بررسی کرده‌اند و نشان دادند، ترک از زیر غلتک بارگذاری در ناحیه‌ی زیر پوسته واقع در فوم شروع شده، تا مرکز هسته‌ی فوم رشد کرده و در نهایت با کاهش زاویه، به سمت ناحیه‌ی شیب‌دار در نمونه گسترش می‌یابد و به سطح تماس هسته و پوسته می‌رسد؛ هم‌چنین، پیرمحمد و کیانی

<sup>7</sup> Shahbazian

<sup>8</sup> Strain Energy Density

<sup>9</sup> Maximum Principal Stress

<sup>10</sup> Effective Critical Distance-Strain

<sup>1</sup> Vukelic

<sup>2</sup> Marsavina

<sup>3</sup> Asymmetric Semi-Circular Bend

<sup>4</sup> Aliha

<sup>5</sup> Maximum Tangential Strain Energy Density

<sup>6</sup> Edge Notch Disc Bend

## ۲- روابط تئوری انتگرال J در موده‌های ترکیبی

### I/II و I/III برای قطعه دارای ترک

در این بخش، رابطه انتگرال J با رهیافتی جدید بر اساس مبانی چگالی انرژی کرنشی استخراج شده است. پیش از این و در منابع معتبر مکانیک شکست، رابطه انتگرال J برای موده‌های I، II و III بارگذاری با استفاده از روابط تکینگی تنش و جابجایی اطراف نوک ترک به‌دست آورده شده است [۲۵].

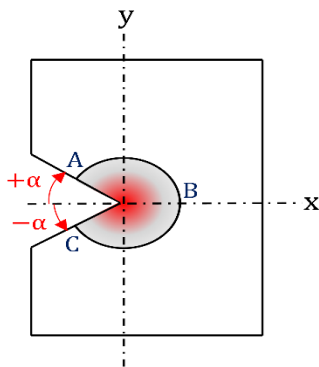
در این پژوهش، ابتدا از رابطه انتگرال J برای شیار ۷ شکل استفاده شده و در نهایت برای ترک (به عنوان شیار با زاویه رأس صفر درجه) معادل‌سازی می‌شود. رابطه کلی انتگرال J به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$J_k = \oint \left( W n_k - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) ds \quad k = 1, 2 \quad (1)$$

پارامترهای  $n_k$ ،  $u_i$ ،  $T_i$  و  $W$  در رابطه (۱) به‌ترتیب، بردار عمود بر سطح ترک، مؤلفه جابجایی، بردار ترکشن، چگالی انرژی کرنشی و مقدار انتگرال J هستند؛ بنابراین، طبق شکل (۱) با در نظر گرفتن محور x و محور y، مقدار انتگرال J به دو بخش تقسیم می‌شود:

$$J_1 = \oint \left( W dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \quad (2)$$

$$J_2 = \oint \left( W dx - T_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) ds \quad (3)$$



شکل ۱- حجم کنترل شیار ۷ شکل در مود I بارگذاری

شکست مود ترکیبی این فوم را ارائه می‌دهد. در تحقیق دیگری، ایمانی و همکاران [۲۳] در سال ۲۰۲۲، دیسک دارای ترک لبه‌ای تحت خمش نامتقارن (AENDB)<sup>۴</sup> را در معرض خمش سه نقطه‌ای نامتقارن قرار دادند؛ هم‌چنین، چقرمگی شکست مود ترکیبی I/II و زاویه شروع شکست را برای نمونه مذکور ساخته شده از سه چگالی در محدوده ۱۰۰ تا ۳۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب به‌دست آوردند. در تحقیق جدیدی که اخیراً منتشر شده، وانتادوری<sup>۵</sup> و همکاران [۲۴] در سال ۲۰۲۳، چقرمگی شکست یک فوم پلی‌اورتان سخت را به‌صورت تجربی و عددی مورد بررسی قرار داده تا وابستگی آن به اندازه نمونه را بررسی کنند. آنها برای انجام آزمایش، فوم سخت پلی‌اورتان دارای ترک با اندازه‌های مختلف هندسی را تحت بارگذاری خمش سه نقطه‌ای قرار دادند و مدل دو پارامتر اصلاح شده (MTPM)<sup>۶</sup> شامل حداکثر بار اعمالی و مقدار بازشدگی دهانه ترک (CMOD)<sup>۴</sup> را برای اندازه‌گیری چقرمگی شکست استفاده کردند. آنها در نتایج به‌دست آمده نشان دادند که چقرمگی شکست، یک پارامتر مستقل از اندازه است و مدل عددی به‌کار رفته قادر به برآورد پارامترهای مورد استفاده برای محاسبه چقرمگی شکست با دقت بالایی است.

با بررسی پژوهش‌های پیشین می‌توان دریافت که معیارهای استفاده شده پیشین در حوزه پیش‌بینی شکست در فوم‌های سخت، علیرغم داشتن دقت قابل قبول، دارای سهولت در استفاده و بکارگیری نبوده و از منظر محاسباتی، هزینه محاسباتی نسبتاً بالایی داشتند. از این رو، در پژوهش حاضر از معیار انتگرال J برای بررسی و پیش‌بینی شکست در فوم‌های پلی‌اورتان دارای ترک که تحت موده‌های ترکیبی I/II و I/III بارگذاری شده است، پرداخته شده است. به همین منظور، ابتدا روابط انتگرال J تحت مود ترکیبی کلی اعم از I/II و I/III با رویکردی جدید مبنی بر چگالی انرژی کرنشی به‌دست آورده شده است. سپس با استفاده از نتایج تجربی منتشر شده در پژوهش‌های پیشین، صحت روابط حصول شده و هم‌چنین، میزان کارایی معیار انتگرال J جهت پیش‌بینی شکست در فوم‌های پلی‌اورتان سخت ارزیابی شده است.

<sup>4</sup> Crack Mouth Opening Displacement

<sup>5</sup> Notch

<sup>6</sup> Traction Vector

<sup>1</sup> Asymmetric Edge Notch Disc Bend

<sup>2</sup> Vantadori

<sup>3</sup> Modified Two-Parameter Model

بنابراین، رابطه انتگرال  $J$  برای ترک را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$J = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} W(\theta) \rho \cos(\theta) d\theta \quad (۶)$$

باتوجه به اینکه مقدار  $\rho$  نیز برای ترک صفر است، رابطه (۶) برای ترک به صورت رابطه حدی زیر تعمیم داده می‌شود:

$$J = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} W(\theta) \rho \cos(\theta) d\theta \right] \quad (۷)$$

از طرف دیگر، مقدار چگالی انرژی کرنشی  $W$  برای ترک توسط ماتوینکو<sup>۲</sup> بصورت رابطه زیر پیشنهاد شده است [۲۷]:

$$W(\theta) = W_{\max} \cos(\theta) \quad (۸)$$

در رابطه فوق،  $W_{\max}$  حداکثر چگالی انرژی کرنشی است. با جایگذاری رابطه (۸) در رابطه (۷)، مقدار انتگرال  $J$  برای ترک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$J = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \rho W_{\max} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2(\theta) d\theta}_{=\pi/2} \right] \\ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{2} \rho W_{\max} \right] \quad (۹)$$

از طرف دیگر، برای ماده الاستیک خطی تحت شرایط کرنش صفحه‌ای، مقدار  $W_{\max}$  را می‌توان با استفاده از تنش معادل بلترامی-میشل<sup>۳</sup> به دست آورد [۲۸]:

$$W_{\max} = \frac{1}{2E} \sigma_{\text{apex}}^2 (1 - \nu^2) \quad (۱۰)$$

که در رابطه فوق،  $\sigma_{\text{apex}}$  مقدار تنش در نوک ترک است. با قرار دادن رابطه (۱۰) در رابطه (۹) می‌توان نوشت:

$$J = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{4E} \rho \sigma_{\text{apex}}^2 (1 - \nu^2) \right] \quad (۱۱)$$

باتوجه به اینکه محور  $x$  نیم‌ساز شیار است، مؤلفه  $J_2$  برابر صفر است ( $J_2 = 0$ ); همچنین، به دلیل اینکه روی لبه‌های شیار، شرایط ترکشن آزاد وجود دارد، عبارت دوم روابط (۲) و (۳) یعنی  $T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds$  و  $T_i \frac{\partial u_i}{\partial y} ds$  حذف می‌شوند؛ بنابراین، رابطه انتگرال  $J$  برای شیار  $V$  شکل را به صورت زیر می‌توان ساده‌سازی کرد:

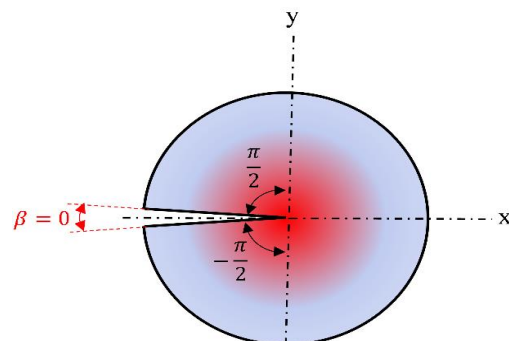
$$J = \oint (W dy) \quad (۴)$$

برای ساده‌تر کردن رابطه فوق، زاویه بین لبه‌های شیار تا محور  $x$  را در نظر گرفته و باتوجه به اینکه حجم کنترل از  $-\alpha$  تا  $+\alpha$  است، مقدار انتگرال  $J$  در طول مسیر  $ABC$  (مشخص شده در شکل ۱) برای شیار  $V$  شکل به صورت زیر است [۲۶]:

$$J = \int_{-\alpha}^{+\alpha} W(\theta) \rho \cos(\theta) d\theta \quad (۵)$$

در رابطه فوق،  $W$  چگالی انرژی کرنشی،  $\rho$  شعاع شیار و  $\theta$  مختصات زاویه‌ای نقاط روی لبه شیار است.

از طرف دیگر، برای معادل‌سازی ترک با شیار، در اینجا از مبانی معیار چگالی انرژی کرنشی متوسط (ASED)<sup>۱</sup> استفاده می‌شود. مطابق با این معیار، حجم کنترل برای ترک، یک دایره است که از  $-\pi/2$  تا  $+\pi/2$  قرار دارد که در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل ۲- حجم کنترل اطراف نوک ترک طبق معیار ASEd

<sup>3</sup> Beltrami-Michel

<sup>1</sup> Averaged Strain Energy Density

<sup>2</sup> Matvienko

هم‌چنین، مقدار تنش در نوک ترک را می‌توان با استفاده از رابطه ضریب تمرکز تنش بصورت بیان کرد [۲۶]:

$$\sigma_{\text{apex}} = K_t \sigma_{\infty} \quad (12)$$

$K_t$  و  $\sigma_{\infty}$  به ترتیب، ضریب تمرکز تنش و مقدار تنش دوردست اعمال شده به جسم است.

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۱۱) می‌توان رابطه ساده شده انتگرال J را برای ترک به دست آورد:

$$J = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{4E} \rho K_t^2 \sigma_{\infty}^2 (1 - \nu^2) \right] \quad (13)$$

برای حذف  $\rho$  از رابطه فوق و ارتباط انتگرال J با ضرایب شدت تنش مود I و II (یعنی  $K_I$  و  $K_{II}$ ) از روابط زیر استفاده می‌شود [۲۶]:

$$\begin{cases} K_I^2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{4} \rho K_t^2 \sigma_{\infty}^2 \right] \\ K_{II}^2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{4} \rho K_t^2 \sigma_{\infty}^2 \right] \\ K_{III}^2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{4} \rho K_t^2 \sigma_{\infty}^2 (1 - \nu) \right] \end{cases} \quad (14)$$

با جایگذاری ضرایب شدت تنش موده‌های I و II و III از رابطه (۱۴) در رابطه (۱۳)، مقدار انتگرال J برای ماده الاستیک خطی دارای ترک در حالت کرنش صفحه‌ای در موده‌های I و II و III بارگذاری به دست می‌آید:

$$J_I = \frac{1}{E} K_I^2 (1 - \nu^2) \quad (15)$$

$$J_{II} = \frac{1}{E} K_{II}^2 (1 - \nu^2) \quad (16)$$

$$J_{III} = \frac{1}{E} K_{III}^2 (1 + \nu) \quad (17)$$

در نهایت، مقدار انتگرال J برای ماده الاستیک خطی دارای ترک در حالت کرنش صفحه‌ای برای مود ترکیبی I/III با جمع روابط (۱۵) و (۱۶) و برای مود ترکیبی I/III با جمع روابط (۱۵) و (۱۷) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$J_{I/II} = \frac{1 - \nu^2}{E} [K_I^2 + K_{II}^2] \quad (18)$$

$$J_{I/III} = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)K_I^2 + (1 + \nu)K_{III}^2] \quad (19)$$

با بررسی روابط فوق و روابط موجود در منابع دیگر می‌توان مشاهده کرد که روابط حاصل شده در اینجا با روابط انتگرال J به دست آمده در منابع دیگر برابر است [۲۵].

### ۳- صحت سنجی روابط با آزمایش‌های تجربی در مقالات پیشین

همانطور که پیش از این نیز بیان شد، برای بررسی میزان کارایی استفاده از معیار انتگرال J در پیش‌بینی شکست در فوم سخت، از نتایج تجربی منتشر شده در یکی از پژوهش‌های پیشین استفاده شده است. در اینجا از داده‌های شکست ترد<sup>۱</sup> برای نمونه دیسک دارای ترک لبه‌ای تحت خمش (ENDB) از جنس فوم پلی‌اورتان سخت با چگالی ۴۰ کیلوگرم بر مترمکعب تحت موده‌های ترکیبی I/II و I/III که در پژوهش مرجع [۲۲] صورت پذیرفته، استفاده شده است. خواص مکانیکی فوم استفاده شده در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی فوم پلی‌اورتان سخت [۲۲]

$\sigma_{\text{ult}}$ (MPa)	$\nu$	E (MPa)
۰/۴۳	۰/۲۲	۲۵

در جدول فوق، E مدول الاستیسیته،  $\nu$  ضریب پواسون،  $\sigma_{\text{ult}}$  استحکام نهایی کششی فوم است. در شکل (۳)، هندسه و نحوه بارگذاری هندسه در موده‌های ترکیبی I/II و I/III به‌طور شماتیک نشان داده شده است. هندسه دیسکی استفاده شده دارای شعاع (R)، ضخامت (B) و طول ترک ( $a$ ) به ترتیب برابر با ۲۷/۵، ۳۰ و ۱۲ میلی‌متر بوده است. فاصله هر دو تکیه‌گاه ( $S = S'$ ) در مود I خالص ۲۴/۷۵ میلی‌متر بوده و در مود II خالص، تنها فاصله یکی از تکیه‌گاه‌ها تا محل ترک ( $S'$ ) به ۲/۱۵ میلی‌متر کاهش پیدا کرده و فاصله تکیه‌گاه دیگر تا ترک ( $S$ ) همان ۲۴/۷۵ میلی‌متر باقی مانده است. هم‌چنین، زاویه ترک

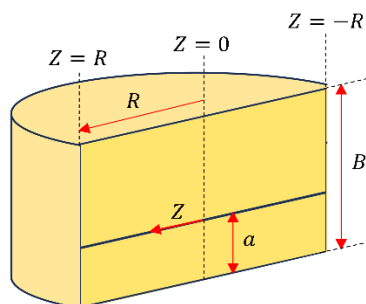
<sup>۱</sup> Brittle Fracture

جدول ۳- مقادیر بار شکست تجربی نمونه‌های مود

ترکیبی I/III از مرجع [۲۲]	
$P_c$ (N)	$\beta$ (deg)
۱۱۲/۰	۰
۱۷۰/۲	۳۰
۳۰۹/۰	۴۵
۴۲۰/۰	۵۵
۴۶۲/۵	۶۳

#### ۴- مدل سازی اجزای محدود

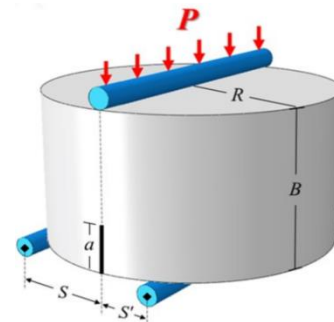
به منظور ارزیابی دقت روابط ارائه شده و کارایی معیار انتگرال  $I$  در پیش‌بینی شکست در فوم‌های پلیمری سخت دارای ترک در مود ترکیبی، مدل سازی المان محدود نمونه ENDB در مدهای ترکیبی I/II و I/III توسط نرم‌افزار آباکوس مطابق با داده‌های تجربی مرجع [۲۲] انجام شده است. به همین منظور و مطابق با داده‌های تجربی مرجع [۲۲] دیسکی به شعاع ۲۷/۵ میلی‌متر، ضخامت ۳۰ میلی‌متر و طول ترک ۱۲ میلی‌متر در نرم‌افزار آباکوس شبیه‌سازی شده است. شکل (۴) نمایی از جبهه ترک را با توجه به در نظر گرفتن مختصات  $+R$  و  $-R$  نشان می‌دهد که برای رسم نمودار شکل‌های ۷ و ۸ استفاده شده است.



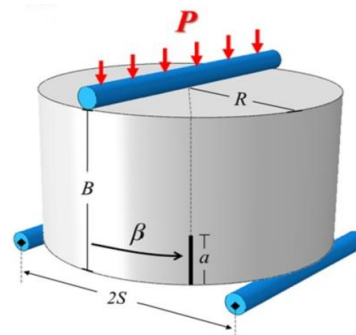
شکل ۴- نمایی از جبهه ترک و مختصات  $+R$  و  $-R$

برای ایجاد مود I خالص، فاصله تکیه‌گاه‌ها ثابت و برابر با ۲۴/۷۵ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود. طبق شکل (۳-الف)، برای ایجاد مود ترکیبی I/II، فاصله تکیه‌گاه سمت راست را از مقدار ۲۴/۷۵ میلی‌متر به صورت تدریجی کاهش داده و مطابق با داده‌های پژوهش [۲۲] زمانی که این فاصله به ۲/۱۵ میلی‌متر برسد، مود II خالص اتفاق می‌افتد.

نسبت به جهت بارگذاری ( $\beta$  در شکل ۳-ب) در مود I خالص، صفر درجه و در مود III خالص به ۶۳ درجه افزایش پیدا می‌کند [۲۲].



(الف)



(ب)

شکل ۳- هندسه ENDB استفاده شده برای (الف) مود

ترکیبی I/II و (ب) مود ترکیبی I/III [۲۲]

بعلاوه، مقادیر بار شکست تجربی آزمایشات مرجع [۲۲] به دست آمده و مقادیر مربوطه در جداول ۲ و ۳ ارائه شده است.

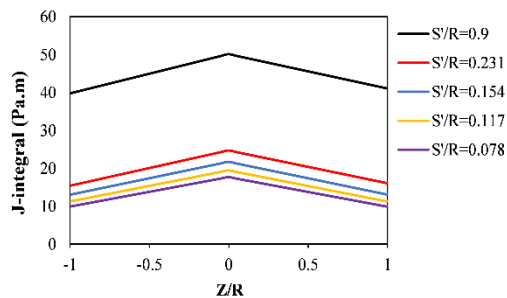
جدول ۲- مقادیر بار شکست تجربی نمونه‌های مود

ترکیبی I/II از مرجع [۲۲]	
$P_c$ (N)	$S'/R$
۱۱۲/۰	۰/۹
۳۱۵/۲	۰/۲۳۱
۳۹۸/۰	۰/۱۵۴
۴۴۵/۰	۰/۱۱۷
۴۹۲/۴	۰/۰۷۸

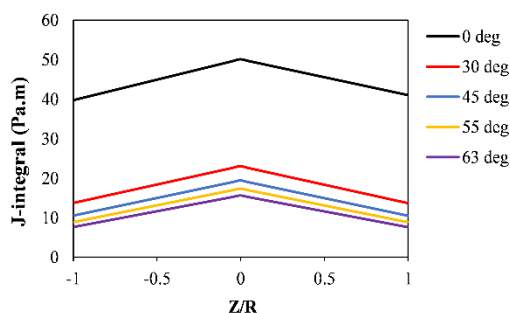
### ۵- نتایج و بحث

همان‌طور که پیش از این توضیح داده شد، برای صحت‌سنجی روابط انتگرال J ارائه شده و پیش‌بینی بار شکست در موده‌های ترکیبی توسط معیار انتگرال J، شبیه‌سازی المان محدود در نرم‌افزار آباکوس طبق داده‌های تجربی ارائه شده در مرجع [۲۲] انجام شده و مقادیر انتگرال J به‌دست آمده از روابط (۱۸) و (۱۹) با نرم‌افزار مقایسه شده است.

پیش از مقایسه مقادیر عددی و مقادیر تحلیلی مطابق با روابط استحصال شده، لازم است تا روند تغییرات انتگرال J در طول جبهه ترک بررسی گردد. بدین منظور، نمودار مقادیر انتگرال J در طول جبهه ترک با توجه به دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل (۴) بصورت عددی استخراج شده و نتایج در شکل‌های (۷) و (۸) به‌ترتیب برای موده‌های ترکیبی I/II و I/III ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بدلیل تقارن مسئله، نمودارها در طرفین قسمت میانی ( $Z/R=0$ )، متقارن هستند.

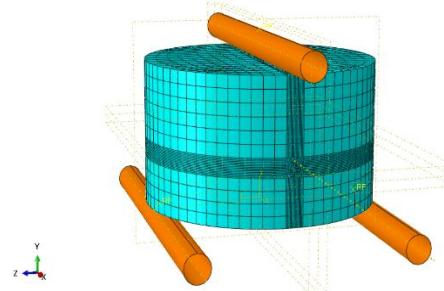


شکل ۷- مقادیر انتگرال J در طول جبهه ترک در مود ترکیبی I/II برای فواصل مختلف  $S'/R$

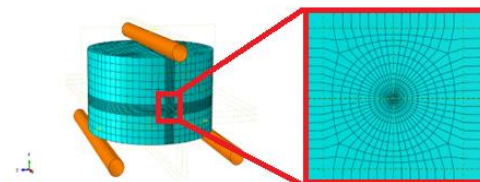


شکل ۸- مقادیر انتگرال J در طول جبهه ترک در مود ترکیبی I/III به ازای زوایای مختلف

هم‌چنین، طبق شکل (۳-ب)، برای ایجاد مود ترکیبی I/III، زاویه ترک نسبت به جهت بارگذاری از مقدار صفر درجه به‌تدریج افزایش داده شده و مطابق با داده‌های مرجع [۲۲]، هنگامی که برابر با ۶۳ درجه شود، مود III خالص رخ می‌دهد. باید توجه داشت که اندازه المان‌ها در اطراف نوک ترک بعد از آنالیز حساسیت به اندازه المان تا حد امکان ریز انتخاب شده تا مقدار انتگرال J به‌طور دقیق به‌دست آید. نحوه مدل‌سازی تکیه‌گاه‌ها (ساپورت‌ها) از نوع Analytical rigid و به‌صورت Shell بوده و از تماس سخت بین سطوح ساپورت‌ها و نمونه استفاده شده است. برای ایجاد شرایط مرزی مناسب، تمام درجات آزادی ساپورت‌های پایین گرفته شده است. بعلاوه، تمام درجات آزادی ساپورت بالا بجز جهت Y بسته شده است و نوع بار اعمالی به ساپورت بالا به‌صورت نیروی گسترده یکنواخت در جهت پایین در نظر گرفته شده است؛ هم‌چنین، برای مش‌بندی هندسه ENDB از المان‌های کانتینیوم سه‌بعدی مرتبه دوم با انتگرال کامل (C3D20) استفاده شده است و تعداد المان‌ها در نمونه‌های مختلف حدود ۲۹۰۰۰ المان بوده است. در شکل‌های (۵) و (۶) نیز به‌ترتیب، نحوه مش‌بندی هندسه ENDB و نحوه مش‌بندی اطراف نوک ترک نشان داده شده است.



شکل ۵- نحوه مش‌بندی هندسه ENDB



شکل ۶- نمایی نزدیک از المان‌های اطراف نوک ترک



می‌شود. برای پیش‌بینی بار شکست سایر نمونه‌ها بر اساس این معیار، بار اعمالی در نرم‌افزار را تغییر داده تا مقدار انتگرال J در مودهای ترکیبی I/II و I/III به مقدار  $J_c$  برسد. با اعمال روش فوق، مقادیر بار شکست ( $P_c$ ) برای نمونه‌ها در مودهای ترکیبی I/III و I/III بصورت عددی به‌دست آمده و نتایج در جداول ۶ و ۷ ارائه شده‌است.

جدول ۶- مقادیر پیش‌بینی بار شکست نمونه‌های مود

ترکیبی I/II بر اساس معیار انتگرال J	
$P_c$ (N)	$S'/R$
۱۱۲/۹	۰/۹
۳۲۱/۸	۰/۲۳۱
۴۱۲/۰	۰/۱۵۴
۴۷۰/۵	۰/۱۱۷
۵۲۸/۰	۰/۰۷۸

جدول ۷- مقادیر پیش‌بینی بار شکست نمونه‌های مود

ترکیبی I/III بر اساس معیار انتگرال J	
$P_c$ (N)	$\beta$ (deg)
۱۱۲/۹	۰
۱۷۴/۵	۳۰
۳۲۱/۷	۴۵
۴۴۷/۴	۵۵
۵۰۰/۵	۶۳

برای بررسی دقت نتایج به‌دست آمده با استفاده از معیار انتگرال J، درصد اختلاف در بار شکست در مودهای ترکیبی طبق معیار را نسبت به بار شکست تجربی متناظر (ارائه شده در جداول ۲ و ۳) به‌دست آمده و در شکل‌های (۹) و (۱۰) به‌ترتیب، نمودار مقادیر بار شکست تئوری و تجربی در مودهای ترکیبی I/II و I/III رسم شده‌است و درصد خطای هر یک از مودهای ترکیبی بالای نمودار مربوطه نوشته شده‌است.

با توجه به تغییرات انتگرال J در طول جبهه ترک، مقدار میانگین این پارامتر در کل طول جبهه ترک بعنوان پارامتر نهایی ارزیابی‌کننده انتگرال J در اینجا مورد استفاده قرار گرفته و میانگین مقادیر انتگرال J در طول جبهه ترک در جداول ۴ و ۵ گزارش شده است. لازم به ذکر است که در جداول ۴ و ۵، مقادیر انتگرال J در مودهای ترکیبی I/II و I/III به‌صورت تئوری نیز محاسبه شده و درصد اختلاف میان مقدار عددی و تئوری در ستون آخر آورده شده‌است.

جدول ۴- مقادیر انتگرال J تئوری و عددی در مود ترکیبی

I/II			
$S'/R$	تئوری (Pa.m)	عددی (Pa.m)	اختلاف (%)
۰/۹	۴۵/۳۸	۴۵/۱۵	۰/۵
۰/۲۳۱	۲۰/۵۴	۲۰/۱۲	۲/۱
۰/۱۵۴	۱۷/۸۲	۱۷/۲۷	۳/۲
۰/۱۱۷	۱۵/۹۲	۱۵/۲۵	۴/۴
۰/۰۷۸	۱۴/۴۵	۱۳/۶۸	۵/۶

جدول ۵- مقادیر انتگرال J تئوری و عددی در مود ترکیبی

I/III			
$\beta$ (deg)	تئوری (Pa.m)	عددی (Pa.m)	اختلاف (%)
۰	۴۵/۳۸	۴۵/۱۵	۰/۵
۳۰	۱۸/۶۳	۱۸/۲۸	۱/۹
۴۵	۱۵/۴۲	۱۴/۸۸	۳/۶
۵۵	۱۳/۶۷	۱۳/۰۳	۴/۹
۶۳	۱۲/۲۸	۱۱/۵۴	۶/۴

مقادیر ارائه شده در ستون آخر در دو جدول فوق نشان از آن دارد که مقدار انتگرال J از رهیافت انرژی تطابق بسیار خوبی با مقادیر عددی متناظر دارد.

در ادامه، برای بررسی دقت معیار انتگرال J در پیش‌بینی بار شکست نمونه‌هایی که تحت مودهای ترکیبی I/II و I/III بارگذاری شده است، مقادیر بار شکست نمونه در مودهای ترکیبی ذکر شده بدین صورت پیش‌بینی شده‌است:

مطابق با معیار انتگرال J، مقدار بحرانی انتگرال J ( $J_c$ ) باید در تمام مودها ثابت باشد [۱۴]؛ بنابراین، در اینجا نمونه بارگذاری شده تحت مود I خالص به عنوان نمونه مرجع استفاده شده و مقدار انتگرال J آن به عنوان  $J_c$  در نظر گرفته

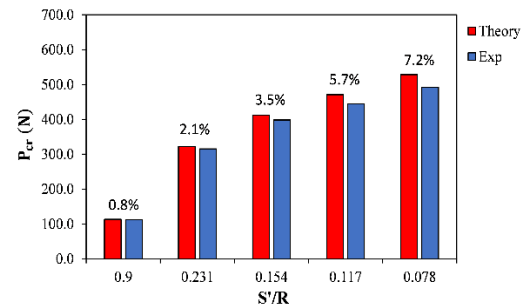
انتگرال J برای پیش‌بینی بار شکست در نمونه‌های فوم سخت دارای ترک در مود ترکیبی I/II و I/III با استفاده از پژوهش تجربی پیشین مورد بررسی قرار گرفته و مقادیر بار شکست نمونه در مدهای ترکیبی I/III و I/II به‌دست آورده شده و با مقادیر بار شکست تجربی مقایسه شد. با بررسی درصد خطا می‌توان دریافت، درصد خطا در هر یک از مدهای ترکیبی پایین بوده؛ به‌طوری‌که حداکثر درصد خطا درخصوص پیش‌بینی بار شکست فوم سخت پلی‌اورتان با معیار انتگرال J حدود ۸٪ است؛ بنابراین، معیار انتگرال J قابلیت پیش‌بینی بار شکست فوم سخت پلی‌اورتان را دارد که تحت مدهای ترکیبی I/II و I/III بارگذاری شده است.

### ۷- فهرست علائم

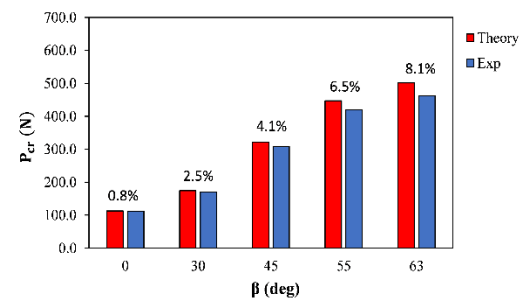
انتگرال J, Pa.m	J
مقدار انتگرال J در مود I خالص, Pa.m	J <sub>I</sub>
مقدار انتگرال J در مود II خالص, Pa.m	J <sub>II</sub>
مقدار انتگرال J در مود III خالص, Pa.m	J <sub>III</sub>
مقدار انتگرال J در مود ترکیبی I/II, Pa.m	J <sub>I/II</sub>
مقدار انتگرال J در مود ترکیبی I/III, Pa.m	J <sub>I/III</sub>
چگالی انرژی کرنشی, Pa	W
ضریب شدت تنش در مود I خالص, $\sqrt{mPa}$	K <sub>I</sub>
ضریب شدت تنش در مود II خالص, $\sqrt{mPa}$	K <sub>II</sub>
ضریب شدت تنش در مود III خالص, $\sqrt{mPa}$	K <sub>III</sub>
ضریب تمرکز تنش, بدون واحد	K <sub>t</sub>
مقدار تنش در نوک ترک, Pa	$\sigma_{apex}$
مقدار تنش دوردست اعمال شده به جسم, Pa	$\sigma_{\infty}$
مدول الاستیسیته, N/m <sup>2</sup>	E
ضریب پواسون, بدون واحد	$\nu$
شعاع شیار, m	$\rho$
مختصات زاویه‌ای نقاط روی ضلع شیار, deg	$\theta$
بردار ترکشن, Pa	T <sub>i</sub>
بردار جابجایی, m	u <sub>i</sub>
بردار عمود بر سطح ترک, بدون واحد	n <sub>k</sub>

### مراجع

- [1] Zhang J, Ashby M (1994) Mechanical selection of foams and honeycombs used for packaging and energy absorption. J. Mater. Sci. 29: 157-163.



شکل ۹- مقادیر بار شکست تئوری و تجربی و درصد خطا برای مود ترکیبی I/II



شکل ۱۰- مقادیر بار شکست تئوری و تجربی و درصد خطا برای مود ترکیبی I/III

همانطور که از دو شکل فوق مشخص است، حداکثر درصد خطا در پیش‌بینی بار شکست در هر کدام از مدهای ترکیبی حدود ۸٪ بوده که نشان از دقت معیار انتگرال J در پیش‌بینی شکست در فوم‌های سخت پلی‌اورتان دارد.

### ۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، در ابتدا روابط انتگرال J برای نمونه‌های ترک دار که در مدهای ترکیبی I/II و I/III بارگذاری شده است، با رهیافتی جدید مبتنی بر چگالی انرژی کرنشی به‌دست آمده و مقادیر انتگرال J به‌صورت تحلیلی با استفاده از روابط ارائه شده محاسبه گردید. سپس با استفاده از داده‌های تجربی گزارش شده در مقالات منتشر شده پیشین، یک دیسک دارای ترک لبه‌ای تحت خمش در مدهای ترکیبی I/II و I/III در نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس شبیه‌سازی شده و مقادیر انتگرال J به‌صورت عددی تعیین گردیده و مقادیر انتگرال J تحلیل و عددی صحت‌سنجی شد. نتایج این قسمت نشان از دقت بالای روابط ارائه شده با مقادیر عددی دارد؛ به‌گونه‌ای که حداکثر خطا در این مورد حدود ۶٪ بوده است. در ادامه، کارایی معیار

- on fracture toughness of PUR foams. Eng. Fract. Mech. 129: 54-66.
- [17] Marsavina L, Constantinescu DM, Linul E, Voiconi T, Apostol DA (2015b) Shear and mode II fracture of PUR foams. Eng. Fail. Anal. 58: 465-476.
- [۱۸] سلیمانی م، طهانی م، زمانی پ (۲۰۱۸) بررسی اثر ناحیه غنی از رزین بر رشد ترک در هسته‌ی فومی پره کامپوزیتی توربین بادی به روش المان محدود، مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها. ۸(۴): ۲۷-۳۸.
- [۱۹] پیرمحمد س، کیانی ا (۲۰۱۸) تحلیل عددی نمونه جدید آزمایشگاهی جهت انجام آزمایش‌های شکست تحت بارگذاری مود مرکب I/III. مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها. ۸(۳): ۲۴۷-۲۵۹.
- [20] Aliha M, Linul E, Bahmani A, Marsavina L (2018) Experimental and theoretical fracture toughness investigation of PUR foams under mixed mode I+III loading. Polym. Test. 67: 75-83.
- [21] Aliha M, Mousavi S, Bahmani A, Linul E, Marsavina L (2019) Crack initiation angles and propagation paths in polyurethane foams under mixed modes I/II and I/III loading. Theor. Appl. Fract. Mech. 101: 152-161.
- [22] Shahbazian B, Mirsayar M, Aliha M, Darvish MG, Asadi MM, Haghightapour PJ (2022) Experimental and theoretical investigation of mixed-mode I/II and I/III fracture behaviour of PUR foams using a novel strain-based criterion. Int. J. Solids. Struct. 258: 111996.
- [23] Imani D, Aliha M, Linul E, Marsavina L (2022) A suitable mixed mode I/II test specimen for fracture toughness study of polyurethane foam with different cell densities. Theor. Appl. Fract. Mech. 117: 103171.
- [24] Vantadori S, Carpinteri A, Cerioni R, Ronchei C, Scorza D, Zanichelli A, Marsavina L (2023) Fracture toughness of a rigid polyurethane foam: experimental and numerical investigation by varying the specimen sizes. Fatigue. Fract. Eng. Mater. Struct. 46(10): 3654-3666.
- [25] Gdoutos EE (2020) J-Integral and Crack Opening Displacement Fracture Criteria. 3rd edn. Cham, 263: 167-213.
- [26] Matvienko YG, Morozov E (2004) Calculation of the energy J-integral for bodies with notches and cracks. Int. J. Fract. 125: 249-261.
- [27] Matvienko YG (1994) J-estimation formulas for nonlinear crack problems. Int. J. frac. 68: R15-R18.
- [28] Berto F, Lazzarin P, Matvienko YG (2007) J-integral evaluation for U-and V-blunt notches under Mode I loading and materials obeying a power hardening law. Int. J. Fract. 146: 33-51.
- [2] Avalu M, Belingardi G, Montanini R (2001) Characterization of polymeric structural foams under compressive impact loading by means of energy-absorption diagram. Int. J. impact Eng. 25(5): 455-472.
- [3] Saha M, Mahfuz H, Chakravarty U, Uddin M, Kabir ME, Jeelani S (2005) Effect of density, microstructure, and strain rate on compression behaviour of polymeric foams. Mater. Sci. Eng.: A 406(1-2): 328-336.
- [4] Serrano A, Borreguero AM, Garrido I, Rodríguez JF, Carmona M (2017) The role of microstructure on the mechanical properties of polyurethane foams containing thermoregulating microcapsules. Polym. Test. 60: 274-282.
- [5] Linul E, Şerban DA, Marsavina L, Sadowski T (2017) Assessment of collapse diagrams of rigid polyurethane foams under dynamic loading conditions. Arch. Civ. Mech. Eng. 17(3): 457-466.
- [6] He H, Fan H (2022) Dynamic theory of sandwich meta-panel under blast load. Euro. J. Mech. A/Solids 94: 104599.
- [7] Marsavina L (2010) Fracture mechanics of cellular solids. Cell. Porous Mater. Struct. Process. 521: 1-46.
- [۸] فریدون ع، یکتای کیا ف (۲۰۰۹) تحلیل ترک در مواد مرکب به وسیله روش انرژی، مدل سازی در مهندسی. ۳(۱۷): ۵۵-۶۵.
- [9] Rice JR (1968) A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. J. Appl. Mech. 35(2): 379-386.
- [10] Shih C, Hutchinson J (1976) Fully plastic solutions and large-scale yielding estimates for plane stress crack problems. J. Eng. Mater. Tech. 98(4): 289-295.
- [11] Amestoy M, Bui H, Labbens R (1981) On the definition of local path independent integrals in three-dimensional crack problems. Mech. Res. Commun. 8(4): 231-236.
- [12] Shih C, Moran B, Nakamura T (1986) Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. Int. J. Fract. 30: 79-102.
- [13] Sakata M, Aoki S, Kanzawa M, Ogure N, Tateishi K (1978) J-integral approach to fracture of rotating disk. J. Eng. Mater. Tech. 100(2): 128-133.
- [14] Singh R, Parihar K (1986) The J-integral as a fracture criterion for polycarbonate thermoplastic. J. Mater. Sci. 21: 3921-3926.
- [15] Vukelić G, Brnić J (2011) J-integral as possible criterion in material fracture toughness assessment. Eng. Rev. 31: 91-96.
- [16] Marsavina L, Constantinescu DM, Linul E, Apostol DA, Voiconi T, Sadowski T (2014) Refinements