مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال۱۴۰۳/ دوره ۱۴/ شماره ۳/ صفحه ۱۲۵-۱۳۹

نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2024.14369.3851

مقایسه کنترل‌کننده‌های غیرکلاسیک در نانورزوناتور پیزوالکتریک: پاسخ فرکانس غیرخطی و تحلیل پایداری

سید حبیب اله هاشمی کچپی[۱،*]، سیده قدسیه هاشمی کچپی[۲]

[۱] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، بابلسر، جمهوری اسلامی ایران

[۲] دانشجوی دکتری، دانشکده فیزیک، دانشگاه کاشان، کاشان، جمهوری اسلامی ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۱۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۳/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۱۳

چکیده

در تحقیق حاضر تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پایداری نانورزوناتور پیزوالکتریک (PENR) با در نظر گرفتن اثرات کنترل کننده‌های غیرکلاسیک مانند تئوری غیرموضعی (NLT)، تئوری گرادیان کرنش (SGT) و تئوری‌های سطح/رابط گورتین-مرداک (GMSIT) در مقایسه با نظریه کلاسیک (CT) ارائه شده‌است. نانورزوناتور مورد مطالعه تحت تحریک الکترواستاتیک غیرخطی با ولتاژ مستقیم (DC) و متناوب (AC) و همچنین محیط ویسکو پاسترناک قرار دارد. برای این تحلیل از اصل همیلتون و روش گالرکین به ترتیب برای به دست آوردن معادلات حاکم و شرایط مرزی و همچنین برای حل معادله حرکت استفاده شده‌است. برای بررسی پاسخ فرکانسی غیرخطی و تحلیل پایداری PENR از روش میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس استفاده می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که نادیده گرفتن اثرات سطح/رابط در مقیاس کوچک، پیش‌بینی نادرستی از پاسخ ارتعاشی PENR را نشان می‌دهد؛ همچنین در شرایط مرزی مختلف، مقیاس طول ماده و پارامترهای غیرمحلی به ترتیب منجر به کاهش و افزایش سفتی PENR می‌شوند و دامنه نوسان و دامنه ناپایداری نظریه‌های غیر کلاسیک NLT و SGT نسبت به حالت کلاسیک بیشتر است؛ همچنین تغییر پارامترهای سطح/رابط منجر به کاهش یا افزایش فرکانس تشدید، دامنه تشدید، رفتار غیرخطی و ناپایداری سیستم PENR می‌گردد.

کلمات کلیدی: نانو رزوناتور پیزوالکتریک؛ نظریه گرادیان کرنش غیر موضعی؛ نظریه سطح/رابط گورتین- مورداک؛ پاسخ فرکانس غیرخطی؛ روش میانگین‌گیری مختلط؛ روش پیمایش طول قوس.

Comparison of nonclassical controllers on piezoelectric nanoresonator: nonlinear frequency response and stability analysis

Sayyid H. Hashemi Kachapi [1,*], S. Gh. Hashemi Kachapi[2]

[1] Assist. Prof., Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran, Babolsar, Islamic Republic of Iran

[2] Ph.D. Student, Department of Physics, University of Kashan, Kashan, Islamic Republic of Iran

Abstract

In current study, nonlinear vibrations and stability analysis of piezoelectric nanoresonator (PENR) considering with the effects of non-classical controllers such as strain gradient (SGT), nonlocal (NLT) and Gurtin–Murdoch surface/interface (GMSIT) theories are presented in comparison with the classical theory (CT). PENR subjected to nonlinear electrostatic excitation with direct (DC) and alternative (AC) voltages and also visco-pasternak medium. For this work, Hamilton's principle and Galerkin technique are used to obtain the governing equations and boundary conditions and also to solve the equation of motion. Complex averaging method combined with arc-length continuation is used to investigate nonlinear frequency response and stability analysis of PENR. The results show that ignoring small-scale and surface/interface effects give inaccurate predictions of vibrational response of the PENR. It is indicated that in different boundary condition, material length scale and nonlocal scale parameters respectively lead to decreasing and increasing of PENR stiffness and also the amplitude of oscillation and the range of instability of non-classic theories of NLT and SGT are greater than that of the classical one. Also changes of surface/interface parameters lead to decreasing or increasing of the resonant frequency, resonance amplitude, nonlinear behavior and the system's instability of PENR.

Keywords: Piezoelectric nanoresonator; Nonlocal strain gradient theory; Gurtin–Murdoch surface/interface; Nonlinear frequency response; Complex averaging method, Arc-length continuation.

---

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۳۵۸۰۲۷۴۸۹

آدرس پست الکترونیک: shhashemi.kachapi@umz.ac.ir , sha.hashemi.kachapi@gmail.com

۱- مقدمه

نانوتکنولوژی شاخه‌ای از علم است که زمینه‌های متعددی از فناوری و علوم مانند ساختارهای نانو، به‌ویژه سنسورها/رزوناتورهای نانو پیزوالکتریک را در بر می‌گیرد که به‌طور گسترده در مهندسی روز از جمله موتورهای پیزوالکتریک، عملگرها در بخش صنعتی، حسگرها در بخش پزشکی، عملگرها در لوازم الکترونیک مصرفی (چاپگرها، بلندگوها)، آلارم پیزوالکتریک، میکروفون‌ها، جرقه زن پیزوالکتریک، موقعیت‌یابی نانو در ساختارهای میکروسکوپ نیروی اتمی، میکرو رباتیک و نانو حسگرها و نانو عملگرها در بسیاری از صنایع از جمله پزشکی، پتروشیمی، نفت و گاز، غیره برای تشخیص انواع ریز ساختارهای عبوری از نانوساختار برای تشخیص آنها بعنوان سنسور جرمی، بایو سنسور، سنسورهای پزشکی، سنسورهای شیمیایی، سنسور فشار و سایر سنسورهای مکانیکی، شیمیایی و الکتریکی مورد استفاده قرار می‌گیرند و بصورت قابل‌توجهی نظر محققان در سراسر جهان را با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد و کاربردهای گسترده به خود جلب کرده‌اند [۴-۱]. از سوی دیگر، به دلیل استفاده بیش از حد از نانوحسگرها، به‌ویژه نانوحسگر پیزوالکتریک در دستگاه‌های ارتعاشی، مدل‌سازی ریاضی و تحلیل رفتارهای ارتعاشی آنها ضروری است. برای این منظور، نظریه‌های غیرکلاسیک مانند تئوری‌های سطح/رابط گورتین-مورداک [۵]، تئوری غیرمحلی یا غیرموضعی [۶] و گرادیان کرنش [۷] برای بررسی ارتعاشات غیرخطی و تحلیل دینامیکی نانوساختارها ارائه شده‌اند.

بر اساس نظریه الاستیسیته غیرمحلی، فرج پور و همکاران [۸] نشان دادند که در تجزیه و تحلیل نانوصفحه، پتانسیل‌های مغناطیسی و نسبت فرکانس غیرخطی با در نظر گرفتن اثر پارامتر مقیاس طول کاهش می‌یابد. ابراهیمی و همکاران [۹] در تحلیل کمانشی نانوصفحات پیزوالکتریک به این نتیجه رسیدند که بارهای کمانشی نانوصفحات غیرمحلی همیشه کمتر از حالت کلاسیک است. نجفی و همکاران [۱۰] در تحلیل ارتعاشات آزاد نانوتیر پیزوالکتریک، اثرات پارامترهای مختلف مانند پارامتر غیرمحلی، نسبت طول به ضخامت و ولتاژ اعمالی خارجی را مورد بررسی قرار داده‌اند؛ همچنین در بررسی صورت گرفته توسط عارفی [۱۱] نشان داده شده‌است که افزایش پارامتر غیرموضعی منجر به افزایش چرخش‌ها، جابجایی‌های درون صفحه و انحراف عرضی یک پوسته نانو پیزوالکتریک با منحنی‌های دوگانه می‌شود. ابراهیمی و همکاران [۱۲] از نظریه گرادیان کرنش غیرمحلی برای بررسی تحلیل ارتعاشات نانوتیرهای ویسکوالاستیک استفاده کرده‌اند. با توجه به تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی و شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، کمانش و آنالیز ارتعاش آزاد نانولوله‌ها توسط مهرعلیان و همکاران [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته است. با بکارگیری تئوری گرادیان کرنش غیرمحلی و روش تحلیلی مقیاس‌های زمانی چندگانه، ارتعاشات غیرخطی نانوتیر غیرموضعی اویلر-برنولی بعنوان یک ساختار نانوالکترومکانیک توسط کارامد و همکاران بررسی شده‌است [۱۴].

همچنین با توجه به نظریه الاستیسیته سطح گورتین-مرداک، تحلیل ارتعاشی و کمانش -پس کمانش غیرخطی نانوساختارهای پیزوالکتریک توسط فانگ و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است [۱۵،۱۶]. اخیرا هاشمی کچپی و همکاران [۲۴-۱۷] برخی از روش‌های مهم تحلیلی در مقیاس کوچک مانند تئوری‌های انرژی سطح/رابط گورتین- مورداک، تئوری غیرمحلی ارینجن و گرادیان کرنش غیرمحلی همچنین ترکیب این روش‌های مختلف را ارائه کرده‌اند تا اثرات کنترل کننده‌های غیرکلاسیک را بر فرکانس‌های طبیعی، ارتعاشات غیرخطی و تحلیل پایداری نانو ساختارهای پیزوالکتریک چند جداره و تحت تحریکات مختلفی چون هارمونیک، ویسکوپاسترناک و الکترواستاتیک غیرخطی مورد بررسی قرار دهند.

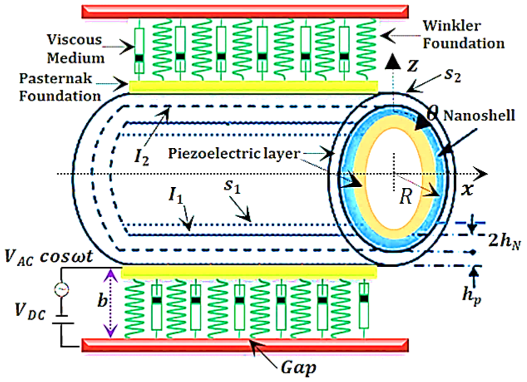
لازم به ذکر است که علاوه بر [۲۰] تعداد بسیار محدودی از مطالعات به طور همزمان تأثیر انرژی سطح/رابط و اثرات در مقیاس کوچک را برای نانوساختارها خصوصا نانوساختارهای پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار دادند. با بکارگیری اثرات غیرمحلی و انرژی سطحی، تحلیل کمانش نانوپوسته‌های پیزوالکتریک تحت ولتاژهای خارجی و بارهای فشاری توسط سون و همکاران [۲۵] مورد بررسی قرار گرفته است؛ همچنین کیانی [۲۶] با در نظر گرفتن اثرات سطحی و غیرمحلی پاسخ تحلیلی پس کمانش نانوساختارهای تیر مانند را مورد مطالعه قرار داده است. تحلیل ارتعاشات غیرخطی نانو ورق دو جداره با استفاده از تئوری‌های پیزوالاستیسیته غیرمحلی و انرژی سطحی توسط قربانپور و همکاران [۲۷] انجام شده‌است. همچنین قربانی و همکاران [۲۸] نشان داده‌اند که پارامترهای

مقیاس طول ماده و غیرمحلی به ترتیب فرکانس طبیعی را افزایش و کاهش می‌دهند و اثرات انرژی سطح روی پاسخ‌ها در مقادیر بالاتر پارامتر مقیاس طول و مقادیر پایین‌تر پارامتر غیرمحلی، قوی‌تر است.

در تمام کارهای قبلی که تا کنون توسط نویسندگان انجام شده است، پژوهش‌های بسیار کمی در تحلیل ارتعاشات و پایداری نانوساختارهای پیزوالکتریک با در نظر گرفتن همزمان اثرات گرادیان کرنش، سطح/رابط گورتین-مورداک و اثرات غیرمحلی صورت گرفته است. تحقیق حاضر ادامه کارهای صورت گرفته [۲۰] نویسنده مقاله حاضر است، اما موضوع مورد مطالعه به ویژه نیروهای تحریک اعمالی کاملا متفاوت از کار قبلی بوده و در نتیجه نتایج متفاوتی از مقاله قبلی حاصل می‌شود و برخلاف کار قبلی، نانوساختار حاضر به طور همزمان تحت تحریک الکترواستاتیکی غیرخطی با ولتاژهای مستقیم (DC) و متناوب (AC) و همچنین محیط ویسکو پاسترناک قرار می‌گیرد. در تحقیق حاضر، کنترل‌کننده‌های غیرکلاسیک نامبرده برای بررسی پاسخ فرکانسی غیرخطی و تحلیل پایداری نانورزوناتور پیزوالکتریک در مقایسه با تئوری کلاسیک مورد مطالعه قرار می‌گیرند. برای این کار، از اصل همیلتون و روش گالرکین برای به دست آوردن معادلات حاکم، شرایط مرزی و حل معادله حرکت استفاده شده‌است و همچنین برای بررسی پاسخ فرکانسی غیرخطی و تحلیل پایداری نانورزوناتور پیزوالکتریک با در نظر گرفتن پارامترهای مختلفی چون اثرات مقیاس کوچک، سطح/رابط، بسترهای ویسکو پاسترناک، ولتاژهای الکترواستاتیک و پیزوالکتریک و سایر پارامترها از روش میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس استفاده می‌شود.

۲- مدل‌سازی هندسی و فیزیکی

در شکل ۱، نانو رزوناتور یا نانو تشدیدگر پیزوالکتریک مبتنی بر نانوپوسته استوانه‌ای که در معرض محیط ویسکو پاسترناک و تحریک الکترواستاتیکی غیرخطی قرار گرفته است، نشان داده شده‌است. تمام خصوصیات فیزیکی و هندسی نانوساختار ذکر شده در مرجع هاشمی کچپی و همکاران [۱۸] قابل مشاهده‌است.



شکل ۱- یک نانو تشدیدگر پیزوالکتریک تحت تحریک الکترواستاتیکی غیرخطی [۱۸]

۳- معادلات حاکم بر سیستم

در این بخش، با اعمال اصل همیلتون، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی حاکم بر نانوپوسته پیزوالکتریک به دست می آید:

$$\int_0^t (\delta T - \delta\pi + \delta w_{vf} + \delta w_e)dt = 0, \qquad (۱)$$

که اولین تغییرات انرژی کرنش، انرژی جنبشی، بستر ویسکوپاسترناک و تحریک الکترواستاتیک غیرخطی به ترتیب بصورت δT ، $\delta\pi$ ، δw_{vf}، و δw_e بیان می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که تمامی روابط، ضرایب و عبارات برای نظریه‌های انرژی سطح/رابط گرادیان، تئوری غیرمحلی و گرادیان کرنش غیرمحلی سطح/رابط و همچنین روابط تنش-کرنش در مقیاس کوچک و غیره با جزئیات کامل در مرجع هاشمی کچپی [۲۰] ذکر شده‌است. اولین تغییر انرژی کرنشی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta\pi = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{c} N_{xx}\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right) \\ -M_{xx}\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\right) \\ +N_{\theta\theta}\left(\begin{array}{c} \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \delta w\right) \\ +\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \end{array}\right) \\ -M_{\theta\theta}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta^2}\right) \\ +N_{x\theta}\left(\begin{array}{c} \frac{1}{R}\frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \\ +\frac{1}{R}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} \\ +\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial \theta} \end{array}\right) \\ -M_{x\theta}\left(\frac{2}{R}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial \theta}\right) \end{array} \right\} R d\theta dx \qquad (۲)$$

که در آن u، v و w به ترتیب برای جابجایی‌های سطح میانی در جهت‌های x، θ و z هستند؛ همچنین اولین تغییر انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = -\int_{t_1}^{t_2} \iint \left\{ I\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\delta u + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)\delta v + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w\right)\right\} R d\theta dx dt \qquad (۳)$$

که

$$I = \int_{-h_N}^{h_N} \rho_N \, dz + \int_{-h_N-h_p}^{-h_N} \rho_p \, dz + \int_{h_N}^{h_N+h_p} \rho_p \, dz + \rho^{S,I} = 2\rho_N h_N + 2\rho_p h_p + 2\rho^S + 2\rho^I \qquad (۴)$$

و اولین تغییر کار انجام شده توسط بستر ویسکوپاسترناک و تحریک الکترواستاتیک غیرخطی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\delta W_{vf} = -\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^w \left(\begin{array}{c} K_w w \\ -K_p \nabla^2 w \\ +C_w \frac{\partial w}{\partial t} \end{array}\right) \delta w \, R d\theta dx, \qquad (۵)$$

$$\delta W_e = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^w \frac{\pi \Upsilon (V_{DC} + V_{AC}\cos(\omega t))^2}{\left(\begin{array}{c} \sqrt{\begin{array}{c}(b-w) \\ \times (2R+b-w)\end{array}} \\ \times \left[\cosh^{-1}\left(1 + \frac{b-w}{R}\right)\right]^2 \end{array}\right)} \delta w \, R d\theta dx \qquad (۶)$$

که تمامی ضرایب و عبارات بیان شده در معادلات (۲)- (۶) را می توان با جزئیات کامل در مراجع هاشمی کچپی و همکاران [۱۸, ۲۰] مشاهده کرد.

با جایگزینی معادلات. (۲)- (۶) در معادله (۱)، معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی برای PENR به دست آمده است. مطابق با مرجع [۱۸] و با در نظر گرفتن اثرات مقیاس غیرمحلی و مقیاس طول مواد و با در نظر گرفتن اثرات غیرمحلی گرادیان کرنش سطح/رابط و استفاده از پارامترهای بی بعد مراجع ذکر شده، معادلات بی بعد حاکم بر حرکت را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(1-\bar{\eta}\,\bar{\nabla}^2)\left(\begin{array}{c} \alpha_{1u}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \alpha_{2u}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \theta^2} + \alpha_{3u}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi \partial \theta} \\ +\alpha_{4u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} + \alpha_{5u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} \\ +\alpha_{6u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} + \alpha_{7u}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \theta}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \end{array}\right) = (1-\bar{\mu}\,\bar{\nabla}^2)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2}, \qquad (۷)$$

$$(1-\bar{\eta}\,\bar{\nabla}^2)\left(\begin{array}{c} \alpha_{1v}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \theta} + \alpha_{2v}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} \\ +\alpha_{3v}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} + \alpha_{4v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi \partial \theta} \\ +\alpha_{5v}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \alpha_{6v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} \\ +\alpha_{7v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \theta^2} \end{array}\right) = (1-\bar{\mu}\,\bar{\nabla}^2)\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \tau^2}, \qquad (۸)$$

$$(1-\bar{\eta}\,\bar{\nabla}^2)\times \qquad (۹)$$

$$
\begin{pmatrix}
\alpha_{1w}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}+\alpha_{2w}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\\
+\alpha_{3w}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}+\alpha_{4w}\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi^2}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{5w}\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi\partial\theta}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\
+\alpha_{6w}\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial\xi\partial\theta}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}+\alpha_{7w}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\\
+\alpha_{8w}\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial\theta^2}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{9w}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\\
+\alpha_{10w}\dfrac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi^2}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}+\alpha_{11w}\dfrac{\partial^2\bar{v}}{\partial\xi\partial\theta}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\\
+\alpha_{12w}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}+\alpha_{13w}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\\
+\alpha_{14w}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}+\alpha_{15w}\dfrac{\partial^2\bar{v}}{\partial\theta^2}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\
+\alpha_{16w}\bar{w}+\alpha_{17w}\bar{w}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}+\alpha_{18w}\bar{w}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}\\
+\alpha_{19w}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}+\alpha_{20w}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\
+\alpha_{21w}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2+\alpha_{22w}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2\\
+\alpha_{23w}\dfrac{\partial^4\bar{w}}{\partial\xi^4}+\alpha_{24w}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2\\
+\alpha_{25w}\dfrac{\partial^4\bar{w}}{\partial\xi^2\partial\theta^2}+\alpha_{26w}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}\\
+\alpha_{27w}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}+\alpha_{28w}\dfrac{\partial^4\bar{w}}{\partial\theta^4}\\
+\alpha_{29w}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2+\alpha_{30w}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2\\
+\alpha_{31w}\dfrac{\partial^4\bar{w}}{\partial\xi^2\partial\tau^2}+\alpha_{32w}\dfrac{\partial^4\bar{w}}{\partial\theta^2\partial\tau^2}+\alpha_{33w}
\end{pmatrix}
$$
$$
=(1-\bar{\mu}\,\bar{\nabla}^2)\times
\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\tau^2}+\bar{C}_w\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\tau}+\bar{K}_w\bar{w}-\bar{K}_p\bar{\nabla}^2\bar{w}\\
-\dfrac{\bar{F}_e(\bar{V}_{DC}+\bar{V}_{AC}\cos(\bar{\omega}\tau))^2}{\begin{pmatrix}\sqrt{\begin{pmatrix}(m_1\bar{b}-\bar{w})\times\\(2m_4\bar{R}+m_1\bar{b}-\bar{w})\end{pmatrix}}\times\\\left[\cosh^{-1}\left(1+\frac{m_1\bar{b}-\bar{w}}{m_4\bar{R}}\right)\right]^2\end{pmatrix}}
\end{pmatrix},
$$

که در آن $\bar{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+m_0^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ است و کلیه ضرایب مطرح شده $\alpha_{iu}(i=1..7),\alpha_{jv}(j=1..7)$ و $\alpha_{kw}(k=1..33)$ در مرجع [۲۰] معرفی شده‌اند. شرایط مرزی مرتبط را می‌توان به شکل بی‌بعد به صورت زیر بدست آورد:

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}\\
&=0:\left.\begin{pmatrix}\alpha_{1u}^{bc}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}+\alpha_{2u}^{bc}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}+\alpha_{3u}^{bc}\bar{w}\\+\alpha_{4u}^{bc}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2+\alpha_{5u}^{bc}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2\\+\alpha_{6u}^{bc}\end{pmatrix}\delta\bar{u}_\xi\right|_0^1\\
&+\left.\begin{pmatrix}\alpha_{7u}^{bc}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}+\alpha_{8u}^{bc}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\\+\alpha_{9u}^{bc}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\end{pmatrix}\delta\bar{u}_\theta\right|_0^{2\pi}=0,
\end{aligned}
\qquad (۱۰)
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\bar{v}=0:\\
&\left.\begin{pmatrix}\alpha_{1v}^{bc}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}+\alpha_{2v}^{bc}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\\+\alpha_{3v}^{bc}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\end{pmatrix}\delta\bar{v}_\xi\right|_0^1\\
&+\left.\begin{pmatrix}\alpha_{4v}^{bc}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}+\alpha_{5v}^{bc}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}+\alpha_{6v}^{bc}\bar{w}\\+\alpha_{7v}^{bc}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2+\alpha_{8v}^{bc}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2\\+\alpha_{9v}^{bc}\end{pmatrix}\delta\bar{v}_\theta\right|_0^{2\pi}=0,
\end{aligned}
\qquad (۱۱)
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\bar{w}=0:\\
&\left.\begin{pmatrix}+\alpha_{1w}^{bc}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\xi}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{2w}^{bc}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\theta}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\+\alpha_{3w}^{bc}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\xi}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}+\alpha_{4w}^{bc}\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\theta}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\\+\alpha_{5w}^{bc}\bar{w}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\alpha_{6w}^{bc}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\\+\alpha_{7w}^{bc}\dfrac{\partial^3\bar{w}}{\partial\xi^3}\\+\alpha_{8w}^{bc}\dfrac{\partial^3\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta^2}+\alpha_{9w}^{bc}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right)^2\\+\alpha_{10w}^{bc}\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\left(\dfrac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\right)^2+\alpha_{11w}^{bc}\dfrac{\partial^3\bar{w}}{\partial\xi\partial\tau^2}\end{pmatrix}\delta\bar{w}_\xi\right|_0^1
\end{aligned}
\qquad (۱۲)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}=0\\
&:\left.\begin{pmatrix}\alpha_{23w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}+\alpha_{24w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}\\+\alpha_{25w}^{bc}+\alpha_{26w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\\+\alpha_{27w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}+\alpha_{28w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\tau^2}\end{pmatrix}\delta\left(\dfrac{\partial\bar{w}_\xi}{\partial\xi}\right)\right|_0^1\\
&+\left.\left(\alpha_{29w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\right)\delta\left(\dfrac{\partial\bar{w}_\theta}{\partial\xi}\right)\right|_0^{2\pi}=0,
\end{aligned}
\qquad (۱۳)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}\\
&=0:\left.\left(\alpha_{30w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\theta}\right)\delta\left(\dfrac{\partial\bar{w}_\xi}{\partial\theta}\right)\right|_0^1\\
&+\left.\begin{pmatrix}\alpha_{31w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}+\alpha_{32w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}\\+\alpha_{33w}^{bc}+\alpha_{34w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}\\+\alpha_{35w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\theta^2}+\alpha_{36w}^{bc}\dfrac{\partial^2\bar{w}}{\partial\tau^2}\end{pmatrix}\delta\left(\dfrac{\partial\bar{w}_\theta}{\partial\theta}\right)\right|_0^{2\pi}=0
\end{aligned}
\qquad (۱۴)
$$

که ضرایب $\alpha_{lu}^{bc}(l = 1..9)$، $\alpha_{mv}^{bc}(m = 1..9)$ و $\alpha_{nw}^{bc}(n = 1..36)$ در مرجع [۲۰] معرفی شده‌اند. در مطالعه حاضر برای بیان نیروی الکترواستاتیک معادله (۶) و با توجه به مشکل برازش منحنی غیرخطی ایجاد شده در این حالت غیرخطی، از شکل تابع چند جمله‌ای استفاده می‌کنیم که توسط روش عددی lsqcurvefit در جعبه ابزار Matlab و با استفاده از روش حداقل مربعات حل می‌شود؛ در نتیجه کار بی‌بعد انجام شده توسط نیروی الکترواستاتیک را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۲۰]:

$$\delta W_e = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\overline{w}} \bar{F}_e (\bar{V}_{DC} + \bar{V}_{AC}\cos(\Omega\tau))^2 (\bar{C}_1 + \bar{C}_2\overline{w} + \bar{C}_3\overline{w}^2 + \cdots + \bar{C}_n\overline{w}^{n-1})\, \delta\overline{w} \right\} \delta\theta\delta\xi \qquad (۱۵)$$

که $\bar{C}_1 - \bar{C}_n$ ثابت هستند.

۴- روش حل تحلیلی

در تحقیق حاضر، از روش گالرکین برای تبدیل معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می‌شود؛ بنابراین جابجایی‌ها بر حسب مختصات تعمیم یافته و تابع حالت به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۹]:

$$\begin{bmatrix} u(x,\theta,t) \\ v(x,\theta,t) \\ w(x,\theta,t) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{N} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{m,j,c}(\tau)\cos(j\theta) \\ +u_{m,j,s}(\tau)\sin(j\theta) \end{bmatrix} \chi_{mj}(\xi) \\ \begin{bmatrix} v_{m,j,c}(\tau)\sin(j\theta) \\ +v_{m,j,s}(\tau)\cos(j\theta) \end{bmatrix} \phi_{mj}(\xi) \\ \begin{bmatrix} w_{m,j,c}(\tau)\cos(j\theta) \\ +w_{m,j,s}(\tau)\sin(j\theta) \end{bmatrix} \beta_{mj}(\xi) \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^{M_2} \begin{bmatrix} u_{m,0}(\tau)\chi_{m0}(\xi) \\ v_{m,0}(\tau)\phi_{m0}(\xi) \\ w_{m,0}(\tau)\beta_{m0}(\xi) \end{bmatrix} = \sum_{(i,r,s)=1}^{M_2+M_1\times N} \begin{bmatrix} u_i(\tau)\chi_i(\xi)\vartheta_i(\theta) \\ v_r(\tau)\phi_r(\xi)\alpha_r(\theta) \\ w_s(\tau)\beta_s(\xi)\psi_s(\theta) \end{bmatrix} \qquad (۱۶)$$

در روش گالرکین، توابع $\chi_i(\xi)$، $\phi_r(\xi)$ و $\beta_s(\xi)$ باید تمام شرایط مرزی هندسی و طبیعی را برآورده کنند. با جایگزینی معادلات. (۱۶) در معادلات (۷) - (۱۴) و با استفاده از روش گالرکین، معادله مرتبه کاهش یافته حرکت به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &[(K)_u^u + (K_{bc})_u^u]\{\bar{u}\} + [(K)_u^v + (K_{bc})_u^v]\{\bar{v}\} \\ &\quad + [(K)_u^w + (K_{bc})_u^w]\{\overline{w}\} \\ &\quad + [(NL)_u^w + (NL_{bc})_u^w]\{\overline{w}^2\} \\ &\quad = [(M)_u^u]\{\ddot{\bar{u}}\} + \bar{F}_{up}^{bc}, \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

$$\begin{aligned} &[(K)_v^u + (K_{bc})_v^u]\{\bar{u}\} + [(K)_v^v + (K_{bc})_v^v]\{v\} \\ &\quad + [(K)_v^w + (K_{bc})_v^w]\{\overline{w}\} \\ &\quad + [(NL)_v^w + (NL_{bc})_v^w]\{\overline{w}^2\} \\ &\quad = [(M)_v^v]\{\ddot{\bar{v}}\} + \bar{F}_{vp}^{bc}, \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

$$\begin{aligned} &[(K)_w^u]\{\bar{u}\} + [(K)_w^v]\{\bar{v}\} \\ &+ \left[(K)_w^w + (K_{bc})_w^w - \left(K_{vp}\right)_w^w - (K_{e2})_w^w\right]\{\overline{w}\} \\ &+ [(NL)_w^u + (NL_{bc})_w^u]\{\overline{w}\bar{u}\} \\ &+ [(NL)_w^v + (NL_{bc})_w^v]\{\overline{w}\bar{v}\} \\ &+ [(NL)_{w2}^w + (NL_{bc})_{w2}^w - (NL_{2e})_{w2}^w]\{\overline{w}^2\} \\ &+ [(NL)_{w3}^w + (NL_{bc})_{w3}^w - (NL_{3e})_{w3}^w]\{\overline{w}^3\} \\ &= ([(M)_w^w + (M_{bc})_w^w])\{\ddot{\overline{w}}\} + ([(C)_w^w] \\ &+ [(C_{bc})_w^w])\{\dot{\overline{w}}\}) + \bar{F}_{wp} + \bar{F}_{wp}^{bc} - \bar{F}_{we} \\ &- \bar{F}_e \left\{ \begin{matrix} ((\bar{V}_{AC}\cos\bar{\omega}\tau)^2 + 2\bar{V}_{AC}\bar{V}_{DC}\cos\bar{\omega}\tau) \times \\ \begin{pmatrix} \bar{C}_4(NL_e)_{w3}^w + \bar{C}_3(NL_e)_{w2}^w \\ +\bar{C}_2(K_e)_w^w + \bar{C}_1\bar{F}_1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که تمام ضرایب و عبارات معادلات (۱۷)- (۱۹) در مرجع هاشمی کچپی [۲۰] تعریف شده است و تنها ضرایب محیط ویسکو-پاسترناک $\left(K_{vp}\right)_w^w$ در پیوست ۱ مقاله حاضر ارائه شده است.

همانطور که قبلا اشاره شد برای حل معادلات غیرخطی حرکت (۱۷)- (۱۹) و تحلیل پاسخ فرکانسی غیرخطی و بررسی پایداری نانوساختار مورد مطالعه از روش میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس استفاده می‌شود [۱۸،۲۰،۳۰].

۵- نتایج و بحث

در این بخش، ابتدا پاسخ زمانی نانورزوناتور پیزوالکترواستاتیک با در نظر گرفتن اثرات غیرمحلی، گرادیان کرنش و سطح/رابط در حالت پایدار بررسی می‌شود. برای این کار، مقایسه بین روش رانگ-کوتا و نتایج روش میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس (بعنوان روش عددی) به منظور بررسی اعتبار روش پیشنهادی انجام شده‌است. سپس اثرات مواد مختلف و پارامترهای هندسی با و بدون تئوری غیرمحلی، گرادیان کرنش غیرمحلی و اثرات انرژی سطح/رابط بر پاسخ فرکانسی و تحلیل پایداری با استفاده از روش میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس ارائه شده‌است. به منظور ساده‌سازی مسئله، عبارات CC، SS، CS و CF به ترتیب لبه‌های گیردار، لبه‌های دو سر مفصل، لبه‌های گیردار-ساده و لبه‌های گیردار- آزاد را نشان می‌دهند. خواص مواد سطحی و

حجیم نانوپوسته آلومینیوم (Al) و لایه پیزوالکتریک *PZT* به ترتیب در جداول ۱ و ۲ نشان داده شده‌است [۱۹, ۱۸].

جدول ۱- خواص سطحی و حجیم آلومینیوم

E_N (GPa)	υ_N	ρ_N $(\frac{kg}{m^3})$	λ^I (N/m)	μ^I (N/m)	τ_0^I (N/m)	ρ^I (kg/m^2)
۲۷۰۰	۰,۳۳	۲۷۰۰	۳,۷۸۶	۱,۹۵	۰,۹۱۰۸	×۵,۴۶۱۰−۷

جدول ۲- خواص سطحی و حجیم PZT-۴

C_{11p} (GPa)	C_{22p} (GPa)	C_{12p} (GPa)	C_{21p} (GPa)	C_{66p} (GPa)	E_p (GPa)
۱۳۹	۱۳۹	۷۷,۸	۷۷,۸	۳۰,۵	۹۵
υ_p	ρ_p $(kg\ m^{-3})$	η_{33p} (۱۰−۸ F/m)	$\lambda^S(N/m)$	$\mu^S(N/m)$	τ_0^S (N/m)
۰,۳	۷۵۰۰	۸,۹۱	۴,۴۸۸	۲,۷۷۴	۰,۶۰۴۸
e_{31p} (C/m^2)	e_{32p} (C/m^2)	e_{31p}^S (C/m)	e_{32p}^S (C/m)	$\rho^S(kg/m^2)$	
−۵,۲	−۵,۲	×۳−۱۰−۸	×۳−۱۰−۸	×۵,۶۱−۱۰−۶	

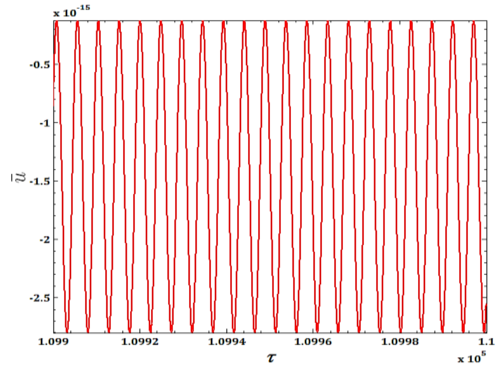
سایر پارامترهای فیزیکی و هندسی PENR در تمام نتایج زیر در جدول ۳ [۱۸, ۱۹, ۲۷] نشان داده شده‌است.

جدول ۳- مواد و پارامترهای هندسی

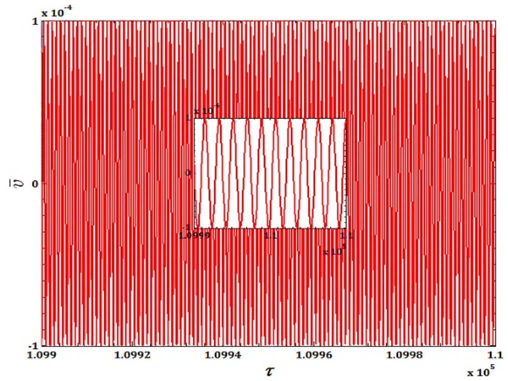
$R(m)$	L/R	h_N/R	h_p/R	b/R	$C_w\left(\frac{N.S}{m}\right)$
×۱۱۰−۹	۱۰	۰,۰۱	۰,۰۰۵	۰,۱	×۱۱۰−۳
$K_w(N/m^3)$	$K_p(N/m)$	$V_p(V)$	V_0	$V_{DC}(V)$	$V_{AC}(V)$
×۹۱۰۱۷	۲,۰۷	×۱۱۰۵−	۱	۱,۵	۰,۵
$\mu(m^2)$	$\eta(m^2)$				
(×۱۱۰−۱۰)۲	(×۱۱۰−۱۱				

۵-۱- صحه‌گذاری نتایج

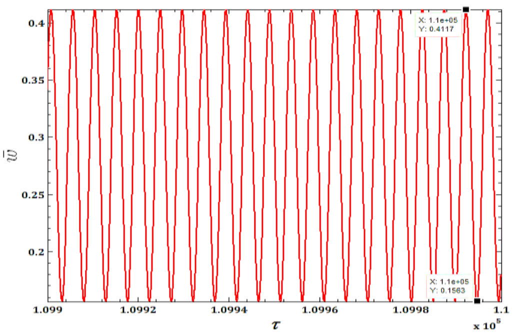
در این بخش، دقت پاسخ روش میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس (روش عددی) با نتایج به‌دست‌آمده از روش رانگ-کوتا (روش عددی) با نظر گرفتن تمام اثرات غیرمحلی و در نظر گرفتن اثرات انرژی سطح/رابط یعنی GMSIT+SGTمقایسه می‌شود. شکل ۲ (الف- ج) پاسخ حالت پایدار غیرخطی PENR برای مقادیر ثابت پارامترهای سیستم با تعداد شکل مود $m = 3$ و $n = 1$ را نشان می دهد. در این راستای آزمایی از پارامترهای مادی و هندسی جداول (۱-۳) استفاده شده‌است.



(الف) جابجایی در جهت u



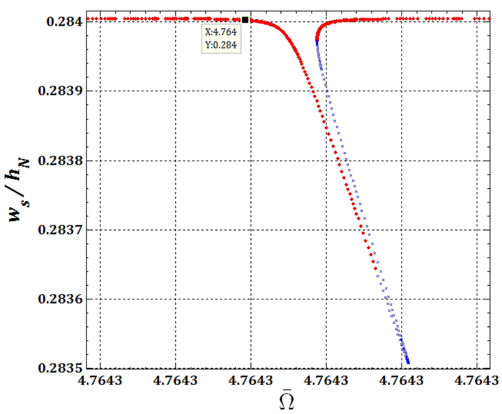
(ب) جابجایی در جهت v



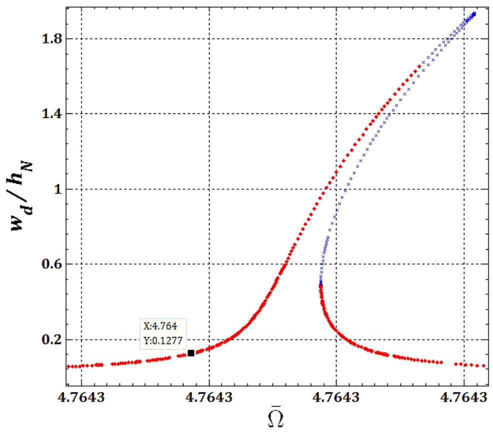
(ج) جابجایی در جهت w

شکل ۲- پاسخ زمانی حالت پایدار برای نانورزوناتور SS تحت تحریک الکترواستاتیک غیرخطی

با مقایسه جابجایی‌های استاتیکی ($\bar{w}_s = \frac{(\bar{w}_{max}+\bar{w}_{min})}{2} = 0.284$) و دینامیکی ($\bar{w}_d = \frac{(\bar{w}_{max}-\bar{w}_{min})}{2} = 0.1277$) بدست آمده با روش رانگ-کوتا شکل ۲(ج) و پاسخ فرکانسی ایستا و دینامیکی بدست آمده با روش میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس شکل ۳(الف و ب) در فرکانس تشدید هفتم $\bar{\Omega}_7 = 4.764$، می‌توان نتیجه گرفت که نتیجه این شبیه‌سازی تطابق کامل بین پاسخ های بدست آمده از روش عددی رانگ-کوتا و روش میانگین‌گیری مختلط را نشان می‌دهد. چون شکل ۲ یعنی پاسخ زمانی حالت پایدار را برای فرکانس تشدید هفتم $\bar{\Omega}_7 = 4.764$ ترسیم نمودیم و از آنجا مقادیر $\bar{w}_s$ و $\bar{w}_d$ را محاسبه نمودیم و سپس در شکل ۳ از نمودار پاسخ‌های فرکانسی استاتیکی و دینامیکی که جابجایی بر حسب فرکانس است، از نمودار ۳ الف برای استاتیک و ۳ب برای حالت دینامیک کاملا مشخص است که جابجایی‌های استاتیکی و دینامیکی به ترتیب در $\bar{\Omega}_7 = 4.764$ دقیقا مقادیر $\bar{w}_s = 0.284$ و $\bar{w}_d = 0.1277$ را دارا می‌باشند که این نتیجه بیانگر دقت روش عددی میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس با روش رانگ- کوتا دارد؛ همچنین مطابق شکل ۲(الف-ج)، پاسخ دینامیکی غیرخطی در جهات u و v بسیار کوچکتر از جهت دیگر w است، بنابراین در تمامی نتایج بدست آمده در ادامه مقاله حاضر، تنها نتایج مربوط در جهت شعاعی w نشان داده شده‌است.



(الف) پاسخ فرکانسی استاتیکی در جهت w



(ب) پاسخ فرکانسی دینامیکی در جهت w

شکل ۳- پاسخ‌های فرکانسی استاتیکی و دینامیکی نانورزوناتور SS تحت تحریک الکترواستاتیک غیرخطی

۵-۲- مطالعه پارامتری و تحلیل پاسخ فرکانس غیر خطی و پایداری

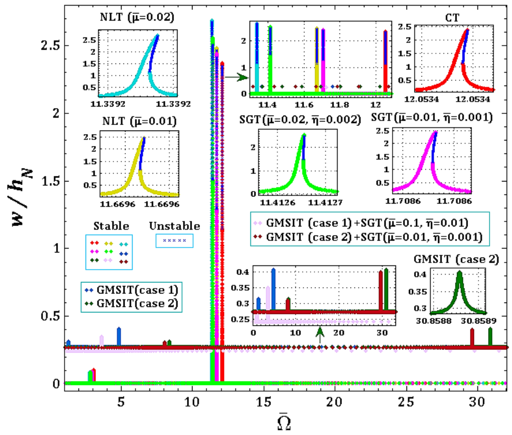
پس از اعتبارسنجی مسأله و اطمینان از صحت نتایج در قسمت قبل، هدف اصلی این بخش، مقایسه سه نظریه غیرکلاسیک NLT، SGT و GMSIT با نظریه کلاسیک CT است. برای این منظور، تأثیر پارامترهای هندسی و مواد مختلف با و بدون گرادیان کرنش، اثرات غیرمحلی و سطحی/رابط بر پاسخ فرکانسی و تحلیل پایداری برای PENR با مشخصات ذکر شده در جداول ۱-۳ تجزیه و تحلیل خواهد شد. با توجه به اهمیت بالای چگالی سطح/رابط و تاثیر زیادی که در تحلیل ارتعاشات خطی و غیرخطی نانوساختارها دارد، دو مورد از چگالی سطح/رابط مطابق جدول ۴ ارائه می‌گردد.

جدول ۴- دو حالت از چگالی سطح/رابط

حالت ۲		حالت ۱	
$\rho^S(kg/m^2)$	$\rho^I(kg/m^2)$	$\rho^S(kg/m^2)$	$\rho^I(kg/m^2)$
×۵,۶۱۱۰$^{-۷}$	×۵,۴۶۱۰$^{-۸}$	×۵,۶۱۱۰$^{-۶}$	×۵,۴۶۱۰$^{-۷}$

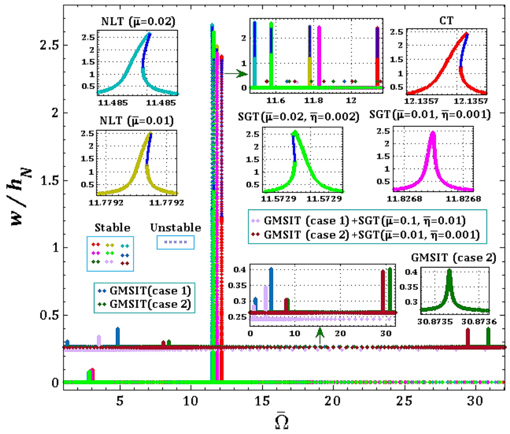
مقایسه سه نظریه غیرکلاسیک NLT، SGT و GMSIT با تئوری کلاسیک CT بر روی پاسخ فرکانسی غیرخطی برای PENR در دو حالت SS و CC با $\bar{V}_{DC} = 1.7$ و $\bar{V}_{AC} = 0.5$ به ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ ارائه شده‌است. از شکل ۴ می توان دریافت که با توجه به نتایج تحلیل فرکانس و صلبیت

SS PENR و با توجه به نوع نظریه استفاده شده، در نظر گرفتن اثرات S/I در حالت ۲ تئوری GMSIT (حالت ۱) منجر به سخت‌شدن (نرم شدن) PENR می‌شود و با افزایش (کاهش) فرکانس رزونانس، دامنه تشدید PENR را کاهش می‌دهد؛ همچنین ناپایداری (به دلیل مقادیر ولتاژ اعمال شده به آن) در سیستم رخ نمی‌دهد. در سایر نظریه ها (NLT ،CT و SGT)، ناپایداری با انشعاب‌های گره – زینی (saddle-node bifurcations) و رفتار سخت‌شدن غیرخطی رخ می دهد و واضح است که در نظریه‌های غیر کلاسیک NLT و SGT، دامنه نوسان و محدوده ناپایداری بیشتر از نمونه کلاسیک است و با افزایش $\bar{\tau}$ و $\bar{\eta}$ دامنه نوسان و دامنه ناپایداری افزایش می‌یابد، اما فرکانس تشدید کاهش می‌یابد.



شکل ۴- مقایسه تئوری های غیر کلاسیک با نظریه کلاسیک در ارتعاشات غیرخطی و تحلیل پایداری SS PENR

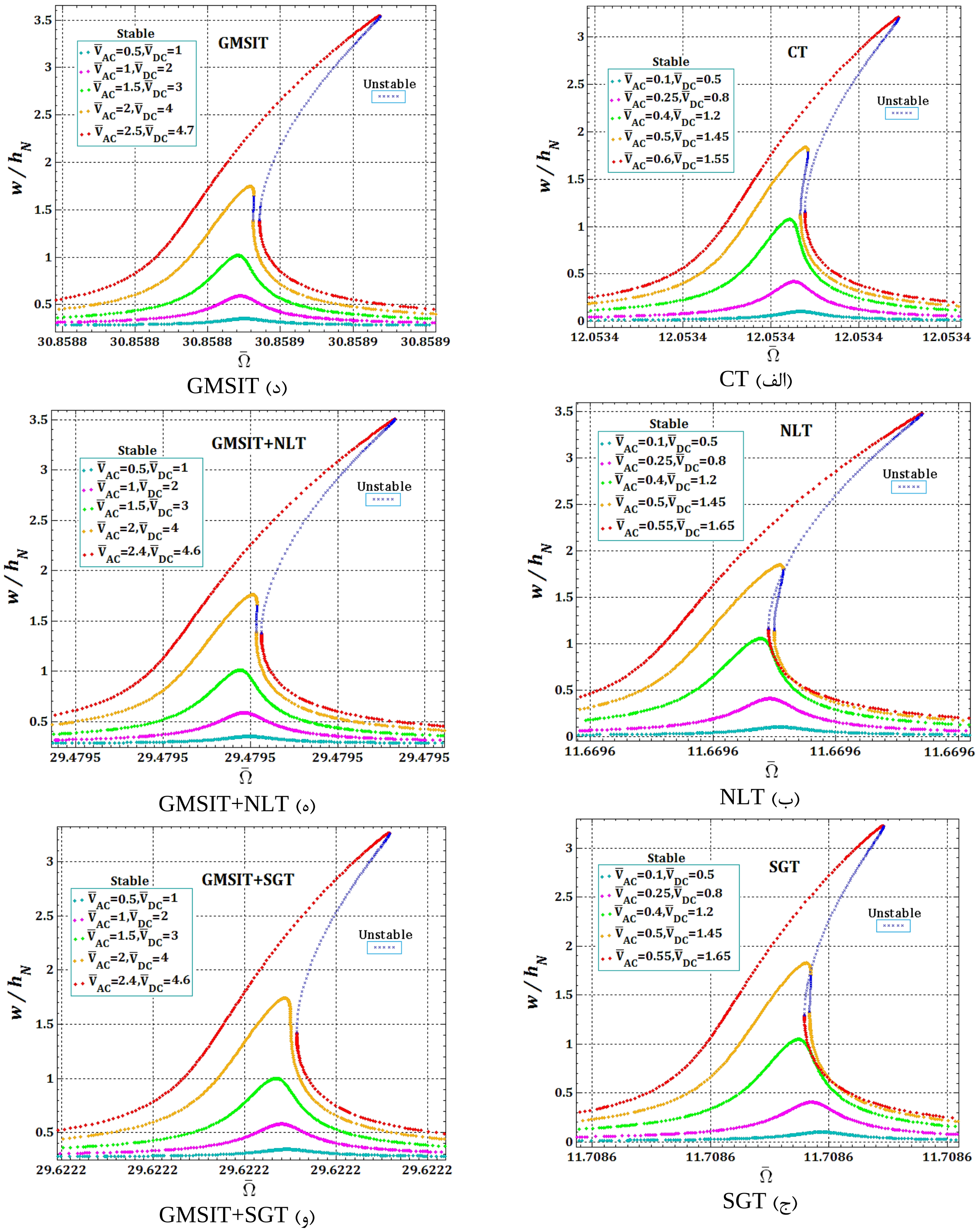
علاوه بر این، از شکل ۵ مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر غیر محلی بی‌بعد، دامنه تشدید افزایش می‌یابد. این مشاهدات به این معنی است که اثرات مقیاس کوچک در حالت غیر محلی، CC PENR را انعطاف‌پذیرتر می‌کند. در بیشتر موارد، شرایط مرزی CC نتایجی مشابه شرایط مرزی SS دارد. فقط در تئوری SGT، با افزایش $\bar{\mu}$ و $\bar{\eta}$، سیستم در شرایط مرزی CC رفتار ناپایداری نرم شوندگی غیرخطی از خود نشان می‌دهد، در حالی که در شرایط مرزی SS، PENR رفتار ناپایداری سخت شوندگی غیرخطی دارد.



شکل ۵- مقایسه تئوری های غیر کلاسیک با نظریه کلاسیک در ارتعاشات غیرخطی و تحلیل پایداری CC PENR

پاسخ فرکانسی و تحلیل پایداری PENR برای مقادیر مختلف ولتاژهای مستقیم ($\bar{V}_{DC}$) و متناوب ($\bar{V}_{AC}$) بر اساس تئوری‌های مختلفی چون تئوری کلاسیک CT، نظریه غیرمحلی NLT، نظریه گرادیان کرنش SGT، انرژی سطح/رابط گورتین-مرداک GMSIT و همچنین ترکیب تئوری GMSIT با NLT و SGT به ترتیب در شکل‌های ۶ و ۷ برای شرایط مرزی SS و CC ارائه شده است.

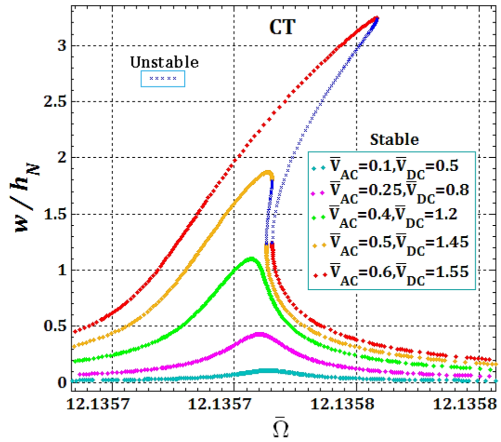
از شکل ۶ می‌توان نتیجه گرفت که کمترین فرکانس تشدید برای دامنه ناپایدار مربوط به نظریه NLT است (البته در غیاب حالت ۱ GMSIT که کمترین فرکانس رزونانس را برای دامنه ناپایدار دارد) و حداکثر مقدار مربوط به GMSIT (حالت ۲) می باشد. همانطور که قبلا بیان شد، سه نظریه CT، NLT و SGT به دلیل نرم شدن سیستم در این موارد، به دامنه ناپایدار در ولتاژهای پایین تر از DC و AC می‌رسند و برای رسیدن به دامنه ناپایدار در نظریه GMSIT، ولتاژهای DC و AC بیشتری مورد نیاز است.



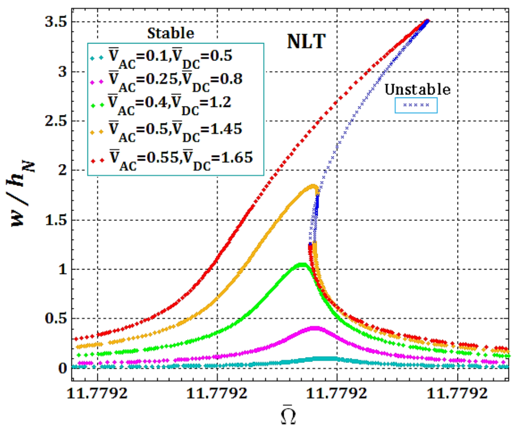
(الف) CT
(ب) NLT
(ج) SGT
(د) GMSIT
(ه) GMSIT+NLT
(و) GMSIT+SGT

شکل ۶- تأثیر ولتاژهای مستقیم ($\bar{V}_{DC}$) و متناوب ($\bar{V}_{AC}$) بر پاسخ فرکانسی و تحلیل پایداری SS PENR بر اساس نظریه های (الف) CT (ب) NLT (ج) SGT (د) GMSIT (ه) GMSIT+NLT (و) GMSIT+SGT

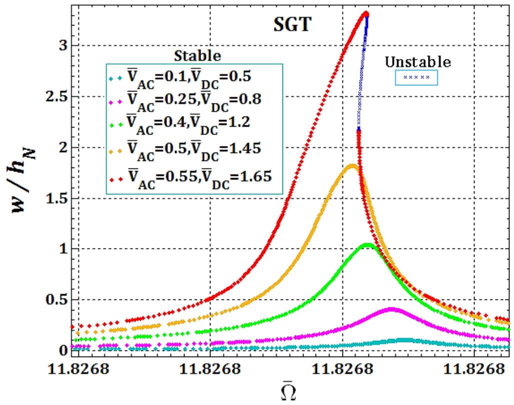
به عنوان مثال، با توجه به داده‌های مسئله، تئوری‌های CT، NLT و SGT در $\bar{V}_{AC} = 0.5$ و $\bar{V}_{DC} = 1.45$ به دامنه ناپایدار می‌رسند، در حالی که نظریه GMSIT و استفاده همزمان از این نظریه با دو نظریه غیرکلاسیک یعنی GMSIT + NLT و GMSIT + SGT برای رسیدن به دامنه ناپایدار به ولتاژهای $\bar{V}_{AC} = 2$ و $\bar{V}_{DC} = 4$ نیاز دارند؛ همچنین نتایج نشان می دهد که در همه موارد با افزایش ولتاژهای AC و DC، دامنه فرکانس افزایش می‌یابد و نانوساختار رفتار سخت شوندگی غیرخطی را با دوشاخه‌های گره – زینی را از خود نشان می دهد.



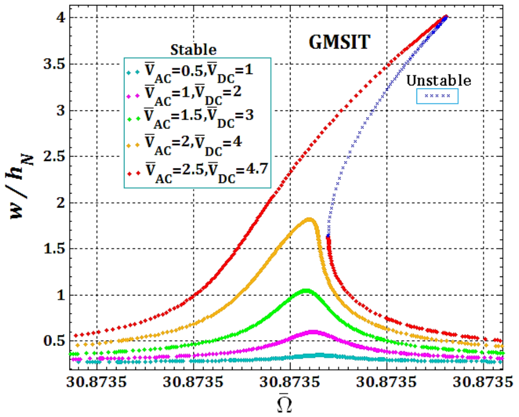
CT (الف)



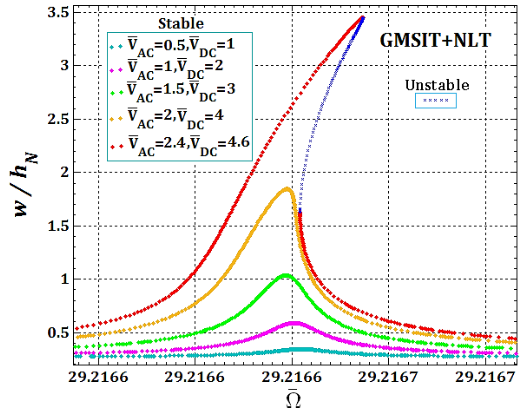
NLT (ب)



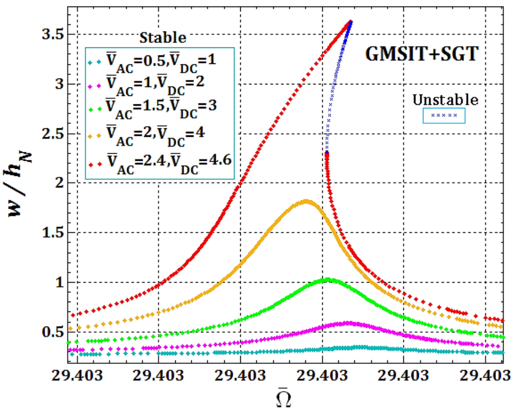
SGT (ج)



GMSIT (د)



GMSIT+NLT (ه)



(و) GMSIT+SGT

شکل ۷- تأثیر ولتاژهای مستقیم $(\bar{V}_{DC})$ و متناوب $(\bar{V}_{AC})$ بر پاسخ فرکانسی و تحلیل پایداری CC PENR بر اساس نظریه های (الف) CT (ب) NLT (ج) SGT (د) GMSIT (ه) GMSIT+NLT (و) GMSIT+SGT

نتایج شکل ۷ برای CC PENR تقریباً مشابه شکل ۶ برای SS PENR است. از شکل‌های ارائه شده مشخص است که شرط مرزی SS نسبت به شرط CC، در برخی از نظریه‌ها و در شرایط بارگذاری مساوی، زودتر به منطقه ناپایداری می‌رسد. با توجه به نتایجی که در همه شکل‌های نشان داده شده مورد تحلیل قرار داده‌ایم، نشان می‌دهد که افزایش ضریب غیر موضعی باعث کاهش سفتی کلی سازه‌ای و در نتیجه باعث کاهش مقدار فرکانس‌های سیستم خواهد شد و مقدار آن از تئوری کلاسیک کمتر خواهد شد. افزایش تمامی پارامترهای سطح/مرز تداخل به غیر از چگالی سطح/مرز تداخل، منجر به افزایش سفتی کلی سازه‌ای و در نتیجه باعث افزایش مقدار فرکانس‌ها نسبت به حالت کلاسیک خواهد شد. چگالی سطح/رابط بیشترین تاثیر را در کاهش سفتی سیستم خواهد داشت و با تغییر آن مقدار فرکانس می تواند بیشتر یا کمتر از مقدار کلاسیک تغییر نماید. به علاوه تغییر هر یک از پارامترها منجر به تغییرات مختلف در کلیه رفتارهای ارتعاشات غیر خطی از جمله فرکانس و دامنه تشدید، ناپایداری، پولین و اغتشاش می شود و در نظر نگرفتن اثرات هم زمان سطح/مرز تداخل، مقیاس طول و غیرموضعی (یعنی حالت کلاسیک) موجب افزایش رفتارهای غیر خطی، دامنه تشدید و محدوده ناپایداری سیستم نسبت به حالت غیرکلاسیک خواهد شد. این ویژگی در سنسورها بسیار حائز اهمیت است. با توجه به این که نانو رزوناتور در کدام بخش از یک سیستم بزرگ تر مورد استفاده قرار می‌گیرد و چه وظیفه‌ای را بر عهده دارد، می‌توان نوع خاصی از آن را به کار گرفت. در دستگاهی نیاز است که تشدید در فرکانس های پایین رخ دهد در این صورت باید در انتخاب نانو رزوناتور از لحاظ ویژگی‌های فیزیکی و هندسی، گزینه‌ای انتخاب شود که فرکانس طبیعی کوچکی دارد و فرکانس تحریک سیستم را باید به فرکانس طبیعی کوچک نانو رزوناتور نزدیک تر کرد در این صورت در همان فرکانس های پایین تشدید رخ می‌دهد یا اندازه نیروی تحریک یا ولتاژ را افزایش داد و در جایی که سیستم دیرتر باید تشدید شود، بر عکس عمل می‌شود؛ یعنی فرکانس تحریک را از فرکانس طبیعی اولیه دور می‌کنیم. علاوه بر این می‌توان با تغییر اندازه نیروی تحریک خارجی و یا ولتاژ و ضریب میرایی سیستم و یا تغییر در ابعاد نانو رزوناتور، شدت و ضعف تشدیدها و رفتارهای غیر خطی سیستم را تغییر داد. در واقع بهترین حالت ممکن در نظر گرفتن همزمان پارامترهای تاثیرگذار بر رفتارهای غیرکلاسیک یعنی اثرات سطح/رابط، اثرات مقیاس طول و اثرات غیرموضعی است؛ یعنی GMSIT+SGT، چرا که در نظر نگرفتن هر یک می‌تواند منجر به پیش بینی غیرواقعی از رفتار سیستم منجر شود.

۶- جمع‌بندی

در مطالعه حاضر، تئوری‌های غیرمحلی، گرادیان کرنش و انرژی سطح/رابط گورتین-مرداک و ترکیب این روش‌ها با هم برای تحلیل پاسخ فرکانسی و پایداری نانورزوناتور پیزوالکتریک تحت تحریک الکترواستاتیک غیرخطی و بستر ویسکوپسترناک در مقایسه با تئوری کلاسیک ارائه شده است. برای این کار از اصل همیلتون و روش گالرکین برای به دست آوردن معادلات حرکت، شرایط مرزی حاکم و حل معادلات و برای بررسی پاسخ فرکانسی غیرخطی و تحلیل پایداری نانوساختار مورد مطالعه از روش میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس استفاده شده‌است.

برخی از نتایج این مطالعه به صورت زیر دست آمده‌است:

- ✓ دقت پاسخ روش میانگین‌گیری مختلط همراه با روش پیمایش طول قوس با نتایج به‌دست‌آمده از روش رانگ-کوتا با نظر گرفتن تمام اثرات غیرمحلی و انرژی سطح/رابط برای نانوساختار حاضر مقایسه شده و نتایج این شبیه‌سازی

تطابق کامل بین پاسخ های بدست آمده از دو روش را نشان می‌دهد.

- ✓ در نظر گرفتن اثرات S/I در حالت ۲ تئوری GMSIT (حالت ۱) منجر به سخت شدن (نرم شدن) PENR شده و با افزایش (کاهش) فرکانس رزونانس، دامنه تشدید PENR را کاهش می‌دهد و ناپایداری (به دلیل مقادیر ولتاژ اعمال شده به آن) در سیستم رخ نمی‌دهد.
- ✓ در نظریه‌ها CT، NLT و SGT، ناپایداری با انشعاب‌های گره – زینی و رفتار سخت شدن غیرخطی رخ می‌دهد.
- ✓ در نظریه‌های غیر کلاسیک NLT و SGT، دامنه نوسان و محدوده ناپایداری بیشتر از نمونه کلاسیک است و با افزایش $\bar{\mu}$ و $\bar{\eta}$ دامنه نوسان و دامنه ناپایداری افزایش می یابد، اما فرکانس تشدید کاهش می‌یابد.
- ✓ با افزایش پارامتر غیر محلی بی بعد، دامنه تشدید افزایش یافته ولی فرکانس تشدید کاهش می‌یابد و اثرات مقیاس کوچک در حالت غیرمحلی، CC PENR را انعطاف‌پذیرتر می‌کند.
- ✓ در بیشتر موارد، شرایط مرزی CC نتایجی مشابه شرایط مرزی SS دارد و فقط در تئوری SGT، با افزایش $\bar{\mu}$ و $\bar{\eta}$، سیستم در شرایط مرزی CC رفتار ناپایداری نرم شوندگی غیرخطی از خود نشان می‌دهد، در حالی که در شرایط مرزی SS، PENR رفتار ناپایداری سخت شوندگی غیرخطی دارد.
- ✓ کمترین فرکانس تشدید برای دامنه ناپایدار مربوط به نظریه NLT است که البته در غیاب حالت ۱ GMSIT که کمترین فرکانس رزونانس را برای دامنه ناپایدار دارد و حداکثر مقدار مربوط به GMSIT (حالت ۲) است.
- ✓ سه نظریه CT، NLT و SGT به دلیل نرم شدن سیستم، به دامنه ناپایدار در ولتاژهای پایین‌تر از DC و AC می‌رسند و برای رسیدن به دامنه ناپایدار در نظریه GMSIT، ولتاژهای DC و AC بیشتری مورد نیاز است.
- ✓ در همه موارد با افزایش ولتاژهای AC و DC، دامنه فرکانس افزایش می‌یابد و نانوساختار رفتار سخت شوندگی غیرخطی را با دوشاخه‌های گره – زینی را از خود نشان می دهد.
- ✓ نتایج CC PENR تقریباً مشابه نتایج SS PENR است و فقط در برخی از نظریه‌ها و در شرایط بارگذاری مساوی، شرط مرزی SS نسبت به شرط CC زودتر به منطقه ناپایداری می‌رسد.
- ✓ در دستگاهی نیاز است که تشدید در فرکانس‌های پایین رخ دهد، در این صورت فرکانس تحریک سیستم را باید به فرکانس طبیعی کوچک نانو رزوناتور نزدیک تر کرد، در این صورت در همان فرکانس‌های پایین تشدید رخ می‌دهد یا اندازه نیروی تحریک یا ولتاژ را افزایش داد و در جایی که سیستم دیرتر باید تشدید شود، بر عکس عمل می‌شود؛ یعنی فرکانس تحریک را از فرکانس طبیعی اولیه دور می کنیم.
- ✓ با تغییر اندازه نیروی تحریک خارجی و یا ولتاژ و ضریب میرایی سیستم و یا تغییر در ابعاد نانو رزوناتور، شدت و ضعف تشدیدها و رفتارهای غیرخطی سیستم را تغییر داد.
- ✓ بهترین حالت ممکن در نظر گرفتن همزمان پارامترهای تاثیرگذار بر رفتارهای غیرکلاسیک یعنی اثرات سطح/رابط، اثرات مقیاس طول و اثرات غیرموضعی است؛ یعنی GMSIT+SGT، چرا که در نظر نگرفتن هر یک می‌تواند منجر به پیش‌بینی غیرواقعی از رفتار سیستم منجر شود.

۷- فهرست علائم

N	علامت نانوپوسته
P	علامت لایه پیزوالکتریک
$h_{N,p}$	ضخامت نانوپوسته و لایه پیزوالکتریک، m
L	طول، m
R	شعاع سطح مقطع میانی، m
x	جهت محوری
θ	جهت محیطی
z	جهت شعاعی
$E_{N,p}$	مدول یانگ، GPa
$\upsilon_{N,p}$	ضریب پواسان
$\rho_{N,p}$	چگالی جرمی، kg/m^3
s_k	سطح داخلی و خارجی لایه پیزو
I_k	رابط داخلی و خارجی لایه پیزو
$\lambda^{(I,s)_k}, \mu^{(I,s)_k}$	ثابت‌های لامه سطح/ رابط، N/m
$\tau_0^{(I,s)_k}$	تنش باقیمانده سطح/ رابط، N/m
$\rho^{(I,s)_k}$	چگالی جرمی سطح/ رابط، kg/m^2

$C_{ij(N,p)}$	ثابت کشسانی، GPa
$\sigma_{ij(N,p)}$	تنش میانی، N/m
$\kappa_{(x,\theta)}$	انحناء، m
$\varepsilon^{0}_{(x,\theta)}$ ، $\gamma^{0}_{x\theta}$	کرنش‌های سطح میانی
u	جابجایی جهت x، m
v	جابجایی جهت θ، m
w	جابجایی جهت z، m
∇	عملگر لاپلاس
ω	فرکانس طبیعی، rad/s
M	ماتریس جرم کلی، kg
C	ضریب میرایی کلی، N.S/m
$\bar{F}$	بارهای ولتاژ پیزوالکتریک، N
V_{DC}	ولتاژ الکتریک مستقیم، V
V_{AC}	ولتاژ الکتریک متناوب، V
μ	پارامتر غیرموضعی
η	پارامتر مقیاس طول، F/m
e_{31p}, e_{32p}	ثوابت پیزوالکتریک، C/m^2
η_{33p}	ثابت دی الکتریک، F/m
$\bar{E}_p$	میدان الکتریکی، N/C
D_{zp}	جابجایی الکتریکی، N/C
$e^{s_k}_{31p}, e^{s_k}_{32p}$	ثوابت پیزوالکتریک سطح، C/m
V_p	ولتاژ پیزوالکتریک، V
π	انرژی کرنشی کل، J
T	انرژی جنبشی کل، J
I	ممان اینرسی جرمی، $kg.m^2$
C_w	ثابت میرایی، N.S/m
K_w	ثابت وینکلر، N/m^3
K_p	ثابت برشی پاسترناک، N/m
W	کار کلی، J
w_{vf}	کار ویسکوپاسترناک، J
w_e	کار الکترواستاتیک غیرخطی، J
K	ماتریس سختی کلی، N/m
b	عرض شکاف نانورزوناتور، m

۸- ضمایم

$$\left(K_{vp}\right)_{w}^{w} = \iint \begin{pmatrix} \bar{k}_w\left(\beta_r\beta_o\psi_s\psi_p - \bar{\mu}\begin{pmatrix}\beta_r\beta_o''\psi_s\psi_p \\ +m_0^2\beta_r\beta_o\psi_s\psi_p''\end{pmatrix}\right) \\ -\bar{k}_p\left(\beta_r\beta_0''\psi_s\psi_p + m_0^2\beta_r\beta_o\psi_s\psi_p''\right) \\ +\bar{k}_p\bar{\mu}\begin{pmatrix}\beta_r\beta_0''''\psi_s\psi_p + 2m_0^2\beta_r\beta_0''\psi_s\psi_p'' \\ +m_0^4\beta_r\beta_o\psi_s\psi_p''''\end{pmatrix} \end{pmatrix} d\xi$$

مراجع

[1] Oliveira OJ, Marystela FLG, Lima LFd, Róz ALD (2017) Nanoscience and its Applications (Micro and Nano Technologies). William Andrew. Elsevier. New York. USA.

[2] Ganji DD, Hashemi Kachapi SH (2015) Application of Nonlinear Systems in Nanomechanics and Nanofluids: Analytical Methods and Applications (Micro and Nano Technologies). Elsevier. New York. USA.

[3] Rupitsch SJ (2018) Piezoelectric Sensors and Actuators: Fundamentals and Applications. Springer. Springer Berlin Heidelberg. German.

[4] Tzou H (2019) Piezoelectric Shells: Sensing, Energy Harvesting, and Distributed Control. Springer. New York. USA.

[5] Gurtin ME, Murdoch AI (1978) Surface stress in solids. Int. J. Solids Struct. 14(6): 431–40.

[6] Eringen AC (2002) Nonlocal Continuum Field Theories. Springer. New York. USA.

[7] Lim CW, Zhang G, Reddy JN (2015) A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. J. Mech. Phys. Solids. 78: 298–313.

[8] Farajpour A, Yazdi MRH, Rastgoo A, Loghmani M, Mohammadi M (2016) Nonlocal nonlinear plate model for large amplitude vibration of magneto-electro-elastic nanoplates. Compos. Struct. 140: 323–336.

[9] Ebrahimi F, Barati MR (2016) Buckling analysis of piezoelectrically actuated smart nanoscale plates subjected to magnetic field. J. Intell. Mater. Syst. Struct. 11(28).

[10] Najafi M, Ahmadi I (2022) Free Vibration Analysis of Piezoelectric Nanobeam Based on a 2D-formulation and Nonlocal Elasticity Theory. J. Solid Fluid Mech. 12(4): 59–72 (In Persian).

[11] Arefi M (2018) Analysis of a doubly curved piezoelectric nano shell: Nonlocal electro-elastic bending solution. Eur. J. Mech. A. Solids. 70: 226–237.

[12] Ebrahimi F, Barati MR (2017) Hygrothermal effects on vibration characteristics of viscoelastic FG nanobeams based on nonlocal strain gradient theory. Compos. Struct. 159: 433–444.

[13] Mehralian F, Tadi Beni Y, Karimi Zeverdejani M (2017) Nonlocal strain gradient theory calibration using molecular dynamics simulation based on

small scale vibration of nanotubes. Physica B. 514: 61–69.
[14] Karamad H, Andakhshideh A, Maleki S (2020) Study of Primary and Secondary Nonlinear Resonances of Nanobeam Based on Nonlocal Strain Gradient Theory. Physica B. 10(2): 163–175.
[15] Fang XQ, Zhu CS, Liu JX, Zhao J (2018) Surface energy effect on nonlinear buckling and postbuckling behavior of functionally graded piezoelectric cylindrical nanoshells under lateral pressure. Mater. Res. Express. 5.4: 045017.
[16] Fang XQ, Zhu CS, Liu JX, Liu XL (2018) Surface energy effect on free vibration of nano-sized piezoelectric double-shell structures. Physica B. 529: 41–56.
[17] Hashemi Kachapi SH, Dardel M, Mohamadi daniali H, Fathi A (2019) Effects of surface energy on vibration characteristics of double-walled piezo-viscoelastic cylindrical nanoshell. P I Mech. Eng. C-J Mec. 233: 5264–79.
[18] Hashemi Kachapi SH, Dardel M, Mohamadi daniali H, Fathi A (2019) Pull-in instability and nonlinear vibration analysis of electrostatically piezoelectric nanoresonator with surface/interface effects. Thin Walled Struct. 143: 106210.
[19] Hashemi Kachapi SH, Dardel M, Mohamadi daniali H, Fathi A (2019) Nonlinear dynamics and stability analysis of piezo-visco medium nanoshell resonator with electrostatic and harmonic actuation. Appl. Math. Modell. 75: 279–309.
[20] Hashemi Kachapi Sayyid H (2020) Nonlinear vibration and stability analysis of piezo-harmo-electrostatic nanoresonator based on surface/interface and nonlocal strain gradient effects. J. Braz. Soc. Mech. Sci. 42(107).
[21] Hashemi Kachapi Sayyid H (2020) Nonlinear and nonclassical vibration analysis of double walled piezoelectric nano-structure. Adv. Nano Res. 9(4).
[22] Hashemi Kachapi SH, Dardel M, Mohamadi daniali H, Fathi A (2020) Nonlinear vibration and stability analysis of double-walled piezoelectric nanoresonator with nonlinear van der Waals and electrostatic excitation. J. Vib. Control. 26(9-10): 680–700.
[23] Hashemi Kachapi SH, Mohamadi daniali H, Dardel M, Fathi A (2020) The effects of nonlocal and surface/interface parameters on nonlinear vibrations of piezoelectric nanoresonator. J. Intell. Mater. Syst. Struct. 31(6): 818–842.
[24] Hashemi Kachapi Sayyid H (2020) Fluid-conveying piezoelectric nanosensor: Nonclassical effects on vibration-stability analysis, Struct. Eng. Mech. 76(5): 619–629.
[25] Sun J, Wang Z, Zhou Z, Xu Xg, Lim CW (2018) Surface effects on the buckling behaviors of piezoelectric cylindrical nanoshells using nonlocal continuum model. Appl. Math. Modell. 59: 341–356.
[26] Kiani K (2017) Postbuckling scrutiny of highly deformable nanobeams: A novel exact nonlocal-surface energy-based model. J. Phys. Chem. Solids. 110: 327–343.
[27] Ghorbanpour Arani A, Kolahchi R, Hashemian M (2014) Nonlocal surface piezoelasticity theory for dynamic stability of double-walled boron nitride nanotube conveying viscose fluid based on different theories. P I Mech Eng C-J Mec. 228: 3258–80.
[28] Ghorbani K, Mohammad K, Rajabpour i, Ghadiri M (2019) Surface and size-dependent effects on the free vibration analysis of cylindrical shell based on Gurtin-Murdoch and nonlocal strain gradient theories. J. Phys. Chem. Solids. 129: 140–150.
[29] Amabili M (2008) Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates. Cambridge University Press. New York.
[30] Manevitch AI, Manevitch LI (2005) Themechanics of Nonlinear Systems with Internal Resonance. Imperial College Press. London, UK.