



دینامیک حباب گازی کروی شکل در داخل یک محفظه متناهی الاستیک حاوی سیال تیکسوتروپ

محمد پورجعفر چلیکدانی^{۱*}، هانیه اسدی حمزه‌کندی^۲، کیوان صادقی^۳

^۱ استادیار، دانشگاه تهران، دانشکده فنی کاسپین، رضوانشهر، ایران

^۲ دکتری تخصصی، دانشگاه تهران، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشکده مهندسی مکانیک، تهران، ایران

^۳ استادیار، دانشگاه تهران، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشکده مهندسی مکانیک، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۳۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۲/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۲۷

چکیده

در این مقاله به بررسی عددی دینامیک حباب گازی کروی کوچک پرداخته شده است که توسط سیال غیرقابل تراکم در یک رگ محدود شده است که تحت اثرات اکوستیک دیواره رگ قرار می‌گیرد. مایع پیرامون حباب از نوع تیکسوتروپیک فرض شده است که با مدل مور مدلسازی شده است. رگ نیز انعطاف‌پذیر با مدل الاستیک خطی در نظر گرفته شده است. پس از استخراج معادلات دیفرانسیلی-انتگرالی حاکم بر دینامیک حباب، معادلات حاکم با استفاده از حلگر ODE23s نرم‌افزار MATLAB بصورت عددی حل شده‌اند. با توجه به نتایج عددی بدست آمده، افزایش پارامترهایی مانند نسبت ویسکوزیته سیال، الاستیسیته دیواره رگ، فشار بخار، فشار گاز محبوس داخل حباب و همچنین فاکتور هندسی همگی تاثیر قابل توجهی در کاهش دامنه نوسانات حباب گازی داشتند، هرچند افزایش پارامترهایی نظیر عدد تیکسوتروپی سیال، عدد فروپاشی، کشش سطحی فصل مشترک حباب/سیال و همچنین عدد رینولدز جریان منجر به رشد نوسانات حباب شده است؛ همچنین رفتار غالب نازک شونده سیال به همراه مقادیر کوچک کشش سطحی فصل مشترک به عنوان دو عامل مهم به منظور جلوگیری از افزایش بیش از حد حداکثر تنش شعاعی وارد شده به روکش الاستیک شناخته شدند.

کلمات کلیدی: دینامیک حباب گازی؛ سیال تیکسوتروپیک؛ عدد تیکسوتروپی؛ الاستیسیته؛ کشش سطحی؛ تنش شعاعی.

Dynamics of Confined Spherical Gas Bubbles in an Elastic Vessel Filled with a Thixotropic Fluid

¹ Assist. Prof., University of Tehran/ Caspian Faculty of Engineering/Rezvanshahr/Iran

² PhD, University of Tehran/ College of Engineering/ Department of Mechanical Engineering/ Tehran/Iran

³ Prof., University of Tehran/ College of Engineering/ Department of Mechanical Engineering/ Tehran/Iran

Abstract

In this paper numerical investigation of the dynamics of a tiny spherical gas bubble surrounded by an incompressible fluid confined in a vessel has been addressed when the bubble is subjected to acousting forcing of vessel wall. The liquid surrounding the bubble has been assumed to be thixotropic, which has been modelled using the Moore model. The vessel has also been assumed to be deformable obeying the linear-elastic model. After deriving the integro-differential equations governing the bubble dynamics, the governing equations have been solved using ODE23s solver in the MATLAB software numerically. Based on the obtained numerical results, an increase in the parameters such as fluid's viscosity ratio, vessel wall's elasticity, vapor pressure, gas pressure trapped in the bubble, and also geometric factor had totally considerable effect to reduce the gaseous bubble's amplitude of oscillations. However, an increase in the parameters such as fluid's thixotropy number, break down number, bubble/fluid interfacial surface tension, and also flow Reynolds number has led in growth of the bubble oscillations. Moreover, strong fluid's shear thinning behavior beside small values of interfacial surface tension were known as two important factors to avoid from excessive increase of elastic coating maximum radial stress.

Keywords: Gas Bubble Dynamics; Thixotropic Fluid; Thixotropy Number; Elasticity; Surface Tension; Radial Stress.

۱- مقدمه

تحلیل حرکت حباب در سیال به عنوان یکی از مسایل بارز و کلیدی نه تنها در مکانیک سیالات کلاسیک بلکه به عنوان ابزاری کارآمد در مسایل صنعتی نیز شناخته شده است. به عنوان مثال می توان به کاربرد قابل توجه این موضوع در تحلیل و بررسی پدیده کاویتاسیون [۱ و ۲] یا کاربرد این پدیده در سیستم های تبرید و حرارتی اشاره کرد که دینامیک حاکم بر حباب با مکانیزم انتقال جرم و حرارت بطور گسترده ای مورد استفاده قرار گرفته است [۳]. از نمونه های متداول دیگر کاربرد دینامیک حاکم بر حباب بعنوان کاربرد پزشکی در بخش سونوگرافی به عنوان ماده حاجب است، بطوری که تولید هارمونیک های هماهنگ بواسطه حضور میکرو حباب های روکشدار امکان تصویربرداری از ارگان ها و بافت های داخلی بدن را با دقت قابل ملاحظه ای افزایش داده است [۴ و ۵]. البته در این میان نقش میکرو حباب ها در کاهش درگ در جریان های داخلی و خارجی به عنوان مکانیزم جایگزین روش های متداول دیگر، برای کاهش اصطکاک جریان سیال با دیواره کانال نیز قابل توجه است [۶ و ۷]. از کاربردهای دقیقتر این مساله می توان به موارد مختلفی از جمله تحلیل حرکت حباب در تماس با سیال واقع شده در فضای نامحدود به عنوان یکی از مسائل کلاسیک مکانیک سیالات از دیرباز تاکنون [۸-۱۱]، تحلیل حرکت حباب واقع در یک لوله حاوی جریان [۱۲]، برهم کنش حباب در تماس با سطوح الاستیک [۱۳] و یا برهم کنش یک حباب با حباب دیگر [۱۴] اشاره کرد.

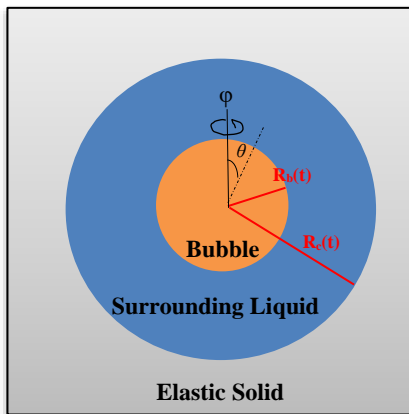
با توجه به موارد ذکر شده همانگونه که ملاحظه شده است، طیف کاربردی مساله دینامیک حاکم بر حباب با توجه به کاربردهای آن و نوع مساله مورد بررسی طیف گسترده ای بوده است. در این میان مواردی که تحلیل حرکت حباب را از نقطه نظر شبیه سازی با چالش جدی تر مواجه کرده اند، در ارتباط با مسایلی بوده اند که سیال پیرامون حباب در محیط محدودی قرار داشته است، خصوصاً چالش های این سناریو در مواردی بیشتر شده است که سیال پیرامون حباب خود با سطوح محدودکننده انعطاف پذیر در ارتباط بوده اند [۱۲]. در این زمینه به عنوان مثال وینسنت و همکاران [۱۵-۱۷] مجموعه آزمایشات نسبتاً جالبی در خصوص حرکت حباب در سیال بطور کامل محدود شده توسط لایه الاستیک جامد را بصورت آزمایشگاهی با روش پخش نور، عکسبرداری با استفاده از لیزر

و همچنین دوربین های با قدرت ثبت تصاویر با سرعت بالا انجام دادند. آزمایش های آنها توانست اثرات الاستیسیته لایه جامد انعطاف پذیر و نسبت محدودشدگی کانال را بر نوسانات غیرمنتظره بسیار سریع حباب بخوبی نشان دهد. آنها همچنین توانستند، خارج شدن حباب از شکل نوسانات کروی در فواصل دور از مرز جامد و حتی در مواردی از هم گسیختگی حباب را در پژوهش های خود بخوبی ملاحظه کنند [۱۵-۱۷].

مواردی که تا اینجا در خصوص حرکت حباب در تماس با سیال پیرامون مورد بررسی قرار گرفتند محدود به حالتی بودند که سیال پیرامون حباب ماهیت رفتار نیوتنی خود را با تقریب خوبی حفظ می کرد، در خصوص رئولوژی حاکم بر سیال پیرامون حباب برای مدل های غیرنیوتنی می توان به عنوان مثال به پژوهش هاماگوچی و آندو [۱۸] اشاره کرد که در آن اثر منبع ارتعاشی اولتراسوند بر نوسانات اجباری حباب احاطه شده با سیال با رفتار غیرنیوتنی ویسکوالاستیک بصورت آزمایشگاهی بررسی شدند. ماده ویسکوالاستیک مورد استفاده آنها ژلاتین بود که در پژوهش آنها از روش تصویربرداری سرعت بالا برای بررسی حرکت حباب استفاده گردید. نتایج مشاهدات آنها نشان داد، استفاده از یک تک حباب برای آزمایش با افزایش غلظت ژلاتین منجر به افزایش فرکانس تحریک و افزایش پاسخ فرکانسی حباب به نواحی با فرکانس بالاتر می گردید [۱۸]. از دیگر پژوهش های انجام شده در این حوزه در خصوص رفتار ویسکوالاستیک سیال پیرامون حباب به پژوهش جیمنز-فرناندز و کرسپو [۱۹] می توان اشار کرد که نوسانات حباب در تماس با فضای نامحدود از سیال ویسکوالاستیک را بررسی نمودند. نتایج آنها نشان داد، دامنه نوسانات حباب بطور قابل توجهی با افزایش عدد الاستیک سیال افزایش می یافت. از دیگر مدل های غیرنیوتنی بررسی شده برای تحلیل دینامیک حاکم بر حباب گازی در تماس با بستر نامحدود سیال به تحقیقات پیشگام انجام شده توسط یانگ و همکاران [۲۰] می توان اشاره نمود که دینامیک حباب گازی در تماس با بستر نامحدود سیال با مدل رئولوژیک نیوتنی تعمیم یافته از نوع توانی را بصورت عددی مورد بررسی قرار دادند. نتایج آنها نشان داد که نرخ میرایی انرژی با افزایش اندیس توانی سیال کاهش می یافت. برای حالتی که حباب گازی در بستر محدودی از سیال قرار داشت، می توان به پژوهش هو و همکاران [۲۱] اشاره کرد که بافت انعطاف پذیر را به عنوان یک محیط

کشش سطحی، فشار گاز محبوس داخل حباب، فشار بخار و همچنین فاکتور هندسی مساله (فاصله مکانی میکرو حباب از روکش انعطاف پذیر که بطور قابل توجهی بر میزان تاثیر پذیری روکش الاستیک، بواسطه تنش‌های اعمالی بر دیواره، از نوسان حباب تاثیر گذار است) بر پاسخ زمانی میکرو حباب‌ها از جمله مهمترین نوآوری‌های پژوهش کنونی شناخته می‌شوند. همچنین بر اساس پژوهش کنونی می‌توان محدوده کاربردی ایمن اعداد بی‌بعد تاثیر گذار بر تنش‌های وارد شده بر روکش انعطاف پذیر را که مستقیماً متأثر از نوسان حباب است برای جلوگیری از آسیب بافتی ناشی از این تنش‌ها مطالعه کرد.

بر این اساس مطابق شکل ۱، حباب گازی به شعاع اولیه $R_{b,0}$ حاوی گاز ایده‌آل در تماس با سیال لزج تراکم ناپذیر در یک محیط محدود نشان داده شده‌است. این سیال در لحظه اولیه در تماس با یک روکش الاستیک کروی به شعاع اولیه $R_{c,0}$ قرار دارد. در زمان‌های مثبت، در اثر برهم کنش در راستای شعاعی غشای الاستیک با سیال در تماس با آن (که منجر به جریان القایی شعاعی در سیال می‌شود) حباب کروی (که حاوی گاز ایده‌آل است و خود نیز در تماس مستقیم با سیال قرار دارد) تحت حرکت شعاعی واداشته قرار می‌گیرد.



شکل ۱- شماتیک سیستم شعاعی مورد استفاده در مطالعه کنونی در لحظه دلخواه $t > 0$ شامل: حباب کروی به شعاع R_b ، سیال پیرامون حباب و غشای الاستیک کروی بیرونی به شعاع R_c

۲- فرمولاسیون ریاضی

با توجه به طبیعت غیردائم جریان القا شده در سیال پیرامون حباب، معادلات بقای جرم و بقای اندازه حرکت برای حرکت

ویسکوالاستیک تراکم پذیر در نظر گرفتند. نتایج شبیه‌سازی آنها حاکی از تاثیر قابل توجه الاستیسیته بافت انعطاف پذیر بر شعاع تعادلی حباب بود. از دیگر موارد کاربرد سیالات غیرنیوتنی در تحلیل حرکت حباب در محیط محدود، به پژوهش انجام شده توسط عارف منش و همکاران [۲۲] می‌توان اشاره کرد. پژوهش آنها تعمیمی بر پژوهش اصلی انجام شده توسط ونگ [۲۳] (در خصوص دینامیک حاکم بر حرکت شعاعی حباب گازی در تماس با لایه محدود سیال نیوتنی در تماس با روکش الاستیک) بود که در آن اثرات غیرنیوتنی سیال با مدل توانی بصورت عددی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج بررسی آنها حاکی از وابستگی شدید نوسان حباب به ضریب الاستیسیته روکش و همچنین رئولوژی حاکم بر سیال پیرامون حباب (اندیس توانی) بوده است [۲۲].

از محدودیت‌های تحقیقات ارائه شده در بالا می‌توان به محدود شدن بیشتر آنها به مدل نیوتنی برای سیال پیرامون حباب، محیط نامحدود پیرامون حباب و یا مدل‌های غیرنیوتنی با رفتار رئولوژیک مستقل از زمان اشاره کرد. با توجه به اینکه در بسیاری از کاربردهای بایومکانیک، سیالات فیزیولوژیکی از خود رفتار غیرنیوتنی وابسته به زمان (نرخ برش وابسته به زمان) نشان می‌دهند [۲۴-۲۶]، لذا در این پژوهش یکی از کاربردهای پزشکی/صنعتی متداول ولی مهم تحلیل دینامیک حاکم بر حباب گازی در بستر محدودی از سیال در تماس با دیواره انعطاف پذیر (برای تبیین رفتار بافت پیرامون سیالات فیزیولوژیک) ارائه شده است که در آن رفتار فیزیولوژیکی سیال با مدل تیکسوتروپ پوشش داده شده‌است [۲۴-۲۶]. بطور دقیق‌تر پژوهش کنونی را که از نقطه نظر مقایسه‌ای تعمیمی بر پژوهش ونگ [۲۳] و عارف‌منش و همکاران [۲۲] شناخته می‌شود، می‌توان به عنوان یک تخمین مطالعاتی اولیه از رفتار تیکسوتروپ سیالات فیزیولوژیک در سیستم‌های بایومکانیکی مانند جریان خون در محیط‌های با مرز انعطاف پذیر نظیر رگ، و میکرو حباب‌های مورد استفاده در این پژوهش را به عنوان بخش مهمی از فرآیندهای انتقال هدفمند دارو به واسطه این میکرو حباب‌ها در سیستم‌های بایومکانیک در نظر گرفت [۲۷ و ۲۸]. رقابت تنگاتنگ اثرات رئولوژیک سیال عامل (اثرات تیکسوتروپی و نرخ فروپاشی) در مقایسه با اثرات انعطاف پذیری دیواره (اثرات عدد الاستیک) بر پاسخ نوسانی میکرو حباب‌ها از یک سو و همچنین اثر پارامترهای مرتبط با میکرو حباب نظیر

$$V_l(t) - V_{l,0} = -\frac{V_{l,0}}{K_l} (p_{l,c} - p_{l,0}) \quad (5)$$

که در آن K_l مدول الاستیک سیال محبوس است. اندیس ۱ نیز برای نشان دادن سیال محبوس بکار رفته است که بطور متناظر حجم سیال محبوس در هر لحظه بصورت تفاضل حجم دیواره غشا و حجم حباب ($V_l = V_c - V_b$) قابل محاسبه است. با توجه به معادلات ۴ و ۵ می توان نشان داد:

$$\frac{V_c(t) - V_{c,0}}{V_b(t) - V_{b,0}} = \frac{K_l}{K_l + (1 - \varphi^3)K_c} = \kappa \quad (6)$$

که در آن $\varphi = V_{b,0} / V_{c,0} = (R_{b,0} / R_{c,0})^3$ به عنوان فاکتور هندسی در نظر گرفته شده است. ضریب κ که به عنوان فاکتور بسیار مهم تراکم پذیری شناخته می شود، در واقع نقش متغیر کنترل کننده میان مدول الاستیک سیال محبوس، K_l و مدول الاستیک غشا، K_c ، را به ازای مقدار معین فاکتور هندسی بر عهده دارد. شایان ذکر است که با توجه به معادله ۶، رفتار غیرقابل تراکم سیال محبوس در حالت حدی هنگامی که مدول الاستیک سیال محبوس، K_l ، در مقایسه با مدول الاستیک غشا، K_c ، بسیار بزرگ باشد ($K_l \rightarrow \infty$) قابل بازیابی است. این حالت که متناظر با مقدار واحد برای فاکتور تراکم پذیری شناخته می شود ($\kappa = 1$)، موضوع پژوهش پیش رو است.

با توجه به معادله ۳ بر اساس حرکت شعاعی خالص حباب، سیال محبوس و غشای الاستیک دیواره، شعاع غشا در هر لحظه عبارت است از:

$$R_c(t) = [R_{c,0}^3 + (R_b(t))^3 - R_{b,0}^3]^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

همچنین با توجه به معادلات ۴ و ۶، فشار سیال در تماس با غشا در هر لحظه برابر خواهد بود با:

$$p_{l,c} - p_{l,0} = \frac{V_b(t) - V_{b,0}}{V_{c,0}} K_c \quad (8)$$

با استفاده از معادله بقای جرم سیال محبوس، معادله ۸، توزیع سرعت شعاعی سیال محبوس بین حباب گازی و غشای الاستیک بصورت زیر خواهد بود:

سیال پیرامون حباب با فرض جریان خالص شعاعی آرام و دما ثابت در مختصات کروی بصورت زیر نوشته شده اند:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r} \quad (2)$$

که در آن ρ ، V_r ، p ، τ_{rr} ، $\tau_{\theta\theta}$ و $\tau_{\varphi\varphi}$ به ترتیب چگالی، مولفه سرعت شعاعی، فشار، تنش نرمال شعاعی، تنش نرمال مماسی و تنش نرمال محیطی سیال در مختصات کروی هستند. با توجه به فرض تراکم ناپذیری سیال محبوس بین حباب گازی و روکش الاستیک، با در نظر گرفتن حجم کنترل حاوی کل سیال محبوس بین حباب و روکش، معادله بقای جرم سیال بین حباب و روکش الاستیک بصورت زیر نوشته شده است:

$$V_c(t) - V_b(t) = V_{c,0} - V_{b,0} \quad (3)$$

که در آن V نشان دهنده حجم و اندیس های b و c بترتیب برای حباب و غشای الاستیک بکار برده شده اند. همچنین اندیس ۰ نشان دهنده حالت اولیه متناظر با زمان اولیه $t = 0$ است.

برای توصیف اثرات الاستیک غشای بیرونی بر حرکت سیال محبوس بین حباب و غشا، مشابه پژوهش وانگ [۲۳] از فرض رابطه خطی میان نیروی اعمال شده به غشا (از سوی فشار سیال در تماس با غشا) و تغییر حجم غشا استفاده شده است (که به عنوان فرضی معتبر برای حالتی شناخته شده است که حجم حباب در مقایسه با حجم غشا کوچک باشد [۲۳]):

$$V_c(t) - V_{c,0} = \frac{V_{c,0}}{K_c} (p_{l,c} - p_{l,0}) \quad (4)$$

که در آن K_c مدول الاستیک غشا است. اندیس ۱ نیز برای نشان دادن مایع (سیال در تماس با غشا) بکار رفته است.

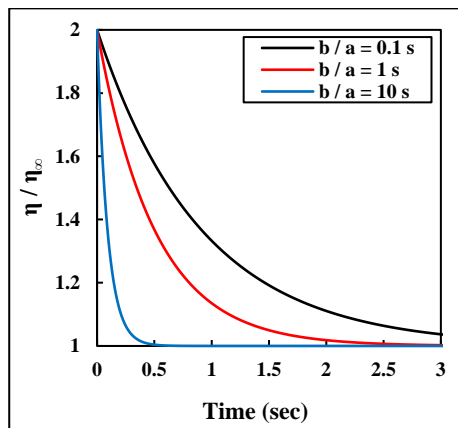
بطور مشابه می توان نیروی اعمالی از سوی فشار سیال به دیواره غشای الاستیک را بصورت خطی متناظر با تغییر حجم سیال محبوس بین حباب گازی و غشا بصورت زیر نوشت:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} \prod_{2D}} \quad (۱۳)$$

که در آن Π_{2D} لایتغیر دوم تانسور گرادیان تغییر شکل است که با توجه به حرکت خالص شعاعی جریان سیال محبوس بین حباب گازی و غشای الاستیک با جاگذاری معادله ۹ در معادله ۱۳ بصورت زیر نوشته شده است:

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{3} \frac{R^2}{r^3} \frac{dR}{dt} \quad (۱۴)$$

شایان ذکر است، نسبت پارامترهای کنترل کننده مدل، نسبت b/a که به عنوان شاخص تیکسوتروپی شناخته شده است، به عنوان متغیر مهم در تبیین رفتار تیکسوتروپیک سیال در نظر گرفته شده است، بطوری که برای سیالات با نسبت b/a کوچکتر، اثرات زمانی در تغییرات ویسکوزیته مدل بطور غالبتری تاثیرگذار بوده اند (به شکل ۲ مراجعه شود). بر این اساس می توان نتیجه گرفت، سیالات با نسبت کوچکتر b/a رفتار تیکسوتروپیک غالبتر و بطور متناظر سیالات با نسبت b/a بزرگتر، رفتار نازک شونده گی غالبتری از خود نشان دهند:



شکل ۲- اثر شاخص تیکسوتروپی مدل مور بر تغییرات نسبت ویسکوزیته مدل مور با گذشت زمان برای جریان برشی ساده بین صفحات موازی با $\alpha = 1$, $d\gamma/dt = 1$

جاگذاری نرخ برش با استفاده از معادله ۱۴ در معادله پارامتر ساختاری مدل مور، معادله ۱۲، با استفاده از تعریف مشتق مادی (که شامل مجموع مشتقات زمانی و مکانی در

$$v_r(r, t) = \frac{dR}{dt} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (۹)$$

که در آن R شعاع حباب در هر لحظه است که با استفاده از معادله بقای جرم سیال، با توجه به شرط عدم لغزش سیال در تماس با حباب گازی بدست آمده است.

برای بررسی رفتار تیکسوتروپیک سیال محبوس بین حباب و غشای الاستیک، در پژوهش حاضر از مدل تیکسوتروپیک مور [۲۹] استفاده شده است. این مدل که بیانگر رابطه خطی میان ویسکوزیته سیال و پارامتر کنترل کننده نرخ شکست و اتصال مجدد پلیمرها (موسوم به پارامتر ساختاری) است با رابطه ریاضی زیر توصیف شده است [۲۹]:

$$\eta = \eta_{\infty}(1 + \alpha S) \quad (۱۰)$$

که در آن η ویسکوزیته سیال، η_{∞} ویسکوزیته متناظر با نرخ برش بینهایت، α نسبت ویسکوزیته و S پارامتر ساختاری مدل هستند. نسبت ویسکوزیته مدل که بیانگر میزان نسبی تغییرات ویسکوزیته بین نرخ برش صفر (متناظر با ساختار زنجیره ای پلیمری کامل) و نرخ برش بینهایت (متناظر با ساختار زنجیره ای پلیمری کاملاً تخریب شده) است با معادله زیر قابل توصیف است:

$$\alpha = \frac{\eta_0}{\eta_{\infty}} - 1 \quad (۱۱)$$

همچنین پارامتر ساختاری مدل، S ، با معادله دیفرانسیل جزئی زیر قابل توصیف است [۲۹]:

$$\frac{DS}{Dt} = a(1 - S) - bS\dot{\gamma} \quad (۱۲)$$

که در آن D/Dt اپراتور مشتق مادی است. a و b پارامترهای کنترل کننده مدل هستند که به ترتیب نرخ شکست کامل زنجیره پلیمر و نرخ بازسازی کامل زنجیره پلیمر را کنترل می کنند. b که عددی بی بعد است، معمولاً تحت عنوان عدد تیکسوتروپ شناخته می شود. $\dot{\gamma}$ نیز نرخ برش سیال است که با اندازه تانسور گرادیان تغییر شکل با رابطه زیر در ارتباط است [۳۰]:

فشاری اضافی دلخواه هستند. در مطالعه کنونی فرض شده است که گاز محبوس داخل حباب در تمام مدتی که حباب دچار انبساط و تراکم گردیده است فرایند پلی تروپیک با اندیس γ را طی کرده است [۲۳]. بر این اساس برای گاز محبوس داخل حباب فشار گاز با رابطه‌ی زیر تقریب زده شده است:

$$p_g = p_{0,g} \left(\frac{R_{b,0}}{R} \right)^{3\gamma} \quad (19)$$

همچنین در پژوهش حاضر از اثرات منبع فشاری اضافی دلخواه در فصل مشترک حباب/سیال صرف نظر شده است. با توجه به معادله ۱۸ برای محاسبه فشار سیال در فصل مشترک سیال/روکش الاستیک از معادله ۸ استفاده شده است. جاگذاری معادلات ۱۷ تا ۱۹ در معادله ۱۶ به همراه استفاده از تعریف تنش‌های شعاعی و مماسی در مختصات کروی به منظور محاسبه عبارت انتگرالی موجود در معادله ۱۶، نسخه نهایی معادله دیفرانسیل حاکم بر شعاع حباب گازی را بصورت زیر ارائه داده‌اند:

$$\begin{aligned} & \rho \left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + 2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{R}{R_c} \right) + \\ & \frac{\rho}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \left(\frac{R^4}{R_c^4} - 1 \right) = \\ & -4\eta_\infty \frac{dR}{dt} \frac{R^2}{R_c^3} (1 + \alpha S) \Big|_{R_c} - p_{l,0} - \\ & K_c \frac{R^3 - R_{b,0}^3}{R_{c,0}^3} - 2 \frac{\sigma}{R} + p_v + \\ & p_{0,g} \left(\frac{R_{b,0}}{R} \right)^{3\gamma} - \\ & 12\eta_\infty \frac{dR}{dt} R^2 \int_R^{R_c} (1 + \alpha S) \frac{dr}{r^4} \end{aligned} \quad (20)$$

که R_c با توجه به معادله ۷ محاسبه شده است. معادله ۲۰ نسخه تعمیم یافته معادله معروف ریلی-پلست [۸ و ۹]، برای حرکت حباب کروی در فضای ایده‌آل حاوی سیال نیوتنی است. از نکات حائز اهمیت در خصوص این معادله که آن را نسبت به نسخه معروف معادله ریلی-پلست متمایز کرده است، وجود ترم های غیرنیوتنی در آخرین عبارت سمت راست معادله زیر انتگرال و همچنین اثرات شعاع خارجی روکش الاستیک با در

راستای شعاعی است) رابطه‌ی زیر را برای معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر پارامتر ساختاری مدل تیکسوتروپ مور ارائه داده است:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{dR}{dt} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \frac{\partial S}{\partial r} = a(1 - S) - \\ & 2\sqrt{3}bs \frac{R^2}{r^3} \frac{dR}{dt}; R(t) \leq r \leq R_c(t) \end{aligned} \quad (15)$$

که با توجه به مرتبه اول بودن این معادله نسبت به زمان از شرط اولیه $S|_{r,t=0} = 1$ بر اساس کامل بودن ساختار پلیمرها در زمان اولیه (با توجه به ساکن بودن سیال و در نتیجه عدم اعمال نیروهای برشی و نرمال به سیال) استفاده شده است. جاگذاری سرعت شعاعی سیال با استفاده از معادله ۹ در معادله بقای اندازه حرکت، معادله ۲ و سپس انتگرال گیری از معادله حاصل در راستای شعاعی در بازه شعاع حباب، R_b ، تا شعاع دیواره روکش الاستیک، R_c ، با استفاده از ساده‌سازی‌های ریاضی لازم، معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زیر را برای شعاع حباب ارائه داده است:

$$\begin{aligned} & \rho \left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + 2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \left(1 - \frac{R}{R_c} \right) + \\ & \frac{\rho}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \left(\frac{R^4}{R_c^4} - 1 \right) = \\ & (\tau_{rr} - p)|_{R_c} - (\tau_{rr} - p)|_R + \\ & 2 \int_R^{R_c} \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} dr \end{aligned} \quad (16)$$

برای ارزیابی عبارات سمت راست معادله ۱۶ از شرایط مرزی در دیواره حباب گازی در تماس با سیال و دیواره روکش الاستیک در تماس با سیال استفاده شده است که با توجه به بقای اندازه حرکت در راستای شعاعی در فصل مشترک سیال/حباب و سیال/روکش بصورت زیر نوشته شده‌اند:

$$(\tau_{rr} - p)|_R = 2 \frac{\sigma}{R} - p_v - p_g + p_A \quad (17)$$

$$p|_{R_c} = p_{l,c} \quad (18)$$

که در آن p_A ، p_g ، p_v ، σ و p_A بترتیب کشش سطحی فصل مشترک حباب/سیال، فشار بخار، فشار گاز محبوس داخل حباب و منبع

بکار برده شود. در این پژوهش با توجه به درجه بالای غیر خطی بودن معادله ۲۰، از روش تبدیل معادله مذکور به دستگاه معادلات مرتبه اول استفاده شده است [۳۱].

پیش از ادامه در اینجا ذکر این نکته حائز اهمیت است که نگاه مجدد به معادله ۱۵ نشان می‌دهد که این معادله که منجر به حل متغیر ساختاری S روی فضای شعاعی r می‌شود، در هر گام زمانی با تغییر محدوده‌ی شعاعی r مواجه است (با توجه به تغییر شعاع حباب و بطور متناظر شعاع روکش الاستیک در هر گام زمانی) که این موضوع نیازمند استفاده از شبکه‌بندی شعاعی قابل انطباق با شعاع‌های حباب و روکش الاستیک متغیر در هر گام زمانی است که خود این موضوع حل عددی را با توجه به شبکه بندی شعاعی وابسته به زمان با دشواری بیش از پیش مواجه می‌کند. برای جلوگیری از این مشکل، از تغییر متغیر تشابهی که حوزه شعاعی وابسته به زمان را به حوزه جدید مستقل از زمان ارتباط می‌دهد، بصورت زیر استفاده شده است:

$$Z(r, t) = \frac{R_{c,0}}{R_{b,0}} \left(\frac{r - R}{R_c - r} \right) \quad (22)$$

$$R(t) \leq r \leq R_c(t) \rightarrow 0 \leq Z \leq \infty$$

نگاهی به معادله ۲۲ نشان می‌دهد که با استفاده از تغییر متغیر ارائه شده در این معادله، حوزه شعاعی وابسته به زمان (در محدوده بین شعاع حباب و شعاع روکش) در هر گام زمانی به بازه متناظر صفر تا بینهایت نگاشته می‌شود. در نتیجه معادلات حاکم ۱۵ و ۲۰ با استفاده از تغییر متغیر ارائه شده در معادله ۲۲ از حوزه زمان و مکان شعاعی وابسته به زمان به حوزه زمان و مکان شعاعی ثابت نگاشته می‌شود (در اینجا آورده نشده است).

همانگونه که پیش از این نیز گفته شد، جهت حل معادلات حاکم بی‌بعد در نظر است از تبدیل معادله مرتبه دوم به دستگاه معادلات مرتبه اول استفاده شود. بر این اساس تغییر متغیرهای لازم جهت این تبدیل عبارتند از [۳۱]:

$$\frac{dR^*}{dt^*} = U \quad (23)$$

$$\frac{d^2R^*}{dt^{*2}} = \frac{dU}{dt^*} = f(R^*, U, t^*)$$

نظر گرفتن اثرات الاستیک روکش، (ترم اضافی حاوی ثابت الاستیک K_c در سمت راست معادله ۲۰) بوده‌اند. بر این اساس شایان ذکر است، معادله ۲۰ در حالت حدی هنگامی که شعاع روکش الاستیک به بینهایت میل کند و همچنین سیال مور به مدل نیوتنی تبدیل شود ($\alpha = 0$) به معادله ریلی پلست تبدیل می‌شود.

به منظور بررسی اثرات متغیرهای مختلف درگیر در معادله ۲۰ در تحلیل مساله، از نسخه بی‌بعد شده معادله ۲۰ بر اساس شعاع اولیه حباب به عنوان طول مشخصه (برای بی بعد سازی شعاع حباب)، شعاع اولیه دیواره غشای الاستیک به عنوان طول مشخصه (جهت بی‌بعدسازی شعاع روکش الاستیک)، فشار اولیه سیال در تماس با دیواره روکش الاستیک به عنوان فشار مشخصه، و همچنین از جذر نسبت فشار اولیه سیال در تماس با روکش الاستیک به چگالی سیال به عنوان سرعت مشخصه استفاده شده است. بر این اساس اعداد بی‌بعد زیر در بی‌بعد سازی معادلات حاکم ظاهر شده‌اند:

$$Re = \frac{\sqrt{\rho_0 p_{l,0}} R_{b,0}}{\eta_\infty}, We = \frac{2\sigma}{R_{b,0} p_{l,0}}, \quad (21)$$

$$\xi = \frac{K_c}{p_{l,0}}, Tx = b,$$

$$\Psi = \frac{1}{a R_{b,0}} \sqrt{\frac{p_{l,0}}{\rho_0}}, \zeta = \frac{p_v}{p_{l,0}}, C_f = \frac{p_{0,g}}{p_{l,0}}$$

که در آن $Re, We, \xi, Tx, \Psi, \zeta$ و C_f به ترتیب اعداد رینولدز، وبر، الاستیک، تیکسوتروپی، فروپاشی، فشار بخار و فشار گاز هستند.

با توجه به اینکه معادله ۲۰ یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است، برای حل آن نیاز به دو شرط اولیه برای شعاع حباب بصورت $R|_{t=0} = R_0$ و $dR/dt|_{t=0} = 0$ یا در نسخه بی بعد شامل $R^*|_{t^*=0} = 1$ و $dR^*/dt^*|_{t^*=0} = 0$ است که در آن * بیانگر متغیر بی‌بعد متناظر است.

۳- روش عددی

متاسفانه معادلات ۱۵ و ۲۰ حتی در نسخه ساده‌سازی شده (که معادله معروف ریلی پلست برای حباب گازی در تماس با سیال نیوتنی در فضای نامحدود در نظر گرفته شود) دارای حل تحلیل نمی‌باشند و برای حل آنها باید روش‌های عددی مناسب

و شرایط مرزی متناظر عبارتند از:

$$\begin{aligned} R^*|_{t=0} &= 1 \\ U|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

جهت حل عددی معادله ساختاری حاکم بر متغیر S (معادله ۱۵ پس از انتقال به فضای شعاعی ثابت Z) با توجه به اینکه در هر موقعیت مکانی Z پارامتر ساختاری مدل تیکسوتروپیک مور بر حسب تابعی از زمان تغییر می‌کند، لذا حل معادله ۱۵ نیازمند گسسته‌سازی مکانی این معادله خواهد بود. برای نیل به این مقصود از گسسته‌سازی تفاضل محدود معادله ۱۵ برای هر موقعیت مکانی Z_i استفاده شده‌است. به عنوان مثال گسسته‌سازی مشتق اول مکانی شرکت‌کننده در معادله ۱۵ بصورت زیر نوشته شده‌اند:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial Z} \right|_i = a_i A_i(t) + b_i B_i(t) + c_i C_i(t); \quad (25)$$

$$1 \leq i \leq n$$

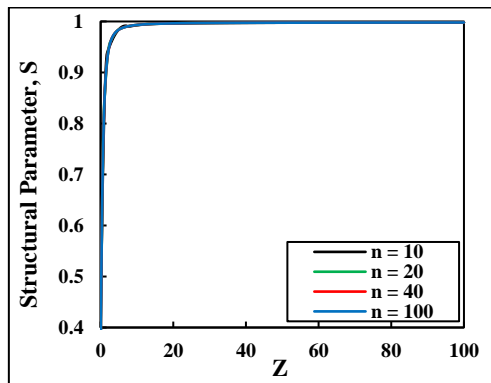
$$\begin{cases} A_1(t) = S_1(t), B_1(t) = S_2(t), \\ C_1(t) = S_3(t) \\ A_i(t) = S_{i-1}(t), B_i = S_i(t), \\ C_i = S_{i+1}(t) \\ ; \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ A_n(t) = S_n(t), B_n = S_{n-1}(t), \\ C_n = S_{n-2}(t) \end{cases} \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_i = \frac{dS_i}{dt}; \quad S_i|_{t=0} = 1 \quad (27)$$

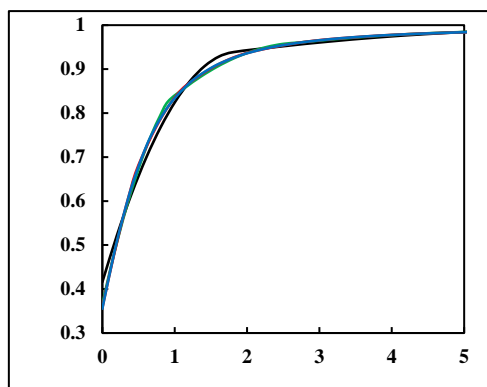
که در آن $i = 1$ متناظر با $Z = 0$ و $i = n$ متناظر با $Z \rightarrow \infty$ خواهد بود (برای ضرایب تقریب تفاضل محدود معادله ۲۵ به قسمت ضمائم مراجعه شود). رابطه ۲۵ بیانگر تقریب تفاضل محدود پیش‌رو مرتبه دوم برای تقریب مشتق اول مکانی در ابتدای بازه مکانی ($i = 1$)، تقریب تفاضل محدود پسر و مرتبه دوم برای تقریب مشتق اول مکانی در انتهای بازه مکانی ($i = n$) و تقریب تفاضل محدود مرتبه دوم مرکزی برای مابقی نقاط گسسته‌سازی مکانی است که به منظور بدست آوردن نتایج عددی در محدوده‌های خاصی از اعداد بدون بعد (معادله ۲۱) که با تغییرات شدید شعاع حباب و غشای الاستیک می‌تواند همراه باشد از گسسته‌سازی غیریکنواخت با تراکم بالا در نقاط

نزدیک دیواره حباب استفاده شده‌است (به قسمت ضمائم مراجعه شود).

معادلات گسسته‌سازی شده ۲۵ تا ۲۷ به همراه دستگاه معادلات مرتبه اول ۲۳ در مجموع تشکیل $n+2$ دستگاه معادله مرتبه اول به همراه $n+2$ مجهول شامل $R, U, S_1, S_2, \dots, S_n$ می‌دهند که با کدهای پیش‌فرض بهینه شده با استفاده از نرم افزار MATLAB حل شده‌اند. بطور دقیقتر با توجه به اینکه طیف مورد بررسی اعداد بدون بعد در پژوهش حاضر نوسانات شدید شعاع حباب را نیز شامل می‌شدند، بر همین اساس در حل عددی معادلات حاکم از حلگر ODE23s نرم‌افزار مذکور با تنظیمات پیش‌فرض این حل‌گر جهت حل معادلات حاکم مرتبه اول نسبت به زمان استفاده شده‌است. از ویژگی‌های این حلگر می‌توان به استفاده از گام‌بندی زمانی بسیار کوچکتر (برای پیش‌بینی درست رفتار سیستم در نواحی در بردارنده گرادینهای شدید متغیرهای وابسته) در مقایسه با حلگرهای متداول دیگر موجود در نرم‌افزار MATLAB نظیر حلگر ODE45 اشاره کرد که منجر به نرخ همگرایی بالا در معادلات دیفرانسیل مرتبه اول شدیداً غیرخطی می‌شود [۳۲]. شایان ذکر است، استفاده از حل‌گر ODE23s نرم‌افزار به همراه گسسته‌سازی مکانی غیریکنواخت مشتقات مکانی مرتبه اول (با تراکم بالا در نقاط نزدیک به دیواره حباب و نقاط نزدیک به غشای الاستیک لایه بیرونی) به عنوان دو عامل مهم در موفقیت‌آمیز بودن همگرایی حل دستگاه معادلات مرتبه اول غیرخطی (معادلات ۲۳ تا ۲۷) برای محدوده‌های مختلف اعداد بدون بعد گزارش شده در این پژوهش شناخته شده‌اند. همچنین شایان ذکر است، جهت اطمینان بیشتر از قدرت حل عددی ارائه شده توسط حلگر ODE23s نرم‌افزار MATLAB در این پژوهش، در تلاشی مجدد، حل عددی مساله مورد نظر با استفاده از نرم‌افزار COMSOL MULTIPHYSICS که نرم‌افزاری بر پایه روش المان محدود است، مورد بررسی قرار گرفت. این نرم‌افزار که دارای کتابخانه‌های قوی بهینه برای شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی (متناسب با نوع معادلات حاکم) است، یکی از ابزارهای قدرتمند در شبیه‌سازی جریان سیالات شناخته شده‌است [۳۳]. برای نیل به این مقصود معادلات حاکم ۱۵ و ۲۰ پس از استفاده از تغییر متغیر ارائه شده توسط معادله ۲۲ در این نرم‌افزار با استفاده از کتابخانه Mathematics آن در فضای یک‌بعدی وابسته به زمان



(الف)

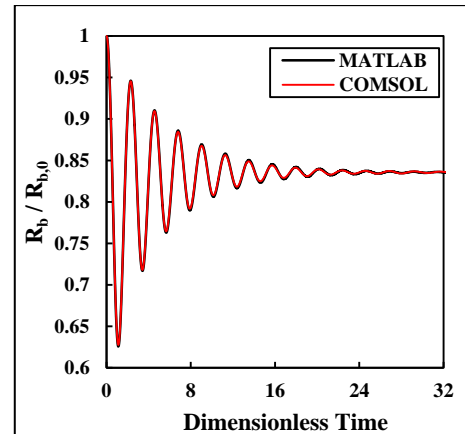


(ب)

شکل ۴- تغییرات پارامتر ساختاری تیکسوتروپ مدل مور با فاصله مکانی بدست آمده در زمان بی بعد $t^* = 1$ (الف) شکل کامل و (ب) شکل بزرگنمایی شده
 $\alpha = 1, Tx = 1, \xi = 1000, \psi = 1, \phi = 1/7, Re = 100, We = 0.2, \zeta = 0.023, cr = 0.001$.

همانگونه که در شکل ۴ ملاحظه می‌شود، تغییرات در میان نتایج تنها در زمان‌های ابتدایی برای تعداد نقاط نسبتاً کم شبکه قابل ملاحظه است، در حالی که نتایج برای تعداد نقاط شبکه بیشتر از ۴۰ یکسان هستند. در پژوهش کنونی از تعداد نقاط $n = 100$ برای تمامی شبیه‌سازی‌ها استفاده شده است. به‌منظور اطمینان از عملکرد صحیح حل عددی دستگاه معادلات مرتبه اول ۲۳ تا ۲۶، در شکل ۵ مقایسه‌ای میان نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی معادلات حاکم و نتایج حاصل از پژوهش وانگ [۲۳] برای حالت خاصی ارائه شده است که سیال نیوتنی در فضای بین حباب گازی و غشای الاستیک دیواره قرار داشته باشد. همانگونه که ملاحظه می‌شود، تطابق خوبی بین هر دو شبیه‌سازی وجود دارد (تفاوت جزئی در بین دو نمودار در شکل ۵ به دلیل عدم امکان استخراج دقیق

مجدداً بازسازی شدند. معادلات بازسازی شده در حوزه مکان /زمان متناظر $t-Z$ در نرم‌افزار با استفاده از حلگر غیردائم (حل عددی وابسته به زمان) با شرایط اولیه $R^*|_{t^*=0} = 1, S|_{t^*=0} = 0$ و $dR^*/dt^*|_{t^*=0} = 0$ در شکل ۳ مقایسه‌ای میان این دو روش مختلف حل عددی نشان داده شده است:



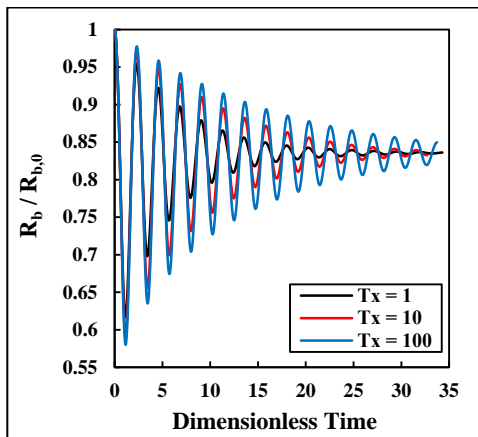
شکل ۳- مقایسه حل عددی بدست آمده با استفاده از حلگر ODE23s نرم افزار MATLAB و شبیه‌سازی المان محدود نرم‌افزار COMSOL برای پاسخ زمانی نوسان حباب به‌زای

$\alpha = 2, Tx = 0.01, \xi = 1000, \psi = 1, \phi = 1/7, Re = 50, We = 0.2, \zeta = 0.023, cr = 0.001$.

مطابق شکل ۳، نتایج بدست آمده حاکی از تطابق بسیار خوب بین حل معادلات حاکم با استفاده از حلگر ODE23s و نتایج حاصل از حل عددی با نرم‌افزار COMSOL بوده است. بر این اساس در قسمت بعد تمامی نتایج عددی بدست آمده با استفاده از حلگر ODE23s نرم‌افزار MATLAB ارائه شده‌اند.

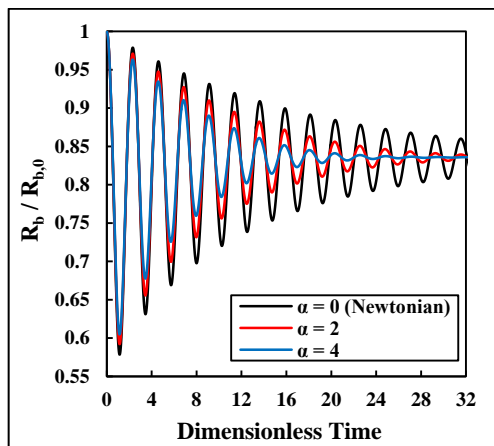
۴- نتایج و بحث

در گام نخست جهت بررسی تاثیر اندازه شبکه بر عملکرد نتایج، در شکل ۴ تغییرات پارامتر ساختاری سیال عامل بر حسب فاصله مکانی برای چهار شبکه بندی با اندازه‌های مختلف آورده شده‌است:



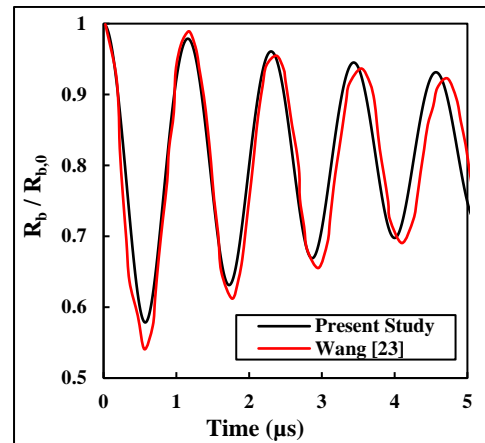
شکل ۶- اثر عدد تیکسوتروپی بر تغییرات شعاع حباب گازی با گذر زمان بدست آمده برای $\alpha = 2, \xi = 1000, \psi = 1, \phi = 1/7, Re = 50, We = 0.2, \zeta = 0.023, cr = 0.001$.

اثر نسبت ویسکوزیته مدل مور، α ، بر روی نوسانات شعاع حباب در شکل ۷ نشان داده شده است. همانگونه که انتظار می‌رود، افزایش نسبت ویسکوزیته با توجه به معادله ۱۰ بطور مستقیم با افزایش ویسکوزیته موثر مدل مور منجر به کاهش اندازه حرکت انتقالی از لایه‌های سیال مجاور حباب به حباب گازی می‌شود و لذا جای تعجب نیست که دامنه نوسانات شعاع حباب با افزایش نسبت ویسکوزیته مدل مور کاهش یابد:



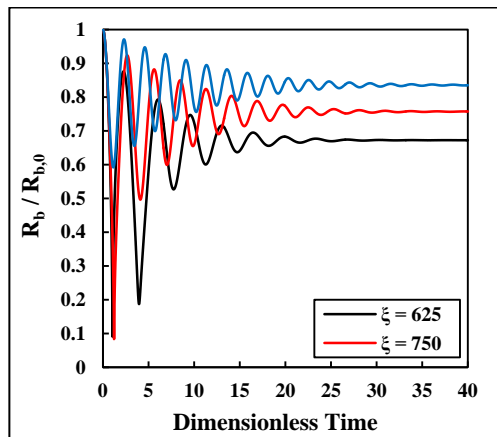
شکل ۷- اثر نسبت ویسکوزیته مدل مور بر تغییرات شعاع حباب گازی با گذر زمان بدست آمده برای $Tx = 10, \xi = 1000, \psi = 1, \phi = 1/7, Re = 50, We = 0.2, \zeta = 0.023, cr = 0.001$.

اطلاعات نموداری موجود در شکل ۴ پژوهش وانگ [۲۳] با توجه به تراکم بالای آن شکل است.



شکل ۸- تغییرات شعاع حباب گازی با زمان بدست آمده برای $\alpha = 0, \xi = 1000, \phi = 1/7, Re = 50, We = 0.2, \zeta = 0.023, cr = 0.001$.

اثر عدد تیکسوتروپی بر روی نوسانات شعاع حباب در شکل ۶ نشان داده شده است. همانگونه که انتظار می‌رود، افزایش عدد تیکسوتروپی با توجه به تاثیر مستقیم در رفتار لاغری برشی سیال که همراه با کاهش ویسکوزیته موثر مدل مور است (به شکل ۲ مراجعه شود) منجر به افزایش اندازه حرکت انتقالی بین لایه‌های سیال در مجاورت همدیگر می‌شود و این موضوع به نوبه خود منجر به افزایش اندازه حرکت انتقالی از سیال در تماس با حباب به حباب گازی می‌شود و طبیعتاً می‌توان انتظار داشت که دامنه نوسانات شعاع حباب با افزایش عدد تیکسوتروپی سیال افزایش یابد.

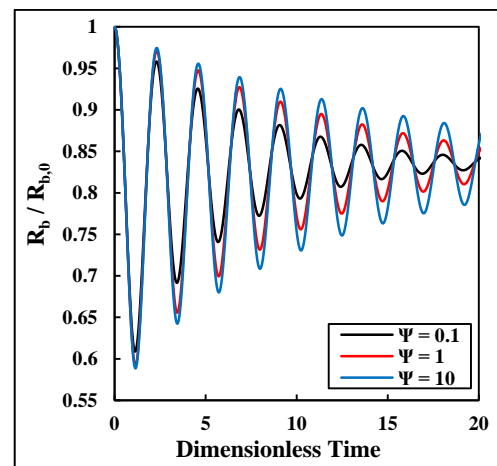


شکل ۹- اثر عدد الاستیک روکش بر تغییرات شعاع حباب گازی با گذر زمان بدست آمده برای $\alpha = 2, Tx = 10, \psi = 1, \phi = 1/7, Re = 50, We = 0.2, \zeta = 0.023, cr = 0.001$.

نگاه مجدد به شکل ۹ نشان می‌دهد با افزایش عدد الاستیک، شعاع تعادلی بی‌بعد حباب (شعاعی که نوسانات حباب بطور کامل میرا شده‌اند) نیز افزایش یافته است که این موضوع به معنای نزدیک شدن بیش از پیش شعاع تعادلی حباب، به شعاع اولیه حباب، R_0 ، است. علت این موضوع را نیز می‌توان به تراکم ناپذیری سیال محبوس بین حباب و غشا نسبت داد. هرچقدر الاستیسیته روکش بیشتر شود، انعطاف‌پذیری روکش بیشتر کاهش می‌یابد تا در حالت حدی هنگامی که الاستیسیته روکش بسیار بزرگ گردد ($K_c \rightarrow \infty$) در این حالت روکش مشابه یک جسم صلب غیرقابل انعطاف رفتار می‌کند. طبیعی است در این حالت با توجه به تراکم‌ناپذیری سیال محبوس در فضای بین حباب و روکش، هیچ گونه تغییری در شعاع حباب نسبت به شعاع اولیه مشاهده نمی‌شود ($R/R_0 = 1$).

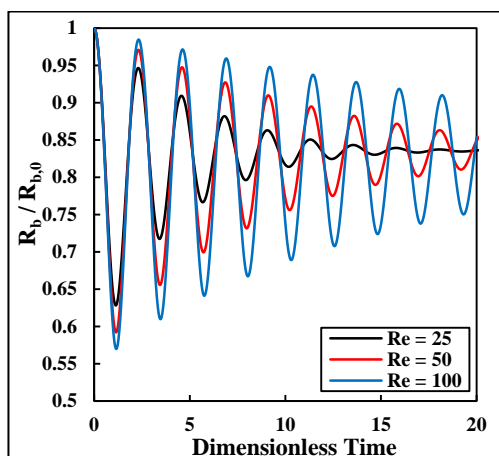
در شکل ۱۰ اثر فاکتور هندسی مساله، ϕ ، بر روی نوسان حباب نشان داده شده است. با توجه به تراکم‌ناپذیری سیال محبوس بین حباب و روکش الاستیک، کاهش فاکتور هندسی که به معنای افزایش جرم سیال محبوس است با انتقال تکانه بیشتر (بواسطه جرم بیشتر) از سیال پیرامون حباب به حباب منجر به دامنه بیشتر نوسانات حباب گازی می‌شود، لذا جای تعجب نیست که همانگونه که در شکل ۱۰ نیز دیده می‌شود، نه تنها دامنه نوسانات حباب در فاکتور هندسی کوچکتر بیشتر شود، بلکه انحراف شعاع تعادلی حباب از شعاع اولیه خود در فاکتورهای هندسی کوچکتر، بیشتر نیز باشد.

به‌منظور بررسی اثرات نرخ شکست زنجیره پلیمری مدل مور بر رفتار نوسانی حباب، در شکل ۸ اثر عدد فروپاشی بر روی پاسخ زمانی حباب نشان داده شده است. با توجه به اینکه افزایش عدد فروپاشی در مقدار ثابت عدد تیکسوتروپی، به معنای کاهش ویسکوزیته مدل مور است (به شکل ۲ مراجعه شود) لذا جای تعجب نیست که با افزایش این عدد، دامنه نوسانات حباب با توجه به کاهش مقاومت اعمالی از سوی سیال به حباب (کاهش ویسکوزیته) افزایش یافته است:

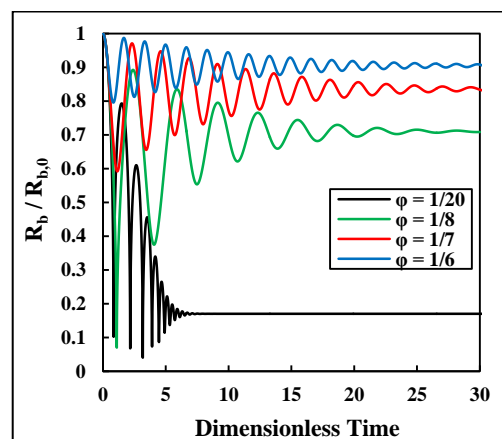


شکل ۸- اثر عدد فروپاشی بر تغییرات شعاع حباب گازی با گذر زمان بدست آمده برای $\alpha = 2, Tx = 10, \xi = 1000, \phi = 1/7, Re = 50, We = 0.2, \zeta = 0.023, cr = 0.001$.

از مهمترین پارامترهای تعیین‌کننده در شکل رفتار نوسانی حباب گازی، مقدار ضریب الاستیسیته (عدد الاستیک) غشای بیرونی در تماس با سیال است. در شکل ۹ اثر عدد الاستیک غشا بر رفتار نوسانی حباب نشان داده شده است. با کاهش عدد الاستیک غشا (افزایش میزان انعطاف‌پذیری روکش)، با توجه به ماهیت غیرقابل تراکمی سیال محبوس در فضای بین غشا و حباب می‌توان انتظار داشت، انعطاف‌پذیری حباب گازی بطور قابل توجهی افزایش یابد. بر همین اساس با توجه به شکل ۹، دامنه تغییرات نوسان حباب بطور قابل توجهی افزایش یافته است:



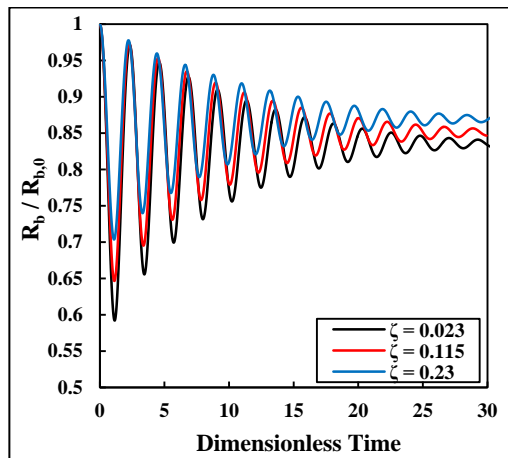
شکل ۱۱- اثر عدد رینولدز جریان بر تغییرات شعاع حباب گازی با گذر زمان بدست آمده برای $\alpha = 2, T_x = 10, \xi = 1000, \psi = 1, \phi = 1/7, We = 0.2, \zeta = 0.023, cr = 0.001$.



شکل ۱۰- اثر فاکتور هندسی مساله بر تغییرات شعاع حباب گازی با گذر زمان بدست آمده برای $\alpha = 2, T_x = 10, \xi = 1000, \psi = 1, Re = 50, We = 0.2, \zeta = 0.023, cr = 0.001$.

برای بررسی تاثیر کشش سطحی سیال بر رفتار حباب در شکل ۱۲ اثر عدد وبر روی تغییرات شعاع حباب با زمان نشان داده شده است. مطابق شکل ۱۲، از نکات جالب توجه در خصوص اثرات خاصیت کشش سطحی بر رفتار حباب، افزایش چشمگیر شدت نوسانات حباب در مدت زمان کوتاهتر و کاهش اندازه شعاع حالت پایای حباب با افزایش کشش سطحی سیال است. در توجیه رفتار کشش سطحی بر پاسخ نوسان حباب باید توجه داشت از آنجایی که کشش سطحی به عنوان مولفه نیرویی در راستای عمود بر فصل مشترک سیال/حباب در نظر گرفته می‌شود (به معادله ۱۷ مراجعه شود) با توجه به نوسانات صرفاً شعاعی حباب، افزایش عدد وبر به معنای افزایش اندازه حرکت انتقالی به حباب از سوی سیال در فصل مشترک سیال/حباب خواهد بود، لذا افزایش شدید دامنه نوسانات حباب ناشی از تقویت اثرات کشش سطحی خواهد بود. از طرفی تقویت کشش سطحی که همراه با افزایش انحنای فصل مشترک سیال/حباب است، منجر به کاهش شعاع انحنای تعادلی حباب می‌گردد (رابطه معکوس انحنای و شعاع انحنای منحنی). لذا همانگونه که انتظار می‌رود، در اعداد وبر بزرگتر حباب با شدت نوسانات بیشتری خود را به شعاع تعادلی کوچکتر رسانیده است.

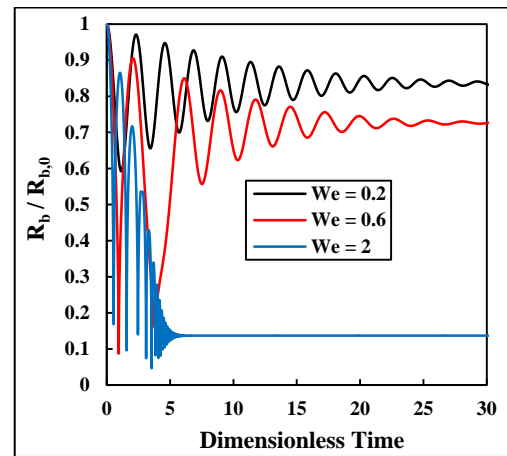
در شکل ۱۱ اثر عدد رینولدز بر روی تغییرات شعاع حباب با گذر زمان نشان داده شده است. با توجه به این شکل افزایش رینولدز با افزایش دامنه نوسانات حباب همراه است. برای توجیه علت این موضوع نگاهی به تعاریف اعداد بی بعد ارائه شده در معادله ۲۱ نشان می‌دهد، به منظور استقلال اعداد بی بعد از یکدیگر، چنانچه تغییرات رینولدز جریان به عنوان تغییرات ویسکوزیته در نرخ برش بینهایت سیال عامل پیرامون حباب تفسیر شود، می‌توان نتیجه گرفت، افزایش رینولدز که با کاهش ویسکوزیته بینهایت سیال همراه است، با توجه به مقاومت کمتر سیال منجر به انتقال تکانه بیشتر از سوی سیال به حباب و بالعکس شده است. لذا همانگونه که انتظار می‌رفت، افزایش رینولدز با دامنه نوسانات با شدت بیشتر حباب گازی همراه شده است.



شکل ۱۳- اثر عدد فشار بخار بر تغییرات شعاع حباب

گازی با گذر زمان بدست آمده برای

$$\alpha = 2, Tx = 10, \xi = 1000, \psi = 1, \phi = 1/7, Re = 50, We = 0.2, cr = 0.001.$$

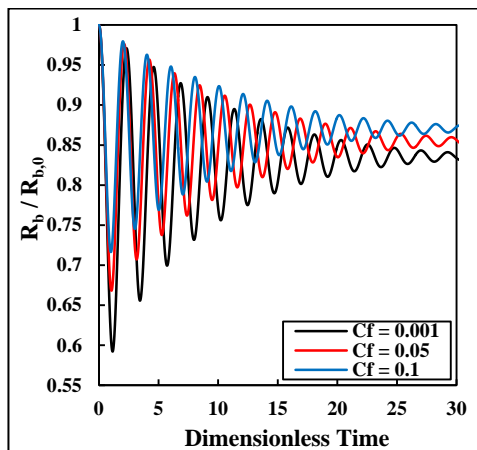


شکل ۱۲- اثر عدد وبر بر پاسخ زمانی شعاع حباب گازی با

بدست آمده برای

$$\alpha = 2, Tx = 10, \xi = 1000, \psi = 1, \phi = 1/7, Re = 50, \zeta = 0.023, cr = 0.001.$$

برای بررسی اثرات فشار گاز محبوس داخل حباب در طی فرایند انبساط/تراکم حباب در مدت نوسان، در شکل ۱۴ اثر عدد فشار گاز بر پاسخ زمانی نوسان حباب نشان داده شده است. همانگونه که انتظار می‌رود، رفتاری مشابه با اثرات فشار بخار بر نوسان حباب (که در شکل ۱۳ بررسی گردید) این بار در خصوص فشار گاز محبوس داخل حباب با توجه به اثرات مشابه این فشارها در نیروهای وارد بر پوسته حباب در فصل مشترک (با توجه به معادله ۱۷) مشاهده می‌شود:



شکل ۱۴- اثر عدد فشار گاز بر تغییرات شعاع حباب

گازی با گذر زمان بدست آمده برای

$$\alpha = 2, Tx = 10, \xi = 1000, \psi = 1, \phi = 1/7, Re = 50, We = 0.2, \zeta = 0.023.$$

به‌منظور مطالعه اثرات فشار بخار گاز محبوس داخل حباب بر رفتار نوسانی حباب، در شکل ۱۳ اثر عدد فشار بخار بر پاسخ زمانی شعاع حباب نشان داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، افزایش عدد فشار بخار با کاهش دامنه نوسان شعاع حباب و بطور همزمان افزایش فرکانس نوسانات حباب همراه است. با توجه به راستای اعمال نیروی فشار بخار و کشش سطحی در جهات مخالف یکدیگر (به معادله ۱۷ مراجعه شود) و با توجه به آنچه در خصوص اثرات کشش سطحی در شکل ۱۲ ذکر شد، در اینجا جای تعجب نیست که با افزایش فشار بخار، نیروی مقاومت در برابر حرکت حباب که از سوی گاز داخل حباب به دیواره حباب وارد می‌شود، بطور قابل توجهی افزایش یابد و در نتیجه در اعداد فشار بخار بزرگتر کاهش دامنه نوسانات حباب مشاهده شود.

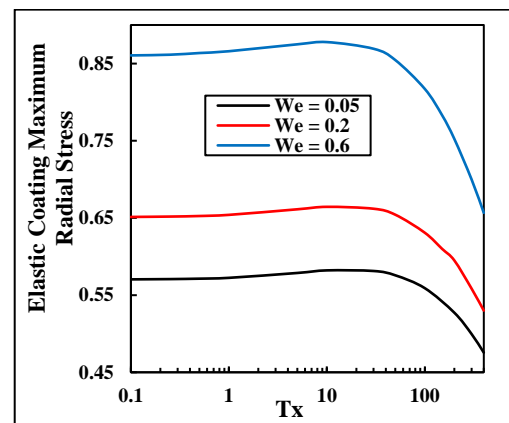
در اینجا توجه به یک نکته مهم ضروری است. با توجه به طیف گسترده اعداد بی بعد مورد بررسی در پژوهش حاضر امکان تغییر شکل حباب از حالت دایروی در طول مدت نوسان (نوسانات ترکیبی شعاعی و مماسی) ممکن است، به عنوان یکی از محدودیت‌های مهم برای مساله دینامیک حباب گازی مطرح شود. در خصوص این موضوع توجه به نکات زیر حائز اهمیت است:

- چنانچه سیال پیرامون حباب در تماس با روکش الاستیک نباشد، در اینصورت با توجه به بقای اندازه حرکت سیال در شعاع بیرونی، فرض نوسانات صرفاً شعاعی حباب (و در نتیجه جریان القایی شعاعی در سیال پیرامون حباب) تنها در صورتی معتبر است که حباب در بستر نامحدود سیال قرار داشته باشد که بتوان سرعت شعاعی و تنش شعاعی وارد شده از سوی سیال را از فاصله شعاعی معینی به بعد ناچیز فرض کرد. در غیر اینصورت برای لایه محدودی از سیال پیرامون حباب، غیر صفر بودن تنش‌های لزج سیال در شعاع بیرونی منجر به نوسانات غیر دایروی و در نتیجه جریان متقارن کروی دو مولفه‌ای شعاعی/مماسی برای سیال پیرامون حباب خواهد شد،

- چنانچه سیال پیرامون حباب در تماس با روکش الاستیک باشد، در اینصورت از نقطه نظر ریاضی مستقل از ضخامت لایه سیال پیرامون حباب با توجه به بقای اندازه حرکت در فصل مشترک سیال/روکش الاستیک واقع در شعاع بیرونی R_c می‌توان همچنان نوسانات صرفاً شعاعی حباب و بدنال آن جریان القایی شعاعی داشت که علت این امر آن است که در این حالت تنش‌های لزج قابل ملاحظه (برای ضخامت‌های محدود سیال) با تنش‌های الاستیک روکش انعطاف‌پذیر در راستای شعاعی در هر گام زمانی بدون برهم زدن نوسانات شعاعی حباب و در نتیجه جریان القایی صرفاً شعاعی در تعادل هستند،

- از نقطه نظر فیزیکی تغییر رژیم جریان صرفاً شعاعی به جریان ترکیبی شعاعی/مماسی برای طیف گسترده اعداد بدون بعد حاکم در پژوهش حاضر تنها از طریق تحلیل پایداری خطی زمانی مجموعه با اعمال اغتشاشات جزئی سه‌بعدی غیر دائم به جریان اولیه (جریان شعاعی) و تحلیل فرکانسی اغتشاشات اعمالی در محدوده‌ی اعداد بی بعد مورد بررسی امکان‌پذیر است. بطور مشخص با استفاده از تحلیل پایداری خطی مجموعه می‌توان محدوده لازم از اعداد بی بعد دست آورد که برای آنها مدهای اغتشاشی اعمالی به جریان پایه با گذر زمان

به عنوان یکی از مهمترین دستاوردهای پژوهش حاضر، در شکل ۱۵ اثر کشش سطحی فصل مشترک حباب/سیال بر حداکثر تنش شعاعی اعمالی بر روکش الاستیک (بیشترین مقدار تنش شعاعی وارد شده بر غشای الاستیک در کل مدت زمان نوسان حباب) برای مقادیر مختلف از عدد تیکسوتروپی سیال نشان داده شده است. مطابق این شکل برای مقدار معینی از کشش سطحی، به ازای مقدار آستانه‌ای از عدد تیکسوتروپی (به عنوان مثال عدد تیکسوتروپی ۱۰ به ازای وبر $0/6$)، حداکثر تنش شعاعی بیشینه خواهد بود. این موضوع نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است برای جلوگیری از آسیب‌رسیدن به بافت دیواره الاستیک منعطف، همواره باید عدد تیکسوتروپی سیال از مقدار آستانه‌ای آن یا بیشتر و یا کمتر باشد، هرچند در اعداد تیکسوتروپی بزرگ (رفتار نازک‌شونده غالب سیال در مقایسه با رفتار تیکسوتروپیک سیال) ایمن‌ترین محدوده‌ی کاری برای تنش‌های شعاعی وارد شده از سیال بر دیواره الاستیک نتیجه خواهد شد. از سوی دیگر برای مقدار معین عدد تیکسوتروپی افزایش کشش سطحی فصل مشترک حباب/سیال همواره با افزایش حداکثر تنش شعاعی اعمالی به بافت انعطاف‌پذیر همراه خواهد بود که این مساله خود بصورت ضمنی مویدی بر افزایش دامنه نوسانات حباب و در نتیجه انتقال تکانه بزرگتر از حباب به سیال و بطور متناظر از سیال به روکش الاستیک در اعداد وبر بزرگتر است (به شکل ۱۲ مراجعه شود).



شکل ۱۵- اثر عدد وبر بر تغییرات حداکثر تنش شعاعی وارد شده بر روکش الاستیک بیرونی با عدد تیکسوتروپی سیال برای $\alpha = 2$, $\xi = 1000$, $\psi = 1$, $\phi = 1/7$, $Re = 50$, $\zeta = 0.023$, $cr = 0.001$.

- افزایش اعداد فشار بخار و فشار گاز نیز هر یک با توجه به افزایش نیروی مقاوم در برابر حرکت سیال در فصل مشترک حباب/سیال با کاهش دامنه نوسانات حباب همراه بوده‌اند،
- برای جلوگیری از افزایش بیش از حد حداکثر تنش شعاعی اعمالی از سوی سیال به بافت انعطاف‌پذیر لازم است سیال مورد نظر با رفتار نازک‌شوندگی غالب (عدد تیکسوتروپی بزرگ) و همچنین کشش سطحی فصل مشترک سیال/حباب مقادیر کوچک انتخاب شوند.

۶- ضمایم

ضرایب تقریب تفاضل محدود ارائه شده در معادله ۲۵ با توجه به گسسته‌سازی غیریکنواخت برای تقریب مشتق اول مکانی با خطای برشی گسسته‌سازی مرتبه دوم بصورت زیر نوشته شده‌اند:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2Z_1 - Z_2 - Z_3}{(Z_2 - Z_1)(Z_3 - Z_1)}; \\ b_1 &= \frac{(Z_3 - Z_1)}{(Z_2 - Z_1)(Z_3 - Z_2)}; \\ c_1 &= -\frac{(Z_3 - Z_2)(Z_3 - Z_1)}{Z_{i+1} - Z_i}; \\ a_i &= -\frac{(Z_i - Z_{i-1})(Z_{i+1} - Z_{i-1})}{Z_{i+1} - 2Z_i + Z_{i-1}}; \\ b_i &= \frac{(Z_i - Z_{i-1})(Z_{i+1} - Z_i)}{Z_i - Z_{i-1}}; \quad (\text{ض } ۱) \\ c_i &= \frac{(Z_{i+1} - Z_i)(Z_{i+1} - Z_{i-1})}{2 \leq i \leq n - 1}; \\ a_n &= \frac{2Z_n - Z_{n-1} - Z_{n-2}}{(Z_n - Z_{n-1})(Z_n - Z_{n-2})}; \\ b_n &= -\frac{(Z_n - Z_{n-1})(Z_{n-1} - Z_{n-2})}{Z_n - Z_{n-1}}; \\ c_n &= \frac{(Z_{n-1} - Z_{n-2})(Z_n - Z_{n-2})}{(Z_{n-1} - Z_{n-2})(Z_n - Z_{n-2})}; \end{aligned}$$

که در آن Z_i ها نقاط گسسته‌سازی هستند که با توجه به نیازمندی به تراکم بالای نقاط شبکه در نواحی نزدیک به سطح حباب و همچنین فصل مشترک سیال با روکش الاستیک از تقریب توزیع وزنی چبیشف با رابطه زیر استفاده شده‌است [۳۵]:

$$X_i = \cos\left((i-1)\frac{\pi}{n-1}\right) \quad (\text{ض } ۲)$$

تقویت می‌شوند و در نتیجه جریان اولیه را بطور کامل از حالت صرفاً شعاعی خارج می‌کنند [۳۴]. بررسی این موضوع خارج از حیطه‌ی پژوهش کنونی است و باید در یک پژوهش مستقل بررسی شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه اثرات رئولوژی حاکم بر سیال غیرنیوتنی تیکسوتروپیک بر دینامیک حباب گازی با فرض اینکه محیط پیرامون حباب، با ضخامت محدودی از سیال مذکور که در تماس مستقیم با روکش الاستیک از نوع خطی است، احاطه شود، بررسی گردید. برای شبیه‌سازی عددی معادلات حاکم (معادله حاکم بر دینامیک حباب کروی و معادله حاکم بر پارامتر ساختاری مدل مور) با تبدیل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم حاکم بر دینامیک حباب به دستگاه معادلات مرتبه اول به همراه معادلات دیفرانسیل زمانی مرتبه اول حاصل از گسسته‌سازی مکانی مرتبه دوم معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر پارامتر ساختاری مدل مور، در نهایت دستگاه معادلات دیفرانسیل زمانی مرتبه اول بدست آمد که با استفاده از حلگر MATLAB ODE23s حل گردید. نتایج حاصل از شبیه‌سازی یافته‌های زیر را پیشنهاد داده‌اند:

- افزایش هر یک از اعداد تیکسوتروپی و فروپاشی با افزایش دامنه نوسان شعاع حباب همراه بوده است،
- افزایش نسبت ویسکوزیته مدل مور با کاهش دامنه نوسان شعاع حباب همراه بوده است،
- افزایش الاستیسیته روکش الاستیک منجر به کاهش دامنه نوسان شعاع حباب و همچنین نزدیکی بیش از پیش شعاع تعادلی حباب به شعاع اولیه آن شده است،
- افزایش فاکتور هندسی مساله منجر به کاهش دامنه نوسان حباب گازی و نزدیک‌تر شدن شعاع تعادلی حباب به شعاع اولیه آن شده‌است،

- افزایش عدد رینولدز جریان با توجه به بقای جرم سیال محبوس بین حباب روکشدار و غشای الاستیک با افزایش دامنه نوسانات شعاع حباب همراه بوده است،
- افزایش عدد وبر با افزایش شدت نوسانات حباب و بطور همزمان با کاهش پاسخ تعادلی حباب همراه بوده است،

- [8] Rayleigh (1917) On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Philos Mag* 34: 94–98.
- [9] Plesset MS, Prosperetti A (1977) Bubble dynamics and cavitation. *Annu Rev Fluid Mech* 9: 145–185.
- [10] Wang QX, Blake JR (2010) Non-spherical bubble dynamics in a compressible liquid. Part 1. Travelling acoustic wave. *J Fluid Mech* 659: 191–224.
- [11] Wang QX, Blake JR (2011) Non-spherical bubble dynamics in a compressible liquid. Part 2. Acoustic standing wave. *J Fluid Mech* 679: 559–581.
- [12] Martynov S, Stride E, Saffari N (2009) The natural frequencies of microbubble oscillation in elastic vessels. *J Acoust Soc Am* 126(6): 2963–2972.
- [13] Duncan JH, Milligan CD, Zhang SG (1996) On the interaction between a bubble and a submerged compliant structure. *J Sound Vib* 197(1): 17–44.
- [14] Han R, Li S, Zhang AM, Wang QX (2016) Numerical modelling for three dimensional coalescence of two bubbles. *Phys Fluids* 28: 062104.
- [15] Vincent O, Marmottant P, Gonzalez-Avila SR, Ando RK, Ohl CD (2014a) The fast dynamics of cavitation bubbles within water confined in elastic solids. *J Soft Matter* 10: 1455–1461.
- [16] Vincent O, Marmottant P, Quinto-Su PA, Ohl CD (2012) Birth and growth of cavitation bubbles within water under tension confined in a simple synthetic tree. *Phys Rev Lett* 108(18): 184502.
- [17] Vincent O, Sessoms DA, Huber EJ, Guioth J, Stroock AD (2014b) Drying by cavitation and poroelastic relaxations in porous media with macroscopic pores connected by nanoscale throats. *Phys Rev Lett* 113(13): 134501.
- [18] Hamaguchi F, Ando K (2015) Linear oscillation of gas bubbles in a viscoelastic material under ultrasound irradiation. *Phys Fluids* 27: 113103.
- [19] Jimenez-Fernandez J, Crespo A (2005) Bubble oscillation and inertial cavitation in viscoelastic fluids. *Ultrasonics* 43(8): 643–651.
- [20] Yang WJ, Yeh HC (1966) Theoretical study of bubble dynamics in purely viscous fluids. *AIChE J* 12(5): 927–931.
- [21] Hua C, Johnsen E (2013) Nonlinear oscillations following the Rayleigh collapse of a gas bubble in a linear viscoelastic (tissue-like) medium. *Phys Fluids* 25(8): 083101.
- [22] Arefmanesh A, Madandar Arani M, Abbasian Arani A (2022) Dynamics of a bubble in a power-law fluid confined within an elastic solid. *Eur J Mech B Fluids* 94: 29–36.
- [23] Wang QX (2017) Oscillation of a bubble in a liquid confined in an elastic solid. *Phys Fluids* 29 (7): 072101.

$$; 1 \leq i \leq n$$

با توجه به محدود بودن دامنه تعریف معادله (ض ۲) در بازه $[-1, 1]$ نگاشت متناظر بین نقاط گسسته‌سازی Z_i و معادله (ض ۲) بصورت زیر تعریف شده‌است:

$$Z_{n-i+1} = Z_{\max} \frac{(1 + X_i)}{2} \quad (\text{ض ۳})$$

$$; 1 \leq i \leq n$$

که Z_{\max} کران بالا متناظر با ∞ است. شایان ذکر است با توجه به شبیه‌سازی‌های عددی پژوهش حاضر ملاحظه شده است که برای مقادیر $Z_{\max} > 90$ نتایج عددی مستقل از کران بالا خواهند بود. بر همین اساس در سرتاسر نتایج عددی متناظر که در این پژوهش آورده شده‌اند، از مقدار $Z_{\max} = 100$ استفاده شده‌است.

مراجع

- [1] Dollet B, Marmottant P, Garbin V (2019) Bubble dynamics in soft and biological matter. *Annu Rev Fluid Mech* 51: 331-355.
- [2] Mukundakrishnan K, Ayyaswamy PS, Eckmann DM (2009) Bubble motion in a blood vessel: shear stress induced endothelial cell injury. *J Biomech Eng* 31(7): 074516.
- [3] Dai B, Liu C, Liu S, Wang D, Wang Q, Zou T, Zhou X (2023) Life cycle techno-enviro-economic assessment of dual-temperature evaporation transcritical CO2 high-temperature heat pump systems for industrial waste heat recovery. *Appl Therm Eng* 219 Part B: 119570.
- [4] Nesser HJ, Karia DH, Tkalec W, Pandian NG (2002) Therapeutic ultrasound in cardiology. *Herz* 27(3): 269-278
- [۵] حسینی س، مهدی م (۱۳۹۸) بررسی عددی رفتار شعاعی و فشار انتشار یافته از میکرو حباب پوشش‌دار در مجاورت مرزهایی با الاستیسیته متفاوت در تصویربرداری فراصوت. دوفصلنامه مکانیک سیالات و آیرودینامیک ۸ (۲): ۵۹-۷۱
- [۶] نصری مر، فاتخاری یزدی م (۱۳۹۷) مطالعه عددی تاثیر اضافه کردن میکرو حباب‌ها بر کاهش درگ در جریان آشفته داخل کانال افقی. چهارمین کنفرانس سراسری دانش و فناوری مهندسی مکانیک و برق ایران. <https://civilica.com/doc/881990/>
- [۷] محمدنوری ن، ساقری چی‌ها م، سخاوت س (۱۳۸۵) مدلسازی اندرکنش بین میکرو حباب و جریان سیال با استفاده از گرده‌های تصادفی. دهمین کنفرانس دینامیک شاره‌ها. <https://civilica.com/doc/26357/>

- [30] Macosko CW (1994) Rheology, principles, measurements, and applications. Wiley-VCH, New York.
- [31] Amini Kafiabad H, Sadeghy K (2010) Chaotic behavior of a single spherical gas bubble surrounded by a Giesekus liquid: A numerical study. *J Nonnewton Fluid Mech* 165: 800-811.
- [32] Omale D, Ojih PB, Ogwo MO (2014) Mathematical analysis of stiff and non-stiff initial value problems of ordinary differential equation using Matlab. *IJSER* 5(9): 2229- 5518.
- [33] Zimmerman WBJ (2006) Multiphysics modeling with finite element methods. World Scientific, Singapore.
- [34] Drazin PG, Reid WH (1981) Hydrodynamic stability. Cambridge university press, Cambridge.
- [35] Boyd JP (2000) Chebyshev and fourier spectral methods. DOVER Publications, New York.
- [24] Huang CR, Fabsak W (1976) Thixotropic parameters of whole human blood. *Thromb Res* 8(2): 1-8.
- [25] Javadi E, Jamali S (2022) Thixotropy and rheological hysteresis in blood flow. *J Chem Phys* 156: 084901.
- [26] Armstrong M, Rook K, Pulles W, Deegan M, Corrigan T (2021) Importance of viscoelasticity in the thixotropic behavior of human blood. *Rheol Acta* 60: 119-140.
- [27] Hosseinkhah N, Hynynen K (2012) A three-dimensional model of an ultrasound contrast agent gas bubble and its mechanical effects on micro vessels. *Phys Med Biol* 57: 785–808.
- [28] Hosseinkhah N, Chen H, Matula TJ, Burns PN, Hynynen K (2013) Mechanisms of micro bubble–vessel interactions and induced stresses: A numerical study. *J Acoust Soc Am* 134(3): 1875-1885.
- [29] Derksen JJ (2011) Simulations of Thixotropic Liquids. *Appl Math Model* 35(4):1656-1665.