مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۳/ دوره ۱۴/ شماره ۳/ صفحه ۴۳-۵۶

نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2024.14238.3842

پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با زمینه سرامیک-فلز مدرج تابعی تحت تحریک هارمونیک

محمود شادمانی[۱]، احمد افسری[۲]، رضا جاهدی[۳] و محمدجواد کاظم‌زاده پارسی[۳]

[۱] دانشجو دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی شیراز، شیراز، ایران

[۲] دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی شیراز، شیراز، ایران

[۳] استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی شیراز، شیراز، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۲/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۱۶

چکیده

مقاله حاضر به تحلیل پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با زمینه سرامیک-فلز مدرج تابعی که تحت بارگذاری هارمونیک قرار دارد می‌پردازد. نانولوله‌های کربنی با سه الگوی مختلف در راستای ضخامت پوسته مخروطی توزیع شده‌اند. ماده زمینه پوسته ترکیبی از فلز و سرامیک درنظرگرفته شده است که خواص آن در راستای ضخامت پوسته به صورت تابع توانی تغییر می‌کند. به منظور تحلیل دینامیکی این سیستم، ابتدا معادلات دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روابط کرنش-جابجایی ون کارمن استخراج می‌شوند. سپس به کمک روش گسسته‌سازی گالرکین، معادلات دیفرانسیل جزئی سیستم به معادلات دیفرانسیل معمولی تابع زمان تبدیل می‌گردند. برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی از روش عددی آدامز-بشفورث استفاده می‌شود. در نهایت، یک مطالعه پارامتری ارائه می‌شود تا اثرات پارامترهای مختلف سیستم همچون اندیس توانی، کسرحجمی و الگوی توزیع نانولوله های کربنی، نسبت‌های هندسی پوسته و دامنه نیروی تحریک روی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی بررسی گردد. به منظور اعتبارسنجی، نتایج مقاله حاضر با نتایج مراجع معتبر قبلی مقایسه و ارائه می‌شود.

کلمات کلیدی: پاسخ دینامیکی غیرخطی؛ پوسته مخروطی ناقص؛ نانولوله‌های کربنی مدرج تابعی؛ روش آدامز-بشفورث.

Nonlinear dynamic response of truncated conical shells reinforced with carbon nanotubes with functional graded ceramic-metal matrix under harmonic excitation

M. Shadmani[1], A. Afsari[2,*], R. Jahedi[3], and M.J. Kazemzadeh-Parsi[3]

[1] Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Shiraz branch, Shiraz, Iran.

[2] Assoc. Prof., Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Shiraz branch, Shiraz, Iran.

[3] Assit. Prof., Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Shiraz branch, Shiraz, Iran.

Abstract

This paper analyzes the nonlinear dynamic response of truncated conical shells reinforced with carbon nanotubes with functional graded ceramic-metal matrix subjected to harmonic excitation. Carbon nanotubes are distributed with three different patterns along the length and thickness of the conical shell. The matrix material of the shell is considered to be a combination of metal and ceramic, whose properties change as a power function along the thickness of the shell. In order to analyze the dynamic of this system, firstly, the nonlinear dynamic equations of the conical shell are derived based on the first order shear deformation theory and von Karman's strain-displacement relations. Then, with the help of Galerkin discretization method, partial differential equations of the system are converted into time-dependent ordinary differential equations. Adams-Bashforth numerical method is used to solve the system of nonlinear differential equations. Finally, a parametric study is presented to investigate the effects of some parameters of the system, such as the power index, volume fraction and distribution pattern of carbon nanotubes, the geometric characteristics of the shell, and amplitude of the excitation force on the nonlinear dynamic response of the conical shell. In order to validate, the results of this article are compared and presented with the results of previous valid references.

Keywords: Nonlinear dynamic response; Truncated conical shell; Functionally graded carbon nanotubes; Adams-Bashforth method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۷۱۳۶۴۱۰۰۴۱؛ فکس: ۰۷۱۳۶۴۱۰۰۵۹

آدرس پست الکترونیک: Ah.Afsari1338@iau.ac.ir

۱- مقدمه

پوسته‌های مخروطی به عنوان یک ساختار رایج متشکل از مواد مختلف به طور گسترده در بسیاری از سازه‌ها مانند مخازن تحت فشار، فضاپیماها، زیردریایی‌ها و سایر سازه‌های مهندسی استفاده می‌شوند. تجزیه و تحلیل کمانش، ارتعاشات و پاسخ دینامیکی پوسته‌های مخروطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از این رو مطالعات بسیاری در این زمینه انجام شده است. بچکارو و همکاران [۱] بر اساس تئوری کلاسیک، ارتعاشات پوسته‌های مخروطی ناقص حاوی سیال را با استفاده از روش روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته بررسی کردند. باقری و همکاران [۲] ارتعاشات آزاد پوسته‌های ترکیبی مخروطی-کروی را براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روش مربعات دیفرانسیل تعمیم‌یافته بررسی کردند. آمابیلی و بالاسوبرامانیان [۳] ارتعاشات اجباری غیرخطی پوسته‌های مخروطی کامپوزیتی چندلایه را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی اصلاح شده بررسی کردند. چای و وانگ [۴] یک رویکرد کلی برای تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی-استوانه‌ای در حال چرخش با شرایط مرزی دلخواه براساس تئوری پوسته دانل ارائه کردند. بختیاری و همکاران [۵] ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های ناقص مخروطی را براساس سه تئوری مختلف دانل، سندرز و نمث تحلیل کردند و اثر پارامترهای مختلف را روی رفتار ارتعاشات غیرخطی بررسی نمودند.

مواد مدرج تابعی در صنعت به دلیل ویژگی‌ها و خواص منحصر به فرد خود اهمیت زیادی دارند. این مواد، که در ساختار خود تغییرات پیوسته و تدریجی در خواص دارند، در بسیاری از صنایع مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ بنابراین، به دلیل اهمیت ویژه این مواد، مطالعات زیادی روی رفتار دینامیکی و ارتعاشی سازه‌های از این جنس انجام شده‌است. به عنوان مثال، علی‌مرادزاده و همکاران [۶] دینامیکی غیرخطی تیرهای مدرج تابعی تحت نیروی درحال حرکت را براساس تئوری اولر-برنولی بررسی کردند. همچنین در تحقیقی دیگر، علی‌مرادزاده و همکاران [۷] ارتعاشات غیرخطی میکروتیرهای مدرج تابعی که روی بستر الاستیک غیرخطی قرار داشتند را براساس تئوری تنش کوپلی بهبودیافته بررسی کردند. در زمینه ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی، هاشمی و جعفری [۸] تحلیل ارتعاشات غیرخطی صفحات مستطیلی مدرج تابعی با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روش لیندشتد-پوانکاره اصلاح شده را بررسی کرده‌اند. هاشمی و جعفری [۹] تأثیر سیال بر فرکانس غیرخطی اولیه صفحات مستطیلی مدرج تابعی را با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روش لیندشتد-پوانکاره اصلاح شده بررسی کرده‌اند. هاشمی و همکاران [۱۰] ارتعاشات آزاد ورق حلقوی مدرج تابعی با مرزهای الاستیکی را تحلیل کردند که روی بسترالاستیک وینکلر قرار داشت. در زمینه پوسته‌های مخروطی مدرج تابعی، شادمانی و همکاران [۱۱] ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته‌های مخروطی از جنس مواد مدرج تابعی با خواص متغیر در دوجهت را به کمک روش لیندشتد پوانکاره بهبودیافته بررسی کردند. در تحقیقی دیگر، شادمانی و همکاران [۱۲] اثر محیط حرارتی را روی فرکانس طبیعی غیرخطی پوسته‌های مخروطی مدرج تابعی دوجهته بررسی کردند. یوسف‌تبار و همکاران [۱۳] به کمک روش تعادل هارمونیکی و براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، اثر تخلخل با توزیع یکنواخت و غیریکنواخت را بر فرکانس طبیعی غیرخطی پوسته‌های مخروطی مدرج تابعی دوجهته بررسی کردند.

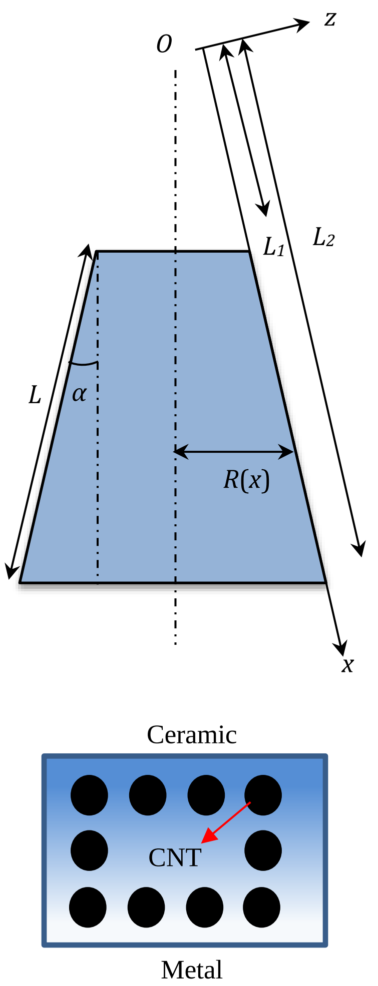
در سال ۱۹۹۱، نانولوله‌های کربنی کشف شدند و درست پس از آن، محققان و صنعت‌گران متوجه خواص الکتریکی، حرارتی و مکانیکی قابل توجه این مواد شدن. نانولوله‌های کربنی به دلیل استحکام بالا، سختی بالا، وزن کم و نسبت ابعاد بزرگ، به عنوان یک تقویت‌کننده موثر در نظر گرفته شده‌اند. از این رو، تحقیقات زیادی روی رفتار ارتعاشاتی و دینامیکی سازه‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی انجام شده‌است. بابایی و جعفری [۱۴] اثر محیط حرارتی را بر ارتعاشات آزاد پوسته‌های ترکیبی استوانه‌ای-مخروطی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی براساس فرضیات لاو بررسی کردند. بیشه [۱۵] ویژگی‌های ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی لایه‌ای هوشمند که روی بسترهای الاستیک با مدار باز قرار دارند را تحلیل کردند. ژائو و همکاران [۱۶] به تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد پانل استوانه ای ترکیبی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی و نانوذرات گرافن پرداختند که توسط بسترهای الاستیک احاطه شدند. وو و همکاران [۱۷] ارتعاشات اجباری غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله کربنی مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. آنسپنسکی و همکاران

[۱۸] ارتعاشات پوسته‌های ساندویچی استوانه‌ای با هسته لانه زنبوری پرداخت شده با رسوب ذوب شده و ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی را بررسی کردند. در یک مطالعه مروری، چاکرابورتی و همکاران [۱۹] تأثیر نانولوله‌های کربنی بر پایداری و ویژگی‌های ارتعاشی صفحات و پانل‌های قرار گرفته در محیط حرارتی را بررسی کردند. خلف و حسن [۲۰] ارتعاشات اجباری غیرخطی قطعات پوسته حلقوی نانوکامپوزیتی ترکیبی سه فازی مدرج تابعی تقویت‌شده توسط نانولوله‌های کربنی و نانوپلاکت‌های گرافن را تحلیل کردند.

تحقیقات موجود نشان می‌دهد که افزودن نانولوله‌های کربنی به فلزات، سرامیک‌ها و پلیمرها می‌تواند به طور قابل توجهی خواص آن‌ها را بهبود بخشد. بر اساس این مزایا، مواد DFG-CNT متشکل از نانولوله‌های کربنی و مواد مدرج تابعی با پایه سرامیک-فلز می‌تواند خواص مکانیکی ساختار پوسته مواد مدرج تابعی را تا حد زیادی بهبود بخشد. با مرور ادبیات پیشین مشخص گردید که تاکنون پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با زمینه سرامیک-فلز مدرج تابعی گزارش نشده‌است که تحت تحریک هارمونیک قرار دارند؛ بنابراین، مطالعه حاضر بررسی جدیدی را در مورد اثر مواد DFG-CNT بر رفتار دینامیکی غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص معرفی می‌کند. نانولوله‌های کربنی با سه الگوی مختلف در راستای ضخامت پوسته مخروطی توزیع شده‌اند. به منظور تحلیل دینامیکی این سیستم، ابتدا معادلات دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روابط کرنش-جابجایی ون کارمن استخراج و سپس به کمک روش گالرکین و روش عددی آدامز-بشفورث حل می‌شوند. در نهایت، اثرات اندیس توانی، کسرحجمی و الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی، مشخصات هندسی پوسته، فرکانس و دامنه نیروی تحریک روی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی بررسی می گردد.

۲- مدل‌سازی هندسی پوسته مخروطی

شکل۱ شماتیک یک پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله های کربنی با ماده زمینه سرامیک و فلز با طول L، شعاع کوچک R_1، شعاع بزرگ R_2، ضخامت h و زاویه مخروط α را نشان می‌دهد. مبداء مختصات استوانه‌ای (x,θ,z) روی محور گذرنده از لایه میانی پوسته و روی نقطه O واقع شده است. همانطور که از این شکل مشخص است، مختصات x و z به ترتیب نشان‌دهنده جهت طول پوسته و جهت عمود برسطح پوسته مخروطی از مبداء مختصات هستند. به علاوه، شکل۱ نشان می‌دهد که ماده زمینه پوسته از دو فاز فلزی و سرامیکی تشکیل شده است که خواص آن در راستای ضخامت پوسته به صورت مدرج تابعی تغییر می‌کند که قسمت فلزی با رنگ آبی و قسمت سرامیکی با رنگ سفید نشان داده شده‌است؛ همچنین نانو لوله‌های کربنی در درون ماده زمینه و در راستای ضخامت پوسته توزیع شده‌اند.



شکل ۱- شماتیک پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با ماده زمینه سرامیک و فلز

۳- خواص مکانیکی سازه

پوسته مخروطی کامپوزیتی مورد مطالعه از دو فاز ماده زمینه و تقویت‌کننده تشکیل شده‌است که ماده زمینه (ماتریس) ترکیبی از سرامیک و فلز بوده که خواص آن در راستای ضخامت پوسته متغیر است. نانولوله‌های کربنی نقش تقویت‌کننده را ایفا می‌کنند که به درون ماده زمینه تزریق می‌گردند. توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت پوسته به صورت مدرج تابعی است. لازم به ذکر است که در این تحقیق چهار نوع تابع مختلف برای الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت پوسته درنظر گرفته شده‌است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود. خواص مکانیکی پوسته تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با ماده زمینه سرامیک و فلز به‌صورت زیر بیان می‌گردند [۲۱]:

$$E_{11}(z) = \eta_1 V_{CNT}(z) E_{11}^{CNT} + V_{matrix} E^{matrix}(z) \qquad (۱)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}(z)} = \frac{V_{CNT}(z)}{E_{22}^{CNT}} + \frac{V_{matrix}}{E^{matrix}(z)} \qquad (۲)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}(z)} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}} + \frac{V_{matrix}}{G^{matrix}(z)} \qquad (۳)$$

$$\nu_{12}(z) = V_{CNT}(z) \nu_{12}^{CNT} + V_{matrix} \nu^{matrix}(z) \qquad (۴)$$

$$\nu_{21}(z) = \frac{\nu_{12}(z)}{E_{11}(z)} E_{22}(z) \qquad (۵)$$

$$\rho(z) = V_{CNT}(z) \rho^{CNT} + V_{matrix} \rho^{matrix}(z) \qquad (۶)$$

که در روابط بالا E_{11}^{CNT}، E_{22}^{CNT}، G_{12}^{CNT}، ν_{12} و ρ^{CNT} به ترتیب مدول یانگ در جهت طول، مدول یانگ در جهت عرض، مدول برشی، ضریب پواسان و چگالی نانولوله‌های کربنی می‌باشند؛ همچنین E^{matrix}، G^{matrix}، ν^{matrix} و ρ^{matrix} به‌ترتیب بیانگر مدول یانگ، مدول برشی، ضریب پواسان و چگالی ماده زمینه (ماتریس) هستند. به‌علاوه، η_j پارامتر کارایی نانولوله‌های کربنی هستند؛ همچنین V_{matrix} و V_{CNT} به‌ترتیب کسر حجمی ماده زمینه و نانولوله‌های کربنی می‌باشند که بایستی در رابطه قانون مخلوط‌ها صدق کنند:

$$V_{CNT} + V_{matrix} = 1 \qquad (۷)$$

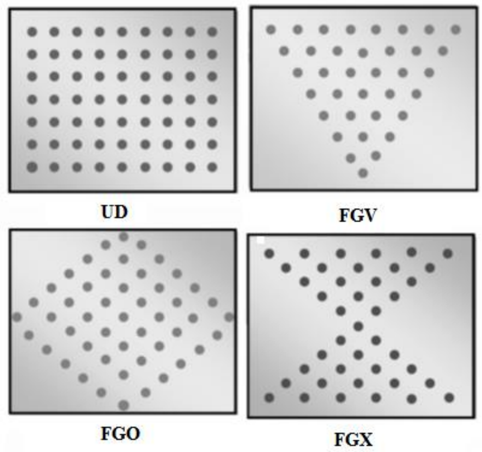
همچنین خواص مکانیکی ماده زمینه پوسته به صورت زیر است [۲۲]:

$$E^{matrix}(z) = E_m + (E_c - E_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{N_z} \qquad (۸)$$

$$\rho^{matrix}(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{N_z} \qquad (۹)$$

$$\nu^{matrix}(z) = \nu_m + (\nu_c - \nu_m)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{N_z} \qquad (۱۰)$$

که زیروند c و m به‌ترتیب مربوط به فاز سرامیک و فلز است. همچنین، ضریب N_z اندیس توانی ماده زمینه مدرج تابعی است. با توجه به شکل۲، برای توزیع نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق چهار نوع تابع با توزیع‌های UD، FGV، FGO و FGX در نظرگرفته شده‌است.



شکل ۱- انواع الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی

توابع مربوط به انواع الگوی توزیع نانوذرات در روابط (۱۱) نشان داده شده‌است [۲۱]:

$$\begin{aligned} &UD:\ V_{cnt} = V_{CNT}^{*} \\ &FGV:\ V_{cnt}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right) V_{CNT}^{*} \\ &FGO:\ V_{cnt} = 2V_{CNT}^{*}\left(1 - \frac{|z|}{h}\right) \\ &FGX:\ V_{cnt} = 2V_{CNT}^{*}\left(\frac{|z|}{h}\right) \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که در رابطه (۱۱) ضریب V_{CNT}^{*} به صورت زیر است [۲۱]:

$$V_{CNT} = V_{CNT}^{*} = \frac{\Lambda_{CNT}}{\Lambda_{CNT} + \left(\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}\right) - \left(\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}\right) \Lambda_{CNT}} \qquad (۱۲)$$

که Λ_{CNT} در رابطه (۱۲) نشان‌دهنده کسر جرمی نانولوله‌های کربنی است.

۴- معادلات حاکم بر سیستم

جابجایی های طولی (U) محیطی (V) و جانبی (W) یک نقطه دلخواه روی پوسته مخروطی ناقص براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۳]:

$$U(x,\theta,z,t) = u(x,\theta,t) + z\phi_{xx}(x,\theta,t)$$
$$V(x,\theta,z,t) = v(x,\theta,t) + z\phi_{\theta\theta}(x,\theta,t) \qquad (۱۳)$$
$$W(x,\theta,z,t) = w(x,\theta,t)$$

که u، v، و w جابجایی‌های نقطه دلخواه روی سطح میانی پوسته مخروطی به ترتیب در جهت x، θ و z می‌باشند. همچنین ϕ_{xx} و $\phi_{\theta\theta}$ به ترتیب چرخش حول محور x و θ می‌باشند؛ همچنین پارامتر t زمان است. مولفه‌های کرنش براساس روابط کرنش-جابجایی ون‌کارمن به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۴]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial \phi_{xx}}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u + z\phi_{xx}}{x} + \frac{csc(\alpha)\frac{\partial v}{\partial \theta}}{x} + \frac{csc^2(\alpha)\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2}{2x^2} + \frac{cot(\alpha)w}{x} + \frac{zcsc(\alpha)\frac{\partial \phi_{\theta\theta}}{\partial \theta}}{x}$$
$$\gamma_{x\theta} = \frac{csc(\alpha)\frac{\partial u}{\partial \theta}}{x} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v + z\phi_{\theta\theta}}{x} + \frac{csc(\alpha)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta}}{x} + \frac{zcsc(\alpha)\frac{\partial \phi_{xx}}{\partial \theta}}{x} + z\frac{\partial \phi_{\theta\theta}}{\partial x} \qquad (۱۴)$$
$$\gamma_{\theta z} = -\frac{cot(\alpha)v}{x} + \frac{csc(\alpha)\frac{\partial w}{\partial \theta}}{x} + \phi_{\theta\theta}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_{xx}$$

که ε و γ به ترتیب کرنش های عمودی و برشی هستند. روابط تنش-کرنش برای مواد ایزوتروپیک براساس قانون هوک به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۳]:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{\theta\theta}\\ \tau_{\theta z}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{x\theta}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_{xx}\\ \epsilon_{\theta\theta}\\ \gamma_{\theta z}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{x\theta}\end{pmatrix} \qquad (۱۵)$$

که مولفه‌های سختی متغیر Q_{ij} به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۵]:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \qquad Q_{12} = \nu Q_{11} \qquad (۱۶)$$
$$Q_{44}(x,z) = Q_{55}(x,z) = Q_{66}(x,z) = \frac{E(x,z)}{2(1+\nu)} \qquad (۱۷)$$

انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروی خارجی پوسته مخروطی ناقص به صورت زیر بیان می‌شود [۲۳]:

$$VE = \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta} + \tau_{\theta z}\gamma_{\theta z} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{x\theta}\gamma_{x\theta})\, R(x)\, dzd\theta dx \qquad (۱۸)$$
$$KE = \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(x,z)\left(\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right)R(x)\, dzd\theta dx \qquad (۱۹)$$
$$PE = \int_{L_1}^{L_2}\int_0^{2\pi} F\, Wd\theta dx = 0 \qquad (۲۰)$$

که $R(x)=xsin(\alpha)$ و $F=F_0\ sin(\Omega t)$ است. معادلات حاکم برسیستم براساس اصل هامیلتون به صورت زیر استخراج می‌شود [۲۵]:

$$\int_0^T (\delta VE + \delta PE - \delta KE)\, dt = 0 \qquad (۲۱)$$

که T دوره زمانی است. با جایگذاری معادلات (۷) تا (۱۸) در معادلات (۱۹) تا (۲۰) و جایگذاری نتیجه در معادله (۲۱) و استفاده از انتگرال‌های جزء‌به‌جزء و با برابر با صفر قرار دادن ضرایب ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta\phi_{xx}, \delta\phi_{\theta\theta}$) معادلات حاکم برسیستم به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$-\frac{sin(\alpha)\, N_{\theta\theta}}{R(x)} + \frac{\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta}}{R(x)} + \frac{sin(\alpha)\, N_{xx}}{R(x)} + \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_0\ddot{u} + I_1\ddot{\phi}_{xx} \qquad (۲۲)$$
$$\frac{\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta}}{R(x)} + \frac{2sin(\alpha)N_{x\theta}}{R(x)} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{cos(\alpha)Q_{\theta\theta}}{R(x)} = I_0\ddot{v} + I_1\ddot{\phi}_{\theta\theta} \qquad (۲۳)$$

$$\frac{2N_{x\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}}{R(x)} + \frac{N_{\theta\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}}{R(x)^2} + \frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial\theta}}{R(x)^2} + \frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}}{R(x)} + \frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial\theta}}{R(x)} + \frac{sin(\alpha)N_{xx}\frac{\partial w}{\partial x}}{R(x)} - \frac{cos(\alpha)\,N_{\theta\theta}}{R(x)} + N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\frac{\partial Q_{\theta\theta}}{\partial\theta}}{R(x)} + \frac{sin(\alpha)\,Q_{xx}}{R(x)} + \frac{\partial Q_{xx}}{\partial x} + F = I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{۲۴}$$

$$\frac{\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial\theta}}{R(x)} + \frac{M_{xx} - M_{\theta\theta}}{x} + \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_{xx} = I_1\ddot{u} + I_2\ddot{\phi}_{xx} \tag{۲۵}$$

$$\frac{\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial\theta}}{R(x)} + \frac{2sin(\alpha)M_{x\theta}}{R(x)} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - Q_{\theta\theta} = I_1\ddot{v} + I_2\ddot{\phi}_{\theta\theta} \tag{۲۶}$$

که در روابط بالا N نیروهای منتجه، M ممان‌های منتجه، Q نیروهای برشی منتجه و I ترم های اینرسی پوسته مخروطی ناقص می‌باشند که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} dz \tag{۲۷}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} z dz \tag{۲۸}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = K \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} dz \tag{۲۹}$$

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho(x,z) dz \tag{۳۰}$$

که K ضریب اصلاح برشی بوده و برابر با ۰/۸ درنظر گرفته شده‌است [۸]. با جایگذاری معادله(۶) و (۱۵) در معادلات (۲۷) تا (۳۰) و جایگذاری نتیجه در معادلات (۲۲) تا (۲۶)، معادلات حاکم برسیستم برحسب مولفه‌های جابجایی پوسته بدست می‌آیند:

$$S_{11}(u) + S_{12}(v) + S_{13}(w) + S_{14}(\phi_{xx}) + S_{15}(\phi_{\theta\theta}) + P_1 = I_0\ddot{u} + I_1\ddot{\phi}_{xx} \tag{۳۱}$$

$$S_{21}(u) + S_{22}(v) + S_{23}(w) + S_{24}(\phi_{xx}) + S_{25}(\phi_{\theta\theta}) + P_2 = I_0\ddot{v} + I_1\ddot{\phi}_{\theta\theta} \tag{۳۲}$$

$$S_{31}(u) + S_{32}(v) + S_{33}(w) + S_{34}(\phi_{xx}) + S_{35}(\phi_{\theta\theta}) + P_3 + F = I_0\ddot{w} \tag{۳۳}$$

$$S_{41}(u) + S_{42}(v) + S_{43}(w) + S_{44}(\phi_{xx}) + S_{45}(\phi_{\theta\theta}) + P_4 = I_1\ddot{u} + I_2\ddot{\phi}_{xx} \tag{۳۴}$$

$$S_{51}(u) + S_{52}(v) + S_{53}(w) + S_{54}(\phi_{xx}) + S_{55}(\phi_{\theta\theta}) + P_5 = I_1\ddot{v} + I_2\ddot{\phi}_{\theta\theta} \tag{۳۵}$$

که ضرایب S_{ij} و P_i به ترتیب اپراتورهای مشتقی خطی و غیرخطی معادلات اخیر هستند که در پیوست الف ارائه شده‌اند. همچنین ضرایب متغیر سفتی کششی (A_{ij})، کوپل خمش و کشش (B_{ij}) و خمشی (D_{ij}) که درون معادلات اخیر هستند، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\left(A_{ij}(x), B_{ij}(x), D_{ij}(x)\right) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(x.z)(1, z, z^2)dz \tag{۳۶}$$

شرایط‌مرزی پوسته مخروطی روی لبه های کوچک و بزرگ آن به صورت زیر برقرار هستند:

$$at\ \ x = L_1, L_2 \quad v = w = N_{xx} = M_{xx} = M_{x\theta} = 0 \tag{۳۷}$$

شرایط‌مرزی هندسی از روابط زیر ارضاء می‌شوند:

$$u(x,\theta,t) = U(t)\,cos\left(\frac{m\pi(x - L_1)}{L}\right)cos(n\theta) \tag{۳۸}$$

$$v(x,\theta,t) = V(t)\,sin\left(\frac{m\pi(x - L_1)}{L}\right)sin(n\theta) \tag{۳۹}$$

$$w(x,\theta,t) = W(t)\,sin\left(\frac{m\pi(x - L_1)}{L}\right)cos(n\theta) \tag{۴۰}$$

$$\phi_{xx}(x,\theta,t) = X(t)\,cos\left(\frac{m\pi(x - L_1)}{L}\right)cos(n\theta) \tag{۴۱}$$

$$\phi_{\theta\theta}(x,\theta,t) = Y(t)\,sin\left(\frac{m\pi(x - L_1)}{L}\right)sin(n\theta) \tag{۴۲}$$

که n و m به ترتیب شماره شکل مود محیطی و طولی است. به منظور عمومی‌سازی مساله، پارامترهای بدون بعد زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{gathered} (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) = \frac{(U, V, W)}{h}, \qquad \tau = \frac{t}{h}\sqrt{\frac{D_c}{I_c}} \\ \bar{x} = \frac{x}{L}, \qquad \overline{L_1} = \frac{L_1}{L}, \qquad \overline{L_2} = \frac{L_2}{L}, \quad H = \frac{h}{L} \\ (a_{ij}, b_{ij}, d_{ij}) = \left(\frac{A_{ij}h^2}{D_c}, \frac{B_{ij}h}{D_c}, \frac{D_{ij}}{D_c}\right), \\ (I_0, I_1, I_2) = \left(\frac{I_0}{I_c}, \frac{I_1}{I_c h}, \frac{I_2}{I_c h^2}\right), \bar{F} = \frac{Fh}{D_c} \end{gathered} \tag{۴۳}$$

باجایگذاری معادلات (۳۸) تا (۴۲) در معادلات (۳۱) تا (۳۵) و بی‌بعدسازی و سپس اعمال روش گالرکین، معادلات غیرخطی دیفرانسیل جزئی سیستم به معادلات دیفرانسیل معمولی تابع زمان تبدیل می‌شوند:

$$L_{11}\bar{U} + L_{12}\bar{V} + L_{13}\bar{W} + L_{14}X + L_{15}Y + N_{11}\bar{W}^2 = I_0\ddot{u} + I_1\ddot{\phi}_{xx} \quad (۴۴)$$

$$L_{21}\bar{U} + L_{22}\bar{V} + L_{23}\bar{W} + L_{24}X + L_{25}Y + N_{21}\bar{W}^2 = I_0\ddot{v} + I_1\ddot{\phi}_{\theta\theta} \quad (۴۵)$$

$$\begin{aligned} L_{31}\bar{U} + L_{32}\bar{V} + L_{33}\bar{W} + L_{34}X + L_{35}Y + N_{31}\bar{U}\bar{W} \\ + N_{32}\bar{V}\bar{W} + N_{33}\bar{W}^2 \\ + N_{34}\bar{W}^3 + N_{35}X\bar{W} \\ + N_{36}Y\bar{W} + \bar{F} + L_{36}\ddot{\bar{W}} = 0 \end{aligned} \quad (۴۶)$$

$$L_{41}\bar{U} + L_{42}\bar{V} + L_{43}\bar{W} + L_{44}X + L_{45}Y + N_{41}\bar{W}^2 = I_1\ddot{u} + I_2\ddot{\phi}_{xx} \quad (۴۷)$$

$$L_{51}\bar{U} + L_{52}\bar{V} + L_{53}\bar{W} + L_{54}X + L_{55}Y + N_{51}\bar{W}^2 = I_1\ddot{v} + I_2\ddot{\phi}_{\theta\theta} \quad (۴۸)$$

که L_{ij} و N_{ij} به ترتیب ضرایب بدون بعد خطی و غیرخطی که تابع جنس و هندسه سیستم است.

برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی پوسته مخروطی، کافیست ابتدا از ترم‌های غیرخطی معادلات (۴۴) تا (۴۸) صرف نظر شود و سپس ماتریس زیر محاسبه شود:

$$\begin{bmatrix} L_{11}+I_0\omega^2 & L_{12} & L_{13} & L_{14}+I_1\omega^2 & L_{15} \\ L_{21} & L_{22}+I_0\omega^2 & L_{23} & L_{24} & L_{25}+I_1\omega^2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33}+I_0\omega^2 & L_{34} & L_{35} \\ L_{41}+I_1\omega^2 & L_{42} & L_{43} & L_{44}+I_2\omega^2 & L_{45} \\ L_{51} & L_{52}+I_1\omega^2 & L_{53} & L_{54} & L_{55}+I_2\omega^2 \end{bmatrix} \quad (۴۹)$$

با برابر با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس معادله (۴۹)، معادله مشخصه سیستم بدست می‌آید که از حل آن فرکانس‌های طبیعی پوسته محاسبه می‌گردند.

۵- پاسخ دینامیکی غیرخطی

۵-۱- روش آدامز-بشفورث

در این قسمت به منظور محاسبه پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته که تحت بارگذاری هارمونیک سینوسی قرار دارد از روش عددی آدامز-بشفورث استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، دستگاه معادلات (۴۴) تا (۴۸) به کمک این روش حل می‌گردد. روش آدامز-باشفورث یک روش صریح است که حل یک معادله دیفرانسیل معمولی را با برون‌یابی از مقادیر قبلی تقریب می‌زند. با این حال، می‌توان آن را برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان با استفاده از تکنیک‌های گسسته سازی فضایی مانند روش‌های تفاضل محدود یا اجزا محدود گسترش داد. در ادامه، الگوریتم حل روش آدامز-بشفورث ارائه می‌شود:

یک مسئله مقدار اولیه به شکل زیر درنظرگرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y'(t) &= f(t, y(t)) \end{aligned} \quad (۵۰)$$

که در آن f مشتق تابع مجهول y نسبت به t است و شرط اولیه مقدار y را در زمان اولیه t_0 مشخص می‌کند. روش آدامز-بشفورث از مجموعه‌ای از مقادیر راه حل قبلی برای تقریب مقدار فعلی استفاده می‌کند. این یک روش چند مرحله‌ای است که برای محاسبه مقدار راه حل بعدی به چندین مقدار راه حل قبلی نیاز دارد. فرض کنید، مقادیر حل y_i را برای $t = t_0, t_1, ..., t_i$ محاسبه شده و می‌خواهیم y_{i+1} را برای مرحله زمانی بعدی محاسبه کنیم. فرمول آدامز-بشفورث برای مقدار حل بعدی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$y_{i+1} = y_i + dt \times (\beta_0 \times f(t_i, y_i) + \beta_1 \times f(t_{i-1}, y_{i-1}) + \beta_k \times f(t_{k-1}, y_{k-1})) \quad (۵۱)$$

که در آن dt گام زمانی است، و β_k ضرایبی هستند که به مرتبه خاص روش بستگی دارند. ضرایب β_k با درون‌یابی تابع $f(t, y)$ با استفاده از مقادیر حل‌شده قبلی تعیین می‌شوند. روش درون‌یابی مورد استفاده معمولا از نوع درون‌یابی چند جمله‌ای است، مانند درون‌یابی لاگرانژ یا نیوتن. پس از محاسبه y_{i+1}، برای بدست آوردن مقادیر حل برای مراحل زمانی بعدی تا زمانی تکرار می شود که بازه زمانی مورد نظر پوشش داده شود.

۶- نتایج و بحث

در این بررسی از آلومینیوم و آلومینا به ترتیب برای فاز فلزی و سرامیکی ماده زمینه (ماتریس) استفاده شده است که خواص مکانیکی آنها در جدول(۱) ارائه شده‌است؛ همچنین از نانولوهای کربنی تک‌جداره آرمچیر (۱۰،۱۰) به عنوان تقویت‌کننده استفاده شده‌است که خواص آن در جدول(۲) و پارامترهای کارایی در جدول (۳) مشخص شده‌اند.

جدول ۱- خواص مکانیکی فاز سرامیک و فلز

ماده	آلومینیوم	آلومینا
E (GPa)	۷۰	۳۸۰
ρ (Kg/m^3)	۲۷۰۲	۳۸۰۰
ν	۰/۳۳	۰/۲۱

جدول ۲- خواص مکانیکی نانولوله‌های کربنی [۲۱]

$E_{11}^{cnt}(Tpa)$	$E_{22}^{cnt}(Tpa)$	G_{12}^{cnt} (Tpa)	ρ^{cnt} $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$	v_{12}^{CNT}
۵/۶۴۶۶	۷/۰۸	۱/۹۴۴۵	۱۴۰۰	۰/۱۷۵

جدول ۳- پارامترهای کارایی نانولوله های کربنی [۲۱]

V_{CNT}^*	η_1	η_2	η_3
۰/۱۱	۰/۱۴۹	۰/۹۳۴	۰/۹۴۱
۰/۱۴	۰/۱۵۰	۰/۹۴۱	۰/۹۴۱
۰/۱۷	۰/۱۴۹	۱/۳۸۱	۰/۹۴۱

۶-۱- صحه‌گذاری نتایج

در این قسمت فرکانس‌های طبیعی خطی بدون‌بعد ($\lambda = \omega_L R_2\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$) پوسته مخروطی ناقص همگن برای مقادیر مختلف شماره شکل‌مود و زاویه رأس مخروط محاسبه شده و با نتایج مقالات قبلی مقایسه می‌گردد. نتایج این مقایسه درجدول۱ ارائه شده‌است. در این مقایسه ضرایب ثابت به صورت m=1, h/R_2=0.01, $L\ sin(\alpha)/R_2$=0.25 درنظرگرفته شده‌است. همان طور که از جدول۱ مشاهده می‌شود، نتایج از دقت بسیارخوبی برخوردار است. با این‌حال دلیل اختلاف ناچیز بین نتایج تحقیق حاضر و مرجع [۲۹] این است که مرجع [۲۹] از تئوری کلاسیک پوسته‌ها استفاده کرده‌است، اما در تحقیق حاضر از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول استفاده شده‌است که به‌دلیل درنظرگرفتن اثرات برشی پوسته، به مراتب از دقت بیشتری برخوردار است.

جدول ۲- اعتبارسنجی فرکانس طبیعی پوسته مخروطی

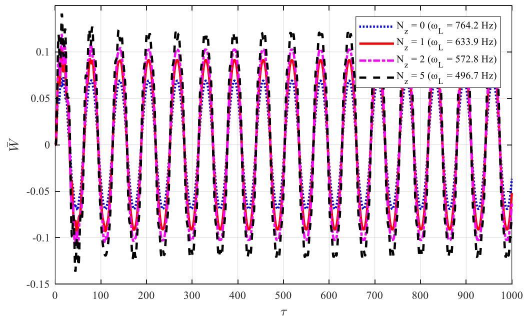
n	α=۴۵^o				
	حاضر	[۲۴]	[۲۶]	[۲۷]	[۲۸]
۲	۰/۷۶۶۱	۰/۷۶۵۶	۰/۶۸۷۹	۰/۷۶۴۲	۰/۷۶۵۵
۳	۰/۷۲۶۱	۰/۷۲۵۳	۰/۶۹۷۳	۰/۷۲۱۱	۰/۷۲۱۲
۴	۰/۶۸۴۹	۰/۶۸۳۸	۰/۶۶۶۴	۰/۶۷۴۷	۰/۶۷۳۹
۵	۰/۶۵۱۳	۰/۶۵۰۰	۰/۶۳۰۴	۰/۶۳۳۶	۰/۶۳۲۳
۶	۰/۶۳۲۰	۰/۶۳۰۶	۰/۶۰۳۲	۰/۶۰۴۹	۰/۶۰۳۵
n	α=۶۰^o				
	حاضر	[۲۴]	[۲۶]	[۲۷]	[۲۸]
۲	۰/۶۳۶۷	۰/۶۳۶۴	۰/۵۷۲۲	۰/۶۳۴۲	۰/۶۳۴۸
۳	۰/۶۳۰۰	۰/۶۲۹۶	۰/۶۰۰۱	۰/۶۲۳۶	۰/۶۲۳۸
۴	۰/۶۲۶۷	۰/۶۲۵۹	۰/۶۰۵۴	۰/۶۱۴۶	۰/۶۱۴۵
۵	۰/۶۳۰۵	۰/۶۲۹۵	۰/۶۰۷۷	۰/۶۱۱۳	۰/۶۱۱۱
۶	۰/۶۴۴۷	۰/۶۴۳۵	۰/۶۱۵۹	۰/۶۱۷۲	۰/۶۱۷۱

۶-۲- مطالعه پارامتری

پس از اعتبارسنجی مسأله و اطمینان از صحت نتایج در قسمت قبل، در این قسمت اثر پارامترهای مختلف پوسته مخروطی ناقص مدرج تابعی دوجهته روی پاسخ دینامیکی غیرخطی سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. منظور از پاسخ دینامیکی غیرخطی، جابجایی عرضی در راستای محور z که در شکل۱ نشان داده شده‌است است؛ همچنین موقعیت پاسخ در مرکز سطح خارجی پوسته یعنی موقعیت (x=L_1+L/2, z=0) می‌باشد. در این بررسی ضرایب ثابت به صورت m=n=1, F=1 MPa ،Ω=0.1 ،h/R_2=0.08, L_2=2, α=60º, V_{CNT}=0.28، N_z=2 درنظرگرفته شده‌اند و هرگونه استثنا در توضیحات هر نمودار ارائه می‌شود.

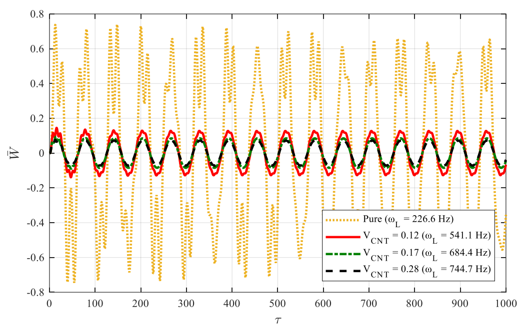
شکل ۳ نمودار پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی را برای مقادیر مختلف اندیس توانی نشان می‌دهد. همانطور که از این نمودار مشخص است، با افزایش اندیس توانی، فرکانس طبیعی پوسته کاهش می‌یابد. دلیل فیزیکی این کاهش در این است که با افزایش اندیس توانی، فاز سرامیکی ماده زمینه در پوسته کاهش و فاز فلزی آن افزایش می‌یابد و در نتیجه سفتی پوسته کاهش می‌یابد که به دنبال آن فرکانس طبیعی پوسته کاهش می‌یابد. به علاوه، از این نمودارها مشخص است که با افزایش اندیس توانی، دامنه نوسانات پوسته مستقل از الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی افزایش می‌یابد؛ چراکه با افزایش اندیس توانی انعطاف پذیری پوسته افزایش یافته و رفتار

نرم‌تری پیدا می‌کند و در نتیجه دامنه نوسانات آن افزایش می یابد.



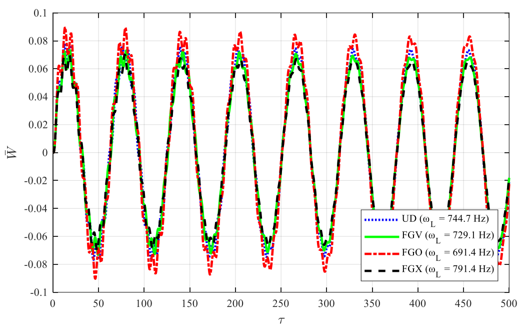
شکل ۳- اثر اندیس توانی روی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی

شکل۴ نمودار پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی را برای مقادیر مختلف کسرحجمی نانولوله‌های کربنی نشان می‌دهد. همانطور که از این نمودار مشخص است، با افزایش کسرحجمی نانولوله‌های کربنی، فرکانس طبیعی پوسته افزایش و دامنه نوسانات پاسخ کاهش می‌یابد. دلیل فیزیکی آن در این است که با افزایش کسرحجمی نانولوله‌های کربنی، سفتی پوسته افزایش می‌یابد که به دنبال آن فرکانس طبیعی پوسته افزایش و دامنه نوسانات پاسخ کاهش می‌یابد.



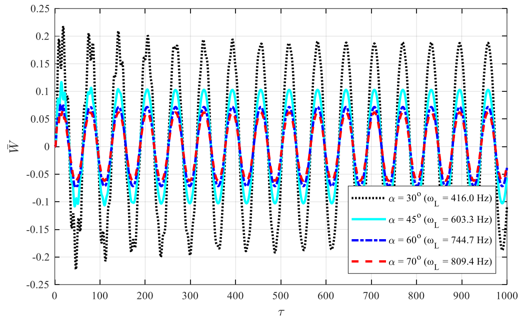
شکل ۴- اثر کسرحجمی نانولوله‌های کربنی روی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی

شکل۵ نمودار پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی را برای انواع الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی نشان می‌دهد. همانطور که از این نمودارها مشخص است، به‌ترتیب بیشترین و کمترین فرکانس طبیعی مربوط به الگوی توزیع FGX و FGO است. به علاوه، بیشترین و کمترین دامنه نوسانات به‌ترتیب مربوط به الگوی توزیع FGO و FGX است. در واقع، در الگوی توزیع FGX، توزیع نانولوله‌های کربنی در سطوح داخلی و خارجی پوسته مخروطی بیشتر از نواحی داخلی پوسته است که همین امر باعث شده تا در این نوع الگوی توزیع، سفتی پوسته به بیشترین مقدار خود رسیده و درنتیجه فرکانس طبیعی پوسته در این نوع الگوی توزیع بیشتر از مابقی الگوها می‌باشد و لذا دامنه نوسانات در این نوع الگوی توزیع کمتر از مابقی الگوها است. درمقابل، در الگوی توزیع FGO، توزیع نانولوله‌های کربنی در سطوح داخلی و خارجی پوسته مخروطی کمتر از نواحی داخلی پوسته است که همین امر باعث شده تا در این نوع الگوی توزیع، سفتی پوسته به کمترین مقدار خود رسیده و درنتیجه فرکانس طبیعی پوسته در این نوع الگوی توزیع کمتر از مابقی الگوها است و لذا دامنه نوسانات در این نوع الگوی توزیع بیشتر از مابقی الگوها است.



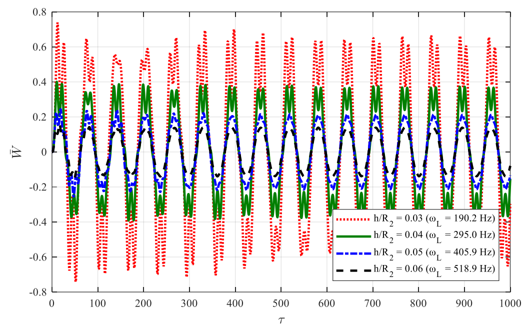
شکل ۵- اثر الگوی توزیع نانولوله‌های کربنی روی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی

شکل۶ نمودار پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی را برای مقادیر مختلف زاویه رأس مخروط نشان می‌دهد. همانطور که از این نمودار مشخص است، با افزایش زاویه رأس مخروط، فرکانس طبیعی پوسته افزایش و دامنه نوسانات پاسخ کاهش می‌یابد. دلیل فیزیکی آن در این است که با افزایش زاویه رأس مخروط، انعطاف‌پذیری و نرمی پوسته کاهش و درمقابل سفتی پوسته افزایش می‌یابد که به دنبال آن فرکانس طبیعی پوسته افزایش و دامنه نوسانات پاسخ کاهش می‌یابد.



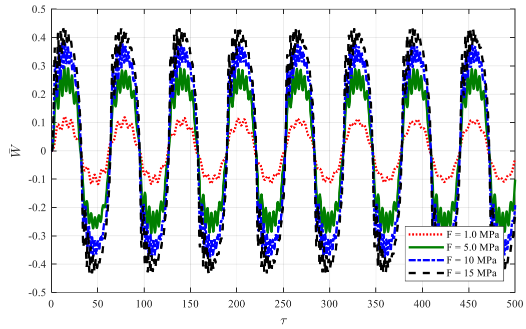
شکل ۶- اثر زاویه رأس مخروط روی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی

شکل۷ نمودار پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی را برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به شعاع بزرگ مخروط نشان می‌دهد. همانطور که از این نمودار مشخص است، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع بزرگ مخروط، فرکانس طبیعی پوسته افزایش و دامنه نوسانات پاسخ کاهش می‌یابد. دلیل فیزیکی آن در این است که با افزایش این نسبت هندسی، انعطاف‌پذیری و نرمی پوسته کاهش و درمقابل سفتی پوسته افزایش می‌یابد که به دنبال آن فرکانس طبیعی پوسته افزایش و دامنه نوسانات پاسخ کاهش می‌یابد.



شکل ۷- اثر نسبت ضخامت به شعاع بزرگ مخروط روی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی

شکل۸ نمودار پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی را برای مقادیر مختلف دامنه بارگذاری خارجی نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش دامنه بارگذاری خارجی، همانطور که انتظار می‌رفت، دامنه نوسانات پاسخ افزایش می یابد. در واقع افزایش دامنه بارگذاری منجر به افزایش خیز پوسته و یا افزایش دامنه نوسانات آن می‌شود.



شکل ۸- اثر دامنه بارگذاری خارجی روی پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی

۷- جمع‌بندی

در این تحقیق، به تحلیل پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با زمینه سرامیک–فلز مدرج تابعی پرداخته شده‌است. بدین منظور، ابتدا معادلات دینامیکی غیرخطی پوسته مخروطی براساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول و روابط کرنش–جابجایی ون کارمن استخراج و روش عددی آدامز–بشفورث حل شدند. خلاصه‌ای از نتایج در ادامه گزارش شده‌اند:

- افزایش اندیس توانی ماده زمینه، منجر به کاهش فرکانس طبیعی و افزایش دامنه نوسانات پوسته مخروطی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی می‌شود.
- وجود نانولوله‌های کربنی منجر به افزایش فرکانس طبیعی و کاهش دامنه نوسانات پوسته می‌شود، به طوری‌که افزایش کسرحجمی نانولوله‌های کربنی این تغییرات چشمگیرتر می‌شود.
- در بین انواع الگوهای توزیع نانولوله‌های کربنی، الگوی توزیع FGX دارای بیشترین فرکانس طبیعی و کمترین دامنه نوسانات است و در مقابل الگوی توزیع FGO دارای کمترین فرکانس طبیعی و بیشترین دامنه نوسانات است.
- افزایش زاویه رأس مخروط منجر به افزایش فرکانس طبیعی پوسته و کاهش دامنه نوسانات آن می‌شود.

- افزایش نسبت ضخامت به شعاع بزرگ پوسته منجر به افزایش فرکانس طبیعی پوسته و کاهش دامنه نوسانات آن می‌شود.
- افزایش دامنه بارگذاری خارجی منجر به افزایش دامنه نوسانات پوسته می‌شود.

۸- علائم، نشانه‌ها و ارقام

L	طول پوسته
R	شعاع پوسته
h	ضخامت پوسته
α	زاویه رأس پوسته
E	مدول الاستیسیته
I	ممان اینرسی جرمی
M	ممان خمشی منتجه
N	نیروی عمودی منتجه
Q	نیروی برشی منتجه
Q_{ij}	ضرایب سفتی
n	شماره نیم موج محیطی
m	شماره نیم موج طولی
$\O_x$	چرخش حول محور x
$\O_\theta$	چرخش حول محور θ
VE	انرژی کرنشی
KE	انرژی جنبشی
ρ	چگالی
ε	کرنش عمودی
γ	کرنشی برشی
τ	تنش برشی
σ	تنش عمودی
ν	ضریب پواسان
ω_L	فرکانس طبیعی خطی

۹- ضمایم

$$S_{11}=\frac{csc^2\alpha\,A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}}{x^2}-\frac{A_{22}u}{x^2}+A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial A_{11}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\frac{\partial A_{12}}{\partial x}u}{x}+\frac{A_{11}\frac{\partial u}{\partial x}}{x}$$

$$S_{12}=\frac{csc\alpha\,A_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha\,A_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta}}{x}-\frac{csc\alpha\,A_{22}\frac{\partial v}{\partial\theta}}{x^2}-\frac{csc\alpha\,A_{66}\frac{\partial v}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc\alpha\,\frac{\partial A_{12}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial\theta}}{x}$$

$$S_{13}=-\frac{cot\alpha\,A_{22}w}{x^2}+\frac{cot\alpha\,\frac{\partial A_{12}}{\partial x}w}{x}+\frac{cot\alpha\,A_{12}\frac{\partial w}{\partial x}}{x}$$

$$S_{14}=\frac{csc^2\alpha\,B_{66}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial\theta^2}}{x^2}-\frac{B_{22}\phi_{xx}}{x^2}+B_{11}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial B_{11}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}+\frac{B_{11}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}}{x}+\frac{\frac{\partial B_{12}}{\partial x}\phi_{xx}}{x}$$

$$S_{15}=\frac{csc\alpha\,B_{12}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha\,B_{66}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial x\,\partial\theta}}{x}-\frac{csc\alpha\,B_{22}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}}{x^2}-\frac{csc\alpha\,B_{66}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc\alpha\,\frac{\partial B_{12}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}}{x}$$

$$P_1=\frac{csc^2\alpha\,A_{12}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc^2\alpha\,A_{66}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}}{x^2}-\frac{csc^2\alpha\,A_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2}{2x^3}-\frac{csc^2\alpha\,A_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2}{2x^3}+\frac{csc^2\alpha\,A_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}}{x^2}+\frac{csc^2\alpha\,\frac{\partial A_{12}}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2}{2x^2}+A_{11}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial A_{11}}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{A_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}{2x}-\frac{A_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}{2x}$$

$$S_{21}=\frac{csc\alpha\,A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha\,A_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha\,A_{22}\frac{\partial u}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc\alpha\,A_{66}\frac{\partial u}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc\alpha\,\frac{\partial A_{66}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta}}{x}$$

$$S_{22}=-\frac{cot^2\alpha\,A_{44}v}{x^2}-\frac{A_{66}v}{x^2}+A_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial A_{66}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\frac{\partial A_{66}}{\partial x}v}{x}+\frac{A_{66}\frac{\partial v}{\partial x}}{x}+\frac{csc^2\alpha\,A_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}}{x^2}$$

$$S_{23}=\frac{cot\alpha\,csc\alpha\,A_{44}\frac{\partial w}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{cot\alpha\,csc\alpha\,A_{22}\frac{\partial w}{\partial\theta}}{x^2}$$

$$S_{24}=\frac{csc\alpha\,B_{12}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha\,B_{66}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha\,B_{22}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc\alpha\,B_{66}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc\alpha\,\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}}{x}$$

$$S_{25}=\frac{cot\alpha\,A_{44}\phi_{\theta\theta}}{x}+\frac{csc^2\alpha B_{22}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta^2}}{x^2}-\frac{B_{66}\phi_{\theta\theta}}{x^2}+B_{66}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial x^2}+\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial x}+\frac{B_{66}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial x}}{x}-\frac{\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\phi_{\theta\theta}}{x}$$

$$P_2=\frac{csc\alpha\,A_{12}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha\,A_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha\,A_{66}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{x}+\frac{csc\alpha\,A_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc^3\alpha\,A_{22}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}}{x^3}+\frac{csc\alpha\,\frac{\partial A_{66}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta}}{x}$$

$$S_{31}=-\frac{cot\alpha\frac{\partial u}{\partial x}A_{12}}{x}-\frac{cot\alpha u A_{22}}{x^2}$$

$$S_{32}=-\frac{cot\alpha\frac{\partial v}{\partial\theta}A_{22}csc\alpha}{x^2}-\frac{cot\alpha\frac{\partial v}{\partial\theta}A_{44}csc\alpha}{x^2}$$

$$S_{33}=\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}A_{44}csc^2\alpha}{x^2}+\frac{cot\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}wA_{12}}{x}-\frac{cot^2\alpha w A_{22}}{x^2}+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}A_{55}}{x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}A_{55}-A_{11T}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{A_{11T}\frac{\partial w}{\partial x}}{x}-\frac{\partial A_{11T}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta}A_{12}csc\alpha}{x}+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial x\,\partial\theta}B_{12}csc\alpha}{x}-\frac{\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial x}A_{66}csc\alpha}{x^2}$$
$$+\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}A_{66}csc\alpha}{x}-\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial x}B_{66}csc\alpha}{x^2}-\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}B_{66}csc\alpha}{x^2}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial x^2}B_{66}csc\alpha}{x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial A_{55}}{\partial x}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta}A_{66}csc\alpha}{x}+\frac{2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}A_{66}csc\alpha}{x}$$
$$+\frac{2\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}B_{66}csc\alpha}{x}-\frac{2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}B_{66}\phi_{\theta\theta}csc\alpha}{x^2}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial x\,\partial\theta}B_{66}csc\alpha}{x}+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}vA_{66}csc\alpha}{x^3}-\frac{2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}vA_{66}csc\alpha}{x^2}$$
$$-\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\phi_{\theta\theta}csc\alpha}{x^2}+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}B_{12}}{x}+\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}A_{11}}{x}+\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}A_{12}}{x}$$
$$+\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}uA_{22}csc^2\alpha}{x^3}+\frac{cot\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}wA_{22}csc^2\alpha}{x^3}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}B_{66}\phi_{\theta\theta}csc\alpha}{x^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\frac{\partial A_{11}}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial A_{11}}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial B_{11}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial A_{12}}{\partial x}u}{x}+\frac{cot\alpha\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial A_{12}}{\partial x}w}{x}+\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3A_{11}}{2x}$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}A_{11}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}A_{11}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}A_{11}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}B_{11}}{x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}B_{11}+\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}uA_{12}}{x}$$
$$+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial x^2}B_{11}+\frac{cot\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2A_{12}}{2x}$$
$$S_{41}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial B_{11}}{\partial x}+\frac{\frac{\partial B_{12}}{\partial x}u}{x}+\frac{\frac{\partial u}{\partial x}B_{11}}{x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}B_{11}-\frac{uB_{22}}{x^2}$$
$$+\frac{csc^2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}B_{66}}{x^2}$$
$$S_{42}=\frac{csc\alpha\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial B_{12}}{\partial x}}{x}+\frac{csc\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta}B_{12}}{x}-\frac{csc\alpha\frac{\partial v}{\partial\theta}B_{22}}{x^2}$$
$$-\frac{csc\alpha\frac{\partial v}{\partial\theta}B_{66}}{x^2}+\frac{csc\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta}B_{66}}{x}$$
$$S_{43}=\frac{cot\alpha\frac{\partial B_{12}}{\partial x}w}{x}+\frac{cot\alpha\frac{\partial w}{\partial x}B_{12}}{x}-\frac{cot\alpha wB_{22}}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial x}A_{55}$$
$$S_{44}=\frac{\partial D_{11}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}+\frac{\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}D_{11}}{x}+\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial x^2}D_{11}$$
$$+\frac{csc^2\alpha\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial\theta^2}D_{66}}{x^2}+\frac{\frac{\partial D_{12}}{\partial x}\phi_{xx}}{x}-\frac{D_{22}\phi_{xx}}{x^2}-A_{55}\phi_{xx}$$
$$S_{45}=\frac{csc\alpha\frac{\partial D_{12}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial x\,\partial\theta}D_{12}}{x}-\frac{csc\alpha\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}D_{22}}{x^2}$$
$$-\frac{csc\alpha\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}D_{66}}{x^2}+\frac{csc\alpha\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial x\,\partial\theta}D_{66}}{x}$$
$$P_4=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial B_{11}}{\partial x}+\frac{csc^2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\frac{\partial B_{12}}{\partial x}}{2x^2}+\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2B_{11}}{2x}$$
$$+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}B_{11}-\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2B_{12}}{2x}+\frac{csc^2\alpha\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}B_{66}}{x^2}$$
$$-\frac{csc^2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2B_{12}}{2x^3}+\frac{csc^2\alpha\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}B_{12}}{x^2}$$

$$-\frac{\csc^2(\alpha)A_{12T}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}}{x^2}-A_{12T}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{A_{12T}\frac{\partial w}{\partial x}}{x}-\frac{\partial A_{12T}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$-\frac{\csc^2(\alpha)A_{12T}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}}{x^2}$$
$$S_{34}=-\frac{cot\alpha\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}B_{12}}{x}+\frac{A_{55}\phi_{xx}}{x}+\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}A_{55}+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial B_{12}}{\partial x}\phi_{xx}}{x}$$
$$+\frac{\partial A_{55}}{\partial x}\phi_{xx}+\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}B_{12}\phi_{xx}}{x}-\frac{cot\alpha B_{22}\phi_{xx}}{x^2}$$
$$S_{35}=-\frac{cot\alpha\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}B_{22}csc\alpha}{x^2}+\frac{\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}A_{44}csc\alpha}{x}$$
$$P_3=\frac{3\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}A_{22}csc^4\alpha}{2x^4}+\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}A_{22}csc^3\alpha}{x^3}$$
$$+\frac{\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}A_{22}csc^3\alpha}{x^3}+\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}B_{22}csc^3\alpha}{x^3}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta^2}B_{22}csc^3\alpha}{x^3}+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\frac{\partial A_{12}}{\partial x}csc^2\alpha}{2x^2}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\frac{\partial A_{66}}{\partial x}csc^2\alpha}{x^2}+\frac{\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial A_{66}}{\partial x}csc^2\alpha}{x^2}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}csc^2\alpha}{x^2}-\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2A_{12}csc^2\alpha}{2x^3}$$
$$+\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}A_{12}csc^2\alpha}{2x^2}+\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}A_{12}csc^2\alpha}{2x^2}$$
$$+\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}A_{12}csc^2\alpha}{x^2}+\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial x}B_{12}csc^2\alpha}{x^2}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta}A_{12}csc^2\alpha}{x^2}+\frac{2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}A_{12}csc^2\alpha}{x^2}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial x\,\partial\theta}B_{12}csc^2\alpha}{x^2}+\frac{cot\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2A_{22}csc^2\alpha}{2x^3}$$
$$+\frac{\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}A_{22}csc^2\alpha}{x^3}+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}B_{22}csc^2\alpha}{x^3}+$$
$$\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}A_{66}csc^2\alpha}{x^2}+\frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}A_{66}csc^2\alpha}{x^2}$$
$$-\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}B_{66}csc^2\alpha}{x^3}+\frac{4\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}A_{66}csc^2\alpha}{x^2}$$
$$-\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2A_{66}csc^2\alpha}{x^3}+\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial w}{\partial x}A_{66}csc^2\alpha}{x^2}$$
$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}A_{66}csc^2\alpha}{x^3}+\frac{\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial A_{12}}{\partial x}csc\alpha}{x}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial\theta^2}B_{66}csc^2\alpha}{x^2}+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta}A_{66}csc^2\alpha}{x^2}$$
$$+\frac{2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}A_{66}csc^2\alpha}{x^2}+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial x}csc\alpha}{x}$$
$$+\frac{2\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}B_{66}csc^2\alpha}{x^2}+\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial x\,\partial\theta}B_{66}csc^2\alpha}{x^2}$$
$$+\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}B_{22}\phi_{xx}csc^2\alpha}{x^3}+\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial A_{66}}{\partial x}csc\alpha}{x}$$
$$+\frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial B_{12}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}csc\alpha}{x}-\frac{\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial A_{66}}{\partial x}vcsc\alpha}{x^2}+\frac{\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}A_{12}csc\alpha}{x}$$
$$+\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta}B_{12}csc\alpha}{x}-\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta}A_{66}csc\alpha}{x^2}$$

$$-\frac{csc^2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2 B_{22}}{2x^3}+\frac{csc^2\alpha\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}B_{66}}{x^2}$$

$$S_{51}=\frac{csc\alpha B_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha B_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha B_{22}\frac{\partial u}{\partial\theta}}{x^2}$$

$$+\frac{csc\alpha B_{66}\frac{\partial u}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc\alpha\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta}}{x}$$

$$S_{52}=\frac{csc^2\alpha B_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}}{x^2}-\frac{B_{66}v}{x^2}+B_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{cot\alpha A_{44}v}{x}$$

$$+\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\frac{\partial B_{66}}{\partial x}v}{x}+\frac{B_{66}\frac{\partial v}{\partial x}}{x}$$

$$S_{53}=\frac{cot\alpha\ csc\alpha\ B_{22}\frac{\partial w}{\partial\theta}}{x^2}-\frac{csc\alpha A_{44}\frac{\partial w}{\partial\theta}}{x}$$

$$S_{54}=\frac{csc\alpha D_{12}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha D_{66}\frac{\partial^2\phi_{xx}}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha D_{22}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}}{x^2}$$

$$+\frac{csc\alpha D_{66}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc\alpha\frac{\partial D_{66}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{xx}}{\partial\theta}}{x}$$

$$S_{55}=\frac{D_{66}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial x}}{x}-\frac{\frac{\partial D_{66}}{\partial x}\phi_{\theta\theta}}{x}-A_{44}\phi_{\theta\theta}+\frac{csc^2\alpha D_{22}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial\theta^2}}{x^2}$$

$$-\frac{D_{66}\phi_{\theta\theta}}{x^2}+D_{66}\frac{\partial^2\phi_{\theta\theta}}{\partial x^2}+\frac{\partial D_{66}}{\partial x}\frac{\partial\phi_{\theta\theta}}{\partial x}$$

$$P_5=\frac{csc\alpha B_{12}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}}{x}+\frac{csc\alpha B_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta}}{x}$$

$$+\frac{csc^3\alpha B_{22}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}}{x^3}+\frac{csc\alpha B_{66}\frac{\partial w}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{x}$$

$$+\frac{csc\alpha B_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta}}{x^2}+\frac{csc\alpha\frac{\partial B_{66}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial\theta}}{x}$$

مراجع

[1] Bochkarev, S. A., Lekomtsev, S. V., & Matveenko, V. P. (2022). Natural vibrations of truncated conical shells containing fluid. Mech. Solids, 57(8), 1971-1986.

[2] Bagheri, H., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2021). Free vibration of FGM conical–spherical shells. Thin-Walled Struct., 160: 107387.

[3] Amabili, M., & Balasubramanian, P. (2020). Nonlinear forced vibrations of laminated composite conical shells by using a refined shear deformation theory. Compos. Struct., 249: 112522.

[4] Chai, Q., & Wang, Y. Q. (2021). A general approach for free vibration analysis of spinning joined conical–cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. Thin-Walled Struct., 168: 108243.

[5] Bakhtiari, M., Lakis, A. A., & Kerboua, Y. (2020). Nonlinear vibration of truncated conical shells: Donnell, Sanders and Nemeth theories. Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 21(1): 83-97.

[6] Alimoradzadeh, M., Salehi, M., & Esfarjani, S. M. (2019). Nonlinear dynamic response of an axially functionally graded (AFG) beam resting on nonlinear elastic foundation subjected to moving load. Nonlinear Eng., 8(1): 250-260.

[7] Alimoradzadeh, M., Salehi, M., & Esfarjani, S. M. (2020). Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded microbeams based on nonlinear elastic foundation using modified couple stress theory. Period. Polytech. Mech. Eng., 64(2): 97-108.

[8] Hashemi, S. and Jafari, A.A., (2020) An analytical solution for nonlinear vibrations analysis of functionally graded plate using modified Lindstedt–Poincare method. Int. J. Appl. Mech. 12(01): 2050003.

[9] Hashemi, S. and Jafari, A.A., (2021) An analytical solution for nonlinear vibration analysis of functionally graded rectangular plate in contact with fluid. Adv Appl Math Mech, 13(4): 914-941.

[10] Hashemi, S., Zamani, F., Eftekhari, A., Rostamiyan, Y., Khaledi, H. and Rajabi Reza Abadi, M., (2021) On the vibration of functionally graded annular plate with elastic edge supports and resting on Winkler foundation. Aust. J. Mech. Eng. (30): 1-6.

[11] Shadmani, M., Afsari, A., Jahedi, R., & Kazemzadeh-Parsi, M. J. (2023). Nonlinear free vibrations analysis of truncated conical shells made of bidirectional functionally graded materials. J. Vib. Control., 10775463231186197.

[12] Shadmani, M., Afsari, A., Jahedi, R., & Kazemzadeh-Parsi, M. J. (2024). Nonlinear free vibrational behavior of temperature-dependent two-directional functionally graded truncated cone-like shells in thermal environment. J. Vib. Control., 10775463241228742.

[13] Youseftabar, H., Hosseinnejad, F., Rostamiyan, Y., Seyyedi, S. M., & Rabbani, M. (2024). Effect of porosity on the nonlinear free vibrational behavior of two-directional functionally graded porous cone-shaped shells resting on elastic substrates. Mech. Based Des. Struct. Mach., 1-25.

[14] Babaei, M. J., & Jafari, A. A. (2024). Effect of thermal environment on the free vibration of functionally graded carbon nanotubes cylindrical-conical shell. J. Therm. Stresses, 47(1): 35-58.

[15] Bisheh, H. (2023). Vibration characteristics of smart laminated carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells resting on elastic foundations with open circuit. Struct 51: 1622-1644.

[16] Zhao, T., Bayat, M. J., & Asemi, K. (2024). Free vibration analysis of functionally graded multilayer hybrid composite cylindrical shell panel reinforced by GPLs and CNTs surrounded by Winkler elastic foundation. Enginee Struct., 308, 117975.

[17] Wu, Z., Zhang, Y., & Yao, G. (2020). Nonlinear forced vibration of functionally graded carbon nanotube reinforced composite circular cylindrical shells. Acta Mech, 231: 2497-2519.

[18] Uspensky, B., Avramov, K., Derevianko, I., & Maksymenko-Sheiko, K. (2024). Vibrations of

[23] Allahkarami, F., Saryazdi, M.G. and Tohidi, H., (2020). Dynamic buckling analysis of bi-directional functionally graded porous truncated conical shell with different boundary conditions. Compos. Struct. 252: 112680.

[24] Mohammadrezazadeh, S. and Jafari, A.A., (2021) Nonlinear vibration suppression of laminated composite conical shells on elastic foundations with magnetostrictive layers. Compos. Struct. 258: 113323.

[25] Hashemi, S., Shahri, P.K., Beigzadeh, S., Zamani, F., Eratbeni, M.G., Mahdavi, M., Heidari, A., Khaledi, H. and Abadi, M.R.R., (2022) Nonlinear free vibration analysis of In-plane Bi-directional functionally graded plate with porosities resting on elastic foundations. Int. J. Appl. Mech. 14(01): 2150131.

[26] Irie, T., (1984) Natural frequencies of truncated conical shells. J. Sound Vib. 92(3): p.447.

[27] Li, F.M., Kishimoto, K. and Huang, W.H., (2009) The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh–Ritz method. Mech. Res. Commun. 36(5): pp.595-602.

[28] Lam, K.Y. and Hua, L., (1999) On free vibration of a rotating truncated circular orthotropic conical shell. Compos. B Eng. 30(2): 135-144.

cylindrical sandwich shell with fused deposition processed honeycomb core and carbon nanotubes reinforced composite faces sheets. J. Vib. Eng. Technol., 12(2): 2003-2023.

[19] Chakraborty, S., Singh, V., Dey, T., & Kumar, R. (2024). Influence of carbon nanotubes on stability and vibration characteristics of plates and panels in thermal environment: a review. Arch. Comput. Methods Eng., 31(1): 147-178.

[20] Khalaf, A. S., & Hasan, H. M. (2024). Nonlinear forced vibration of functionally graded hybrid three-phase nanocomposite toroidal shell segments reinforced by carbon nanotubes (CNTs) and graphene nanoplatelets (GPLs). Thin-Walled Struct., 111876.

[21] Ansari, R. and Gholami, R., 2016. Nonlinear primary resonance of third-order shear deformable functionally graded nanocomposite rectangular plates reinforced by carbon nanotubes. Compos. Struct., 154: 707-723.

[22] Hashemi, S. and Jafari, A.A., (2020) Nonlinear free and forced vibrations of in-plane bi-directional functionally graded rectangular plate with temperature-dependent properties. Int. J. Struct. Stab. Dyn. 20(08): 2050097.