مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۱/ دوره ۱۲/ شماره ۶/ صفحه ۸۳-۹۸

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/JSFM.2023.12462.3671

بررسی کارایی برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در حل تطبیقی مسائل مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریک

سیدحسین امام[1]،احمد گنجعلی[2،*]، ابوذر میرزاخانی[3]

[1] دانشجوی دکترا، دانشکده فنی مهندسی، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران

[2] استادیار، دانشکده فنی مهندسی، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران

[3] استادیار، دانشکده فنی مهندسی، واحد شاهرود، دانشگاه آزاد اسلامی، شاهرود، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۹/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۰/۲۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۰۶

چکیده

در عصر حاضر تحلیل مواد مدرج تابعی ضروری است. از آنجا که روش اجزای محدود در تحلیل این مواد دارای محدودیت‌هایی است و خطا بخش جدا نشدنی در هر یک از تحلیل‌های عددی می‌باشد، لذا یافتن راه حلی جهت برآورد خطا در محاسبات دارای اهمیت است. در روش اجزای محدود، اصلاح و یا غنی‌سازی شبکه جهت کاهش خطا با مواردی چون همپوشانی المان‌ها در زمان جابه‌جایی، تشکیل المان با مساحت صفر و افزایش هزینه در محاسبات همراه است. در این پژوهش از روش ایزوژئومتریک برای اولین بار در تحلیل مسائل با مصالح مدرج تابعی در حل تطبیقی به روش حرکت دهی نقاط کنترلی به عنوان اصلاح وفقی بر مبنای برآورد خطا، با رویکرد بهبود میدان تنش استفاده شده است. با مقایسه نرم خطای دقیق و تقریبی در مثالهای حل شده، شاخص تاثیر بیش از ۷۵ درصد بوده که نشان از کارایی برآورد کننده خطای پیشنهادی دارد. همچنین بهبود شبکه نقاط کنترلی در کاهش بیش از ۶۰ درصدی میزان خطا موثر است و می‌تواند جهت افزایش دقت نتایج مورد استفاده قرار گیرد.

کلمات کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریک؛ مصالح مدرج تابعی؛ برآورد خطا؛ بازیافت تنش؛ حل تطبیقی.

Investigating the efficiency of error estimation based on strees recovery in the adaptive solution of functionally graded materials by isogeometric method

S. H. Emam[1], A. Ganjali[2,*], A. Mirzakhani[3]

[1] Ph.D Student of structural engineering, Department of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

[2] Assist. Prof., Department of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

[3] Assist. Prof., Department of Civil Engineering, Shahrood Branch, Islamic Azad University, Shahrood, Iran.

Abstract

In today's era, it is necessary to analyze functionally graded materials. Since the finite element method in the analysis of these materials has limitations and the error is an inseparable part of any numerical analysis, therefore, finding a solution to estimate the error in calculations is important. In the finite element method, modifying or enriching the network to reduce the error is associated with such things as the overlapping of elements during displacement, the formation of elements with zero areas, and the increase of cost in calculations. In this research, the isogeometric method has been used for the first time in the analysis of problems with functionally graded materials in the adaptive solution using the method of moving control points as adaptive correction based on error estimation, with the approach of improving the stress field. By comparing the exact and approximate error norm in the solved examples, the effectivity index is more than 75%, which shows the effectiveness of the proposed error estimator. In addition, improving the network of control points is effective in reducing the error rate by more than 60% and can be used to increase the accuracy of the results.

Keywords: Isogeometrical Analysis; Functionally Graded Material; Error Estimation; Stress Recovery; adaptive Solution.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۳۶۴۶۵۹۴۴۲

آدرس پست الکترونیک: ahmad.ganjali@iau-shahrood.ac.ir

۱- مقدمه

محققان بسیاری در سرتاسر جهان بعد از معرفی روش اجزای محدود روی توسعه آن مطالعه نموده‌اند، اما با بررسی دقیق می‌توان اشکالات و نقاط ضعفی برای آن برشمرد که ناشی از فلسفه برخورد این روش با معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر می‌باشد. به عنوان مثال نحوه شبکه بندی، نوع المان مورد استفاده و تعداد المان‌ها امری دشوار و زمان‌بر می‌باشد[۱]. با فرض اینکه در فرآیند حل یک مسئله نیاز به باز تولید شبکه المان‌ها باشد، می‌توان به معضلات نیاز به تولید شبکه بیشتر پی برد. در حالت کلی با پیچیده‌تر شدن مسئله مورد بررسی علی الخصوص در مسائلی که ویژگی مصالح مانند مواد مدرج تابعی در حال تغییر می‌باشد کلیه موارد فوق به شکل موثرتری اثرات منفی خود را نشان می‌دهد. در این پژوهش از تحلیل ایزوژئومتریک که روشی مبتنی بر درک هندسی از مسئله با استفاده از اسپیلاین‌ها و از فن‌آوری‌های طراحی به کمک رایانه می‌باشد در حل مسائل با مصالح مدرج تابعی استفاده شده است. مفاهیم تحلیل این روش در سال ۲۰۰۵ اولین بار توسط هیوز و همکاران[1] با نام روش ایزوژئومتریک معرفی گردید[۱]. بعدها افرادی چون کوترل و همکاران[2] اثر توابع پایه را بر دقت حل مسائل در روش ایزوژئومتریک بررسی نمودند[۲]، وانگ و همکاران[3] روشی را برای اعمال شرایط مرزی در آنالیز ایزوژئومتریک مطالعه نمودند[۳] و هرما و همکاران[4] با حل مثال‌هایی، چهارچوبی را برای بهینه سازی طراحی پارامتریک با استفاده از تجزیه تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل پیچیده هندسی ارائه نمودند[۴]. روش ایزوژئومتریک علاوه بر داشتن مزایای روش اجزای محدود، برخی از معایب آن را نیز مرتفع نموده است. مدلسازی دقیق شکل مسئله در مقایسه با روش اجزای محدود، مدل‌سازی دقیق شرایط تکیه‌گاهی، عدم نیاز به تولید شبکه، کاهش چشم‌گیر ابعاد دستگاه معادلات و مدل‌سازی تابع توزیع مصالح در کل دامنه مسئله از مواردی است که کوترل، هیوز و همکاران در کتابی با عنوان تحلیل ایزوژئومتریک با ادغام کد و اجزای محدود به آن اشاره نمودند[۵].

از طرف دیگر خطا بخش جدا نشدنی در هر یک از تحلیل‌های عددی است و روش تحلیل ایزوژئومتریک نیز از این قائده مستثنی نیست. در حالت کلی، روش‌های برآورد خطا در دو دسته روش‌های بازیافت تنش و روش‌های باقیمانده‌ای قرار می‌گیرند[۶و۷]. بابوشکا و همکاران برای اولین بار شبکه المان بهینه را با توزیع یکنواخت معیار خطای انرژی روی کل دامنه، برای مسائل یک بعدی تعریف کردند[۸]، زینکوویچ و زو روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا را در برآورد خطای المان‌های محدود و آنالیز تطبیقی طی دو مقاله ارائه نمودند[۹و۱۰]، گنجعلی و حسنی برآورد خطا و تنش بهبود یافته به وسیله تعادل در هر وصله را به روش ایزوژئومتریک بررسی نمودند[۱۱]. قابل ذکر است روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش در مسائل همگن به روش ایزوژئومتریک بر پایه استفاده از خاصیت فوق همگرایی نقاط انتگرال‌گیری گوسی، اولین بار توسط حسنی و همکاران معرفی شد[۱۲و۱۳]، که در این پژوهش برای اولین بار با بسط دادن این روش روی مسائل مدرج تابعی از آن جهت برآورد خطا استفاده شده است.

برای کاهش خطا و افزایش دقت محاسبات در روش‌های عددی از فرآیند تظریف استفاده می‌شود. تلاش برای به دست آوردن سریعترین و بهینه‌ترین روش تظریف، بر اساس خطای برآورد شده، تظریف تطبیقی نامیده می‌شود. بابوشکا و همکاران[5] اولین بار شبکه المان بهینه را شبکه‌ای با توزیع یکنواخت معیار خطای انرژی روی کل دامنه برای مسائل یک بعدی تعریف کردند[۱۴]،زینکوویچ و زو[6] طی مقاله‌ای با تخمین خطا در مسائل خمش صفحه، روشی را برای اصلاح المان‌بندی مثلثی ارائه نمودند[۱۵]، در زمینه بهبود شبکه در روش ایزوژئومتریک نیز تا کنون تلاش‌هایی انجام شده که عمدتا تکیه آنها بر استفاده از افزایش نقاط کنترلی در نواحی با خطای بالاتر بوده، جانسون[7] برای اولین بار با تحلیل تطبیقی به این سبک را ارائه نمود[۱۶]، میچل و همکاران[8] بهبود محلی شبکه با افزایش نقاط کنترلی و استفاده از تی-اسپیلاین‌ها را پیشنهاد نمودند[۱۷] و پنگ و همکاران[9]

[1] Hughes and et al
[2] Cottrell and et al
[3] Wang and et al
[4] Herrema
[5] Babuska
[6] Zienkiewicz and Zhu
[7] Kjetil AJ
[8] Michael and et al
[9] Peng and et al

روشی از سازگاری محلی با تخمین خطای انجام شده ارائه کردند[۱۸]. در این مطالعه از روشی که میرزاخانی و همکاران[۱۹] برای اولین بار بر پایه استفاده از گرادیان حرارتی برای بهبود شبکه نقاط کنترلی در تحلیل ایزوژئومتریک مبتنی بر جابه‌جایی نقاط کنترلی ارائه نمودند، جهت کاهش میزان خطای برآورد شده استفاده شده است. ویژگی بارز استفاده از این روش عدم افزایش حجم محاسبات به دلیل اضافه نشدن نقاط کنترلی و امکان بهبود شبکه نقاط کنترلی در چندین مرحله مختلف می‌باشد.

۲- معرفی مواد مدرج تابعی[1]

مصالح مدرج تابعی موادی ریز ساختار ناهمگن هستند که خواص مکانیکی آنها به طور ملایم و پیوسته می‌تواند به صورت خطی، نمایی، لگاریتمی و غیره از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییرکند[۲۰] و به چگونگی فرآیند تولید این مصالح که موضوع بحث این مقاله نمی‌باشد وابسته است. در حال حاضر با توجه به پیشرفت‌های فراوان در توصیف، مدل‌سازی و تجزیه تحلیل این مواد، می‌توان طی مقالات مروری نائب و شیروانی مقدم[۲۱] و وانگ و همکاران[2][۲۲] ضمینه‌هایی که برای توسعه و طراحی این مواد نظر محققین را به خود جلب نموده است نام برد. تحلیل این مواد می‌تواند به روش اجزای محدود انجام شود اما با محدودیت و تقریب‌هایی از جمله، عدم وجود یک المان مناسب برای تحلیل این مسائل که بتواند تغییرات خواص مصالح را در خود جای دهد، استفاده از المانی که تغییرات خواص مصالح را در طول خود به صورت میانگین در خود جای داده است و یا استفاده از المانی که خواص آن با مرکز یک المان مدرج تابعی یکسان است[۲۳و۲۴] مواجه خواهیم بود. در این پژوهش برای تحلیل مسائل با مصالح مدرج تابعی از روش ایزوژئومتریک که روشی هندسی در تحلیل مسائل است و علاوه بر دقت در مدل‌سازی هندسه توان مدل-سازی دقیق تغییرات خواص مصالح را دارد استفاده شده است.

۳- معرفی توابع شکل بی اسپیلاین

بی اسپیلان‌ها روشی برای توصیف منحنی‌ها و سطوح به روش پارامتری می‌باشند. یک تابع منحنی بی اسپیلاین با رابطه(۱) بیان می‌گردد[۲۵و۲۶].

$$\boldsymbol{C(r)=\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(r)p_i \qquad a\le r\le b} \tag{۱}$$

برای درک این رابطه به توضیح مفاهیم زیر می‌پردازیم.
درجه منحنی. $\mathbf{p}$ درجه منحنی پایه در جهت $\mathbf{r}$ و $\mathbf{i=0,\dots,n}$ است. $\mathbf{p_i}$ چند ضلعی کنترل است که با نقاط کنترل $\mathbf{p_i=(x_i,y_i,z_i)}$ مشخص می‌شود. مختصات نقاط کنترلی از تکنیک معکوس توابع پایه قابل محاسبه است[۲۵و۲۶] .

بردارگرهی. بردار گره یک بعدی ، $\mathbf{r=\{r_0,r_1,r_2,\dots,r_n\}}$ را در نظر بگیرید. این بردار شامل مجموعه ای از اعداد حقیقی است که هر یک از این اعداد مقادیر گرهی نامیده می‌شوند و رابطه‌ی: $\mathbf{r_i\le r_{i+1}}$ و $\mathbf{i=0,1,2,\dots,n-1}$ در آن برقرار است.

توابع پایه بی اسپیلاین. $\mathbf{i}$ امین تابع پایه اسپیلاین با درجه $\mathbf{p}$ (یا مرتبه $\mathbf{p+1}$) را با $\mathbf{N_{i,p}(r)}$ نشان داده که روی بردار گرهی مطابق رابطه(۲) با فرض $\mathbf{a=0}$ و $\mathbf{b=1}$ تعریف و به صورت رابطه (۳) نشان داده می‌شود[۲۵و۲۶].

$$\boldsymbol{r=\left\{\underbrace{a,\dots,a}_{p+1},r_{p+1},\dots,r_{n-p-1},\underbrace{b,\dots,b}_{p+1}\right\}} \tag{۲}$$

$$\boldsymbol{N_{i,0}(r)=\begin{cases}1 & if \quad r_i\le N\le r_{i+1}\\ 0 & otherwise\end{cases}} \tag{۳}$$

در روش ایزوژئومتریک از رابطه (۴) می‌توان هر گونه سطح و رویه پیچیده‌ای را مدل‌سازی نمود[۲۵و۲۶].

$$\boldsymbol{S(r,s)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)\,N_{j,q}(s)P_{i,j}} \tag{۴}$$

که در آن، $\mathbf{P_{i,j}}$ شبکه نقاط کنترلی است که در جهت $\mathbf{r}$ از درجه $\mathbf{p}$ و در جهت $\mathbf{s}$ از درجه $\mathbf{q}$ می باشد. برای اطلاعات بیشتر در این خصوص می‌توان به مراجع [۲۵و۲۶] مراجعه نمود.

[1] Functionally Graded Material

[2] Wang and et al

۴- فرمول‌بندی روش ایزوژومتریک با مصالح مدرج تابعی

در این بخش ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم در مسائل تنش/کرنش مسطح در تئوری الاستیسیته بیان می‌شود، سپس مراحل دستیابی به فرمول‌بندی روش ایزوژئومتریک در حل مسائل با مصالح مدرج تابعی ارائه می‌گردد[۲۷].

معادلات دیفرانسیل حاکم در مسائل مسطح الاستیک مطابق روابط(۵) و (۶) تعریف می‌شوند[۲۷].

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(C_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left[C_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=f_x-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۵}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[C_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(C_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=f_y-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{۶}$$

که در آن شرایط مرزی طبیعی و مشخصات مصالح مطابق زیر است[۲۷].

$$t_x=\left(C_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_x+C_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_y \tag{۷}$$

$$t_y=C_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)n_x+\left(C_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)n_y \tag{۸}$$

$$C_{11}=\frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \tag{۹}$$

$$C_{22}=\frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \tag{۱۰}$$

$$C_{12}=\mu_{21}C_{11}=\mu_{12}C_{22} \tag{۱۱}$$

$$C_{66}=G_{12} \tag{۱۲}$$

با نوشتن شکل ضعیف معادلات دیفرانسیل[۲۷] به روابط(۱۳) و (۱۴) می‌رسیم.

$$0=h_e\oint_{\Omega_e}\left[\frac{\partial w_1}{\partial x}\left(C_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+C_{66}\frac{\partial w_1}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-w_1f_x+\rho w_1\ddot{u}\right]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}w_1t_xd\Gamma \tag{۱۳}$$

$$0=h_e\oint_{\Omega_e}\left[\frac{\partial w_2}{\partial x}C_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial w_2}{\partial y}\left(C_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-w_2f_y+\rho w_2\ddot{v}\right]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}w_2t_yd\Gamma \tag{۱۴}$$

معادلات بالا را مطابق زیر بسط می‌دهیم.

$$0=h_e\oint_{\Omega_e}\left[C_{11}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+C_{66}\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+C_{66}\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-w_1f_x+\rho w_1\ddot{u}\right]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}w_1t_xd\Gamma \tag{۱۵}$$

$$0=h_e\oint_{\Omega_e}\left[C_{66}\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+C_{66}\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+C_{12}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{22}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}-w_2f_y+\rho w_2\ddot{v}\right]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}w_2t_yd\Gamma \tag{۱۶}$$

با جمع روابط(۱۵) و (۱۶) به رابطه کلی(۱۷) خواهیم رسید.

$$0=h_e\oint_{\Omega_e}\left[C_{11}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+C_{22}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+C_{66}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dxdy-h_e\oint_{\Omega_e}\left[w_1f_x+w_2f_y-\rho(w_1\ddot{u}+w_2\ddot{v})\right]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}(w_1t_x+w_2t_y)d\Gamma \tag{۱۷}$$

رابطه(۱۷) دارای یک قسمت درجه یک و یک قسمت درجه دو مطابق روابط(۱۸) و (۱۹) است.

$$B(u,v,w_1,w_2)=h_e\oint_{\Omega_e}\left[C_{11}\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{12}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+C_{22}\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+C_{66}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dxdy \tag{۱۸}$$

$$l(w_1,w_2)=-h_e\oint_{\Omega_e}\left[w_1f_x+w_2f_y-\rho(w_1\ddot{u}+w_2\ddot{v})\right]dxdy-h_e\oint_{\Gamma_e}(w_1t_x+w_2t_y)d\Gamma \tag{۱۹}$$

اکنون میتوان تابع □ را به شکل زیر تشکیل داد.

$$\Pi=\frac{1}{2}B(u,v,w_1,w_2)-l(w_1,w_2) \tag{۲۰}$$

که در آن:

$$B(u,v,u,v) = h_e \oint_{\Omega_e} \left[C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2C_{12} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + C_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right) \right] dxdy \quad (۲۱)$$

$$l(u,v) = -h_e \oint_{\Omega_e} [uf_x + vf_y - \rho(u\ddot{u} + v\ddot{v})] dxdy - h_e \oint_{\Gamma_e} (ut_x + vt_y) d\Gamma \quad (۲۲)$$

با جایگذاری $B(u,v,u,v)$ و $l(u,v)$ در رابطه(۲۰) به معادله دیفرانسیل(۲۳) می‌رسیم.

$$\Pi = (u(x,y), v(x,y)) = \frac{1}{2} h_e \oint_{\Omega_e} \left[C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2C_{12} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + C_{66} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right) \right] dxdy + h_e \oint_{\Omega_e} [uf_x + vf_y - \rho(u\ddot{u} + v\ddot{v})] dxdy + h_e \oint_{\Gamma_e} (ut_x + vt_y) d\Gamma \quad (۲۳)$$

در این رابطه از پارامتر Γ برای انتگرال‌گیری روی مرزها و از پارامتر Ω برای انتگرال‌گیری روی سطوح استفاده شده است. در رابطه(۲۳) مختصات x ، y و دو مجهول u و v را بر حسب توابع پایه بی اسپیلان بسط می‌دهیم[۲۸و۲۹].

$$X(r,s) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)\, N_{j,q}(s)\, X_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s) X_{i,j} \quad (۲۴)$$

$$Y(r,s) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)\, N_{j,q}(s)\, Y_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)\, Y_{i,j} \quad (۲۵)$$

$$U(r,s) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)\, N_{j,q}(s)\, U_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)\, U_{i,j} \quad (۲۶)$$

$$V(r,s) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)\, N_{j,q}(s)\, V_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)\, V_{i,j} \quad (۲۷)$$

جهت تعریف مشخصات مصالح بر اساس توابع پایه بی اسپیلاین مطابق زیر آنها را گسترش می‌دهیم[۲۸و۲۹].

$$\bar{E}_1(r,s) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r) N_{j,q}(s)\, E_{i,j}^1 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)\, E_{i,j}^1 \quad (۲۸)$$

$$\bar{E}_2(r,s) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r) N_{j,q}(s)\, E_{i,j}^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)\, E_{i,j}^2 \quad (۲۹)$$

$$\bar{\nu}_{12}(r,s) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r) N_{j,q}(s)\, \nu_{i,j}^{12} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)\, \nu_{i,j}^{12} \quad (۳۰)$$

$$\bar{\nu}_{21}(r,s) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r) N_{j,q}(s)\, \nu_{i,j}^{21} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}^{p,q}(r,s)\, \nu_{i,j}^{21} \quad (۳۱)$$

$$\bar{C}_{11}(r,s) = \frac{\bar{E}_1(r,s)}{1-\bar{\nu}_{12}(r,s)\,\bar{\nu}_{21}(r,s)} \quad (۳۲)$$

$$\bar{C}_{22}(r,s) = \frac{\bar{E}_2(r,s)}{1-\bar{\nu}_{12}(r,s)\,\bar{\nu}_{21}(r,s)} \quad (۳۳)$$

$$\bar{C}_{12}(r,s) = \bar{\nu}_{21}(r,s)\, \bar{C}_{11}(r,s) = \bar{\nu}_{12}(r,s)\, \bar{C}_{22}(r,s) \quad (۳۴)$$

$$\bar{C}_{66}(r,s) = \frac{0.5\, \bar{E}_1(r,s)}{1+\bar{\nu}_{12}(r,s)} \quad (۳۵)$$

جهت نگاشت از فضای x و y در رابطه (۲۳) به r و s در فضای بی‌اسپیلاین ژاکوبین زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$dxdy = \bar{J} drds \quad (۳۶)$$

$$\bar{J} = \bar{J}(r,s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(r,s)}{\partial r} & \frac{\partial Y(r,s)}{\partial r} \\ \frac{\partial X(r,s)}{\partial s} & \frac{\partial Y(r,s)}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{xr} & J_{yr} \\ J_{xs} & J_{ys} \end{vmatrix} \quad (۳۷)$$

در رابطه(۲۳) نیاز به داشتن مشتقات نسبت به u و v داریم، با انجام نماد سازی زیر به روابط(۲۶و۲۷) می‌رسیم[۲۸و۲۹].

$$\phi_{xr} = \phi_{xr}(r,s) = \frac{J_{xr}}{\bar{J}} \quad (۳۸)$$

$$\phi_{xs} = \phi_{xs}(r,s) = \frac{J_{xs}}{\bar{J}} \quad (۳۹)$$

$$\phi_{yr} = \phi_{yr}(r,s) = \frac{J_{yr}}{\bar{J}} \quad (۴۰)$$

$$\phi_{ys} = \phi_{ys}(r,s) = \frac{J_{ys}}{\bar{J}} \quad (۴۱)$$

$$\chi_{i,j}^{(1)} = \phi_{ys} \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r} - \phi_{yr} \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s} \quad (۴۲)$$

$$\chi_{i,j}^{(2)} = -\phi_{xs} \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r} + \phi_{xr} \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s} \quad (۴۳)$$

$$\frac{\partial \Pi(U_{ij},V_{ij})}{\partial U_{ij}} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\bar{C}_{11}\, \chi_\alpha^{(1)}\, \chi_\beta^{(1)} + \bar{C}_{66}\, \chi_\alpha^{(2)}\, \chi_\beta^{(2)} \right) U_{ij} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\bar{C}_{12}\, \chi_\alpha^{(1)}\, \chi_\beta^{(2)} + \bar{C}_{66}\, \chi_\alpha^{(2)}\, \chi_\beta^{(1)} \right) V_{ij} \right] \bar{J} drds + h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s) \bar{f}_x \right) \bar{J} drds \quad (۴۴)$$

$$\frac{\partial \Pi(U_{ij},V_{ij})}{\partial V_{ij}} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\bar{C}_{12}\, \chi_\alpha^{(2)}\, \chi_\beta^{(1)} + \bar{C}_{66}\, \chi_\alpha^{(1)}\, \chi_\beta^{(2)} \right) U_{ij} + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(\bar{C}_{22}\, \chi_\alpha^{(2)}\, \chi_\beta^{(2)} + \bar{C}_{66}\, \chi_\alpha^{(1)}\, \chi_\beta^{(1)} \right) V_{ij} \right] \bar{J} drds + h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s) \bar{f}_y \right) \bar{J} drds \quad (۴۵)$$

با حل دستگاه معادلات(۴۶) می‌توان مختصات سوم نقاط کنترلی را برای تولید رویه جواب‌های مسئله محاسبه نمود.

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\beta}^{(1)u} & K_{\alpha\beta}^{(1)v} \\ K_{\alpha\beta}^{(2)u} & K_{\alpha\beta}^{(2)v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ U_\alpha \\ V_0 \\ \vdots \\ V_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0^u \\ \vdots \\ F_\alpha^u \\ F_0^v \\ \vdots \\ F_\beta^v \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_0^u \\ \vdots \\ Q_\alpha^u \\ Q_0^v \\ \vdots \\ Q_\beta^v \end{Bmatrix} \quad (۴۶)$$

که در آن:

$$\begin{cases} \alpha = 0,1,\dots,(n+1)(m+1)-1 \\ \beta = 0,1,\dots,(n+1)(m+1)-1 \end{cases}$$

در رابطه(۴۶)، $[K]$ ماتریس ضرایب، $[U]$ بردار تغییرمکان‌ها و $[Q]$،$[F]$ بردار نیروها است و به صورت زیر تعریف می‌شود[۲۸و۲۹].

$$K_{\alpha\beta}^{(1)u} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(\bar{C}_{11}\, \chi_\alpha^{(1)}\, \chi_\beta^{(1)} + \bar{C}_{66}\, \chi_\alpha^{(2)}\, \chi_\beta^{(2)} \right) \bar{J} drds \quad (۴۷)$$

$$K_{\alpha\beta}^{(1)v} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(\bar{C}_{12}\, \chi_\alpha^{(1)}\, \chi_\beta^{(2)} + \bar{C}_{66}\, \chi_\alpha^{(2)}\, \chi_\beta^{(1)} \right) \bar{J} drds \quad (۴۸)$$

$$K_{\alpha\beta}^{(2)u} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(\bar{C}_{12}\, \chi_\alpha^{(2)}\, \chi_\beta^{(1)} + \bar{C}_{66}\, \chi_\alpha^{(1)}\, \chi_\beta^{(2)} \right) \bar{J} drds \quad (۴۹)$$

$$K_{\alpha\beta}^{(2)v} = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(\bar{C}_{22}\, \chi_\alpha^{(2)}\, \chi_\beta^{(2)} + \bar{C}_{66}\, \chi_\alpha^{(1)}\, \chi_\beta^{(1)} \right) \bar{J} drds \quad (۵۰)$$

$$F_\alpha^u = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(R_{i,j}^{p,q}(r,s) \bar{f}_x \right) \bar{J} drds \quad (۵۱)$$

$$F_\beta^v = h_e \int_0^1 \int_0^1 \left(R_{i,j}^{p,q}(r,s) \bar{f}_y \right) \bar{J} drds \quad (۵۲)$$

جهت حل انتگرال عددی دستگاه معادلات (۴۶) با استفاده از نقاط گوس، نیاز به محاسبه ژاکوبین دوم به صورت زیر داریم.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial s}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial s}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (۵۳)$$

۵- محاسبه تنش بهبود یافته در مسائل با مصالح مدرج تابعی به روش ایزوژومتریک

همان‌گونه که عنوان شد خطا بخشی ناگریز در هر یک از انواع تحلیل‌های عددی به شمار می‌رود. در سال ۱۹۹۲ به کمک اجزای محدود زینکویچ و زو[1] روشی را بر پایه نقاط فراهمگرا[2] جهت برآورد تنش بازیافتی نوآوری نمودند که در آن تنش به دست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار است[۳۰]. در سال ۲۰۰۹ حسنی و همکاران به کمک روشی مبتنی بر نقاط فراهمگرا به برآورد خطا در مسائل همگن با تحلیل ایزوژئومتریک پرداختند[۲۸]. در این روش میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفه تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می‌شود. این سطح فرضی از توابع شکل بی اسپیلاینی که در روش ایزوژئومتریک برای محاسبه توابع جابه‌جایی استفاده شده‌اند، به دست می‌آید. یک سطح بی اسپیلاین زمانی ایجاد می‌شود که مختصات x، y و z نقاط کنترلی آن مشخص باشد. با تعریف مختصات x و y هر نقطه کنترلی جهت مدلسازی شکل هندسی تنها مولفه مجهول جهت تعیین سطح بهبود یافته تنش، مولفه z نقاط کنترلی می‌باشد. محاسبه مختصات z نقاط کنترلی به نحوی است که سطح تنش جدید به دست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتریک حاصل شده به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می‌شود. برای این کار از کمینه کردن فاصله بین تنش بهبود یافته و سطح تنش به دست آمده از حل ایزوژئومتریک در نقاط گوسی با کاربرد روش کمترین مجموع مربعات، استفاده می‌کنیم. سطح تنش بهبود یافته برگرفته از ویژگی نقاط گوسی است که در آن‌ها تنش حاصل از تحلیل تقریبی نسبت به دیگر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی شیب یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل وابسته به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است. به همین دلیل این نقاط را فراهمگرا می‌نامند که نخستین بار توسط زینکویچ در سال ۲۰۰۵ مطرح گردید[۳۱].

در اینجا برای اولین بار از بسط دادن روش ایزوژئومتریک روی مسائل مدرج تابعی جهت برآورد خطا استفاده می‌شود. اگر سطح تنش بهینه هر یک از مولفه‌های بردار تنش با σ^* نشان داد شود، با توجه به توابع شکل بی اسپیلاین می‌توان این سطح را داخل هر ناحیه به صورت رابطه(۵۴) الی (۵۶) بیان کرد.

[1] Zienkiewicz and Zhu
[2] Superconvergent Pach Recovery (SPR)

$$\sigma^*{}_x = \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{x\,i-p,j-q}(r,s) \\ P_{x\,i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{x\,i-p,j}(r,s) \\ P_{x\,i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{x\,i,j}(r,s) \end{bmatrix} \quad (۵۴)$$

$$\sigma^*{}_y = \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{y\,i-p,j-q}(r,s) \\ P_{y\,i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{y\,i-p,j}(r,s) \\ P_{y\,i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{y\,i,j}(r,s) \end{bmatrix} \quad (۵۵)$$

$$\sigma^*{}_{xy} = \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{xy\,i-p,j-q}(r,s) \\ P_{xy\,i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xy\,i-p,j}(r,s) \\ P_{xy\,i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xy\,i,j}(r,s) \end{bmatrix} \quad (۵۶)$$

که در آن **i** و **j** شمارنده نقاط کنترلی در جهت **x** و **y** ، **s** سطح بی اسپیلاین مطابق رابطه(۴) و **P** مختصات نقاط کنترلی وابسته به صفحه تنش بهبود یافته می‌باشد. تنها عامل مجهول جهت محاسبه سطح تنش بهبود یافته، مختصات سوم نقاط کنترلی، جهت محاسبه هر یک از مقادیر تنش است. برای تعیین این مقادیر همانگونه که در ابتدای این بخش به آن اشاره شد تابع G(P) به صورت رابطه (۵۷) بیان می‌شود.

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{P}) = \sum_{j=1}^{k_y}\sum_{i=1}^{k_x}\left(\boldsymbol{\sigma}^* - \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}(r,s) & \bar{C}_{12}(r,s) & 0 \\ \bar{C}_{21}(r,s) & \bar{C}_{22}(r,s) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{66}(r,s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{xx}(r,s) \\ \bar{\varepsilon}_{yy}(r,s) \\ 2\bar{\varepsilon}_{xy}(r,s) \end{Bmatrix}\right)^2 \quad (۵۷)$$

در رابطه (۵۷) k_x و k_y به ترتیب تعداد نقاط گوس در راستای x و y می‌باشد همچنین:

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{xx}(r,s) = \frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)U_{ij}\right)}{\partial x} = \frac{J_{ys}}{\bar{J}}J_{ur} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}}J_{us} = \frac{(J_{ys}J_{ur} - J_{yr}J_{us})}{\bar{J}} \quad (۵۸)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{yy}(r,s) = \frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)V_{ij}\right)}{\partial y} = \frac{-J_{xs}}{\bar{J}}J_{vr} + \frac{J_{xr}}{\bar{J}}J_{vs} = \frac{(J_{xs}J_{vr} - J_{xr}J_{vs})}{\bar{J}} \quad (۵۹)$$

$$2\bar{\varepsilon}_{ij}^{xy}(r,s) = \frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)U_{ij}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_{i,p}(r)N_{j,q}(s)V_{ij}\right)}{\partial y} = \frac{-J_{xs}}{\bar{J}}J_{ur} + \frac{J_{xr}}{\bar{J}}J_{us} + \frac{J_{ys}}{\bar{J}}J_{vr} - \frac{J_{yr}}{\bar{J}}J_{vs} = \frac{(-J_{xs}J_{ur} + J_{xr}J_{us} + J_{ys}J_{vr} - J_{yr}J_{vs})}{\bar{J}} \quad (۶۰)$$

J_{xr} ، J_{xs} ، J_{yr} ، J_{ys} از روابطه (۳۷) محاسبه می‌شود و

$$J_{ur} = \frac{\partial U(r,s)}{\partial r} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}\,U_{i,j} \quad (۶۱)$$

$$J_{us} = \frac{\partial U(r,s)}{\partial s} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\,U_{i,j} \quad (۶۲)$$

$$J_{vr} = \frac{\partial V(r,s)}{\partial r} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial r}\,V_{i,j} \quad (۶۳)$$

$$J_{vs} = \frac{\partial V(r,s)}{\partial s} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(r,s)}{\partial s}\,V_{i,j} \quad (۶۴)$$

مقادیر $\boldsymbol{U_{i,j}}$ و $\boldsymbol{V_{i,j}}$ از حل دستگاه معادلات(۴۶) حاصل شده است، و ماتریس خواص مصالح بر اساس توابع پایه بی اسپیلاین مطابق روابط (۲۸) الی (۳۵) تعریف می‌گردد.
با مشتق‌گیری از تابع G(P) نسبت به مولفه سوم نقاط کنترلی و برابر صفر قرار دادن آن، مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته برای هر یک از مولفه‌های تنش به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} P_{x\,i-p,j-q}(r,s) \\ P_{x\,i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{x\,i-p,j}(r,s) \\ P_{x\,i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{x\,i,j}(r,s) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}\right)^{-1} * \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix} * \left[\left(\bar{C}_{11}(r,s) * \bar{\varepsilon}_{xx}(r,s) + \bar{C}_{12}(r,s) * \bar{\varepsilon}_{yy}(r,s)\right)\right] \quad (۶۵)$$

$$\begin{bmatrix} P_{y\,i-p,j-q}(r,s) \\ P_{y\,i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{y\,i-p,j}(r,s) \\ P_{y\,i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{y\,i,j}(r,s) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix} \right)^{-1} * \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix} * \left[\left(\bar{C}_{21}(r,s) * \bar{\varepsilon}_{xx}(r,s) + \bar{C}_{22}(r,s) * \bar{\varepsilon}_{yy}(r,s)\right)\right] \qquad (۶۶)$$

$$\begin{bmatrix} P_{xy\,i-p,j-q}(r,s) \\ P_{xy\,i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xy\,i-p,j}(r,s) \\ P_{xy\,i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ P_{xy\,i,j}(r,s) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix}^T * \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix} \right)^{-1} * \begin{bmatrix} S_{i-p,j-q}(r,s) \\ S_{i-p,j-q-1}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i-p,j}(r,s) \\ S_{i-p-1,j}(r,s) \\ \vdots \\ S_{i,j}(r,s) \end{bmatrix} * \left[\left(\bar{C}_{66}(r,s) * \bar{\varepsilon}_{xy}(r,s)\right)\right] \qquad (۶۷)$$

در ادامه نشان داده می‌شود این میدان مولفه تنش نسبت به سطح تنش حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک دقیق‌تر است و می‌تواند به عنوان یک برآورد کننده خطا برای تحلیل مسائل با مصالح مدرج تابعی به کار رود.

۶- معیار بیان خطا

در حالت کلی، خطا عبارت است از اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی که به یکی از روش‌های عددی بدست آمده است. اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می‌توان از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد که این میدان تنش جدید توسط یکی از روشهای بازیافت تنش که به آن اشاره شد به دست می‌آید. از آنجا که ممکن است این مقدار محاسبه شده از نظر عددی، کوچکتر از صفر باشد، برای درک بهتر خطا از معیار خطای انرژی که یکی از معروف‌ترین معیارهای بیان خطا است استفاده می‌شود[۳۱]. نرم خطا برای یک مسئله الاستیسیته خطی توسط روابط (۶۸) الی (۷۱) بیان می‌شود[۲۶].

$$\|e\| = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)^T \boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۶۸)$$

$$\|e\| = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_h)^T \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_h) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۶۹)$$

$$\|e\| = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_h)^T (\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۷۰)$$

$$\|e\| = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h)^T \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۷۱)$$

به طور مشابه نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی در یک مسئله الاستیسیته خطی را میتوان توسط روابط زیر بیان نمود.

$$\| e_{exa} \| = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma_{exa}}-\boldsymbol{\sigma}_{iso})^T \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma_{exa}}-\boldsymbol{\sigma}_{iso}) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۷۲)$$

$$\| e_{app} \| = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma_{iso}}-\boldsymbol{\sigma}_{rec})^T \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma_{iso}}-\boldsymbol{\sigma}_{rec}) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۷۳)$$

که در آن، تنش دقیق (σ_{exa}) با داشتن حل دقیق مسئله محاسبه می‌شود، در خصوص محاسبه تنش ایزوژئومتریک (σ_{iso}) ، تنش بهبود یافته (σ_{rec}) و ماتریس خواص مصالح ($\boldsymbol{D}$) توضیحات لازم در قسمت‌های قبل داده شد.

۷- اصلاح وفقی[1]

از آنجا که هدف کلی از تخمین خطا استفاده از آن برای بهبود دقت حل می‌باشد، از این رو استفاده از روشهایی که بر اساس برآورد خطای انجام شده، و میزان خطا را کاهش میدهد مورد توجه محققین بوده است. به این نوع روش‌ها، حل تطبیقی یا سازگاری گفته می‌شود. برای این کار از بهبود شبکه المانها یا

[1] Refinement

افزایش درجه توابع شکل و یا ترکیب آنها در اجزای محدود که به ترتیب اصلاح شبکه h[1] و p[2] و hp[3] نامیده می‌شود استفاده می‌گردد. روش دیگری در اجزای محدود که در دسته اصلاح شبکه **h** قرار می‌گیرد روش به اصطلاح **r**[4] می‌باشد. در این رویکرد تعداد گره‌ها ثابت می‌ماند اما مکان آنها با توجه به توزیع خطای برآورد شده تغییر می‌کند. لازم به ذکر است روش اصلاح **r** در اجزای محدود از محبوبیت کمتری برخوردار است. دلیل آن این است که جدای از احتمال در هم تنیدگی المانها در زمان جابه‌جایی، کنترل مناسبی بر تغییرات خطا نمی‌باشد. به عبارت دیگر با کاهش میزان خطا در یک مکان خطای بقیه دامنه تغییر می‌کند. به همین دلیل در اجزای محدود محبوب‌ترین روش برای تظریف تطبیقی استفاده از همان روش غنی‌سازی[5] شبکه است که از لحاظ محاسباتی پر هزینه است. از آنجا که در روش‌های بدون شبکه از جمله روش ایزوژئومتریک در فضای پارامتری آن المان‌بندی وجود ندارد میرزاخانی و همکاران[۱۹] با ایده گرفتن از روش اصلاح r ، این روش را بر پایه استفاده از گرادیان حرارتی برای بهبود شبکه نقاط کنترلی در تحلیل ایزوژئومتریک که به خوبی با مبانی این روش مطابقت دارد پیشنهاد نمودند. در این مطالعه از این روش در مثالهای حل شده جهت کاهش میزان خطای برآورد شده استفاده می‌شود. ویژگی بارز استفاده از این روش عدم افزایش حجم محاسبات به دلیل اضافه نشدن نقاط کنترلی و امکان بهبود شبکه نقاط کنترلی در چندین تلاش بر اساس هر بار برآورد خطا می‌باشد. در این روش حوزه همسایگی هر نقطه کنترلی شناسایی و هر نقطه کنترلی به وسیله میله‌هایی فرضی به نقاطی متصل می‌شود که در همسایگی آن قرار دارد. برای یافتن این نقاط همسایه از دیاگرام ورونوی[6] استفاده می‌شود. دیاگرام ورونوی شکل محدبی است که از تقاطع عمودمنصف‌های وارد بر پاره‌خط بین گره‌ها حاصل می‌شود. گره‌ها به وسیله اعضای سازه‌ای به یکدیگر متصل و خطاهایی که از روش بازیافت تنش تخمین زده شده به اعضا اختصاص می‌یابد، در این حالت اعضایی که در نواحی با خطای بیشتر قرار دارند اختلاف حرارتی بیشتری را متحمل می‌شوند. برای هر عضو مطابق رابطه(۷۴) داریم.

$$\delta = L * \alpha * \Delta T \tag{۷۴}$$

که در آن، $\boldsymbol{\delta}$ تغییر طول عضو، **L** طول اولیه عضو، $\boldsymbol{\alpha}$ ضریب انتقال حرارت و $\Delta \boldsymbol{T}$ اختلاف حرارت می‌باشد. در رابطه(۷۵) تغییر طول اعضای فرضی به نیرو تبدیل می‌شود.

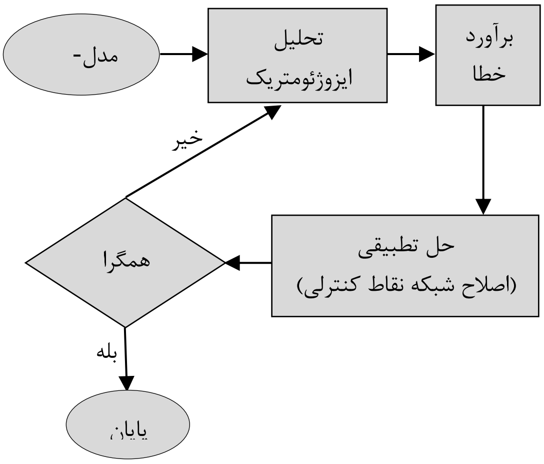
$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\boldsymbol{FL}}{\boldsymbol{EA}} \tag{۷۵}$$

$\boldsymbol{\delta}$ تغییر طول عضو، **F** نیروی حاصل از اختلاف حرارت(خطا)، **L** طول اولیه عضو، **E** ضریب الاستیسیته، **A** سطح مقطع عضو از طرفی چون نیروی به وجود آمده در مختصات محلی است با نگاشت زیر در مختصات کلی تعریف می‌شود.

$$\begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ F_{xb} \\ F_{yb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ F'_{xb} \\ F'_{yb} \end{bmatrix} \tag{۷۶}$$

سازه متشکل از نقاط کنترلی و اعضای متصل کننده فرضی را تحت نیروهای حاصل از گرادیان حرارتی تحلیل کرده و جابه‌جایی‌ها را برای انجام مجدد تحلیل ایزوژئومتریک در نقاط کنترلی و با نسبتی معیین در بردار گرهی اعمال می‌کنیم. در الگریتم در نظر گرفته شده برای رسیدن به دقت کافی قابلیت انجام مراحل تخمین خطا و جابه‌جایی نقاط کنترلی به عنوان حل تطبیقی در سیکل‌هایی متعدد وجود دارد[۱۹]. در شکل(۱) مراحل حل تطبیقی به صورت گام به گام نشان داده شده است.

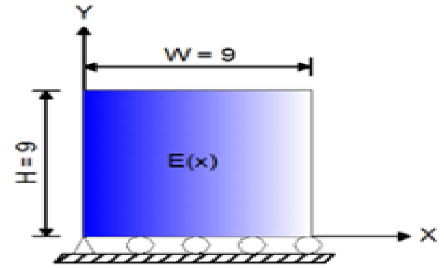
1 H-Refinement
2 P-Refinement
3 HP-Refinement
4 R-Refinement
5 Element Subdivision (Enrichment)
6 Voronoi



شکل۱- مراحل انجام حل تطبیقی در برنامه کامپیوتری

۸- حل مثال عددی

در این قسمت با استفاده از برنامه نوشته شده در نرم افزار Visul Fortran V6.6، رفتار مصالح مدرج تابعی با تحلیل ایزوژئومتریک طی دو مثال با راه حل‌های تحلیلی موجود[۲۳و۲۴] و راه حل‌هایی که در این مقاله به آن‌ها اشاره گردید مورد بحث و مقایسه قرار گرفته است. در مسائلی که حل دقیق آن موجود است می‌توان معیار خطای دقیق و تقریبی را بدست آورد. نسبت معیار خطای تقریبی به معیار خطای دقیق، بیانگر همگرایی روش پیشنهادی به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا است. به این نسبت، شاخص تأثیر گفته می‌شود که در مثال‌های زیر به آن پرداخته شده است. برای نمایش بهتر از کارایی تخمین کننده خطای پیشنهادی با توجه به مرجع[۳۱] از توابع شکل بی اسپیلاین مرتبه دو بهره گرفته و از نه نقطه گوسی برای انتگرال‌گیری عددی و نقاط بهینه تنش استفاده شده است. در ادامه به کمک برنامه نوشته شده در نرم‌افزار Matlab ، برای بهبود دقت حل و کاهش میزان خطا در روش ایزوژئومتریک در مثال‌های حل شده از اصلاح وفقی شبکه نقاط کنترلی استفاده می‌کنیم و تاثیر جابه‌جایی این نقاط را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همان‌طور که در شکل(۲) نشان داده شده است، یک صفحه با مصالح مدرج تابعی مد نظر است که در آن مدول الاستیسیته در راستای محور**x** ها از مقدار $\mathbf{E(0) = 1.0}$ تا $\mathbf{E(W) = 8.0}$ به صورت خطی مطابق رابطه(۷۷) تغییر می‌کند و ضریب پواسون مقدار ثابت ۰/۳ فرض شده است.



شکل۲- صفحه مربع با مصالح مدرج تابعی[۲۳و۲۴]

$$E(x) = E(0) + \gamma x \tag{۷۷}$$

پارامتر مستقل γ از رابطه (۷۸) محاسبه می‌شود[۲۲و۲۳] .

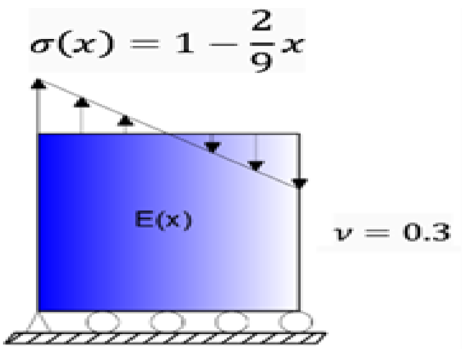
$$\gamma = \frac{E(w)-E(0)}{W} \tag{۷۸}$$

برای مدل‌سازی این ورق با مصالح مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریک بردارهای گرهی در دو راستای در نظر گرفته شده به شکل روابط (۷۹) و (۸۰) می‌باشد.

$$r = \{0,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1\} \tag{۷۹}$$

$$s = \{0,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1\} \tag{۸۰}$$

مثال اول صفحه با مصالح مدرج تابعی با ابعاد و شرایط مرزی نشان داده شده در اشکال(۲) و (۳) با ضخامت واحد در نظر است.



شکل۳- شرایط بارگذاری صفحه با مصالح مدرج تابعی در مثال اول[۲۳و۲۴]

مقدار تنش دقیق ایجاد شده در راستای محور **x** ها در هر نقطه دلخواه از رابطه(۸۱) قابل محاسبه است[۲۳و۲۴] .

$$\sigma(x) = (E(0) + \gamma x)(Ax + B) \qquad (۸۱)$$

که در آن پارامترهای مستقل $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ از روابط زیر قابل محاسبه است[۲۳و۲۴] .

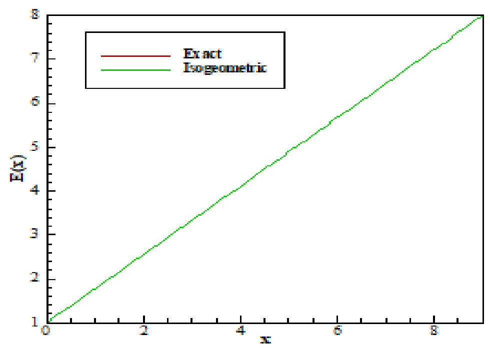
$$A = \frac{-36M(2E(0)+\gamma W)}{\gamma^2W^5+6E(0)\gamma W^4+6(E(0))^2W^3} \qquad (۸۲)$$

$$B = \frac{36M(2E(0)+\gamma W)\frac{3\gamma W^2+3E(0)W}{2\gamma W+6E(0)}}{\gamma^2W^5+6E(0)\gamma W^4+6(E(0))^2W^3} \qquad (۸۳)$$

در روابط فوق $\mathbf{M}$ برابر است با:

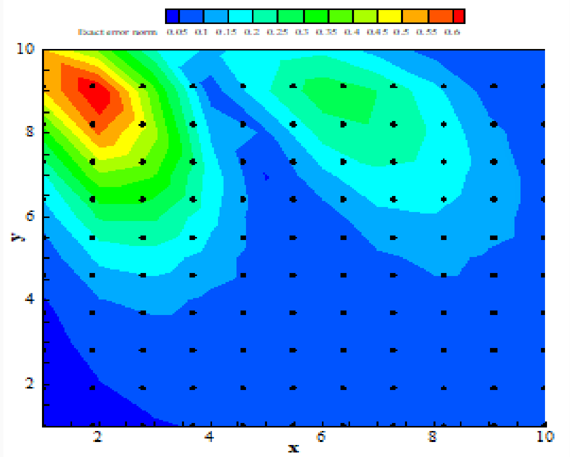
$$M = \frac{\sigma W^3}{6} \qquad (۸۴)$$

شکل(۴) مقایسه مدل‌سازی تغییرات خطی مدول الاستیسیته مصالح مدرج تابعی را به روش ایزوژئومتریک و حل دقیق نشان می‌دهد.

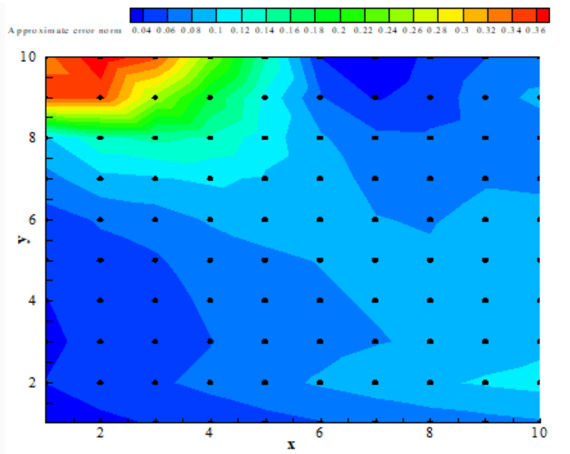


شکل۴- مقایسه مدل‌سازی تغییرات خطی مصالح مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریک و حل دقیق

همانطور که مشاهده می‌شود این نحوه مدلسازی تغییرات خواص مصالح نشان دهنده توانایی روش ایزوژئومتریک در تحلیل مسائل با مصالح مدرج تابعی است. اشکال(۵)و(۶) شبکه اولیه نقاط کنترلی و توزیع نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی را نشان می‌دهد. مقایسه این اشکال نشان می‌دهد تخمین کننده خطا، برآورد مناسبی از محل خطا دارد و میتواند در حل تطبیقی، معیار مناسبی جهت کاهش میزان خطا باشد. شاخص تأثیر در این مثال ۰/۷۶ محاسبه شده که نشان از همگرایی روش پیشنهادی به واقعیت است. شباهت توزیع خطای دقیق و تقریبی در اشکال(۵)و(۶)، و کاهش میزان خطا از ۰/۶ به ۰/۳۶ نشان از کارایی برآورد کننده خطای پیشنهادی دارد.

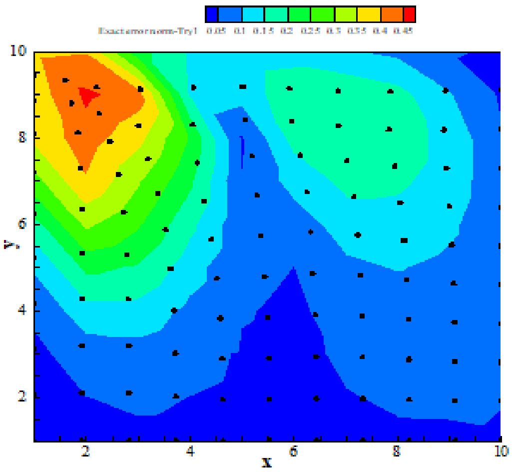


شکل۵- توزیع نرم خطای انرژی دقیق (مثال اول)

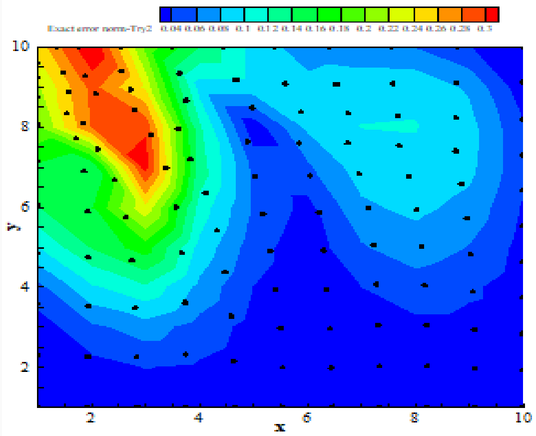


شکل۶- توزیع نرم خطای انرژی تقریبی (مثال اول)

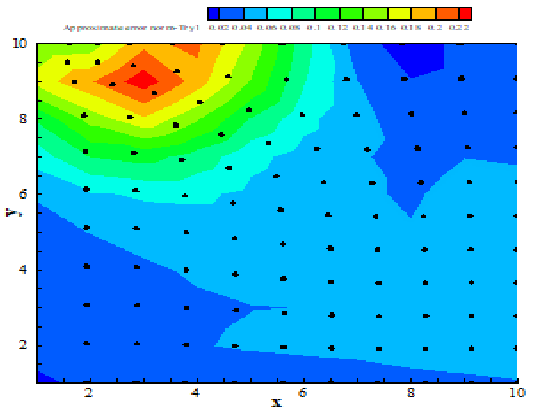
اشکال(۷) تا (۱۰) مختصات جدید نقاط کنترلی و توزیع نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی را در تلاش‌های اول و دوم حل تطبیقی نشان می‌دهد. کاهش میزان خطا در حل دقیق از ۰/۶ به ۰/۳ و از ۰/۳۶ به ۰/۱۸ در حل تقریبی و رفتار مشابه حرکت نقاط کنترلی در حل دقیق و تقریبی طی دو مرحله انجام روش تطبیقی نشان از موثر بودن روش پیشنهادی در کاهش میزان خطا دارد.



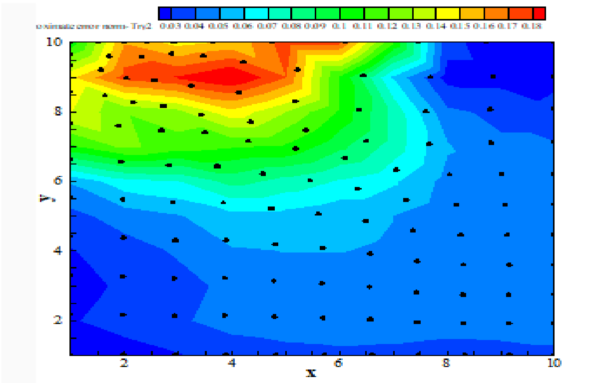
شکل۷- توزیع نرم خطای انرژی دقیق، تلاش اول(مثال اول)



شکل۸- توزیع نرم خطای انرژی دقیق، تلاش دوم(مثال اول)

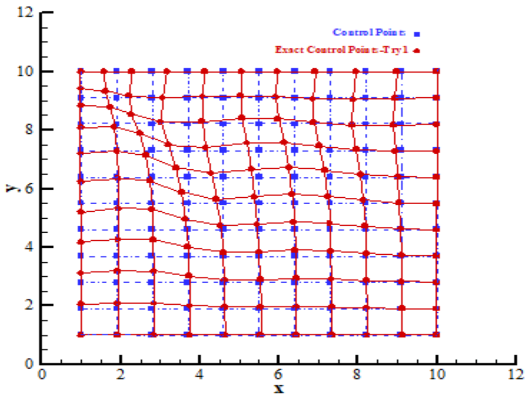


شکل۹- توزیع نرم خطای انرژی تقریبی، تلاش اول(مثال اول)

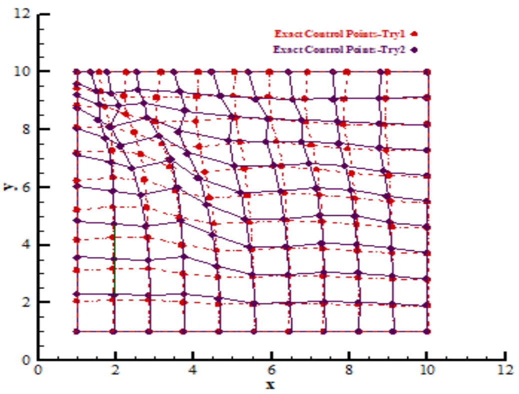


شکل۱۰- توزیع نرم خطای انرژی تقریبی، تلاش دوم(مثال اول)

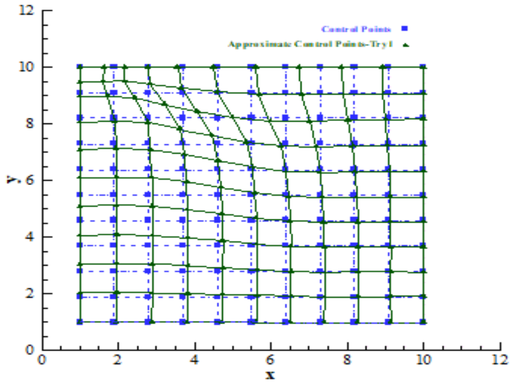
اشکال(۱۱) تا (۱۴) برای درک بهتر از حرکت نقاط کنترلی در دو تلاش انجام شده جهت کاهش میزان خطا در حل دقیق و تقریبی ترسیم شده است.



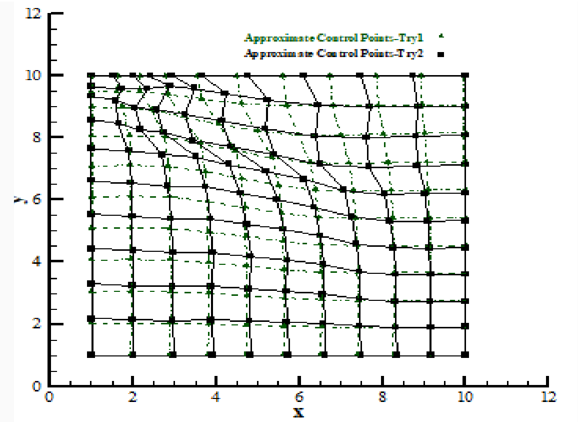
شکل۱۱- حرکت نقاط کنترلی حل دقیق، تلاش اول (مثال اول)



شکل۱۲- حرکت نقاط کنترلی حل دقیق، تلاش دوم (مثال اول)

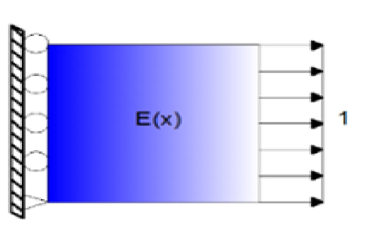


شکل۱۳- حرکت نقاط کنترلی حل تقریبی، تلاش اول (مثال اول)



شکل۱۴- حرکت نقاط کنترلی حل تقریبی،تلاش دوم (مثال اول)

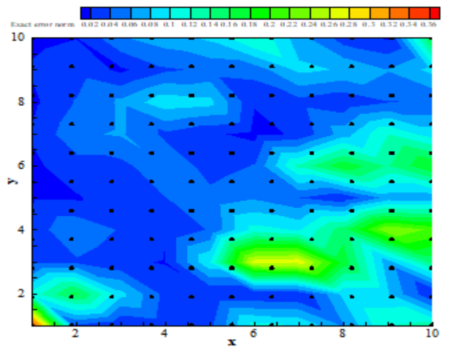
مثال دوم صفحه با مصالح مدرج تابعی با شرایط مرزی نشان داده شده در اشکال(۲) و (۱۵) با ضخامت واحد در نظر است.



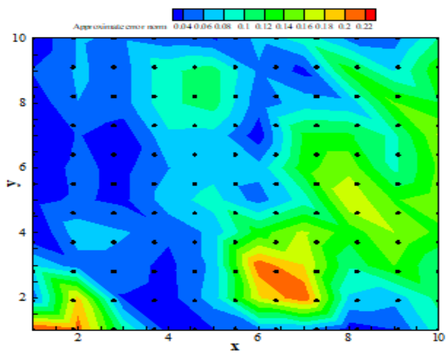
شکل۱۵- شرایط بارگذاری صفحه با مصالح مدرج تابعی در مثال دوم[۲۳و۲۴]

تغییرات خواص مصالح به صورت خطی مطابق رابطه(۷۷) و مقدار تنش دقیق ایجاد شده در راستای محورx ها برای هر نقطه برابر واحد است.

اشکال(۱۶)و(۱۷) شبکه اولیه نقاط کنترلی و توزیع نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی را نشان می‌دهد مقایسه این اشکال نشان می‌دهد تخمین کننده خطا، برآورد مناسبی از محل خطا دارد و میتواند در حل تطبیقی، معیار مناسبی جهت کاهش میزان خطا باشد. شاخص تأثیر در این مثال ۰/۸۵ محاسبه شده که نشان از همگرایی روش پیشنهادی به واقعیت است. شباهت در توزیع خطای دقیق و تقریبی، همچنین کاهش میزان خطا از ۰/۳۶ به ۰/۲۲ نشان از کارایی برآورد کننده خطای پیشنهادی دارد.

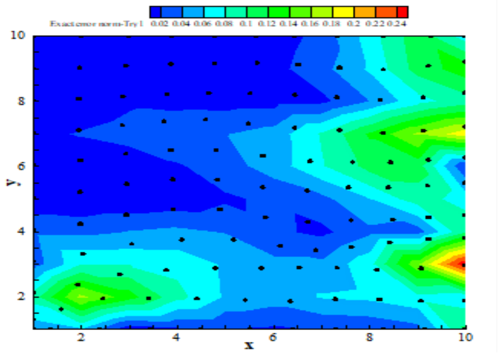


شکل۱۶- توزیع نرم خطای انرژی دقیق (مثال دوم)

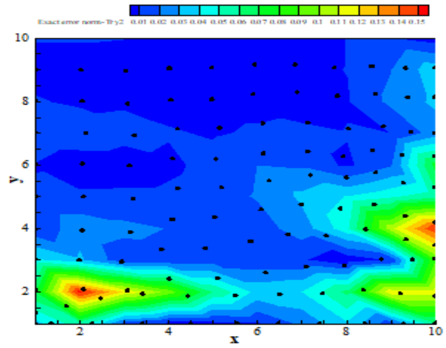


شکل۱۷- توزیع نرم خطای انرژی تقریبی (مثال دوم)

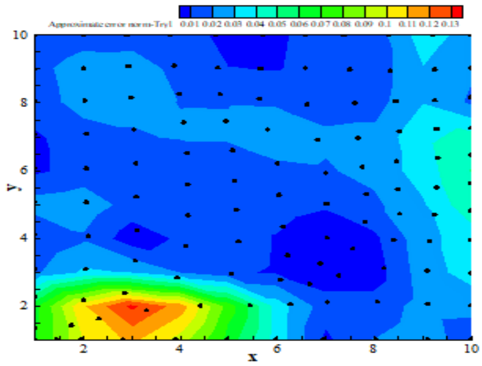
اشکال(۱۸) تا (۲۱) مختصات جدید نقاط کنترلی و توزیع نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی را در تلاش‌های اول و دوم حل تطبیقی نشان می‌دهد. کاهش میزان خطا در حل دقیق از ۰/۳۶ به ۰/۱۵ و از ۰/۲۲ به ۰/۰۹ در حل تقریبی و رفتار مشابه حرکت نقاط کنترلی در حل دقیق و تقریبی طی دو مرحله انجام روش تطبیقی نشان از موثر بودن روش پیشنهادی در کاهش میزان خطا دارد.



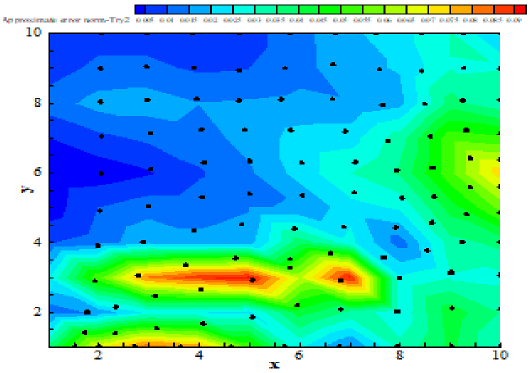
شکل۱۸- توزیع نرم خطای انرژی دقیق، تلاش اول(مثال دوم)



شکل۱۹- توزیع نرم خطای انرژی دقیق، تلاش دوم(مثال دوم)

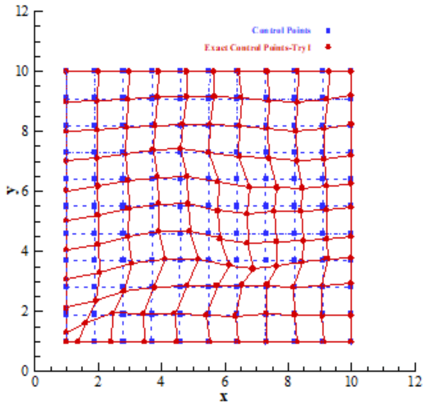


شکل۲۰- توزیع نرم خطای انرژی تقریبی،تلاش اول(مثال دوم)

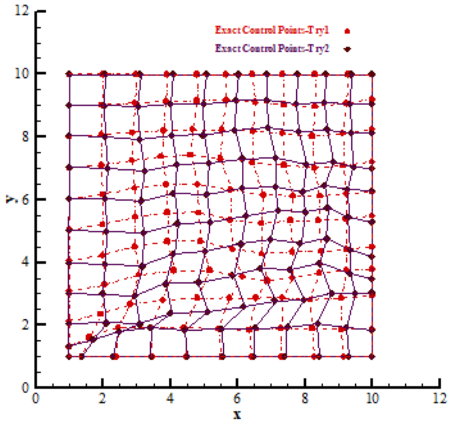


شکل۲۱- توزیع نرم خطای انرژی تقریبی،تلاش دوم(مثال دوم)

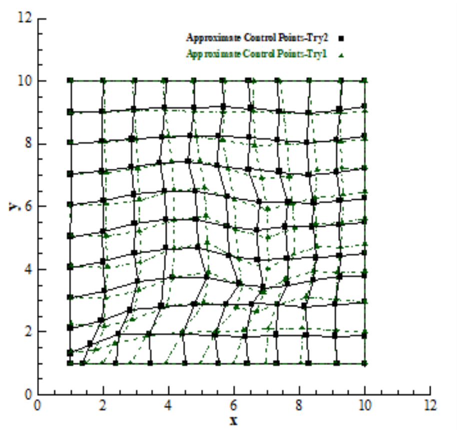
اشکال(۲۲) تا (۲۵) برای درک بهتر از حرکت نقاط کنترلی در دو تلاش انجام شده جهت کاهش میزان خطا در حل دقیق و تقریبی ترسیم شده است.



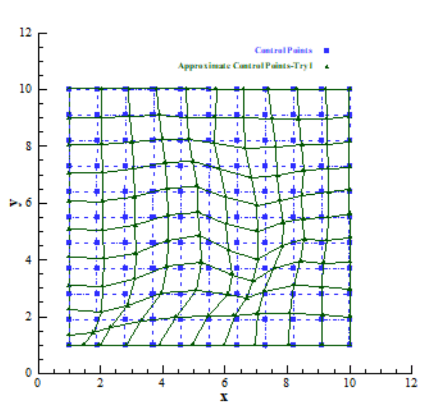
شکل۲۲- حرکت نقاط کنترلی حل دقیق، تلاش اول (مثال دوم)



شکل۲۳- حرکت نقاط کنترلی حل دقیق،تلاش دوم (مثال دوم)



شکل۲۴- حرکت نقاط کنترلی در تلاش اول حل تقریبی (مثال دوم)



شکل۲۵- حرکت نقاط کنترلی در تلاش دوم حل تقریبی (مثال دوم)

۹- نتیجه‌گیری

روش ایزوژئومتریک یک روش توانمند در تحلیل و مدل‌سازی مسائل سازه‌ای پیچیده است و به‌دلیل پتانسیل بالا به سرعت در حال پیشرفت است. در روش ایزوژئومتریک مانند هر روش تحلیل عددی دیگر خطاهایی وجود دارد. در این پژوهش برای اولین بار به برآورد خطای تحلیل مواد مدرج تابعی با روش ایزوژئومتریک و تاثیر نقاط فوق همگرا در تشکیل سطح تنش بهبود یافته پرداخته شد. با توجه به دو مثال حل شده می‌توان بیان داشت:

شباهت در توزیع خطای دقیق و تقریبی، همچنین محاسبه شاخص تاثیر ۰/۷۵ و ۰/۸۵ نشان از همگرایی روش پیشنهادی به حل دقیق دارد و می‌توان از روش پیشنهادی به عنوان راهکاری جهت برآورد خطا و محاسبه سطح تنش بهبود یافته در حل مسائل مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریک بهره گرفت. تخمین کننده خطای پیشنهادی، برآورد مناسبی از محل خطا دارد و می‌تواند معیار مناسبی با انجام حل تطبیقی که یکی از روش‌های اصلاح وفقی بر مبنای خطای برآورد شده است، جهت کاهش میزان خطا باشد.

در هر بار انجام حل تطبیقی میزان خطای دقیق و تقریبی حدود ۵۰ درصد کاهش یافت که نشان میدهد تغییر موقعیت نقاط کنترلی بر اساس اصلاح وفقی در کاهش میزان خطا موثر بوده و می‌تواند به کارآمدی روش پیشنهادی در برآورد خطای مسائل مدرج تابعی به روش ایزوژئومتریک بیفزاید.

مراجع

[1] Hughes TJ, Cottrell JA, Bazilevs Y (2005) Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Comput Methods Appl Mech Eng. 194(39-41):4135-95.

[2] Cottrell JA, Hughes TJ, Reali A (2007) Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis. Comput Methods Appl Mech Eng. 196(41-44):4160-83.

[3] Wang D, Xuan J (2010) An improved NURBS-based isogeometric analysis with enhanced treatment of essential boundary conditions. Comput Methods Appl Mech Eng. 199(37-40):2425-36.

[4] Herrema AJ, Wiese NM, Darling CN (2017) Ganapathysubramanian B, Krishnamurthy A, Hsu MC. A framework for parametric design

optimization using isogeometric analysis. Comput Methods Appl Mech Eng. 316:944-65.

[5] Cottrell JA, Hughes TJ, Bazilevs Y (2009) Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA. John Wiley & Sons.

[6] Zienkiewicz OC(2006) The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. Comput Methods Appl Mech Eng.195(4-6):207-13.

[7] Babuška I, Strouboulis T, Upadhyay CS, Gangaraj SK(1995) A model study of element residual estimators for linear elliptic problems: The quality of the estimators in the interior of meshes of triangles and quadrilaterals. Comput Struct 57(6):1009-28.

[8] Gui WZ, Babuska I(1985). The h, p and hp versions of the finite element method in 1 dimension. Part 1. The error analysis of the p-version. Maryland Univ College Park Lab For Numerical Analysis.

[9] Zienkiewicz OC, Zhu JZ(1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. Int J Numer Methods Eng .33(7):1331-64.

[10] Zienkiewicz OC, Zhu JZ(1992). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. Int J Numer Methods Eng .33(7):1365-82.

[11] Ganjali A, Hassani B(2020). Error Estimation and Stress Recovery by Patch Equilibrium in the Isogeometric Analysis Method. Adv Appl Math Mech.

[12] Hassani B, Ganjali A, Tavakkoli M(2012) An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery. Eur J Mech A Solids. 31(1):101-9.

[۱۳] حسنی بهروز , گنجعلی احمد, توکلی سید مهدی (۱۳۹۰). برآورد خطا و بهبود میدان تنش به دست آمده از تحلیل مسأله‌ها به روش ایزوژئومتریک. مهندسی عمران فردوسی, ۲۲(۲).

[14] Gyi W, Babuska I (1986)The h, p and hp version of the finite element method in one dimention: Part 1: The error analysis of the p version. Part 2: The error analysis of the h and hp version. Part 3: The adaptive hp version. Numer Math.48:577-683.

[15] Zienkiewicz OC, Zhu JZ(1989) Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems. Int J Numer Methods Eng.28(12):2839-53.

[16] Kjetil AJ (2009) An adaptive isogeometric finite element Analysis. M.S. thesis, Norwegian University of Science and Technology.

[17] Michael RD, Bert J, Bernd S (2010) Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines. Comput Methods Appl Mech Eng 199:264-275.

[18]] Yu P, Anitescu C, Tomar S, Bordas S, Kerfriden P(2018) Isogeometric analysis with local adaptivity based on a posterior error estimation for elastodynamics. arXiv preprint arXiv:1804.03191.

[19] Mirzakhani A, Hassani B, Ganjali A(2015) Adaptivity in isogeometric analysis of structures using error estimation methods based on stress recovery. J Solid Fluid Mech.5(3):79-91.

[20] Miyamoto Y, Niino M, Koizumi M(1997) FGM research programs in Japan—from structural to functional uses. InFunctionally Graded Materials (pp. 1-8). Elsevier Science BV.

[21] Naebe M, Shirvanimoghaddam K(2016) Functionally graded materials: A review of fabrication and properties. Appl Mater Today.5:223-45.

[22] Wang Y, Wang Z, Xia Z, Poh LH(2018). Structural design optimization using isogeometric analysis: a comprehensive review. Comput Model Eng Sci.117(3):455-507.

[23] Kim JH, Paulino GH(2002). Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. J Appl Mech.69(4):502-14.

[24] Burlayenko VN, Altenbach H, Sadowski T, Dimitrova SD, Bhaskar A(2017). Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements. Appl Math Model.45:422-38.

[25] Rogers DF. An introduction to NURBS: with historical perspective. Morgan Kaufmann(2001).

[26] Piegl L, Tiller W. The NURBS book. Springer Science & Business Media(1996).

[27] Reddy JN(1993) An Introduction to the Finite Element Method McGraw-Hill. Inc., New York.

[28] Hassani B, Moghaddam NZ, Tavakkoli SM(2009). Isogeometrical solution of Laplace equation.

[۲۹] حسنی بهروز, ظریف مقدم ناصر(۱۳۸۹). مدلسازی و تحلیل همزمان مسایل تنش مسطح با مصالح FG به روش ایزوژئومتریک. علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک, ۲۲.

[30] Zienkiewicz OC, Zhu JZ. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. Int J Numer Methods Eng . 1992 May 30;33(7):1331-64.

[31] Zienkiewicz OC, Taylor RL(2005) The finite element method for solid and structural mechanics. Elsevier.