



## ارتعاشات وابسته به اندازه میکروتیرهای رایلی چرخان با سطح مقطع متغیر در محیط‌های پیچیده

علی اصغر نادری<sup>۱\*</sup>، محسن رستمی<sup>۲</sup>، امیرحمزه فرج الهی<sup>۲</sup>، سیدمازیار مرعشی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه امام علی (ع)      <sup>۲</sup> استادیار مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی، دانشگاه امام علی (ع)

<sup>۳</sup> دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۱۹، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۶، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵

### چکیده

ارتعاشات ماکرو/میکروتیرهای چرخان محاط شده در بستر وینکلر-پاسترناک با سطح مقطع متغیر و شرایط مرزی مختلف در محیط‌های رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی تحت نیروهای محوری و پیرو براساس مدل تیر رایلی مطالعه شده است. همچنین، یک مطالعه پارامتریک برای شفاف‌سازی اثرات پارامترهای مختلف مانند شرایط مرزی، پروفیل سطح مقطع، ضرایب بستر، فاکتور اینرسی دورانی، شرایط محیطی و اثرات وابسته به اندازه بر فرکانس‌های طبیعی ارتعاشاتی سیستم انجام شده است. برای مدل‌سازی سیستم از تئوری تنش کوپل استفاده شده است. ابتدا معادله دینامیکی سیستم با کمک اصل همپلتون استخراج شده است. برای گسسته سازی معادله دینامیکی، از روش گالرکین استفاده شده است و با حل مسئله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی به دست آمده‌اند. نتایج پژوهش حاضر با نتایج ارائه شده در ادبیات فنی مقایسه و اعتبارسنجی شده‌اند. نتایج نشان داده‌اند که در محیط‌های دما-بالا و دما-پایین، سیستم رفتار دینامیکی متفاوتی دارد. مشاهده شده است که در مقایسه با تئوری اویلر-برنولی، فرکانس‌های تیر رایلی مقادیر کمتری دارند. همچنین مشاهده شده است که برعکس اثرات نیروهای محوری و پیرو، افزایش ضرایب الاستیک و برشی بستر باعث بهبود رفتار دینامیکی سیستم می‌شود. ضمناً با افزایش پارامتر نسبت عرضی، فرکانس‌های ارتعاشاتی سازه افزایش می‌یابند. نتایج پژوهش حاضر می‌تواند در طراحی سازه‌های پیشرفته مانند میکروتوربین‌ها و میکروموتورها مفید باشند.

**کلمات کلیدی:** میکروتیر چرخان؛ سطح مقطع غیریکنواخت؛ مدل تیر رایلی؛ بستر وینکلر-پاسترناک؛ نیروهای محوری و پیرو؛ محیط‌های پیچیده.

## Size-Dependent Vibration of Rotating Rayleigh Microbeams with Variable Cross-Section in Complex Environments

A.A. Naderi<sup>1\*</sup>, M. Rostami<sup>2</sup>, A.H. Farajollahi<sup>2</sup>, S.M. Marashi<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Assistant Professor of Mechanical Eng, Department of Engineering, Imam Ali University.

<sup>2</sup> Assistant Professor of Aerospace Eng, Department of Engineering, Imam Ali University.

<sup>3</sup> PhD of Mechanical Eng, Faculty of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology.

### Abstract

Vibration of embedded rotating macro/microbeam in the Winkler-Pasternak foundation with variable cross-sectional area and various boundary conditions in hygro-thermal-magnetic environments under axial and follower forces model is studied based on Rayleigh beam. A parametric study is performed to clarify the impacts of various parameters such as boundary conditions, cross-sectional profile, foundation coefficients, rotary inertia factor, environmental conditions and size-dependent effects on natural vibrational frequencies. Couple stress theory is utilized to model the system. Dynamical equation is derived using Hamilton principle. To discretize the dynamical equation, Galerkin method is used, and the natural frequencies are obtained by solving the eigenvalue problem. The obtained results are compared and validated with the results presented in the literature. The results show that in high-temperature and low-temperature environments, the system has different dynamical behavior. It is observed that compared to the Euler-Bernoulli beam, the Rayleigh beam has lower frequencies. It is concluded that in contrast to the effects of axial and follower forces, increasing the elastic and shear coefficients of the substrate improves the dynamical behavior. Meanwhile, the vibrational frequencies increase by increasing the width ratio parameter. The deduced results can be useful in the design of advanced structures such as microturbines and micromotors.

**Keywords:** Rotating Microbeam; Non-Uniform Cross Section; Rayleigh Beam Model; Winkler-Pasternak Foundation; Axial and Following Forces; Complex Environment.

## ۱- مقدمه

ماکرو و میکروتیرهای انعطاف‌پذیر چرخان، مدل‌های ریاضی مناسبی از اجزاء سازه‌های صنعتی مهم مانند ملخ‌های چرخان هلیکوپترها، تیغه‌های توربین‌های صنعتی، پره‌های کمپرسورها، تیرهای کوچک چرخان ماهواره‌ها، میکروتورها، میکروسویچ‌ها و میکروحواسگرها هستند. علاوه بر این، این سیستم‌های چرخان، کاربردهای بسیار گسترده‌ای در شاخه‌های گوناگون مهندسی مانند روباتیک، مکترونیک و مهندسی پزشکی دارند [۱-۳]؛ بنابراین، تحلیل دینامیکی و مدل‌سازی این سازه‌های کاربردی جایگاه ویژه‌ای برای طراحان سازه دارد. از همین رو، برای طراحی دقیق آن‌ها، شناسایی مشخصه‌های ارتعاشی مانند فرکانس‌های طبیعی سازه از اهمیت بالایی برخوردار است. لازم به ذکر است که در این زمینه، چندین مطالعه آزمایشگاهی نیز صورت پذیرفته است که نتایجشان با نتایج پژوهش‌های نظری مقایسه شده است. این مطالعات به خوبی نشان داده‌اند که مهندسان می‌توانند به نتایج مدل‌سازی‌های ریاضی و شبیه‌سازی‌های کامپیوتری این سیستم‌ها اعتماد کنند [۴-۷]. ژانگ و همکارانش [۸]، رزونانس اصلی یک تیر چرخان را با در نظرگیری اثرات غیرخطی مرتبه سوم و چهارم مدل کردند. آن‌ها پاسخ‌های دینامیکی سیستم را با استفاده از روش مقیاس چندگانه به دست آوردند. لی و همکارانش [۹]، تحلیل دینامیکی غیرخطی تیرهای چرخان به ازای شرایط مرزی مختلف با اصطکاک را انجام دادند. آن‌ها اثرات سفتی و میرایی را بر پاسخ زمانی سیستم بررسی کردند. افتخاری و اوحدی [۱۰]، ارتعاشات غیرخطی تیرهای چرخان با سرعت متغیر تحت نیروهای ایرو دینامیکی را مطالعه کردند. آن‌ها در رفتار دینامیکی سیستم، پدیده‌های غیرخطی مختلفی مانند پرش و اشباع را مشاهده کردند. صالح زاده و همکارانش [۱۱]، کنترل ارتعاشات تیرهای چرخان با عملگرهای پیزوالکتریکی را به وسیله روش پس‌خوراند خطی انجام دادند. آن‌ها نشان دادند که با کنترل ارتعاشات عرضی سیستم، ارتعاشات پیچشی را نیز می‌توان کنترل کرد؛ همچنین، مطالعات آزمایشگاهی و نظری نشان داده‌اند که تئوری‌های کلاسیک پیوسته کارایی لازم برای مدل‌سازی ریاضی سازه‌های کوچک مقیاس را ندارند [۱۲]. در نتیجه، محققین به توسعه تئوری‌های نوین برای تحلیل درست رفتار مکانیکی

وابسته به اندازه سیستم‌های میکرو و نانو پرداختند. یکی از تئوری‌های کارآمد برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی میکروسازه‌ها، تئوری تنش کوپل است که با نتایج پژوهش‌های آزمایشگاهی مطابقت بالایی دارد [۱۳]. در همین راستا، با به‌کارگیری تئوری تنش کوپل، اثرات فاکتورهای کلیدی مختلف بر رفتار ارتعاشاتی میکروسازه‌های چرخان در ادبیات فنی گزارش شده‌اند. به‌عنوان مثال، چن و همکارانش [۱۴] به تحلیل ارتعاشاتی یک پره چرخان ساخته‌شده از مواد کامپوزیت چندلایه با نقص هندسی براساس مدل تیر تیموشنکو و نظریه تنش کوپل پرداختند. آن‌ها اثرات سرعت زاویه‌ای، نسبت لاغری، پارامتر مقیاس، نقص هندسی و تأثیر زوایای لایه‌های میکروتیر کامپوزیت را بر ارتعاش پره چرخان مورد بررسی قرار دادند؛ همچنین آن‌ها نشان دادند که فرکانس طبیعی تیر چرخان را می‌توان با طراحی بهینه لایه‌های کامپوزیتی به خوبی کنترل کرد. دهرویه [۱۵]، اثرات اندازه، نسبت شعاع به توپی، ضریب لاغری و سرعت دوران را بر دینامیک میکروتیرهای چرخان بررسی کرد. او نشان داد که با افزایش ضریب لاغری، فرکانس‌های سیستم، مخصوصاً در مودهای بالاتر، افزایش می‌یابند.

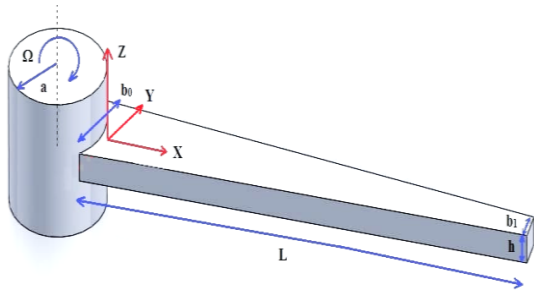
در صنایع پیشرفته، به‌منظور بهبود کارایی سیستم‌های دوار، پروفیل‌های متغیر و هندسه‌های گوناگون برای اجزا سیستم به کار برده می‌شوند. به دلیل توزیع مقاومتی دلخواه و توانایی کنترل توزیع تنش در تیرهای با سطح مقطع غیریکنواخت مانند تیرهای مخروطی، این المان‌ها می‌توانند نقش مهمی در صنایع مختلف ایفا کنند [۱۶]؛ در نتیجه، شبیه‌سازی دینامیکی و تحلیل ارتعاشات سازه‌های غیریکنواخت چرخان از موضوعات جذاب برای مهندسين و پژوهشگران است. در این زمینه، شفیعی و همکارانش [۱۷] به مطالعه ارتعاشات عرضی یک میکروتیر چرخان با سطح مقطع مخروطی پرداختند و برای مدل‌سازی سازه، از نظریه تنش کوپل و مدل تیر اویلر-برنولی استفاده کردند. آن‌ها اثرات پارامتر مقیاس کوچک، طول تیر، نسبت تغییر سطح مقطع، شعاع توپی و سرعت دوران را در رفتار ارتعاشاتی میکروتیر بررسی کردند و نشان دادند که با افزایش ارتفاع سطح مقطع سیستم، فرکانس اصلی میکروتیر یکسرگردار کاهش می‌یابد. شفیعی و همکارانش [۱۸]، رفتار ارتعاشاتی

راستا، قدیری و همکارانش [۲۲] به بررسی اثرات سطحی بر رفتار ارتعاشاتی تیرهای کوچک مقیاس چرخان ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از تئوری غیرمحملی ارینگن پرداخته‌اند. در این تحقیق اثرات سطحی، پارامتر غیرمحملی، سرعت دوران، شاخص کسر حجمی و شرایط مرزی در فرکانس طبیعی نانوتیر چرخان مورد بررسی قرار گرفتند. آن‌ها دریافتند که با افزایش پارامتر غیرمحملی، وابستگی فرکانس به سرعت دوران افزایش می‌یابد. همچنین نشان دادند که تأثیر شاخص کسر حجمی بر نسبت فرکانس در سرعت دوران پایین، بیشتر از سرعت دوران بالا است. در تحقیقی دیگر اوه و همکارانش [۲۳] به مطالعه تیغه‌های چرخان تحت شرایط بارگذاری حرارتی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش دمای سطح، اولین فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد؛ همچنین به این نتیجه دست یافتند که دمای گاز خروجی از توربین تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی دارد، درحالی‌که دمای مایع خنک‌کننده بر طول تیر چرخان تأثیرگذار است. اندارا و تیتروس [۲۴] به تحلیل ارتعاشی یک تیر پیش پیچ‌خورده چرخان در معرض بار محوری پرداختند و نشان دادند که وجود نیروی خارجی منجر به تغییر فرکانس طبیعی تیر می‌شود. چن و همکارانش [۲۵] ارتعاشات عرضی یک تیر چرخان با تکیه‌گاه الاستیک را با استفاده از سری فوریه حل کردند. نتایج این تحقیق حاکی از آن است که فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها، وابستگی بالایی به شرایط مرزی و تکیه‌گاه الاستیک دارند. کار و سوجاتا [۲۶] پایداری دینامیکی یک تیر یکنواخت چرخان تحت تحریک بار ضربه‌ای محوری را به ازای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار دادند و تأثیرات شرایط مرزی و سرعت چرخش را بر بارهای کم‌انرژی استاتیکی و همچنین ناحیه‌های ناپایداری نشان دادند. کین و لی [۲۷] آثار محیط‌های گرمایی را بر رفتار ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی لایه‌ای دوار بررسی کردند. آن‌ها نشان دادند که سرعت چرخش، شعاع توپی، زاویه گام و زاویه جهت‌گیری در رفتار ارتعاشی سیستم مؤثر هستند و نسبت به تغییرات دما و غلظت رطوبت محیط، آثار چشمگیرتری بر فرکانس طبیعی سیستم دارند.

بر اساس اطلاعات نویسندگان مقاله، تحلیل ارتعاشاتی ماکرو/میکروتیرهای چرخان محاط شده در بستر وینکلر-

وابسته به اندازه میکروتیرهای چرخان غیریکنواخت ساخته شده از مواد تابعی را با تئوری تنش کوپل و تیموشنکو مورد بررسی قرار دادند و تأثیر تغییر شکل برشی بر فرکانس طبیعی سیستم را مورد تحلیل قرار دادند. آنها نشان دادند که با افزایش نسبت سطح مقطع، فرکانس اصلی کاهش و با افزایش سرعت دوران، دو فرکانس اول میکروتیر افزایش می‌یابد؛ همچنین آن‌ها فهمیدند که با در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی ماده، تأثیر تغییر شکل برشی بر دینامیک سیستم محسوس‌تر می‌شود. اوه و همکارانش [۱۹] به تحلیل ارتعاشاتی پره‌های پیش پیچ‌خورده مخروطی چرخان ساخته شده از مواد تابعی با استفاده از مدل تیر رایلی پرداختند. آن‌ها پارامترهای مختلف فیزیکی و هندسی مانند زاویه پیش پیچش، نسبت مخروطیت، نسبت شعاع توپی، نسبت عرض به ضخامت و گرادیان مواد را مورد بررسی قرار گرفتند. آنها نشان دادند که با افزایش شعاع توپی، به دلیل افزایش سرعت زاویه‌ای، فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد و نسبت مخروطیت به‌طور قابل توجهی بر فرکانس طبیعی تأثیرگذار است؛ همچنین آن‌ها دریافتند که زاویه پیش پیچش باعث تغییر مکان شاخه‌های فرکانس طبیعی می‌شود.

عملکرد سازه‌های مهندسی وابستگی بالایی به نیروهای خارجی اعمالی و شرایط محیطی آن‌ها مانند دما و رطوبت دارد [۲۰]. به‌طورمثال، هنگامی که سیستم در یک میدان حرارتی کار می‌کند، در سیستم تنش‌های حرارتی به وجود می‌آید که می‌تواند منجر به اثرات مخرب بر تغییر شکل و پایداری این سازه‌ها شود؛ همچنین، در حضور محیط‌های رطوبتی، با جذب مولکول‌های آب، در سیستم شرایط تنزل به وجود می‌آید که امکان رخداد ناپایداری‌های ارتعاشاتی در سیستم را بیشتر می‌کند. ضمناً، مطالعات نشان داده‌اند که هنگامی که یک سازه تحت یک میدان مغناطیسی خارجی محوری قرار می‌گیرد، سفتی مؤثر سیستم افزایش می‌یابد [۲۱]. از این‌رو، یکی از فاکتورهای مهم در سیستم‌های مهندسی چرخان که عمدتاً در معرض شرایط خارجی پیچیده قرار دارند، آثار عوامل محیطی و نیروهای وارد بر آن‌ها است؛ لذا پیش‌بینی عملکرد تیرهای چرخان در محیط‌های پیچیده و یافتن راه‌حل‌های نوین برای بهبود پاسخ دینامیکی این سازه‌ها در شرایط عملیاتی گوناگون ضروری است. در همین



شکل ۱- شماتیک یک تیر یکسرگیردار چرخان

که در آن  $k$  شاخص توانی است و  $\alpha_b$  پارامتر نسبت عرضی نام دارد که نشان‌دهنده مقدار نسبت عرض تیر در انتها ( $b_1$ ) به ابتدای آن ( $b_0$ ) دارد. این پارامتر نشان‌دهنده نسبت تغییر سطح مقطع تیر در راستای طولی است. انرژی پتانسیل ناشی از تغییر شکل خمشی سیستم طبق رابطه (۳) بیان می‌شود [۲۸ و ۲۹]:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L (EI(x) + GA(x)l^2) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3)$$

که در آن  $l$  پارامتر مقیاس طولی ماده است؛ همچنین، سطح مقطع ( $A$ )، ممان اینرسی ( $I$ ) و مدول برشی سیستم ( $G$ )، به ترتیب از روابط (۴-۶) به دست می‌آیند [۳۰]:

$$A(x) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dydz \quad (4)$$

$$I(x) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dydz \quad (5)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu_p)} \quad (6)$$

که در آن  $\nu_p$  نسبت پواسون است.

با در نظرگیری ارتعاشات عرضی برای سیستم، اجزاء غیر صفر میدان جابجایی این چنین تعریف می‌شود [۱۵]:

$$U_1 = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (7)$$

$$U_3 = w(x, t) \quad (8)$$

که  $U_1$  و  $U_3$  به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستای طولی و عرضی هستند. انرژی پتانسیل ناشی از نیروی گریز از مرکز مطابق رابطه (۹) بیان می‌شود [۲۹]:

$$U_r = \frac{1}{2} \int_0^L N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (9)$$

نیروی محوری  $N_x$  طبق رابطه (۱۰) استخراج می‌شود [۱۸]:

پاسترناک با سطح مقطع متغیر و شرایط مرزی مختلف در محیط‌های حرارتی-رطوبتی-مغناطیسی تحت نیروهای محوری و پیرو براساس مدل تیر اویلر-برنولی و رایلی انجام نشده است. همچنین اثرات پارامترهای مختلف مانند شرایط مرزی، پروفیل سطح مقطع، فاکتور اینرسی دورانی، شرایط محیطی، اثرات وابسته به اندازه و ضرایب بستر الاستیک-برشی بر دینامیک تیرهای کوچک مقیاس چرخان گزارش نشده است. در مقاله حاضر، ابتدا یک مدل ریاضی برای تیرهای غیریکنواخت چرخان با در نظرگیری اثرات اندازه، بستر وینکلر-پاسترناک، محیطی، اینرسی دورانی، نیروهای محوری و پیرو به ازای شرایط مرزی مختلف ارائه می‌شود. سپس باهدف استخراج معادله مرتبه کاهش یافته، روش گسسته سازی گالرکین برای جداسازی فضای زمان و مکان مختصراً توضیح داده خواهد شد. سپس فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم استخراج می‌شوند. نتایج استخراج شده با نتایج گزارش شده در مقالات منتشر شده مقایسه می‌شوند و در نهایت اثر پارامترهای کلیدی بر ارتعاشات سیستم توضیح داده خواهند شد.

## ۲- فرمولاسیون مسئله

در شکل ۱، شماتیک یک تیر یکسرگیردار چرخان با سطح مقطع متغیر نمایش داده شده است. مطابق شکل، تیر چرخان به یک توپی صلب با شعاع  $a$  متصل شده است و حول محور  $Z$  با سرعت  $\Omega$  دوران می‌کند. برای تیر، طول، مدول الاستیک، مدول برشی و چگالی با  $G$ ،  $E$ ،  $L$  و  $\rho$  نمایش داده می‌شود. ارتفاع سطح مقطع متصل به توپی با  $h$  نشان داده می‌شود و مقداری ثابت دارد. لازم به ذکر است که سیستم تحت میدان‌های رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی است. همچنین، فرض شده است که در بستر وینکلر-پاسترناک محاط شده است و تحت نیروهای محوری و پیرو قرار گرفته است. ضمناً عرض تیر در راستای طولی سیستم متغیر است. مقدار عرض تیر در ریشه و انتهای تیر به ترتیب با  $b_0$  و  $b_1$  مشخص می‌شود و طبق رابطه (۱) در راستای محور طولی تغییر می‌کند:

$$b(x) = b_0 f(x) = b_0 \left( 1 + (\alpha_b - 1) \left( \frac{x}{L} \right)^k \right) \quad (1)$$

$$\alpha_b = b_1/b_0 \quad (2)$$

کار انجام شده توسط بستر الاستیک-برشی نیز از رابطه (۱۹) نتیجه می‌شود [۳۵]:

$$W_f = -\frac{1}{2} \int_0^L \left( k_w w^2 + k_s \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (19)$$

که  $k_w$  و  $k_s$  به ترتیب ضرایب سفتی الاستیک و برشی بستر هستند. با به‌کارگیری اصل همپلتون می‌توان معادله دینامیکی سیستم را به دست آورد:

$$\delta \int_0^L (K + W_e + W_p + W_q^c + W_q^{nc} - W_f - U_s - U_r) dt = 0 \quad (20)$$

معادله دینامیکی طبق معادله (۱۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (EI(x) + GA(x)l^2)w'''' \\ & + ((N_H + N_T + N_M - \rho A_0 \Omega^2 \Gamma_x)w')' \\ & + (P + q(L-x) - k_s)w'' + k_w w \\ & + \rho A(x)\ddot{w} - (\rho I(x)\ddot{w}')' = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ترم اول معادله بالا اشاره به نیروی بازگرداننده خمشی یا درنظرگیری تنش کوپل (اثرات اندازه) است. ترم دوم به ترتیب اشاره به نیروهای ناشی از میدان‌های رطوبتی، حرارتی و دوران سیستم (نیروی گریز از مرکز) دارد. ترم چهارم مربوط به نیروهای فشاری محوری، پیرو و بستر برشی است. ترم پنجم تا هفتم نیز ناشی از نیروی الاستیک بستر، نیروی اینرسی جابجایی عرضی و دورانی است. معادله دینامیکی سیستم حاضر، با نادیده‌گیری اثرات سطح مقطع متغیر، بستر، شرایط محیطی، نیروهای محوری و پیرو، مطابق معادله دینامیکی ارائه شده در مرجع [۱۵] به دست می‌آید (معادله (۲۲)).

$$(EI + GAl^2)w'''' - (N_x w')' + \rho A \ddot{w} - \rho I \ddot{w}' = 0 \quad (22)$$

### ۳- روش حل

در روش گسسته‌سازی گالرکین، جابجایی عرضی سیستم به صورت سری نمایش داده در رابطه (۲۳) تخمین زده می‌شود:

$$W(x,t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) \phi_j(x) \quad (23)$$

$$N_x = \int_x^L \rho A(x) \Omega^2 (x+a) dx = \rho A_0 \Omega^2 \Gamma_x \quad (10)$$

که در آن  $\Gamma_x = \int_x^L f(x)(x+a) dx$  برای به دست آوردن انرژی جنبشی سیستم، می‌توان نوشت [۳۱]:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A(x) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \rho I(x) \left( \frac{\partial w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx \quad (11)$$

ترم اول و دوم در رابطه (۱۱) به ترتیب اشاره به انرژی جنبشی ناشی از حرکت عرضی و چرخش سطح مقطع دارند. در صورت نادیده‌گیری ترم دوم (اثرات اینرسی دورانی)، معادله دینامیکی به حالت اوپلر-برنولی تقلیل می‌یابد [۳۲].

کار خارجی انجام شده توسط محیط‌های رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی با رابطه (۱۲) بیان می‌شود [۳۳] و [۳۴]:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_0^L \left( (N_H + N_T + N_M) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (12)$$

که در آن:

$$N_H = -EA(x)\beta_H \Delta H \quad (13)$$

$$N_T = -EA(x)\alpha_T \Delta T \quad (14)$$

$$N_M = \frac{A(x)B^2}{\eta_M} \quad (15)$$

که  $\alpha_T$ ،  $\beta_H$  و  $\eta_M$  به ترتیب بیانگر ضریب انبساط رطوبتی، ضریب انبساط حرارتی و ضریب نفوذپذیری میدان مغناطیسی هستند. ضمناً،  $\Delta H$ ،  $\Delta T$  و  $B$  نیز به ترتیب بیانگر تغییرات رطوبت، تغییرات دما و شدت میدان مغناطیسی است. کار نیروی محوری خارجی از رابطه (۱۶) به دست می‌آید [۳۵]:

$$W_p = \frac{1}{2} \int_0^L P \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (16)$$

که  $P$  دامنه نیروی محوری وارد بر سیستم است؛ همچنین، تغییرات کار پایستار و ناپایستار نیروی پیرو به ترتیب از روابط (۱۷) و (۱۸) به دست می‌آیند [۳۵]:

$$\delta W_q^c = \int_0^L q(L-x) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx \quad (17)$$

$$\delta W_q^{nc} = - \int_0^L q \frac{\partial w}{\partial x} \delta w dx \quad (18)$$

$$\cosh(\lambda_j)\cos(\lambda_j) = 1 \quad (۲۹)$$

$$\tanh(\lambda_j) = \tan(\lambda_j) \quad (۳۰)$$

برای تحلیل بهتر و تعمیم کلی نتایج، پارامترهای بدون بعد در رابطه (۳۱) معرفی می‌شوند:

$$x^* = \frac{x}{L}, w^* = \frac{w}{L}, t^* = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI_0}{\rho A_0}}$$

$$\theta = \frac{A_0 l^2}{2(1 + \nu_p) I_0}, a^* = \frac{a}{L}, \Omega^* = \Omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_0}}$$

$$q^* = \frac{qL^3}{I}, k_w^* = \frac{k_i L^4}{EI_0}, k_s^* = \frac{k_i L^2}{EI_0}$$

$$\gamma = \frac{I_0}{A_0 L^2}, \Gamma_x^* = \frac{\Gamma_x}{L^2}, \delta_H = \frac{\beta_H A_0 L^2 \Delta H}{I_0}$$

$$\delta_T = \frac{A_0 \alpha_T L^2 \Delta T}{I_0}, \delta_M = \frac{A_0 B^2 L^2}{EI_0 \eta_m} \quad (۳۱)$$

با به‌کارگیری پارامترهای بدون بعد، معادله دینامیکی بی‌بعد سیستم به دست می‌آید. با جایگذاری شکل مود ارتعاشی مناسب در معادله دینامیکی سیستم، حذف علامت ستاره، بهره‌گیری از خاصیت تعامد مودها، معادله مشتق جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم تبدیل می‌شود که فرم ماتریسی آن‌ها در رابطه (۳۲) نشان داده شده است:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (۳۲)$$

که عناصر هر ماتریس در روابط زیر بیان شده‌اند:

$$\mathbf{q} = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)] \quad (۳۳)$$

$$\mathbf{M}_{sr} = \int_0^1 f(x)\phi_s(x)\phi_r(x)dx - \gamma \left( \int_0^1 f(x)\phi_s(x)\phi_r''(x)dx + \int_0^1 f'(x)\phi_s(x)\phi_r'(x)dx \right) \quad (۳۴)$$

$$\mathbf{K}_{sr} = (1 + \theta) \left( \int_0^1 f(x)\phi_s(x)\phi_r''''(x)dx + \int_0^1 f'(x)\phi_s(x)\phi_r'''(x)dx + \int_0^1 f''(x)\phi_s(x)\phi_r''(x)dx \right)$$

$$+ (\delta_H + \delta_T - \delta_M) \left( \int_0^1 f(x)\phi_s(x)\phi_r''(x)dx + \int_0^1 f'(x)\phi_s(x)\phi_r'(x)dx \right)$$

$$- \Omega^2 \left( \int_0^1 \Gamma_x \phi_s(x)\phi_r''(x)dx + \int_0^1 \Gamma_x' \phi_s(x)\phi_r'(x)dx \right)$$

$$+ (P + q(1 - x) - k_G) \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r''(x)dx + k_w \int_0^1 \phi_s(x)\phi_r(x)dx \quad (۳۵)$$

که در آن  $q_j$  مختصات تعمیم‌یافته وابسته به زمان سیستم است؛ همچنین،  $\phi_j$  شکل مود مناسب برای جابجایی عرضی سیستم با توجه به شرایط مرزی آن است که در روابط زیر بیان شده‌اند. ضمناً،  $N$  تعداد شکل مود ارتعاشی است [۳۶].

شکل مود تیر دوسر مفصل (P-P):

$$\varphi_j(x) = \sqrt{2} \sin(j\pi x) \quad (۲۴)$$

شکل مود تیر یکسر گیردار (C-F):

$$\varphi_j(x) = \cosh(\lambda_j x) - \cos(\lambda_j x)$$

$$- \frac{\sinh(\lambda_j) - \sin(\lambda_j)}{\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j)} (\sinh(\lambda_j x) - \sin(\lambda_j x)) \quad (۲۵)$$

شکل مود تیر دوسر گیردار (C-C):

$$\varphi_j(x) = \cosh(\lambda_j x) - \cos(\lambda_j x)$$

$$- \frac{\cosh(\lambda_j) - \cos(\lambda_j)}{\sinh(\lambda_j) - \sin(\lambda_j)} (\sinh(\lambda_j x) - \sin(\lambda_j x)) \quad (۲۶)$$

شکل مود تیر یکسر گیردار-یکسر مفصل (C-P):

$$\varphi_j(x) = \cosh(\lambda_j x) - \cos(\lambda_j x)$$

$$- \frac{\sinh(\lambda_j) - \sin(\lambda_j)}{\cosh(\lambda_j) + \cos(\lambda_j)} (\sinh(\lambda_j x) - \sin(\lambda_j x)) \quad (۲۷)$$

معادله مشخصه فرکانسی روابط بالا این‌چنین بیان می‌شوند:

$$\cosh(\lambda_j)\cos(\lambda_j) = -1 \quad (۲۸)$$

کوپل، فاکتور اینرسی دورانی، بستر، شرایط محیطی و نیروهای محوری و پیرو در نظر گرفته نشده‌اند. برای به دست آوردن مثال‌های عددی، مشخصات فیزیکی و هندسی سیستم در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند.

#### ۴-۲- اثرات اندازه و فاکتور اینرسی دوران

در شکل ۳ و ۴، دو فرکانس اول ارتعاشات سیستم یکسرگردار برحسب سرعت دوران نمایش داده شده است و به ترتیب اثرات اندازه و فاکتور اینرسی دوران بر رفتار ارتعاشاتی سیستم بررسی شده است. مطابق شکل ۳، با افزایش پارامتر مقیاس طولی ماده، فرکانس‌های ارتعاشاتی افزایش می‌یابند. همان‌طور که در ادبیات فنی گزارش شده است، با در نظرگیری اثرات اندازه، سفتی مؤثر سیستم افزایش می‌یابد و با در نظرگیری اثرات تنش کوپل، فرکانس‌های ارتعاشاتی بهبود می‌یابند. ضمناً، همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، تأثیر پارامتر مقیاس طولی ماده بر فرکانس‌های بالاتر ارتعاشاتی سیستم محسوس‌تر است.

جدول ۱- مشخصات هندسی و فیزیکی سیستم [۱۷، ۲۰، ۲۱ و ۳۳]

پارامتر	مقدار
$v_p$	0.3262
$\eta_M$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
$\beta_H$	$0.026 (\text{wt}\% \text{H}_2\text{O})^{-1}$
$\alpha_T^H$	$1.1 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
$\alpha_T^L$	$-1.6 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
$L$	$100 \mu\text{m}$
$\rho$	$8166 \text{ Kg/m}^3$
$h$	$0.5 \mu\text{m}$
$b_0$	$1 \mu\text{m}$
$E$	201.04 Gpa
$L$	$100 \mu\text{m}$

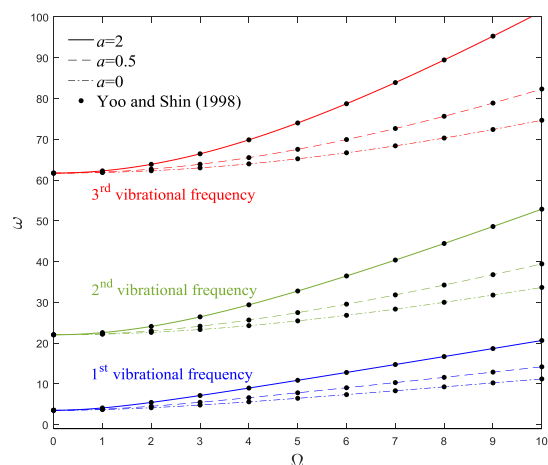
در نهایت با حل مسئله مقدار ویژه معادله (۳۲) مقادیر ویژه برحسب پارامترهای مختلف سیستم به دست می‌آیند. لازم به ذکر است که قسمت موهومی مقادیر ویژه سیستم همان فرکانس‌های طبیعی ارتعاشاتی سازه هستند [۳۷].

#### ۴-۱- بحث و نتایج

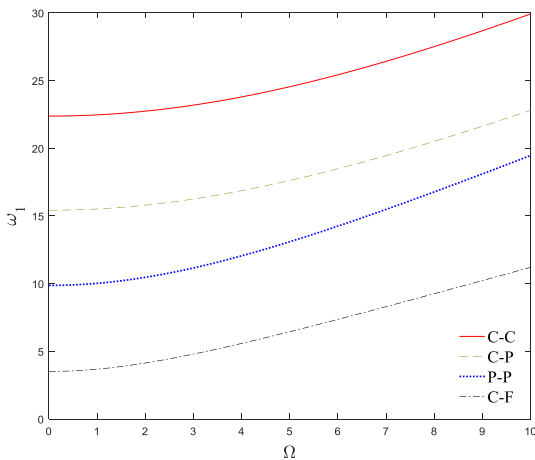
برای اطمینان از صحت نتایج، نتایج پژوهش حاضر با نتایج موجود در ادبیات فنی صحت‌سنجی خواهند شد. سپس به بررسی اثرات پارامترهای کلیدی بر ارتعاشات پرداخته می‌شود.

#### ۴-۱- مطالعه مقایسه‌ای

در شکل ۲، سه فرکانس اول ارتعاشات یک تیر چرخان یکسرگردار با سطح مقطع یکنواخت برحسب سرعت دوران سیستم به ازای مقادیر مختلف شعاع تویی رسم شده‌اند. برای استخراج نتایج از هشت مود ارتعاشاتی استفاده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج پژوهش حاضر با نتایج پژوهش یون و شین [۳۸] تطابق خوبی دارند. به دلیل القا اثرات سفت-شوندگی ناشی از نیروی گریز از مرکز، فرکانس‌های ارتعاشاتی با افزایش سرعت دورانی در سیستم افزایش می‌یابند؛ همچنین، با افزایش شعاع تویی شاخه‌های فرکانسی مخصوصاً در سرعت‌های دورانی بزرگ‌تر به سمت مقادیر بیشتر جابجا می‌شوند. لازم به ذکر است که در رسم این شکل اثرات تنش



شکل ۲- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات یک تیر یکسرگردار چرخان با سطح مقطع یکنواخت برحسب سرعت دوران سیستم به ازای  $\gamma=\theta=P=q=k_w=k_s=B=\Delta T=\Delta H=0$



شکل ۵- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات یک تیر چرخان با سطح مقطع یکنواخت بر حسب سرعت دوران سیستم به ازای  $\gamma=\theta=P=q=k_w=k_s=B=\Delta T=\Delta H=a=0$

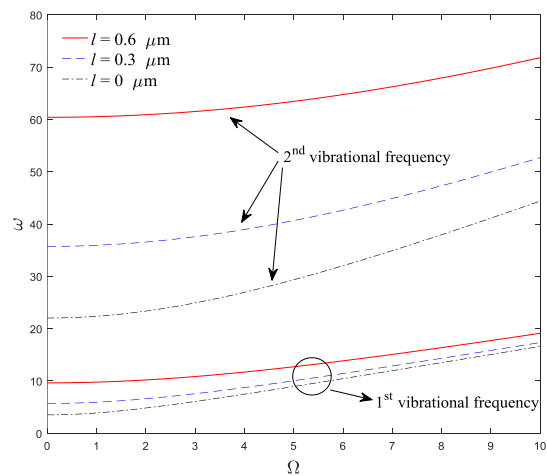
اینرسی دورانی تنها مشخصات هندسی سیستم نقش دارند، می‌توان گفت که با تنظیم مشخصات هندسی سازه می‌توان فرکانس‌های ارتعاشاتی را تنظیم کرد.

#### ۳-۴- اثرات شرایط مرزی

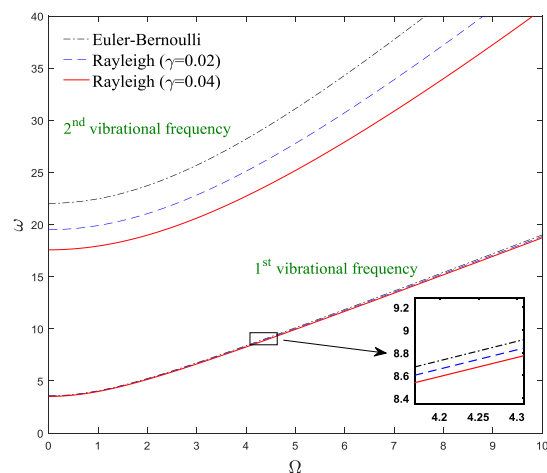
در شکل ۵، فرکانس پایه سیستم بر حسب سرعت دوران به ازای شرایط مرزی مختلف رسم شده است. شرایط مرزی دوسرگیردار و یکسرگیردار، به ترتیب بیشترین و کمترین مقادیر فرکانس ارتعاشاتی را دارند. چون در مقایسه با سیستم‌های ناپایستار، سیستم‌های دوسرپیسته سفتی بیشتری دارند، لذا می‌توان انتظار داشت که سیستم‌های مقید، به ویژه سیستم دوسرگیردار، فرکانس ارتعاشاتی بالاتری داشته باشند.

#### ۴-۴- اثرات تغییر سطح مقطع

در شکل‌های ۶ و ۷، اثرات تغییر سطح مقطع سیستم بر دینامیک سیستم نشان داده شده است. در شکل ۶، فرکانس پایه یک تیر یکسرگیردار بر حسب سرعت دوران به ازای پروفیل‌های مختلف سطح مقطع شکل نمایش داده شده است. مطابق شکل، هنگامی که عرض انتهای تیر از عرض ریشه تیر بزرگ‌تر باشد ( $\alpha_0 > 1$ ) سیستم فرکانس ارتعاشاتی بزرگ‌تری دارد. هنگامی که سطح مقطع انتهای تیر بزرگ‌تر است، جرم بیشتری در انتهای تیر نسبت به ریشه تیر متمرکز



شکل ۳- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات یک تیر یکسرگیردار چرخان با سطح مقطع یکنواخت بر حسب سرعت دوران سیستم به ازای  $\gamma=\theta=P=q=k_w=k_s=B=\Delta T=\Delta H=0$  و  $a=1$



شکل ۴- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات یک تیر یکسرگیردار چرخان با سطح مقطع یکنواخت بر حسب سرعت دوران سیستم به ازای  $\gamma=\theta=P=q=k_w=k_s=B=\Delta T=\Delta H=0$  و  $a=1.5$

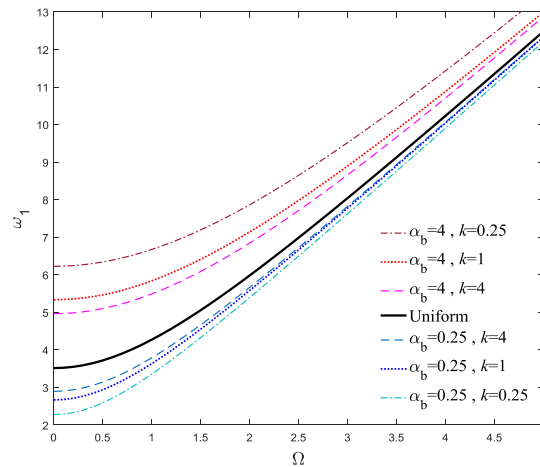
در شکل ۴ به مقایسه مدل‌های تیر اویلر-برنولی و رایلی برای مدل‌سازی ارتعاشات تیرهای چرخان پرداخته شده است. به دلیل اثر افزودگی جرم فاکتور اینرسی دوران ( $\gamma$ ) با افزایش  $\gamma$ ، فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم کاهش می‌یابند؛ بنابراین در مقایسه با تیر اویلر-برنولی، فرکانس‌های ارتعاشاتی تیر رایلی کمتر می‌باشند. مطابق شکل ۴ مشاهده می‌شود که اثرات کاهش فاکتور اینرسی دورانی بر فرکانس‌های ارتعاشاتی بالاتر سیستم محسوس‌تر است. از آنجاکه در فاکتور



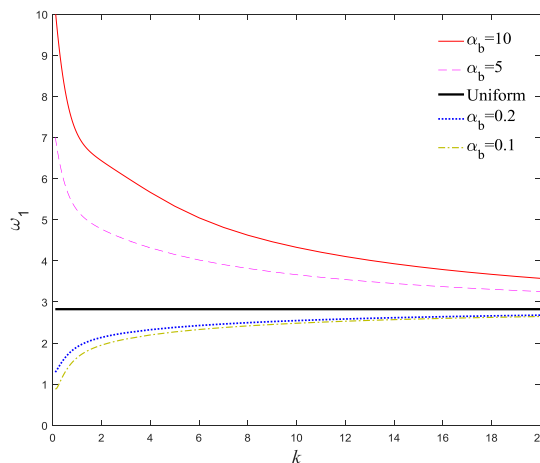
شاخص توان، تمرکز جرم در انتهای تیر کاهش می‌یابد. مطابق شکل ۷، هنگامی که  $\alpha_b > 1$  است، با افزایش شاخص توانی فرکانس سیستم کاهش می‌یابد. این روند برای  $\alpha_b < 1$  برعکس است؛ همچنین، با افزایش شاخص توانی، فرکانس ارتعاشاتی سیستم با سطح مقطع متغیر به مقدار فرکانس ارتعاشاتی تیر چرخان با سطح مقطع ثابت میل می‌کند، با افزایش  $k$ ، سطح مقطع سیستم غیریکنواخت به سطح مقطع یکنواخت میل می‌کند.

#### ۴-۵- اثرات شرایط محیطی

در شکل ۸ و ۹، اثرات شرایط محیطی محیط‌های مغناطیسی-رطوبتی-حرارتی بر ارتعاشات سیستم تیر چرخان نمایش داده شده است. در شکل ۸، دو فرکانس اول تیر دوسرگردار چرخان برحسب درصد تغییرات رطوبت و شدت میدان مغناطیسی نمایش داده شده است. همان‌طور که مشخص است، با افزایش رطوبت در سیستم، فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم کاهش/افزایش می‌یابند. از سوی دیگر، با اعمال میدان مغناطیسی قوی‌تر، فرکانس‌های ارتعاشاتی افزایش پیدا می‌کنند. توجه فیزیکی برای رخداد چنین شرایطی در سیستم به این صورت است که هنگامی که سیستم متحمل تغییرات رطوبتی می‌شود، با جذب مولکول‌های آب، در سیستم شرایط تنزل به وجود می‌آید؛ در نتیجه، در حضور محیط‌های رطوبتی فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، مطالعات نشان داده‌اند که هنگامی که یک سازه تحت یک میدان مغناطیسی خارجی محوری قرار می‌گیرد، سفتی مؤثر سیستم افزایش می‌یابد؛ بنابراین با افزایش شدت میدان مغناطیسی، فرکانس‌های ارتعاشاتی سازه روند افزایشی دارند. در شکل ۹ نیز فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم دوسرگردار در محیط حرارتی نشان داده شده است. هنگامی که سیستم در یک میدان حرارتی کار می‌کند، در سیستم تنش‌های حرارتی به وجود می‌آید که می‌تواند منجر به اثرات مخرب بر تغییر شکل و پایداری این سازه‌ها شود؛ در نتیجه با افزایش دما در محیط‌های دما-بالا، سفتی مؤثر سازه کاهش می‌یابد که منجر به یک سیستم نرم‌تر می‌شود و در نتیجه فرکانس تیر چرخان کاهش می‌یابد. مطالعات آزمایشگاهی نشان داده‌اند که علامت ضریب انبساط حرارتی



شکل ۶- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات یک تیر یکسرگردار چرخان با سطح مقطع متغیر برحسب سرعت دوران سیستم به ازای  $a=3$  و  $\gamma=\theta=P=q=k_w=k_s=B=\Delta T=\Delta H=0$

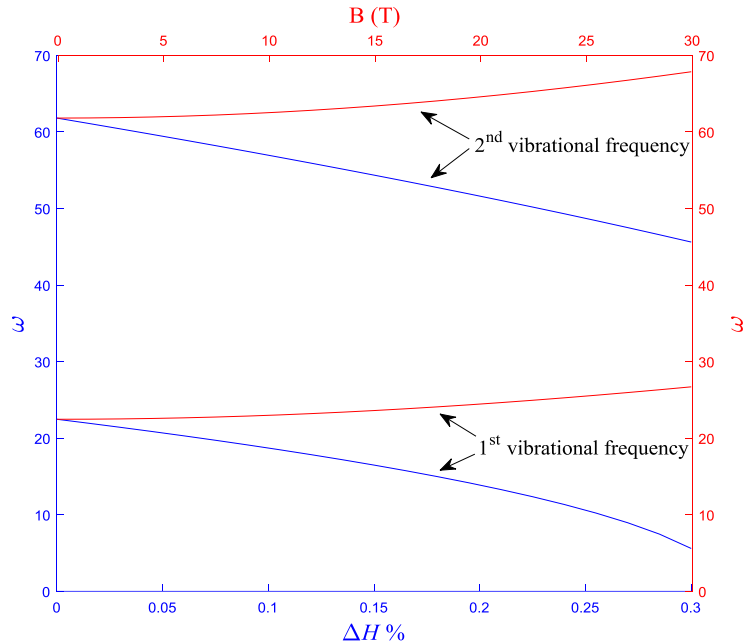


شکل ۷- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات یک تیر یکسرگردار چرخان با سطح مقطع متغیر برحسب شاخص توانی به ازای  $\gamma=\theta=P=q=k_w=k_s=B=\Delta T=\Delta H=0$  و  $\Omega=0.5$   $a=3$

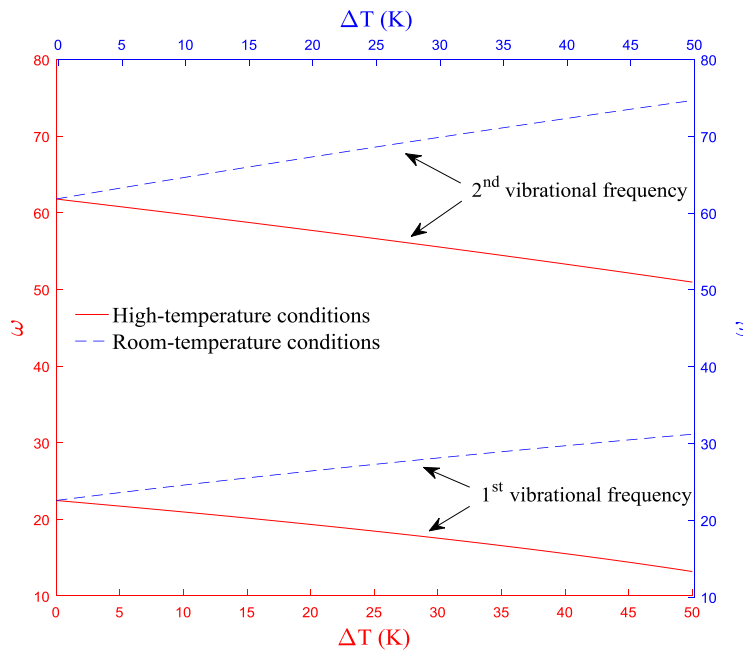
شده است. در نتیجه به دلیل القاء اثرات سفت-شوندگی نیروی گریز از مرکز که رابطه مستقیمی با شعاع چرخش دارد، می‌توان گفت هنگامی که جرم واحد بر سطح مقطع انتهای تیر بیشتر است، سیستم فرکانس ارتعاشاتی بیشتری دارد.

همچنین با توجه به ویژگی‌های توابع چندجمله‌ای، هنگامی که  $\alpha_b > 1$ ، با افزایش شاخص توان فرکانس ارتعاشاتی تیر کاهش می‌یابد و برعکس. چراکه در این حالت با افزایش

سازه‌های کوچک مقیاس در محیط‌های دما-بالا و دما-پایین (دمای اتاق) باهم متفاوت هستند. مطابق شکل می‌توان استنباط کرد که در محیط دما-پایین، با افزایش دما، فرکانس‌های سازه روند افزایشی دارند.



شکل ۸- فرکانس‌های طبیعی یک تیر دوسرگیردار چرخان با سطح مقطع یکنواخت بر حسب درصد تغییرات رطوبت و شدت میدان مغناطیسی به ازای  $\Omega=1$  و  $\gamma=\theta=P=q=k_w=k_s=\Delta T=a=0$



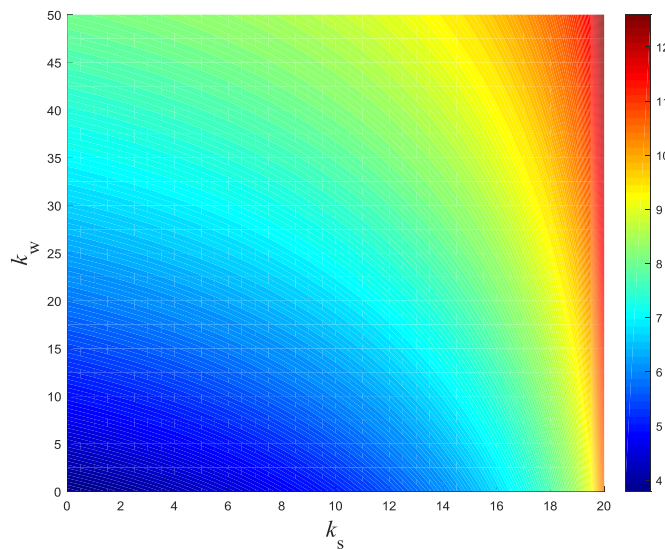
شکل ۹- فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات یک تیر دوسرگیردار چرخان با سطح مقطع یکنواخت بر حسب تغییرات درجه حرارت به ازای  $a=1.5$   $\Omega=1$  و  $\gamma=\theta=P=q=k_w=k_s=B=\Delta H=0$

۴-۶- اثرات بستر

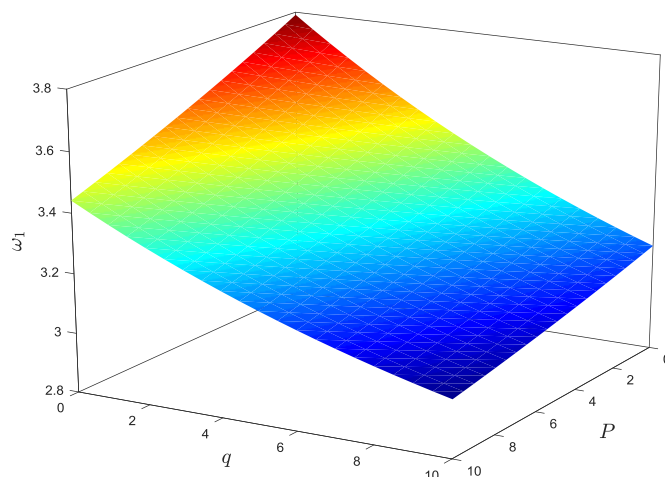
در شکل ۱۰، اثر ضرایب بستر بر رفتار دینامیکی سیستم نمایش داده شده است. در این شکل کانتور فرکانس پایه سیستم یکسرگیردار چرخان در صفحه  $k_w-k_s$  نشان داده شده است. با افزایش ضرایب بستر، سفتی مؤثر سیستم افزایش می‌یابد و فرکانس ارتعاشات سازه نیز افزایش می‌یابد. ضمناً نسبت به ضریب بستر وینکلر، اثر ضریب بستر برشی بر بهبود رفتار دینامیکی سیستم مشهودتر است.

۴-۷- اثرات نیروهای محوری و پیرو

در نهایت، اثرات نیروهای محوری و پیرو بر ارتعاشات سیستم بررسی می‌شوند. در شکل ۱۱، فرکانس پایه‌ای ارتعاشات سیستم یکسرگیردار چرخان برحسب دامنه نیروهای محوری و پیرو نمایش داده شده است. همان‌طور که مشخص است، افزایش نیروهای محوری و پیرو، اثری کاهنده بر سفتی مؤثر سیستم دارند؛ در نتیجه با افزایش نیروهای خارجی محوری و پیرو، فرکانس ارتعاشاتی سازه نیز کاهش می‌یابد.



شکل ۱۰- اثرات ترکیبی ضرایب بستر وینکلر و پاسترناک بر فرکانس پایه ارتعاشات تیر یکسرگیردار چرخان با سطح مقطع یکنواخت به ازای  $a=3$  و  $\Omega=1$  و  $\gamma=\theta=P=q=B=\Delta T=\Delta H=0$



شکل ۱۱- اثرات ترکیبی نیروهای محوری و پیرو بر فرکانس پایه ارتعاشات یک تیر یکسرگیردار چرخان با سطح مقطع یکنواخت به ازای  $a=3$  و  $\Omega=1$  و  $\gamma=\theta=k_w=k_s=B=\Delta T=\Delta H=0$

- [2] Bab S, Khadem SE, Mahdiabadi MK, Shahgholi M (2017) Vibration mitigation of a rotating beam under external periodic force using a nonlinear energy sink (NES). *J Vib Control* 23(6): 1001-1025.
- [3] Babaei A, Arabghahestani M (2021) Free vibration analysis of rotating beams based on the modified couple stress theory and coupled displacement field. *Appl Mech*, 2(2): 226-238.
- [4] Yigit AS, Ulsoy AG, Scott RA (1990) Dynamics of a radially rotating beam with impact, Part 2: experimental and simulation results. *J Vib Acoust* 112(1): 71-77.
- [5] Yigit AS, Ulsoy AG, Scott RA (1990) Dynamics of a radially rotating beam with impact, Part 1: Theoretical and computational model. *J Vib Acoust* 112(1): 65-70.
- [6] Khodaei MJ, Mehrvarz A, Candelino N, Jalili N (2018) Theoretical and experimental analysis of coupled flexural-torsional vibrations of rotating beams. In *Dynamic Systems and Control Conference* 103: 28-46.
- [7] Zehetner C, Zenz G, Gerstmayr J (2011) Piezoelectric control of flexible vibrations in rotating beams: An experimental study. *PAMM* 11(1): 77-78.
- [8] Zhang B, Ding H, Chen LQ (2020) Three to one internal resonances of a pre-deformed rotating beam with quadratic and cubic nonlinearities. *Int J Nonlinear Mech* 126: 103552.
- [9] Li C, Liu X, Tang Q, Chen Z (2021) Modeling and nonlinear dynamics analysis of a rotating beam with dry friction support boundary conditions. *J Sound Vib* 498: 115978.
- [10] Eftekhari M, Owhadi S (2021) Nonlinear dynamics of the rotating beam with time-varying speed under aerodynamic loads. *Int J Dyn Control* 1-20.
- [11] Salehzadeh R, Nejad FB, Shamshirsaz M (2020) Vibration control of a rotating cantilever beam using piezoelectric actuator and feedback linearization method. *arXiv Preprint*, arXiv:2004.11703.
- [12] Dehrouyeh-Semnani AM (2015) A comment on "Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory". *Int J Eng Sci* 47(2009): 487-498.
- [13] McFarland AW, Colton JS (2005) Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *J Micromech Microeng* 15(5): 1060.
- [14] Chen D, Feng K, Zheng S (2019) Flapwise vibration analysis of rotating composite laminated Timoshenko microbeams with geometric imperfection based on a re-modified couple stress

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل ارتعاشاتی میکروتیرهای چرخان براساس تئوری تنش کوپل و مدل تیر رایلی انجام شده است. اثرات فاکتورهای کلیدی مختلفی مانند شرایط مرزی، پروفیل سطح مقطع، مشخصه‌های بستر الاستیک-برشی، اثرات اندازه و محیطی را بر فرکانس‌های ارتعاشاتی سازه بررسی شده است. مهم‌ترین نتایج پژوهش حاضر عبارت هستند از:

- ✓ در مقایسه با تیر اویلر-برنولی، تیر رایلی فرکانس‌های ارتعاشاتی کوچک‌تری دارد. با افزایش فاکتور اینرسی دورانی، فرکانس‌های ارتعاشاتی سازه کاهش می‌یابند.
- ✓ بر عکس محیط‌های رطوبتی، میدان‌های مغناطیسی موجب بهبود رفتار ارتعاشاتی سازه می‌شوند. درحالی‌که، بسته به شرایط دمایی محیط، افزایش دما می‌تواند اثرات کاهش‌ی یا افزایش‌ی بر فرکانس‌های سازه داشته باشد. به این صورت که برعکس محیط‌های دما-پایین، فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم با افزایش دما در محیط‌های دما-بالا کاهش می‌یابند.
- ✓ برعکس اثرات نیروهای فشاری محوری و پیرو، به‌کارگیری بستر الاستیک-پاسترناک منجر به بهبود رفتار ارتعاشاتی سیستم می‌شود. ضمناً، در مقایسه با مدول الاستیک بستر، اثر مدول برشی در افزایش فرکانس ارتعاشاتی سازه محسوس‌تر است.
- ✓ با در نظرگیری اثرات اندازه در سیستم، فرکانس‌های ارتعاشاتی سیستم افزایش می‌یابند که این اثر افزایشی بر مودهای ارتعاشاتی بالاتر سازه مشهودتر است.
- ✓ هنگامی‌که عرض انتهای تیر بزرگ‌تر از عرض ریشه تیر باشد، افزایش شاخص توانی منجر به کاهش فرکانس ارتعاشاتی می‌شود و برعکس. همچنین، با افزایش شاخص توانی، فرکانس ارتعاشاتی سیستم با سطح مقطع متغیر به فرکانس سیستم با سطح مقطع ثابت میل می‌کند.

## ۶- مراجع

- [1] Hoa SV (1979) Vibration of a rotating beam with tip mass. *J Sound Vib* 67(3):369-381.

- [27] Qin Y, Li YH (2017) Influences of hygrothermal environment and installation mode on vibration characteristics of a rotating laminated composite beam. *Mech Syst Signal Process* 91: 23-40.
- [28] Dehrouyeh-Semnani AM, BehboodiJouybari M, Dehrouyeh M (2016) On size-dependent lead-lag vibration of rotating microcantilevers. *Int J Eng SCI* 91: 23-40.
- [29] Shafiei N, Kazemi M, Ghadiri M (2016) On size-dependent vibration of rotary axially functionally graded microbeam. *Int J Eng Sci* 101: 29-44.
- [30] Shafiei N, Kazemi M, Ghadiri M (2016) Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams. *Int J Eng Sci* 102: 12-26.
- [31] Shafiei N, Kazemi M, Ghadiri M (2016) Comparison of modeling of the rotating tapered axially functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli microbeams. *Physica E Low Dimens Syst Nanostruct* 83: 74-87.
- [32] Han SM, Benaroya H, Wei T (1999) Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *J Sound Vib* 225(5): 935-988.
- [33] Sadeghi-Goughari M, Jeon S, Kwon HJ (2018) Flutter instability of cantilevered carbon nanotubes caused by magnetic fluid flow subjected to a longitudinal magnetic field. *Physica E Low Dimens Syst Nanostruct* 98: 184-190.
- [34] Sarparast H, Ebrahimi-Mamaghani A, Safarpour M, Ouakad HM, Dimitri R, Tornabene F (2020) Nonlocal study of the vibration and stability response of small-scale axially moving supported beams on viscoelastic-Pasternak foundation in a hygro-thermal environment. *Math Method Appl Sci*.
- [35] Bahaadini R, Hosseini M, Jamalpoor A (2017) Nonlocal and surface effects on the flutter instability of cantilevered nanotubes conveying fluid subjected to follower forces. *Physica B Condens Matter* 509: 55-61.
- [36] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2020) Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes. *Mech Based Des Struct* 1-30.
- [37] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2019) Dynamics of two-phase flow in vertical pipes. *J Fluids Struct* 87: 150-173.
- [38] Yoo HH, Shin SH (1998) Vibration analysis of rotating cantilever beams. *J Sound Vib* 212(5): 807-828.
- theory and isogeometric analysis. *Eur J Mech A-Solid* 76: 25-35.
- [15] Dehrouyeh-Semnani AM (2015) The influence of size effect on flapwise vibration of rotating microbeams. *Int J Eng Sci* 94: 150-163.
- [16] Chand RR, Behera PK, Pradhan M, Dash PR (2019) Parametric stability analysis of a parabolic-tapered rotating beam under variable temperature grade. *J Vib Eng Technol* 7(1): 23-31.
- [17] Shafiei N, Kazemi M, Fatahi L (2017) Transverse vibration of rotary tapered microbeam based on modified couple stress theory and generalized differential quadrature element method. *Mech Adv Mater Struc* 24(3): 240-252.
- [18] Shafiei N, Mousavi A, Ghadiri M (2016) Vibration behavior of a rotating non-uniform FG microbeam based on the modified couple stress theory and GDQEM. *Compos Struct* 149: 157-169.
- [19] Oh Y, Yoo HH (2016) Vibration analysis of rotating pretwisted tapered blades made of functionally graded materials. *Int J Eng Sci* 119: 68-79.
- [20] Afkhami Z, Farid M (2016) Thermo-mechanical vibration and instability of carbon nanocones conveying fluid using nonlocal Timoshenko beam model. *J Vib Control* 22(2): 604-618.
- [21] Bai Y, Suhatril M, Cao Y, Forooghi A, Assilzadeh H (2021) Hygro-thermo-magnetically induced vibration of nanobeams with simultaneous axial and spinning motions based on nonlocal strain gradient theory. *Eng Comput* 1: 1-18.
- [22] Ghadiri M, Shafiei N, Safarpour H (2017) Influence of surface effects on vibration behavior of a rotary functionally graded nanobeam based on Eringen's nonlocal elasticity. *Microsyst Technol* 23(4): 1045-1065.
- [23] Oh Y, Yoo HH (2020) Thermo-elastodynamic coupled model to obtain natural frequency and stretch characteristics of a rotating blade with a cooling passage. *Int J Mech Sci* 165: 105194.
- [24] Ondra V, Titurus B (2019) Free vibration analysis of a rotating pre-twisted beam subjected to tendon-induced axial loading. *J Sound Vib* 461: 114912.
- [25] Chen Q, Du J (2019) A Fourier series solution for the transverse vibration of rotating beams with elastic boundary supports. *Appl Acoust* 155: 1-15.
- [26] Kar RC, Sujata T (1991) Dynamic stability of a rotating beam with various boundary conditions. *Comput Struct* 40(3): 753-773.