



## طراحی کنترل‌کننده‌ی پس‌خورد خروجی با کلیدزنی نرم برای سیستم‌های پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن

رضا یآوری<sup>۱</sup>، سعید شمقدری<sup>۲\*</sup> و آرش صادق‌زاده<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

<sup>۳</sup> استادیار مهندسی برق، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۱۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۶/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۰۸

### چکیده

در این مقاله، رویکردی جدید به منظور طراحی کنترل‌کننده جدول‌بندی پس‌خورد خروجی دینامیکی مرتبه کامل برای سیستم‌های پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن ارائه می‌شود. ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز کلیدزن به پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی متغیر با زمان وابسته هستند. منطق کلیدزنی هیستریزس وابسته به پارامترهای جدول‌بندی در طراحی کنترل‌کننده مورد استفاده قرار می‌گیرد. ابتدا طراحی کنترل‌کننده کلیدزن مورد بررسی قرار گرفته است؛ به گونه‌ای که علاوه بر تضمین پایداری، کمترین مقدار بهره‌ی  $L_2$  خروجی عملکردی را برای سیستم حلقه‌بسته‌ی نامعین کلیدزن رقم می‌زند؛ اما در روش معمول طراحی کلیدزن، جهش‌های سیگنال کنترلی در لحظات کلیدزنی از دیدگاه عملی مطلوب و قابل قبول نیست. بر همین اساس، در ادامه طراحی سیستم کنترل کلیدزن مقاوم به کمک رویکرد کلیدزنی نرم (هموار) انجام شده است. در مقایسه با رویکردهای پیشین، به کمک خانواده‌ای مستقل از ماتریس‌های لیاپانوف و متغیرهای کمکی، انجام کلیدزنی نرم در کنترل‌کننده با بهبود عملکرد همراه است. طراحی به صورت بهینه‌سازی نامساوی‌های وابسته به پارامتر خطی با ارائه‌ی یک فرایند بازگشتی انجام می‌شود. سرانجام روش فوق در طراحی کنترل‌کننده سیستم مکانیکی غیرخطی مشهور یک آونگ معکوس بر ابراه مورد استفاده قرار گرفته است. بررسی و ارزیابی نتایج این طراحی، مزیت‌های رویکرد کنترلی پیشنهادی در این مقاله را تأیید می‌کند.

**کلمات کلیدی:** کنترل جدول‌بندی بهره‌ی مقاوم؛ کلیدزنی نرم؛ سیستم پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن؛ نامساوی ماتریسی خطی.

### Output Feedback Smooth Switching Control Design for Switched Uncertain Linear Parameter-Varying Systems

R. Yavari<sup>1</sup>, S. Shamaghdari<sup>2,\*</sup>, A. Sadeghzadeh<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Student, Department of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Assist. Prof., Department of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Assist. Prof., Department of Electrical Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

### Abstract

In this article, a new method is proposed to design robust dynamic output feedback control for switched uncertain continuous-time linear parameter varying (LPV) systems. The system matrices are supposed to depend on both the time-varying scheduling and uncertain parameters. Hysteresis switching law is exploited for the switching controller synthesis. Firstly, the robust switching controllers are robustly designed so that the stability and the induced  $L_2$ -gain performance of the switched closed-loop uncertain LPV system can be guaranteed. The usual switching logics can cause discontinuous chattering control signal which are not acceptable in a practical situation. Accordingly, a smooth switching strategy for control design has been tackled in the following. By utilizing an independent family of parameter-dependent Lyapunov matrices and slack variables, performance improvement is achieved when compared to the previous works. The proposed method is formulated in terms of solutions to a set of parameter-dependent LMIs using the presented iterative algorithm. Finally, an inverted pendulum on a cart is illustrated to verify the advantages of the presented approach.

**Keywords:** Robust Gain-Scheduled Control; Smooth Switching; Switched Uncertain Linear Parameter-Varying (LPV) System; Linear Matrix Inequality (LMI).

## ۱- مقدمه

رویکرد طراحی جدول‌بندی بهره در دهه‌های اخیر با کاربردهای موفق به عنوان یکی از مشهورترین روش‌های کنترلی در سیستم‌های عملی مهندسی توجه زیادی را به سوی خود جلب نموده است [۱]. در این میان مدل‌سازی پارامتر متغیر خطی (LPV) با داشتن ظرفیتی مناسب در بیان مدل دینامیکی سیستم‌های غیرخطی و خطی متغیر با زمان، توانسته است، نقش مهمی را در نسخه‌ی مدرن این راهبرد کنترلی ایفا نماید. در رویکرد مدرن، طراحی کنترل جدول‌بندی بهره مبتنی بر تضمین پایداری و حصول عملکرد به صورت کاملاً تحلیلی است [۲-۴]. مدل‌سازی LPV و رویکرد جدول‌بندی بهره می‌تواند نسبت به روش‌های صرفاً مقاوم به کاهش محافظه‌کاری در طراحی منجر گردد. در روش‌های معمول طراحی کنترل‌کننده جدول‌بندی بهره برای سیستم‌های LPV فرض بر آن است، مدل سیستم و پارامترهای جدول‌بندی دقیق موجود باشند [۱-۶].

اما وجود نامعینی در مدل سیستم و هم‌چنین حضور آن در اندازه‌گیری و یا تخمین پارامترهای جدول‌بندی امری اجتناب‌ناپذیر است که به صورت محدود در پژوهش‌های [۷-۱۵] توجه محققان را به سوی خود جلب نموده است. در واقع محدودیت‌های فیزیکی، عملی و فناوری ممکن است باعث شود، مقدار دقیق پارامترها و یا مدل واقعی سیستم در دسترس نباشد. در مرجع [۸] عمدتاً به طراحی جدول‌بندی بهره‌ی مقاوم غیرکلیدزن برای سیستم‌های LPV با نامعینی‌های خاص غیرساختاری (غیرپارامتری) در آرایش مدل تبدیل کسری-خطی پرداخته شده است. از سوی دیگر، برای سیستم‌های گسسته-زمان LPV نامعین با نامعینی‌های پارامتری، طراحی کنترل مقاوم غیرکلیدزن در ساختار پس‌خورد خروجی قابل مطالعه است؛ هم‌چنین طراحی جدول‌بندی بهره برای سیستم LPV نامعین با ساختار کنترلی پس‌خورد حالت صورت گرفته است [۱۴]؛ اما طراحی کنترل‌کننده تناسبی-انتگرالی-مشتقی غیرکلیدزن برای سیستم پیوسته-زمان محدود LPV نامعین چندوجهی با اهداف تحقق پایداری و نیز بهینه نمودن تابع هزینه مشخص دنبال گردیده و حضور اغتشاش خارجی در نظر گرفته نشده است [۷]. در حقیقت می‌توان فقدان تحقیقات مناسب برای یک سیستم پیوسته-زمان LPV نامعین را تأیید نمود. از

سوی دیگر، برای بازه وسیعی از پارامترهای جدول‌بندی یک کنترل‌کننده‌ی یکتا می‌تواند محافظه‌کاری جدی به نتایج طراحی تحمیل نماید و حتی به عدم جواب برای طراحی منجر شود. به همین علت کنترل‌کننده‌های کلیدزن برای سیستم‌های LPV گسترش داده شده‌اند [۱۵-۲۱]. در منابع [۱۸-۲۱] به طراحی سیستم کنترل با کلیدزنی نرم غیرمقاوم پرداخته شده است. در حقیقت جهش سیگنال کنترلی هنگام کلیدزنی از دیدگاه عملی نامطلوب است؛ چون یک پاسخ گذرای غیرنرم و سریع کنترلی می‌تواند به آسیب مکانیکی، ایجاد خستگی، یا اشباع سیگنال کنترل شود و بنابراین در کاربردهای عملی پذیرفتنی نیست؛ هم‌چنین در پژوهش‌های [۱۸-۲۱] نامعینی در سیستم به عنوان یکی از دغدغه‌های مهم عملی در نظر گرفته نشده است. علاوه بر آن سیستم حلقه‌باز LPV غیرکلیدزن است. در پژوهش‌های [۱۸-۱۹] محاسبات کنترلی نیازمند مقدار نرخ زمانی پارامترهای جدول‌بندی است که ممکن است، عملاً در دسترس یا قابل تخمین نباشند. گرچه این دغدغه‌ی عملی در تحقیقات [۲۰ و ۲۱] با کاهش مقداری عملکرد خروجی و تحمیل محافظه‌کاری پاسخ داده شده است، اما انجام کلیدزنی نرم در این روش‌ها همانند مراجع [۱۸ و ۱۹] با کاهش کارایی همراه است. علاوه بر آن با بزرگ شدن مقدار کران تغییرات نرخ پارامترهای جدول‌بندی در تحقیق‌های گذشته، عملکرد سیستم حلقه‌بسته به شدت تحت تأثیر قرار می‌گیرد. باید توجه نمود که ممکن است در بازه وسیعی از تغییرات پارامترهای جدول‌بندی مدل‌های متفاوتی از سیستم حلقه‌باز استخراج شود. در حقیقت به دست آوردن یک مدل یکتا برای سیستم ممکن است شدنی نباشد یا به سخت‌گیری و حجم بالای نامعینی در مدل‌سازی بینجامد. واضح است هر چه مدل دقیق‌تری با کران نامعینی کوچک‌تری برای سیستم حلقه‌باز استخراج شود، میزان محافظه‌کاری و سخت‌گیری در طراحی کاهش می‌یابد و به عملکرد بهتری برای سیستم حلقه‌بسته منتهی می‌شود؛ بنابراین می‌توان اعتراف نمود، توسعه روش‌های فوق برای یک سیستم LPV نامعین کلیدزن به نتایج ناکارآمدی منتهی می‌گردد. از طرفی در پژوهش‌های [۱۶ و ۱۷] نیز نامعینی به عنوان جز جدایی‌ناپذیر سیستم عملی مهندسی در نظر گرفته نشده است. علاوه بر آن، پژوهش‌های [۱۶ و ۱۷] به طراحی کنترل‌کننده با ساختار

مزیت‌های روش پیشنهادی است. ۴) ارائه روش بهینه‌سازی طراحی مبتنی بر حل LMI با یک فرایند بازگشتی پیشنهادی. علاوه بر این‌ها، وابستگی ماتریس‌های فضای حالت سیستم به پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی از درجه‌ی چندجمله‌ای در نظر گرفته می‌شود. با تکیه بر منطق کلیدزنی هیستریزیس، یک سیستم کنترلی با هدف دست‌یابی به عملکرد مطلوب به دست آورده می‌شود. این سیستم کنترلی پایداری و حصول عملکرد خروجی مبتنی بر بهینه‌سازی (کمینه نمودن) بهره  $H_\infty$  را تضمین می‌نماید. روش بیان‌شده در طراحی سیستم کنترل آونگ معکوس به عنوان یک مثال مشهور مکانیکی مورد استفاده قرار گرفته است تا کاربردی‌تری و میزان مؤثر بودن این رویکرد طراحی نشان داده شود. ارزیابی نتایج ردیابی فرمان‌های اعمالی به سیستم حلقه‌بسته، عملکرد مناسب این روش را تأیید می‌کند.

**نمادها:** در این مقاله مجموعه اعداد حقیقی، اعداد طبیعی، اعداد حقیقی مثبت، بردارهای حقیقی با بعد  $n$ ، ماتریس‌های با ابعاد  $n \times m$ ، ماتریس‌های متقارن و متقارن مثبت معین  $n \times n$  به ترتیب با  $\mathbb{R}^n$ ،  $\mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $\mathbb{R}^n$ ،  $\mathbb{R}_+$ ،  $\mathbb{R}$  و  $S_+^n$  نمایش داده می‌شوند. برای هر ماتریس مربعی داریم:  $\langle X \rangle = X + X^T$  که در آن  $X^T$  ترانپوز ماتریس  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  است. معکوس ماتریس  $X$  با  $X^{-1}$  نشان داده می‌شود. علامت‌گذاری  $P > 0$  و  $P \in S^n$  بیان‌گر متقارن و مثبت معین بودن ماتریس  $P$  است. برای ماتریس‌های متقارن  $X$  و  $Y$ ، رابطه  $X < Y$  به معنای منفی معین بودن ماتریس  $X - Y$  (یعنی  $X - Y < 0$ ) است.  $I$  و  $0$  به ترتیب بیان‌گر ماتریس واحد و ماتریس صفر با ابعاد مناسب هستند. عناصر متقارن هر ماتریس توسط  $*$  بیان می‌شوند.  $tr(X)$  بیان‌گر مجموع عناصر قطری ماتریس  $X$  است. نتیجه اعمال  $diag(\cdot)$  روی مجموعه‌ای از متغیرهای ورودی، ماتریسی است که عناصر قطر اصلی آن ورودی‌های این عملگر و عناصر غیرقطری آن صفر هستند.  $\min(x)$  مقدار کمینه  $x$  و  $\dot{x}(t)$  مشتق زمانی سیگنال  $x(t)$  می‌باشند.  $I[k_1, k_2] = \{k_1, k_1 + 1, \dots, k_2\}$  که در آن  $k_1$  و  $k_2$  اعداد صحیح‌اند و داریم:  $k_2 < k_1$ . مجموعه‌ای از اعداد صحیح به صورت  $Z_{k_1} = \{1, 2, \dots, k_1\}$  بیان می‌شود.  $Z_+$  و  $\emptyset$  به ترتیب برای نمایش مجموعه اعداد طبیعی (صحیح مثبت) و

پس‌خورد حالت می‌پردازند؛ در حالی که به دلیل محدودیت‌های فیزیکی و عملی ممکن است، کلیه حالت‌های سیستم برای استفاده در محاسبه‌ی قانون کنترل موجود نباشند.

با تکیه بر مطالعات پیشین و با توجه به نیازهای کنونی، نوین بودن کار انجام شده را در مواردی که در ادامه می‌رویکردی روشمند جهت انجام طراحی کنترل‌کننده جدول‌بندی بهره پس‌خورد خروجی دینامیکی برای سیستم‌های LPV نامعین کلیدزن پیوسته-زمان با وابستگی از درجه چندجمله‌ای به پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی ارائه نشده است و چالشی اساسی محسوب می‌شود. علاوه بر آن، توسعه روش‌های پیشین در طراحی کنترل‌کننده‌ی مقاوم با کلیدزنی نرم برای سیستم بیان‌شده در این مقاله از یک سو به نتایج محافظه‌کاری و سخت‌گیری را تحمیل می‌کند. از سوی دیگر دارای محدودیت کاربردی است.

بر همین اساس با توجه به فقدان تحقیقات مناسب در گذشته و نیاز جدی جامعه‌ی کنترلی، نوین بودن کار انجام شده را می‌توان در مواردی که در ادامه می‌آید خلاصه کرد:

۱) ارائه رویکردی روشمند جهت انجام طراحی کنترل‌کننده جدول‌بندی بهره پس‌خورد خروجی دینامیکی مقاوم برای سیستم‌های LPV نامعین کلیدزن پیوسته-زمان با در نظر گرفتن ملاحظات حضور نامعینی‌های پارامتری. از مزیت‌های این طراحی آن است که کنترل‌کننده مرتبه کامل پس‌خورد خروجی فقط به پارامترهای جدول‌بندی وابسته است و از طرفی به مشتق زمانی آن‌ها و هم‌چنین پارامترهای نامعینی وابسته نیست. در این روش پارامترهای جدول‌بندی می‌توانند با نرخ تغییرات زمانی دلخواه، متغیر با زمان باشند.

۲) استخراج قانون کنترل کلیدزنی هموار مقاوم برای اجتناب از رفتارهای ناخواسته و نامطلوب سیگنال کنترلی در لحظات کلیدزنی. ۳) بهبود عملکرد طراحی با تکیه بر لم توسعه‌یافته و استفاده از متغیرهای کمکی. برای استخراج روابط طراحی کنترل‌کننده، خانواده‌ای از متغیرهای کمکی در قالب یک تبدیل غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرند که مستقل از متغیرهای لیاپانوف هستند. به همین دلیل، محدودیت در اندازه‌ی نرخ پارامترهای جدول‌بندی و پهنای نواحی هیستریزیس به کاهش عملکرد خروجی سیستم حلقه‌بسته در رویکرد کلیدزنی نرم ارائه‌شده منجر نمی‌شود و این موضوع از

فرایند تولید سیگنال کلیدزنی وابسته به پارامتر جدول‌بندی  $\sigma(\theta(t))$  تحت منطق هیستریزاس از این قرار است که در نظر بگیرید:  $\sigma(0) = j$ ، اگر  $\theta(t) \in \Theta^{(j)}$  (انتخاب یک مقدار دلخواه برای  $j$  اگر چند مقدار  $j$  بر اساس قرار داشتن در نواحی مشترک برای هر ناحیه موجود باشند). برای هر  $t > 0$ ، اگر  $\sigma(t^-) = j$  (حد زمانی چپ  $\sigma$  در زمان  $t$ ) و  $\theta \in \Theta^{(j)}$  باشد، داریم:  $\sigma(t) = j$ . هنگامی که مقدار  $\theta(t)$  به سطح کلیدزنی برخورد نماید، یعنی  $\sigma(t^-) = j$  و  $\theta(t) \in S^{(j,k)}$  و به طور کامل از  $\Theta^{(j)}$  خارج شود؛ یعنی  $\theta(t) \in \Theta^{(k)} \setminus \Theta^{(j)}$  و آن‌گاه داریم:  $\sigma(t) = k$ .

**تذکره:** همان‌گونه که گفته شد، پارامترهای جدول‌بندی و متغیرهای نامعینی وابسته به زمان هستند (همانند سیگنال کلیدزنی، متغیرهای حالت و ...). برای رعایت اختصار در بیان روابط از این پس ممکن است، بدون متغیر زمان به صورت  $\theta$  و  $\delta$  بیان شوند. این موضوع به معنی آن نیست که این متغیرها با زمان تغییر نمی‌کنند.

مدل فضای حالت حلقه‌باز یک سیستم پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن را به صورت معادله دینامیکی (۱) در نظر بگیرید:

$$G_p^\sigma(\theta(t), \delta(t)) : \begin{cases} \dot{x}_p = A_p^\sigma(\theta, \delta)x_p + B_w^\sigma(\theta, \delta)w + B_u^\sigma(\theta, \delta)u, & x_p(0) = 0 \\ z = C_z^\sigma(\theta, \delta)x_p + D_{zw}^\sigma(\theta, \delta)w + D_{zu}^\sigma(\theta, \delta)u \\ y = C_y^\sigma(\theta)x_p + D_{yw}^\sigma(\theta, \delta)w \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $x_p(t) \in \mathfrak{R}^n$ ،  $w(t) \in \mathfrak{R}^w$ ،  $u(t) \in \mathfrak{R}^u$ ،  $x_p(0) \in \mathfrak{R}^n$  و  $z(t) \in \mathfrak{R}^z$  به ترتیب حالت‌های سیستم، ورودی کنترل، اغتشاش خارجی، خروجی اندازه‌گیری و بردار خروجی‌های عملکردی هستند. سیگنال کلیدزنی  $\sigma(\theta) \in Z_N$  دارای مقادیر گسسته‌ی طبیعی است. ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز با داشتن ابعاد مناسب دارای وابستگی چندجمله‌ای به پارامترهای جدول‌بندی و همچنین متغیرهای نامعینی هستند. برای ماتریس‌های فضای حالت  $M^\sigma(\theta, \delta)$  در رابطه (۲) داریم:

$$M^\sigma(\theta, \delta) = \sum_{k=1}^{k_p^\sigma} \theta_1^{a_{k1}^\sigma} \dots \theta_s^{a_{ks}^\sigma} \delta_1^{b_{k1}^\sigma} \dots \delta_{N_\delta}^{b_{kN_\delta}^\sigma} M_k^\sigma \quad (2)$$

که در آن  $M_k^\sigma$  ماتریس‌های حقیقی مستقل از پارامتر و همچنین  $a_{ki}^\sigma$  و  $b_{ki}^\sigma$  بیان‌گر مقادیر صحیح غیرمنفی‌اند. جهت ایجاد سادگی در استخراج شرایط طراحی در این مقاله، فرض

مجموعه‌ی تهی استفاده می‌شوند.  $A \cup B$ ،  $A \cap B$  و  $A \setminus B$ ،  $\text{int}(A)$ ، برای دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  به ترتیب اجتماع، اشتراک  $A \cup B = \{\theta : \theta \in A \text{ or } \theta \in B\}$ ، تفاضل این دو مجموعه  $A \cap B = \{\theta : \theta \in A \text{ and } \theta \in B\}$  و ناحیه‌ی داخلی  $A \setminus B = \{\theta : \theta \in A \text{ and } \theta \notin B\}$  هستند.

## ۲- بیان مسئله

در این بخش هدف بیان مسئله مورد توجه در این مقاله است. بردار حاوی پارامترهای نامعینی غیرقابل اندازه‌گیری متغیر با زمان به صورت  $\delta(t) := [\delta_1(t) \dots \delta_{N_\delta}(t)]^T \in \mathfrak{R}^{N_\delta}$  و همچنین بردار پارامترهای جدول‌بندی در دسترس زمان-حقیقی به صورت  $\theta(t) := [\theta_1(t) \dots \theta_s(t)] \in \mathfrak{R}^s$  فرض کنید  $\theta_i$  تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر بر حسب زمان با کران از پیش‌معین در ناحیه‌ی  $j$ -ام  $\Theta^{(j)}$  به صورت زیر باشد:

$$\Theta^{(j)} := \{\theta \in \mathfrak{R}^s : \underline{\theta}_i^{(j)} \leq \theta_i(t) \leq \bar{\theta}_i^{(j)}; i=1, \dots, s, j \in Z_N\}$$

علاوه بر آن، برای پارامترهای نامعینی  $\delta \in \Delta^{(j)}$  تصور نمایید:

$$\Delta^{(j)} := \{\delta \in \mathfrak{R}^{N_\delta} : \underline{\delta}_i^{(j)} \leq \delta_i(t) \leq \bar{\delta}_i^{(j)}; i=1, \dots, N_\delta, j \in Z_N\}$$

هم‌چنین برای محدوده‌ی تغییرات نرخ زمانی پارامترهای جدول‌بندی  $\theta \in \Lambda^{(j)}$  داریم:

$$\Lambda^{(j)} := \{\dot{\theta} \in \mathfrak{R}^s : \underline{\omega}_i^{(j)} \leq \dot{\theta}_i(t) \leq \bar{\omega}_i^{(j)}; i=1, \dots, s, j \in Z_N\}$$

حال فرض کنید، مجموعه  $\Theta$  توسط سطوح کلیدزنی  $S^{(j,k)}$  به تعداد  $N$  زیرناحیه  $\{\Theta^{(j)}\}_{j \in Z_N}$  تقسیم‌بندی شود که در

آن  $Z_N := \{1, 2, \dots, N-1, N\}$  است. این کار با تقسیم  $\Theta_i$  (تصویر مجموعه  $\Theta_i$  روی محور مختصات  $i$ -امین پارامتر جدول‌بندی) به  $N_i$  بازه با نواحی همپوشانی مشترک بین هر دو بازه‌ی مجاور صورت می‌گیرد که در آن داریم:  $N = \prod_{i=1}^s N_i$

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^N \{\Lambda^{(j)}\}_{j \in Z_N} \quad \text{و} \quad \Delta = \bigcup_{j=1}^N \{\Delta^{(j)}\}_{j \in Z_N}, \quad \Theta = \bigcup_{j=1}^N \{\Theta^{(j)}\}_{j \in Z_N}$$

عنوان مثال، شکل ۱ در مرجع [۱۵] را ببینید. در این شکل  $S_{\theta_i}^{(j,k)}$  بیان‌گر سطح کلیدزنی بین دو ناحیه  $\Theta^{(j)}$  و  $\Theta^{(k)}$  در جهت پارامتر جدول‌بندی  $\theta_i$  است. اگر شرط زیر برقرار باشد، آن‌گاه دو ناحیه  $\Theta^{(j)}$  و  $\Theta^{(k)}$  در جهت پارامتر جدول‌بندی  $\theta_i$  مجاور هم‌اند.

$$\text{int}(\Theta^{(k)} \cap \Theta^{(j)}) \neq \emptyset, \quad \Theta_{\theta_i}^{(k)} \neq \Theta_{\theta_i}^{(j)}$$

که در آن  $x := [x_p^T \ x_c^T]^T$ . ماتریس‌های سیستم حلقه‌بسته LPV نامعین کلیدزن ( $\Delta$ ) در رابطه (۶) داده شده‌اند.

$$A^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} A_p^\sigma(\theta, \delta) + \\ B_u^\sigma(\theta, \delta) D_c^\sigma(\theta) C_y^\sigma(\theta) \end{array} \right\} & B_u^\sigma(\theta, \delta) C_c^\sigma(\theta) \\ B_c^\sigma(\theta) C_y^\sigma(\theta) & A_c^\sigma(\theta) \end{bmatrix},$$

$$B^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} B_w^\sigma(\theta, \delta) + \\ B_u^\sigma(\theta, \delta) D_c^\sigma(\theta) D_{yw}^\sigma(\theta, \delta) \end{array} \right\} \\ B_c^\sigma(\theta) D_{yw}^\sigma(\theta, \delta) \end{bmatrix},$$

$$C^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} C_z^\sigma(\theta, \delta) + \\ D_{zu}^\sigma(\theta, \delta) D_c^\sigma(\theta) C_y^\sigma(\theta) \end{array} \right\} \\ D_{zu}^\sigma(\theta, \delta) C_c^\sigma(\theta) \end{bmatrix},$$

$$D^\sigma(\theta, \delta) = D_{zw}^\sigma(\theta, \delta) + D_{zu}^\sigma(\theta, \delta) D_c^\sigma(\theta) D_{yw}^\sigma(\theta, \delta)$$

(۶)

اما باید توجه نمود که طراحی کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی بهره‌ی کلیدزن می‌تواند به جهش‌های قابل توجهی در سیگنال کنترلی منجر شود. این موضوع از دیدگاه عملی مطلوب نیست. بنابراین، در بخش دیگر این مقاله به طراحی سیستم کنترلی با کلیدزنی نرم پرداخته می‌شود. در حقیقت، به کمک یک رویکرد درون‌یابی با تضمین پایداری و سطح کمینه‌ی کارایی سیستم حلقه‌بسته، تغییر از یک ناحیه جدول‌بندی به ناحیه دیگر بدون جهش‌های سریع و نامطلوب سیگنال کنترلی انجام می‌شود. برای این کنترل‌کننده با در نظر گرفتن ناحیه‌ی همپوشانی مشترک داریم:  $\Theta^{(j,k)} := \Theta^{(j)} \cap \Theta^{(k)}$

$$K_{ss}(\theta(t)) = \begin{cases} K^{(j)}(\theta), & \text{if } \theta(t) \in \Theta^{(j)} \setminus \Theta^{(k)} \\ F(K^{(j)}(\theta), K^{(k)}(\theta)), & \text{if } \theta(t) \in \Theta^{(j,k)} \\ K^{(k)}(\theta), & \text{if } \theta(t) \in \Theta^{(k)} \setminus \Theta^{(j)} \end{cases}$$

(۷)

که در آن توسط تابع هموارساز  $F(K^{(j)}(\theta), K^{(k)}(\theta))$ ، عمل درون‌یابی بین هر دو ناحیه مجاور هم صورت می‌گیرد.

### ۳- طراحی جدول‌بندی بهره‌ی کلیدزن مقاوم

در این قسمت ابتدا لم‌های مورد نیاز برای فرایند طراحی بیان می‌شوند. سپس روش طراحی کنترل‌کننده جدول‌بندی بهره‌ی کلیدزن مقاوم ارائه خواهد شد. جهت جلوگیری از

بر آن است ماتریس‌های  $C_y^\sigma(\theta)$  مستقل از پارامترهای نامعینی باشند؛ یعنی برای هر مقدار  $\sigma$ ،  $i$  و  $k$  فرض بر آن است که:  $b_{ki}^\sigma = 0$ . از سوی دیگر، در این سیستم کلیدزنی بر اساس قانون هیستریزس انجام و سیگنال کلیدزنی  $\sigma(\theta)$  بر مبنای  $\theta(t)$  تولید می‌گردد. این سیگنال تعیین‌کننده‌ی زیرسیستم حلقه‌باز فعال‌شده برای یک ناحیه جدول‌بندی محلی مفروض است.

**تعریف ۱ [۹]:** (عملکرد نرم  $L_2$  یا بهره‌ی  $H_\infty$ ): به ازای مقدار مثبت  $\gamma$ ، شرط بهره‌ی عملکردی در یک سیستم حلقه‌بسته با خروجی عملکردی  $z(t)$  و ورودی اغتشاش  $w(t)$  برای تمامی مقادیر مجاز  $(\theta, \delta, \dot{\theta})$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sup_{\forall (\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda, \|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma \quad (۳)$$

اقدامات انجام‌شده در این مقاله به دو بخش عمده تقسیم‌بندی می‌گردند. ابتدا طراحی کنترل‌کننده جدول‌بندی بهره کلیدزن مقاوم برای سیستم حلقه‌باز LPV نامعین کلیدزن (۱) ارائه شده است؛ به گونه‌ای که پایداری نمایی و کمترین مقدار بهره‌ی عملکردی  $H_\infty$  طبق قید (۳) به ازای تمامی مقادیر مجاز پارامترهای جدول‌بندی و متغیرهای نامعینی تضمین شود. این ساختار کنترلی شامل خانواده‌ای از کنترل‌کننده‌های مرتبه کامل جدول‌بندی بهره‌ی پس‌خورد خروجی است که در رابطه‌ی (۴) به صورت زیر قابل مشاهده است:

$$K^\sigma(\theta(t)) : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c^\sigma(\theta) x_c + B_c^\sigma(\theta) y, & x_c(0) = 0 \\ u = C_c^\sigma(\theta) x_c + D_c^\sigma(\theta) y \end{cases} \quad (۴)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، ماتریس‌های کنترل‌کننده  $\sigma(\theta) \in Z_N$  برای هر مقدار  $(A_c^\sigma(\theta), B_c^\sigma(\theta), C_c^\sigma(\theta), D_c^\sigma(\theta))$  به پارامترهای جدول‌بندی  $\theta$  وابسته هستند و به مقادیر پارامترهای نامعینی یعنی  $\delta$  وابسته نیستند. سرانجام با ترکیب کنترل‌کننده (۴) و مدل حلقه‌باز (۱)، یک سیستم حلقه‌بسته‌ی LPV نامعین کلیدزن تحت قانون کلیدزنی هیستریزس مطابق رابطه (۵) به دست می‌آید:

$$G_{cl}^\sigma(\theta, \delta) : \begin{cases} \dot{x} = A^\sigma(\theta, \delta) x + B^\sigma(\theta, \delta) w, & x(0) = 0 \\ z = C^\sigma(\theta, \delta) x + D^\sigma(\theta, \delta) w \end{cases} \quad (۵)$$

اثبات: با تکیه بر نتیجه به دست آمده در پژوهش‌های [۹]، [۱۵] و [۲۰]، می‌توان تأیید نمود با برقراری شرایط موجود در (۱۰)–(۱۲) پایداری نمایی و شرط بهره‌ی عملکردی (۳) برای سیستم حلقه‌بسته‌ی نامعین کلیدزن  $G_{cl}^{\sigma}(\theta, \delta)$  تضمین می‌شود. برای رعایت اختصار از تکرار مطالب خودداری می‌شود؛ اما در لحظات کلیدزنی برای توابع چندگانه‌ی لیاپانوف سیستم حلقه‌بسته  $V_{cl}^{\sigma}(x) = x^T P^{\sigma}(\theta)^{-1} x$  در سطوح  $S^{(j,k)}(\theta)$  باید شرط غیرافزایشی بودن آن‌ها تأیید شود؛ یعنی  $V_{cl}^{(k)}(x(t^+)) \leq V_{cl}^{(j)}(x(t))$  (سیگنال  $\sigma(t^+)$  حد زمانی سمت راست  $\sigma$  در لحظه‌ی  $t$  است). پس با در نظر گرفتن منطق کلیدزنی هیستریزس، شرط  $P^{(k)}(\theta)^{-1} \leq P^{(j)}(\theta)^{-1}$  در تغییر از ناحیه جدول‌بندی  $\Theta^{(j)}$  به  $\Theta^{(k)}$  باید برقرار بماند. به کمک لم مکمل شر داریم:

$$\begin{bmatrix} P^{(j)}(\theta)^{-1} & * \\ I & P^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \theta \in S^{(j,k)} \quad (13)$$

سپس با ضرب رابطه (۱۳) از سمت چپ در  $diag(P^{(j)}(\theta), I)$  و از سمت راست در ترانهاده آن، در نهایت رابطه (۱۲) به دست می‌آید که به تأیید شرط  $V_{cl}^{(k)}(x(t^+)) \leq V_{cl}^{(j)}(x(t))$  در لحظات کلیدزنی منتهی می‌شود و اثبات پایان می‌یابد.

**قضیه‌ی ۱:** برای مقدار داده شده  $\gamma \in \mathfrak{R}_+$  و تمامی  $j, k \in Z_N$ ، اگر خانواده‌ای از ماتریس‌های وابسته به پارامتر  $L_3^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ ،  $L_2^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_y}$ ،  $L_1^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n}$ ،  $W^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n}$ ،  $X^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n}$ ،  $L_4^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_y}$ ،  $P_3^{(j)}(\theta) \in S_+^n$ ،  $P_2^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n}$ ،  $P_1^{(j)}(\theta) \in S_+^n$ ، ماتریس  $H(\theta, \delta) \in \mathfrak{R}^{(n+n_x) \times (n+n_x)}$ ، ماتریس مستقل از پارامتر  $Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  و مقدار عددی  $\lambda \in \mathfrak{R}_+$  موجود داشته باشند، به گونه‌ای که شرایط (۱۴)–(۱۵) و شرط کلیدزنی (۱۶) به ترتیب به ازای تمامی مقادیر  $\forall(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta^{(j)} \times \Delta^{(j)} \times \Lambda^{(j)}$  و  $\forall \theta \in S^{(j,k)}$  برقرار باشند، آن‌گاه کنترل‌کننده (۴) که ماتریس‌های فضای حالت آن در (۱۹) محاسبه شده‌اند، سیستم حلقه‌بسته (۵) را پایدار نمایی می‌نماید و مقدار کمینه  $\gamma$  را برای بهره  $H_{\infty}$  خروجی عملکردی طبق قید (۳) در کل نواحی  $\Theta \times \Delta \times \Lambda$  تضمین می‌کند.

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \quad (14)$$

ایجاد غیرخطی‌گری عوامل طراحی به دلیل ضرب شدن این متغیرها در یکدیگر، لم ۱ بیان شده است.

**لم ۱ [۲۲]:** فرض کنید ماتریس متقارن  $\Pi_1$ ، ماتریس‌های  $\Pi_2$ ،  $\Pi_3$  و هم‌چنین  $H$  از ابعاد مناسب موجود باشند. اگر رابطه (۹) برقرار بماند، آن‌گاه نامساوی (۸) برقرار است.

$$\Pi_1 + \langle \Pi_2 \Pi_3 \rangle > 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & * \\ \Pi_3 - (\Pi_2 H)^T & \langle H \rangle \end{bmatrix} > 0 \quad (9)$$

**لم ۲:** برای مقدار مثبت داده شده  $\gamma$  و تمامی مقادیر مشتق‌پذیر وابسته به پارامتر  $P^{(j)}(\theta) \in S^{2n}$ ، ماتریس‌های  $G^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$  و مقدار عددی  $\lambda \in \mathfrak{R}_+$  موجود باشند، به گونه‌ای که شرایط (۱۰)–(۱۱) و (۱۲) به ترتیب به ازای  $\forall \theta \in S^{(j,k)}$  و  $\forall(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta^{(j)} \times \Delta^{(j)} \times \Lambda^{(j)}$  در زیر برقرار گردند:

$$P^{(j)}(\theta) > 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \dot{P}^{(j)}(\theta) - \\ \langle A^{(j)}(\theta, \delta) G^{(j)}(\theta) \rangle \\ -C^{(j)}(\theta, \delta) G^{(j)}(\theta) \\ B^{(j)}(\theta, \delta)^T \end{array} \right\} & * \\ * & I \\ \left\{ \begin{array}{c} G^{(j)}(\theta) - P^{(j)}(\theta) - \\ \lambda G^{(j)}(\theta)^T A^{(j)}(\theta, \delta)^T \end{array} \right\} & -\lambda G^{(j)}(\theta)^T C^{(j)}(\theta, \delta)^T \\ * & * \\ * & * \\ \gamma^2 I & * \\ 0 & \lambda \langle G^{(j)}(\theta) \rangle \end{bmatrix} > 0, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} P^{(j)}(\theta) & * \\ P^{(j)}(\theta) & P^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

آن‌گاه سیستم حلقه‌بسته‌ی  $G_{cl}^{\sigma}(\theta, \delta)$  موجود در (۵) با قانون کلیدزنی هیستریزس پایدار نمایی است و شرط بهره عملکردی  $H_{\infty}$  در رابطه (۳) با سطح کمینه  $\gamma$  به ازای  $\forall(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda$  برقرار می‌شود.

$$\Pi_2^{(j)}(\theta, \delta) := \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n_u} \\ Y(A_p^{(j)}(\theta, \delta) - A_p^{(j)}(\theta)) & Y(B_u^{(j)}(\theta, \delta) - B_u^{(j)}(\theta)) \\ 0_{(2n+n_w+n_z) \times n} & 0_{(2n+n_w+n_z) \times n_u} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_3^{(j)}(\theta, \delta) := \begin{bmatrix} -X^{(j)}(\theta) & 0_{n \times n_y} & 0_{n \times n_z} \\ -L_3^{(j)}(\theta) & -L_4^{(j)}(\theta)C_y^{(j)}(\theta) & 0_{n_u \times n_z} \\ -\lambda X^{(j)}(\theta) & 0_{n \times n_y} \\ -\lambda L_3^{(j)}(\theta) & -\lambda L_4^{(j)}(\theta)C_y^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (18)$$

ماتریس‌های فضای حالت کنترل‌کننده پس‌خورد خروجی دینامیکی مرتبه کامل جدول‌بندی بهره‌ی کلیدزن مقاوم به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} A_c^{(j)}(\theta) & B_c^{(j)}(\theta) \\ C_c^{(j)}(\theta) & D_c^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & Y^T B_u^{(j)}(\theta) \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} L_1^{(j)}(\theta) - Y A_p^{(j)}(\theta) X^{(j)}(\theta) & L_2^{(j)}(\theta) \\ L_3^{(j)}(\theta) & L_4^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U^{(j)}(\theta) & 0 \\ C_y^{(j)}(\theta) X^{(j)}(\theta) & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (19)$$

با استفاده از رابطه  $U^{(j)}(\theta) = V^{-1}(W^{(j)}(\theta) - YX^{(j)}(\theta))$  و ماتریس رتبه کامل دلخواه  $V$ ، ماتریس‌های معکوس‌پذیر  $U^{(j)}(\theta)$  به دست آورده می‌شوند.

**اثبات:** با تکیه بر لم ۲ اگر روابط (۱۰)-(۱۲) برقرار باشند، آن‌گاه علاوه بر پایداری نامایی، یک مقدار عددی برابر  $\gamma$  برای کران بالای بهره  $H_\infty$  خروجی عملکردی در سیستم حلقه‌بسته LPV نامعین کلیدزن (۵) تضمین می‌شود. در ادامه نشان داده خواهد شد که اگر شرایط (۱۴)-(۱۶) برقرار باشند، منجر به برقراری نامساوی‌های (۱۰)-(۱۲) می‌شود. با توسعه مفاهیم گسسته-زمان [۱۱] در حالت کلیدزن و پیوسته-زمان، بخش‌بندی ماتریس‌های کمکی  $G^{(j)}(\theta)$  و معکوس آن  $G^{(j)}(\theta)^{-1}$  به این صورت انجام گرفته است که:

$$G^{(j)}(\theta) := \begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & Z_1^{(j)}(\theta) \\ U^{(j)}(\theta) & Z_2^{(j)}(\theta) \end{bmatrix}, G^{(j)}(\theta)^{-1} := \begin{bmatrix} Y^{(j)}(\theta) & Z_3^{(j)}(\theta) \\ V^{(j)}(\theta) & Z_4^{(j)}(\theta) \end{bmatrix}$$

که در آن برای  $j \in Z_N$  ماتریس‌های  $Y^{(j)}(\theta), V^{(j)}(\theta), X^{(j)}(\theta), Z_1^{(j)}(\theta), Z_2^{(j)}(\theta), Z_3^{(j)}(\theta), Z_4^{(j)}(\theta)$  و

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^{(j)} & * \\ \Pi_3^{(j)} - (\Pi_2^{(j)} H(\theta, \delta))^T & \langle H(\theta, \delta) \rangle \end{bmatrix} > 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * & * & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) & * & * \\ P_1^{(j)}(\theta) & P_2^{(j)}(\theta)^T & P_1^{(k)}(\theta) & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) & P_2^{(k)}(\theta) & P_3^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (16)$$

که در آن:

$$\Pi_1^{(j)}(\theta, \delta, \dot{\theta}) := \begin{bmatrix} \Pi_{1,11}^{(j)} & * & * & * & * & * \\ \Pi_{1,21}^{(j)} & \Pi_{1,22}^{(j)} & * & * & * & * \\ \Pi_{1,31}^{(j)} & \Pi_{1,32}^{(j)} & I & * & * & * \\ \Pi_{1,41}^{(j)} & \Pi_{1,42}^{(j)} & \Pi_{1,43}^{(j)} & \gamma^2 I & * & * \\ \Pi_{1,51}^{(j)} & \Pi_{1,52}^{(j)} & \Pi_{1,53}^{(j)} & 0 & \lambda \langle X^{(j)}(\theta) \rangle & * \\ \Pi_{1,61}^{(j)} & \Pi_{1,62}^{(j)} & \Pi_{1,63}^{(j)} & 0 & \Pi_{1,65}^{(j)} & \lambda \langle Y \rangle \end{bmatrix} \quad (17)$$

با عناصر:

$$\begin{aligned} \Pi_{1,11}^{(j)} &:= \dot{P}_1^{(j)}(\theta) - \langle A_p^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) \rangle, \\ \Pi_{1,21}^{(j)} &:= \dot{P}_2^{(j)}(\theta) - L_1^{(j)}(\theta) - A_p^{(j)}(\theta, \delta)^T \\ &\quad - C_y^{(j)}(\theta)^T L_4^{(j)}(\theta)^T B_u^{(j)}(\theta, \delta)^T, \\ \Pi_{1,31}^{(j)} &:= -C_z^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) - D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta), \\ \Pi_{1,41}^{(j)} &:= B_w^{(j)}(\theta, \delta)^T + D_{yw}^{(j)}(\theta, \delta)^T L_4^{(j)}(\theta)^T B_u^{(j)}(\theta, \delta)^T, \\ \Pi_{1,51}^{(j)} &:= X^{(j)}(\theta) - P_1^{(j)}(\theta) \\ &\quad - \lambda \langle A_p^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) \rangle^T, \\ \Pi_{1,61}^{(j)} &:= W^{(j)}(\theta) - P_2^{(j)}(\theta) \\ &\quad - \lambda \langle A_p^{(j)}(\theta, \delta) + B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_4^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) \rangle^T, \\ \Pi_{1,22}^{(j)} &:= \dot{P}_3^{(j)}(\theta) - \langle Y A_p^{(j)}(\theta, \delta) + L_2^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) \rangle, \\ \Pi_{1,32}^{(j)} &:= -C_z^{(j)}(\theta, \delta) - D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) L_4^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta), \\ \Pi_{1,42}^{(j)} &:= (Y B_w^{(j)}(\theta, \delta) + L_2^{(j)}(\theta) D_{yw}^{(j)}(\theta, \delta))^T, \\ \Pi_{1,52}^{(j)} &:= I_n - P_2^{(j)}(\theta) - \lambda L_1^{(j)}(\theta)^T, \\ \Pi_{1,62}^{(j)} &:= Y - P_3^{(j)}(\theta) - \lambda \langle Y A_p^{(j)}(\theta, \delta) + L_2^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) \rangle^T, \\ \Pi_{1,43}^{(j)} &:= (D_{zw}^{(j)}(\theta, \delta) + D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) L_4^{(j)}(\theta) D_{yw}^{(j)}(\theta, \delta))^T, \\ \Pi_{1,53}^{(j)} &:= -\lambda \langle C_z^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) \rangle^T, \\ \Pi_{1,63}^{(j)} &:= -\lambda \langle C_z^{(j)}(\theta, \delta) + D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) L_4^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) \rangle^T, \\ \Pi_{1,65}^{(j)} &:= \lambda \langle W^{(j)}(\theta) + I_n \rangle \end{aligned}$$

و همچنین:

نمایی و یک مقدار برابر  $\gamma$  برای کران بالای بهره‌ی  $H_\infty$  خروجی عملکردی طبق شرط (۳) در سیستم حلقه‌بسته‌ی (۵) تضمین می‌شود. حال تعریف کنید که:

$$Q^T P^{(j)}(\theta) Q := \begin{bmatrix} P_1^{(j)}(\theta) & * \\ P_2^{(j)}(\theta) & P_3^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (23)$$

علاوه بر این، یک تبدیل غیرخطی به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} L_1^{(j)}(\theta) & L_2^{(j)}(\theta) \\ L_3^{(j)}(\theta) & L_4^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Y \\ L_4^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} A_p^{(j)}(\theta) \times \begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & Y^T B_u^{(j)}(\theta) \\ 0 & I \end{bmatrix} K_c^{(j)}(\theta) \times \begin{bmatrix} U^{(j)}(\theta) & 0 \\ C_y^{(j)}(\theta) X^{(j)}(\theta) & I \end{bmatrix} \quad (24)$$

که در آن:  $W^{(j)}(\theta) := YX^{(j)}(\theta) + VU^{(j)}(\theta)$  و هم‌چنین:

$$K_c^{(j)}(\theta) := \begin{bmatrix} A_c^{(j)}(\theta) & B_c^{(j)}(\theta) \\ C_c^{(j)}(\theta) & D_c^{(j)}(\theta) \end{bmatrix}$$

و  $B_u^{(j)}(\theta)$  و  $A_p^{(j)}(\theta)$  به ترتیب از جایگذاری بردار صفر به جای  $\delta$  ( $\delta \in \{0, \forall i \in \{1, \dots, N_\delta\}\}$ ) در متغیرهای  $B_u^{(j)}(\theta, \delta)$  و  $A_p^{(j)}(\theta, \delta)$  برای  $j \in Z_N$  حاصل می‌شوند. از تعریف متغیر کمکی  $G^{(j)}(\theta)$  به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$Q^T G^{(j)}(\theta) Q = \begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & I \\ W^{(j)}(\theta) & Y \end{bmatrix} \quad (25)$$

از طرفی رابطه (۲۶) با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (۲۳) به دست می‌آید.

$$Q^T \dot{P}^{(j)}(\theta) Q = \begin{bmatrix} \dot{P}_1^{(j)}(\theta) & * \\ \dot{P}_2^{(j)}(\theta) & \dot{P}_3^{(j)}(\theta) \end{bmatrix} \quad (26)$$

لازم به ذکر است تأکید شود که رابطه (۲۶) صرفاً هنگامی برقرار است که ماتریس  $Q$  مستقل از پارامتر باشد. این نکته‌ای است که قبلاً برای اثبات این قضیه تذکر داده شد. در حقیقت، این همان دلیل در نظر گرفتن ماتریس‌های  $V$  و  $Y$  به صورت مستقل از پارامتر است. علاوه بر آن با پذیرفتن مقداری محافظه‌کاری جهت ایجاد سادگی در استخراج رابطه (۱۶) به کمک (۲۲) این ماتریس باید مشترک و غیرکلیدزن باشد. از سوی دیگر، پس از انجام مقداری محاسبات جبری داریم:

$U^{(j)}(\theta)$  عضو مجموعه  $\mathbb{R}^{n \times n}$  هستند. با برقراری رابطه  $G^{(j)}(\theta)G^{(j)}(\theta)^{-1} = I$  می‌توان گفت:

$$Z_1^{(j)}(\theta) = (V^{(j)}(\theta)^T)^{-1} - X^{(j)}(\theta)Y^{(j)}(\theta)^T (V^{(j)}(\theta)^T)^{-1},$$

$$Z_2^{(j)}(\theta) = -U^{(j)}(\theta)Y^{(j)}(\theta)^T (V^{(j)}(\theta)^T)^{-1}$$

حال به علتی که در ادامه گفته خواهد شد، جهت ایجاد سادگی در بیان نتایج طراحی ماتریس‌های  $V^{(j)}(\theta)$  و  $Y^{(j)}(\theta)$  با الهام پژوهش‌های [۹]، [۱۲]-[۱۳] مستقل از پارامتر و غیرکلیدزن در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین داریم:

$$G^{(j)}(\theta) := \begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & (V^T)^{-1} - X^{(j)}(\theta)Y^T (V^T)^{-1} \\ U^{(j)}(\theta) & -U^{(j)}(\theta)Y^T (V^T)^{-1} \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس مستقل از پارامتر  $Q$  برای استفاده در تبدیل متجانس به این صورت معرفی می‌شود که:

$$Q := \begin{bmatrix} I_n & Y^T \\ 0_{n \times n} & V^T \end{bmatrix}$$

حال با اعمال تبدیل متجانس روی نامساوی‌های (۱۰)-(۱۲) به ترتیب با  $Q$ ،  $diag(Q, I, I, Q)$  و  $diag(Q, \Phi, \Phi)$  می‌توان شرایطی را برای کل نواحی تغییرات  $(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda$  استخراج نمود که در زیر آورده شده‌اند:

$$Q^T P^{(j)}(\theta) Q > 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} Q^T \{ \dot{P}^{(j)}(\theta) - \langle A^{(j)}(\theta, \delta) G^{(j)}(\theta) \rangle \} Q \\ -C^{(j)}(\theta, \delta) G^{(j)}(\theta) Q \\ B^{(j)}(\theta, \delta)^T \\ Q^T \{ G^{(j)}(\theta) - P^{(j)}(\theta) - \lambda G^{(j)}(\theta)^T A^{(j)}(\theta, \delta)^T \} Q \\ * & * & * \\ I & * & * \\ D^{(j)}(\theta, \delta)^T & \gamma^2 I & * \\ -Q^T \left\{ \begin{matrix} \lambda G^{(j)}(\theta)^T \times \\ C^{(j)}(\theta, \delta)^T \end{matrix} \right\} & 0 & \lambda Q^T \langle G^{(j)}(\theta) \rangle Q \end{bmatrix} > 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} Q^T P^{(j)}(\theta) Q & * \\ Q^T P^{(j)}(\theta) Q & Q^T P^{(k)}(\theta) Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (22)$$

بنابراین اگر نامساوی‌های (۲۰)-(۲۲) برقرار باشند، پایداری



$$Q^T A^{(j)}(\theta, \delta) G^{(j)}(\theta) Q = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} A_p^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + \\ B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} A_p^{(j)}(\theta, \delta) + \\ B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_4^{(j)}(\theta) \times \\ C_y^{(j)}(\theta) \end{matrix} \right\} \\ L_1^{(j)}(\theta) & \left\{ \begin{matrix} Y A_p^{(j)}(\theta, \delta) + \\ L_2^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) \end{matrix} \right\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_4^{(j)}(\theta) \\ Y & L_2^{(j)}(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} A_p^{(j)}(\theta, \delta) - A_p^{(j)}(\theta) & B_u^{(j)}(\theta, \delta) - B_u^{(j)}(\theta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X^{(j)}(\theta) & 0 \\ L_3^{(j)}(\theta) & L_4^{(j)}(\theta) C_y^{(j)}(\theta) \end{bmatrix},$$

$$Q^T B^{(j)}(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} B_w^{(j)}(\theta, \delta) + B_u^{(j)}(\theta, \delta) L_4^{(j)}(\theta) D_{yw}^{(j)}(\theta, \delta) \\ Y B_w^{(j)}(\theta, \delta) + L_2^{(j)}(\theta) D_{yw}^{(j)}(\theta, \delta) \end{bmatrix},$$

$$C^{(j)}(\theta, \delta) G^{(j)}(\theta) Q = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} C_z^{(j)}(\theta, \delta) X^{(j)}(\theta) + \\ D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) L_3^{(j)}(\theta) \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} C_z^{(j)}(\theta, \delta) + \\ D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) \times \\ C_y^{(j)}(\theta) L_4^{(j)}(\theta) \end{matrix} \right\} \end{bmatrix},$$

$$D^{(j)}(\theta, \delta) = D_{zw}^{(j)}(\theta, \delta) + D_{zu}^{(j)}(\theta, \delta) \times L_4^{(j)}(\theta) D_{yw}^{(j)}(\theta, \delta) \quad (27)$$

$U^{(j)}(\theta)$  اثبات گردد. ماتریس  $V$  می‌تواند یک ماتریس رتبه کامل دلخواه و مستقل از پارامتر که به عنوان مثال به صورت  $U^{(j)}(\theta)$  در نظر گرفته شود؛ اما باید این مسئله در مورد  $U^{(j)}(\theta)$  بررسی شود. طبق شرط (۱۵) باید نامساوی مثبت معین (۲۹) برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} \langle X^{(j)}(\theta) \rangle & * \\ W^{(j)}(\theta) + I_n & \langle Y \rangle \end{bmatrix} > 0 \quad (29)$$

که در نهایت برای سطر و ستون دوم (۲۹) هم باید این موضوع برقرار باشد. پس برای تمام مقادیر  $\theta$  ماتریس‌های  $Y$  و  $X^{(j)}(\theta)$  باید غیرتکین باشند؛ هم‌چنین با ضرب نامساوی (۲۹) از سمت چپ در  $\begin{bmatrix} (X^{(j)}(\theta)^T)^{-1} & -I \end{bmatrix}$  و ترانزاده آن از سمت راست می‌توان گفت:

$$\langle (W^{(j)}(\theta) - YX^{(j)}(\theta)) X^{(j)}(\theta)^{-1} \rangle > 0$$

که تأیید می‌نماید عبارت  $W^{(j)}(\theta) - X^{(j)}(\theta)Y$  غیرتکین است؛ بنابراین برای تمامی مقادیر  $\theta$  و هر ماتریس غیرتکین  $V$ ، ماتریس  $U^{(j)}(\theta) = V^{-1}(W^{(j)}(\theta) - YX^{(j)}(\theta))$  نیز غیرتکین است. در این جا اثبات به پایان می‌رسد.

#### ۴- طراحی سیستم کنترل با کلیدزنی نرم

برای جلوگیری از وقوع رفتارهای نامطلوب سیگنال کنترلی هنگام کلیدزنی و در عین دستیابی به سطح عملکرد

سرانجام با جایگذاری روابط (۲۳)–(۲۷) در (۲۵)، پس از مقداری محاسبه جبری شرط زیر حاصل می‌شود:

$$\Pi_1^{(j)}(\theta, \delta, \dot{\theta}) + \langle \Pi_2^{(j)}(\theta, \delta) \Pi_3^{(j)}(\theta, \delta) \rangle > 0 \quad (28)$$

که در آن  $\Pi_1^{(j)}(\theta, \delta, \dot{\theta})$ ،  $\Pi_2^{(j)}(\theta, \delta)$  و  $\Pi_3^{(j)}(\theta, \delta)$  در رابطه‌های (۱۷) و (۱۸) داده شده‌اند. همان‌گونه که می‌بینید ضرب عوامل طراحی در شرایط طراحی کنترل‌کننده ایجاد غیرخطی‌گری می‌نماید. برای حل چنین مشکلی، با استفاده از روابط (۱۷)–(۱۸) و به کمک لم ۱ می‌توان به این مسئله صحنه گذاشت که اگر رابطه‌ی (۱۵) برقرار باشد، آن‌گاه نامساوی (۲۱) برقرار می‌شود که خود معادل رابطه (۱۱) از لم ۲ است؛ هم‌چنین با قرار دادن روابط (۲۳)–(۲۵) و (۲۷) در شرایط (۲۱) و (۲۲) به ترتیب نامساوی‌های (۱۵) و (۱۶) به دست آورده خواهند شد که معادل رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) از لم ۲ هستند. به عنوان جمع‌بندی می‌توان این‌گونه بیان نمود که اگر (۱۴)–(۱۶) برقرار باشند، آن‌گاه رابطه‌های (۱۰)–(۱۲) برقرار می‌شوند که به تضمین پایداری نمایی و حاصل نمودن کمترین مقدار  $\gamma$  در کران بالای بهره‌ی  $H_\infty$  برای خروجی عملکردی سیستم حلقه‌بسته‌ی (۵) منتهی می‌شود. توجه نمایم ماتریس‌های فضای حالت کنترل‌کننده در رابطه‌ی (۱۹) با معکوس نمودن رابطه‌ی غیرخطی (۲۴) به دست می‌آیند. حال در روابط استخراج ماتریس‌های کنترل‌کننده در (۱۹) باید معکوس‌پذیری ماتریس‌های  $V$  و

به گونه‌ای که علاوه بر برقراری شرایط (۱۰)-(۱۱) به ازای  $\forall(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in (\Theta^{(j)} \setminus \Theta^{(k)}) \times (\Delta^{(j)} \setminus \Delta^{(k)}) \times (\Lambda^{(j)} \setminus \Lambda^{(k)})$  روابط (۳۱)-(۳۲) و نیز نامساوی (۳۳) به ترتیب برای نواحی  $\forall(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta^{(j,k)} \times \Delta^{(j,k)} \times \Lambda^{(j,k)}$  و سطح کلیدزنی  $\forall \theta \in S^{(j,k)}$  برقرار گردند:

$$P^{(j,k)}(\theta) > 0, \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}^{(j,k)}(\theta) - \langle A^{(j,k)}(\theta, \delta) G^{(j,k)}(\theta) \rangle \\ -C^{(j,k)}(\theta, \delta) G^{(j,k)}(\theta) \\ B^{(j,k)}(\theta, \delta)^T \\ G^{(j,k)}(\theta) - P^{(j,k)}(\theta) - \lambda G^{(j,k)}(\theta)^T A^{(j,k)}(\theta, \delta)^T \\ * & * & * \\ I & * & * \\ D^{(j,k)}(\theta, \delta)^T & \gamma^2 I & * \\ \left\{ \lambda G^{(j,k)}(\theta)^T \times \right. & 0 & \lambda \langle G^{(j,k)}(\theta) \rangle \\ \left. C^{(j,k)}(\theta, \delta)^T \right\} \end{bmatrix} > 0, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} P^{(j,k)}(\theta) & * \\ P^{(j,k)}(\theta) & P^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (33)$$

آنگاه سیستم حلقه‌بسته‌ی موجود در (۵) با سیستم کنترلی (۷) تحت قانون کلیدزنی هیستریزس و رویکرد کلیدزنی نرم پایدار نمایی می‌شود و شرط بهره‌ی عملکردی  $H_\infty$  در رابطه‌ی (۳) با مقدار بهینه  $\gamma$  برای  $\forall(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda$  تضمین می‌گردد.

**اثبات:** فرایند اثبات آن با مقداری تغییر نمادها به راحتی امکان‌پذیر است که جهت رعایت اختصار از تکرار دوباره آن خودداری می‌شود.

مشابه قضیه ۱، می‌توان طراحی سیستم کنترل با راهبرد کلیدزنی نرم را در قضیه‌ی زیر دنبال کرد.

**قضیه ۲:** برای مقدار داده شده  $\gamma \in \mathfrak{R}_+$  و تمامی  $j, k \in Z_N$ ، اگر خانواده‌ای از ماتریس‌های وابسته به پارامتر  $L_3^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_s \times n}$ ،  $L_2^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n_s}$ ،  $L_1^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ،  $W^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ،  $X^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ،  $L_4^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n_s \times n_s}$ ،  $P_3^{(j)}(\theta) \in S_+^n$ ،  $P_2^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ،  $P_1^{(j)}(\theta) \in S_+^n$ ،  $P_2^{(j,k)}(\theta) = P_2^{k,j}(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ،  $P_1^{j,k}(\theta) = P_1^{k,j}(\theta) \in S_+^n$ ،  $P_3^{(j,k)}(\theta) = P_3^{(k,j)}(\theta) \in S_+^n$  ماتریس مستقل از پارامتر  $H(\theta, \delta) \in \mathfrak{R}^{(n+n_s) \times (n+n_s)}$  و مقدار عددی  $\lambda \in \mathfrak{R}_+$  موجود داشته باشند، به گونه‌ای که

بهبودیافته در این بخش رویکرد طراحی کلیدزنی نرم ارائه شده است. با بهره‌گیری از لم توسعه‌یافته و متغیرهای کمکی نه تنها کلیدزنی به صورت هموار و نرم صورت می‌گیرد؛ بلکه کارایی خروجی عملکردی سیستم حلقه‌بسته در این حالت نسبت به طراحی کنترل کلیدزن در قضیه ۱ نیز بهتر می‌شود. قبل از بیان نتایج اصلی نکته‌ی زیر را در نظر بگیرید. **نکته ۱:** در ناحیه‌ی همپوشانی مشترک  $\forall \theta \in \Theta^{(j,k)}$  فرض کنید برای نرخ تغییرات پارامترهای جدول‌بندی و نیز نامعینی داشته باشیم:  $\delta \in \Delta^{(j,k)}$ ،  $\dot{\theta} \in \Lambda^{(j,k)}$ . علاوه بر این، ماتریس‌های مدل حلقه‌باز سیستم نیز در این ناحیه‌ی مشترک هیستریزس  $\Theta^{(j,k)}$  به صورت  $M^{(j,k)}(\theta, \delta)$  بیان می‌شوند. بر اساس منابع موجود [۱۸]-[۱۹] می‌توان برای درونیابی عوامل طراحی بین نواحی کلیدزنی مجاور در راستای پارامتر جدول‌بندی  $\theta_i$  به صورت زیر عمل نمود.

$$\begin{aligned} L_l^{(j,k)}(\theta) &:= \alpha_{i1}(\theta_i) L_l^{(j)}(\theta) + \alpha_{i2}(\theta_i) L_l^{(k)}(\theta), \\ W^{(j,k)}(\theta) &:= \alpha_{i1}(\theta_i) W^{(j)}(\theta) + \alpha_{i2}(\theta_i) W^{(k)}(\theta), \\ X^{(j,k)}(\theta) &:= \alpha_{i1}(\theta_i) X^{(j)}(\theta) + \alpha_{i2}(\theta_i) X^{(k)}(\theta) \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن:  $\alpha_{il}(\theta_i) = \frac{\bar{\theta}_i^{(j,k)} - \theta_i}{\bar{\theta}_i^{(j,k)} - \underline{\theta}_i^{(j,k)}}$  و  $l=1, \dots, 4$  توجه نمایید که:  $\alpha_{i1}(\theta_i) + \alpha_{i2}(\theta_i) = 1$  و  $\bar{\theta}_i^{(j,k)}$  و  $\underline{\theta}_i^{(j,k)}$  به ترتیب مقادیر کمینه و بیشینه‌ی پارامتر جدول‌بندی  $\theta_i$  در ناحیه‌ی  $\Theta^{(j,k)}$  هستند. از سوی دیگر دیدیم که ماتریس‌های فضای حالت سیستم کنترلی مستقل از متغیرهای لیاپانوف به دست می‌آیند. پس می‌توان آن‌ها را در ناحیه  $\Theta^{(j,k)}$  به صورتی مستقل در نظر گرفت و به شکل  $P_1^{(j,k)}(\theta)$ ،  $P_2^{(j,k)}(\theta)$  و  $P_3^{(j,k)}(\theta)$  در شرایط طراحی لحاظ نمود. سرانجام، به راحتی می‌توان از تعمیم این رویکرد برای انجام کلیدزنی‌های نرم بین نواحی‌ای بهره گرفت که در چند راستا مجاور هم هستند. برای مطالعه بیشتر، پژوهش‌های [۱۹] را مشاهده نمایید.

به کمک این مقدمه کوتاه و ساده در نکته ۱، زمینه برای بیان نتایج اصلی فراهم می‌شود که در زیر ارائه شده‌اند.

**لم ۳:** برای مقدار مثبت داده شده  $\gamma$  و تمامی مقادیر  $j, k \in Z_N$ ، اگر خانواده‌ای از ماتریس‌های پیوسته‌ی مشتق‌پذیر وابسته به پارامتر  $P^{(j)}(\theta) \in S^{2n}$ ،  $P^{(j,k)}(\theta) = P^{(k,j)}(\theta) \in S^{2n}$  ماتریس‌های  $G^{(j)}(\theta) \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$  و مقدار عددی  $\lambda \in \mathfrak{R}_+$  موجود باشند،

مشترک هیستریزیس و کران بالای نرخ تغییرات پارامترهای جدول‌بندی دست‌یابی به عملکرد مطلوب را دچار چالش جدی می‌نماید. از سوی دیگر در مراجع [۲۰]-[۲۱] از تعریف یک اندیس بهینه‌سازی جدید برای نرم نمودن سیگنال کنترلی بهره گرفته شده است. توسعه‌ی این روش برای مسئله مطرح شده کاهش کارایی را به دنبال دارد و جهش‌های سیگنال کنترلی در صورتی به طور کامل حذف می‌شوند که طراحی در حالت غیرکلیدزن انجام شود. علاوه بر این کران تغییرات پارامترهای جدول‌بندی هم در دست‌یابی به کارایی مطلوب مورد نظر محدودیت جدی ایجاد می‌کند؛ بنابراین توسعه کارهای پیشین تحمیل محافظه‌کاری در طراحی و کاهش عملکرد سیستم حلقه‌بسته را به دنبال دارد. اما به کمک لم توسعه‌یافته و متغیرهای کمکی در این مقاله، کنترل‌کننده مستقل از ماتریس‌های لیاپانوف استخراج می‌شود و به نرخ پارامترهای جدول‌بندی وابسته نیست. علاوه بر این، برخلاف کارهای پیشین انجام کلیدزنی نرم با بهبود عملکرد خروجی سیستم حلقه‌بسته همراه است. برای مطالعه بیش‌تر نکته‌ی ۸ در مرجع [۱۲] را ببینید؛ هم‌چنین واضح و طبیعی است که در مقایسه با طراحی مقاوم نوع غیرکلیدزن [۹] شاهد نتایج بهتری باشیم.

**نکته ۳:** در بسیاری از سیستم‌های مهندسی به دلیل داشتن تابع تبدیل عملگر و فیلتر خروجی اندازه‌گیری با پهنای باند فرکانسی کاری محدود ماتریس‌های  $B_u$  و  $C_y$  ثابت و مستقل از پارامتر هستند. بر همین اساس، طراحی‌های موجود در پژوهش‌های [۱۱]، [۱۵] و منابع موجود در آن‌ها ارائه شده‌اند. حال اگر حتی در سیستمی این دو ماتریس وابسته به پارامتر باشند به کمک روش پیش- و پس-فیلتر می‌توان این عدم وابستگی را ایجاد نمود (نکته ۱ در مرجع [۱۵] را ببینید)؛ اما برای جلوگیری از افزایش مرتبه کنترلی ناشی از روش گفته شده فرض نمایید، ماتریس خروجی اندازه‌گیری به صورت  $C_y(\theta, \delta)$  باشد که در موارد عملی بسیار کمی اتفاق می‌افتد. در آن صورت عبارت: 
$$Y(B_u^{(j)}(\theta, \delta) - B_u^{(j)}(\theta))L_4^{(j)}(\theta)(C_y^{(j)}(\theta, \delta) - C_y^{(j)}(\theta))X^{(j)}(\theta)$$
 در سطر اول و ستون اول ماتریس  $Q^T A^{(j)}(\theta, \delta)G^{(j)}(\theta)Q$  دیده می‌آید که به دلیل ضرب عناصر طراحی ایجاد غیرخطی‌گری (غیرمحدب نمودن شرایط طراحی) می‌نماید که نامطلوب است و حل مسئله را دچار چالش جدی می‌کند.

علاوه بر برقراری شرایط (۱۴)-(۱۵) به ازای  $\forall(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in (\Theta^{(j)} \setminus \Theta^{(k)}) \times (\Delta^{(j)} \setminus \Delta^{(k)}) \times (\Lambda^{(j)} \setminus \Lambda^{(k)})$  روابط (۳۵)-(۳۶) و نیز شرط (۳۷) به ترتیب برای ناحیه‌ی  $\forall(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta^{(j,k)} \times \Delta^{(j,k)} \times \Lambda^{(j,k)}$  و سطح کلیدزنی  $\forall \theta \in S^{(j,k)}$  برقرار باشند، آنگاه کنترل‌کننده‌ی (۷) سیستم حلقه‌بسته‌ی (۵) را پایدار نمایی می‌نماید و کمترین مقدار  $\gamma$  را برای بهره‌ی  $H_\infty$  خروجی عملکردی طبق قید (۳) در کل نواحی  $(\theta, \delta, \dot{\theta}) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda$  تضمین می‌کند.

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j,k)}(\theta) & * \\ P_2^{(j,k)}(\theta) & P_3^{(j,k)}(\theta) \end{bmatrix} > 0, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^{(j,k)} & * \\ \Pi_3^{(j,k)} - (\Pi_2^{(j,k)} H(\theta, \delta))^T & \langle H(\theta, \delta) \rangle \end{bmatrix} > 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} P_1^{(j,k)}(\theta) & * & * & * \\ P_2^{(j,k)}(\theta) & P_3^{(j,k)}(\theta) & * & * \\ P_1^{(j,k)}(\theta) & P_2^{(j,k)}(\theta)^T & P_1^{(k)}(\theta) & * \\ P_2^{(j,k)}(\theta) & P_3^{(j,k)}(\theta) & P_2^{(k)}(\theta) & P_3^{(k)}(\theta) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (36)$$

که در آن شرایط فوق همان روابط (۱۴)-(۱۶) هستند؛ با این تفاوت که اندیس  $(j)$  با  $(j, k)$  جایگزین شده است. به راحتی و به کمک روابط (۷)، (۱۹) و (۳۰) فضای حالت کنترل‌کننده‌ی  $K_{ss}(\theta)$  قابل محاسبه است.

**اثبات:** به کمک روند انجام شده در اثبات قضیه ۱ و با توجه به روابط (۷) و (۳۰)، فرایند استخراج شرایط طراحی در این‌جا به روشی مشابه می‌تواند صورت گیرد که جهت رعایت اختصار در این بخش حذف می‌شود.

**نکته ۲:** قبلاً از محدودیت منابع گذشته در طراحی کنترلی‌کننده برای سیستم‌های LPV نامعین کلیدزن سخن گفته شد. حال تصور نمایید بخواهیم مفاهیم موجود در پژوهش‌های اخیر را برای مسئله بیان‌شده در این مقاله بسط و توسعه دهیم. در پژوهش‌های [۱۸]-[۱۹] فضای حالت کنترلی‌کننده به نرخ پارامترهای جدول‌بندی وابسته است. استفاده از رویکرد فوق به دلیل عدم دسترسی به اندازه‌گیری و یا تخمین این متغیرها، عملاً امکان‌پذیر نیست. از سوی دیگر با توجه به این‌که در شرایط طراحی به دلیل درون‌یابی عبارت 
$$\frac{\dot{\theta}_i}{\theta_i^{(j,k)} - \theta_i^{(k,k)}}$$
 به چشم می‌خورد، باریک بودن ناحیه‌ی

طراحی کنترل کننده را به صورت بهینه‌سازی زیر با کمینه‌سازی  $\gamma$  دنبال نمایید:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ & X^{(j)}(\theta), Y, W^{(j)}(\theta), L_1^{(j)}(\theta), L_2^{(j)}(\theta), L_3^{(j)}(\theta), L_4^{(j)}(\theta), \\ & P_1^{(j)}(\theta), P_2^{(j)}(\theta), P_3^{(j)}(\theta), \forall (\theta, \dot{\theta}, \delta) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda, \forall j, k \in Z_N \\ \text{s.t.} \quad & (14) - (16), H(\theta, \delta) = \beta_0 I_{n+n_u}, \lambda = \lambda_0 \end{aligned}$$

اگر بهینه‌سازی فوق دارای جواب بود، یعنی یک مقدار محدود و معین با حل آن برای  $\gamma$  به دست آمد، آن‌گاه قرار دهید:

$$\begin{aligned} L_{1,m}^{(j)}(\theta) &= L_1^{(j)}(\theta), L_{2,m}^{(j)}(\theta) = L_2^{(j)}(\theta), L_{3,m}^{(j)}(\theta) = L_3^{(j)}(\theta), \\ L_{4,m}^{(j)}(\theta) &= L_4^{(j)}(\theta), X_m^{(j)}(\theta) = X^{(j)}(\theta), \\ Y_m &= Y, W_m^{(j)}(\theta) = W^{(j)}(\theta) \end{aligned}$$

در ادامه داریم:  $\gamma^m = \gamma$ . در غیر این صورت به گام ۰ برگردید و یک مقدار متفاوت را برای  $\lambda = \lambda_0$  و  $H(\theta, \delta) = \beta_0 I_{n+n_u}$  برگزینید و عمل بهینه‌سازی را تا یافتن جواب اولیه ادامه دهید.

**گام ۲** استخراج مقدار برای  $\lambda$  و  $H(\theta, \delta)$ : با استفاده از مقدارهای به دست آمده از حل مسئله بهینه‌سازی در گام قبلی، در این مرحله داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ & H(\theta, \delta), \lambda, \forall (\theta, \dot{\theta}, \delta) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda, \forall j, k \in Z_N \\ \text{s.t.} \quad & (14) - (16), L_{1,m}^{(j)}(\theta) = L_1^{(j)}(\theta), L_{2,m}^{(j)}(\theta) = L_2^{(j)}(\theta), \\ & L_{3,m}^{(j)}(\theta) = L_3^{(j)}(\theta), L_{4,m}^{(j)}(\theta) = L_4^{(j)}(\theta), X_m^{(j)}(\theta) = X^{(j)}(\theta), \\ & Y = Y_m, W_m^{(j)}(\theta) = W_m^{(j)}(\theta) \end{aligned}$$

و سرانجام قرار دهید:  $\lambda_m = \lambda$ ,  $H_m(\theta, \delta) = H(\theta, \delta)$  و  $m \leftarrow m+1$ .

**گام ۳** طراحی کنترل کننده با تضمین بهره  $H_\infty$ : به منظور به دست آوردن کنترل کننده، فرایند بهینه‌سازی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ & X^{(j)}(\theta), Y, W^{(j)}(\theta), L_1^{(j)}(\theta), L_2^{(j)}(\theta), L_3^{(j)}(\theta), L_4^{(j)}(\theta), \\ & P_1^{(j)}(\theta), P_2^{(j)}(\theta), P_3^{(j)}(\theta), \forall (\theta, \dot{\theta}, \delta) \in \Theta \times \Delta \times \Lambda, \forall j, k \in Z_N \\ \text{s.t.} \quad & (14) - (16), H(\theta, \delta) = H_m(\theta, \delta), \lambda = \lambda_m \end{aligned}$$

آن‌گاه با حل آن برای  $\gamma$  به دست آمده، قرار دهید:

$$\begin{aligned} L_{1,m}^{(j)}(\theta) &= L_1^{(j)}(\theta), L_{2,m}^{(j)}(\theta) = L_2^{(j)}(\theta), L_{3,m}^{(j)}(\theta) = L_3^{(j)}(\theta), \\ L_{4,m}^{(j)}(\theta) &= L_4^{(j)}(\theta), X_m^{(j)}(\theta) = X^{(j)}(\theta), \\ Y_m &= Y, W_m^{(j)}(\theta) = W^{(j)}(\theta), \gamma^m = \gamma \end{aligned}$$

**گام ۴** (بررسی شرط توقف فرایند): اگر  $|\gamma^m - \gamma^{m-1}| < \varepsilon$  یا  $m = itr_{\max}$  باشند، آن‌گاه این فرایند بازگشتی متوقف

یک راه حل ساده در نظر گرفتن کنترل کننده‌ی (۴) به صورت اکیداً سره است یعنی:  $D_c^{(j)}(\theta) = L_4^{(j)}(\theta) = 0$  که با پذیرفتن مقدار خیلی ناچیزی سخت‌گیری در طراحی مشکل را مرتفع می‌کند. لازم به ذکر است، توسط همان شرایط قبلی و با این پیش‌فرض می‌توان طراحی کنترل کننده را انجام داد. توجه نمایید در رابطه طراحی (۱۷) ماتریس‌های  $L_4^{(j)}(\theta)$  و  $C_y^{(j)}(\theta, \delta)$  به ترتیب با 0 و جایگزین می‌شوند. از طرفی رابطه (۱۸) نیز به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(j)}(\theta, \delta) &:= \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n_u} \\ \left\{ \begin{array}{l} Y(A_p^{(j)}(\theta, \delta) - A_p^{(j)}(\theta)) + \\ L_2^{(j)}(\theta)(C_y^{(j)}(\theta, \delta) - C_y^{(j)}(\theta)) \end{array} \right\} & Y(B_u^{(j)}(\theta, \delta) - B_u^{(j)}(\theta)) \\ 0_{(2n+n_u+n_z) \times n} & 0_{(2n+n_u+n_z) \times n_u} \end{bmatrix} \\ \Pi_3^{(j)}(\theta, \delta) &:= \begin{bmatrix} -X^{(j)}(\theta) & 0_{n \times n_y} & 0_{n \times n_z} \\ -L_3^{(j)}(\theta) & 0_{n_u \times n_y} & 0_{n_u \times n_z} \\ -\lambda X^{(j)}(\theta) & 0_{n \times n_y} & \\ -\lambda L_3^{(j)}(\theta) & 0_{n_u \times n_y} & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## ۵- حل مسئله بهینه‌سازی طراحی

در این‌جا هدف طراحی سیستم کنترل جدول‌بندی بهره‌ی دینامیکی پس‌خورد خروجی مرتبه کامل کلیدزن است به گونه‌ای که کمترین مقدار بهره‌ی عملکردی  $H_\infty$  حاصل گردد. حضور عوامل  $\lambda$  و  $H(\theta, \delta)$  و ضرب آن‌ها در عناصر طراحی باعث ایجاد غیرخطی‌گری می‌شود؛ به گونه‌ای که طراحی از طریق بهینه‌سازی شرایط LMI قابل انجام نیست. حل این چالش به روش‌های مختلفی می‌تواند انجام شود. در این مقاله، بهینه‌سازی طراحی بر اساس انجام یک فرایند بازگشتی بر مبنای حل مسئله LMI ارائه شده است.

**رویکرد بازگشتی ۱:** به صورت گام به گام فرایند بهینه‌سازی طراحی در قضیه ۱ به صورت زیر آورده شده است:

**گام ۰** (مقداردهی اولیه): ابتدا قرار دهید:  $m=1$ ,  $itr_{\max} = itr_0$ ,  $H(\theta, \delta) = \beta_0 I_{n+n_u}$ ,  $\lambda = \lambda_0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$  در آن  $itr_0 \in Z_+$  و  $\beta_0, \lambda_0, \varepsilon_0 \in \mathfrak{R}_+$ .

**گام ۱** (طراحی کنترل کننده اولیه با تضمین بهره  $H_\infty$ ): به ازای مقدار داده شده  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\lambda = \lambda_0$  و  $H(\theta, \delta) = \beta_0 I_{n+n_u}$

$c_1 := -m_p l^2$ ,  $c_2 := (M + m_p) m_p g l$ ,  $c_3 := -f_1 (M + m_p)$ ,  
 $c_4 := f_0 m_p l$ ,  $c_5 := -m_p l c_6 := -m_p^2 l^2 g$ ,  $c_7 := (J + m_p l^2) m_p l$ ,  
 $c_8 := f_1 m_p l$ ,  $c_9 := -f_0 (J + m_p l^2)$ ,  $c_{10} := J + m_p l^2$   
 در این مدل  $x_1$  و  $x_2$  به ترتیب زاویه‌ی آونگ نسبت به خط عمودی حرکت (rad) و نرخ زمانی تغییرات آن و همچنین  $x_3$  و  $x_4$  به ترتیب جابجایی خطی ارا به در راستای خط افق ( $m$ ) و نرخ زمانی تغییرات آن هستند.  $g = 9.8 m/s^2$  شتاب جاذبه،  $m_p = 0.22 kg$  جرم آونگ و  $M = 1.3282 kg$  جرم ارا به است. ضریب اصطکاک ارا به و آونگ به ترتیب با  $f_1 = 0.00705 N \cdot rad$  و  $f_0 = 22.915 N/m/s$  بیان شده‌اند.  $l = 0.304$  فاصله‌ی مرکز جرم آونگ تا محور شفت آن،  $J = 0.004963 kgm^2$  ممان اینرسی بازوی آونگ حول مرکز جرم آن و  $u$  نیرو افقی وارد بر ارا به ( $N$ ) است. علاوه بر این‌ها، متغیرهای  $w_1$ ،  $w_2$  و  $w_3$  به ترتیب نیروی اغتشاشی در راستای ورودی از جنس نیروی افقی ( $N$ )، نویز اندازه‌گیری زاویه‌ی حرکت آونگ (rad) و نویز اندازه‌گیری جابجایی ارا به ( $m$ ) هستند.

توجه نمایید که متغیرهای جدول‌بندی  $\rho_i^\sigma$  برای  $i=1, \dots, 4$  کاملاً مستقل از یکدیگر نیستند. به همین دلیل انجام طراحی با استفاده از مدل بیان شده در (۳۷) یک مشکل اساسی محسوب می‌شود. از یک سو تعداد پارامترهای جدول‌بندی زیاد می‌تواند به افزایش حجم محاسبات منجر شود؛ از سوی دیگر وابستگی این متغیرها به یکدیگر، افزایش محافظه‌کاری و حتی عدم دستیابی به جواب را برای نتایج طراحی به دنبال دارد. واضح است که تمام متغیرهای جدول‌بندی  $\rho_i^\sigma$  وابسته به  $x_1$  هستند؛ بنابراین برای تقریب  $\rho_i^\sigma$  می‌توان از عبارت  $\hat{\rho}_i^\sigma = a_{0i}^\sigma + a_{0i}^\sigma \theta_1$  ( $i=1, \dots, 4$ ,  $\sigma=1, \dots, 3$ ) استفاده کرد. علاوه بر آن، تعریف نمایید  $\Delta \rho_i^\sigma = \rho_i^\sigma - \hat{\rho}_i^\sigma = a_{2i}^\sigma \delta_1$  که به عنوان خطای تقریب بر حسب  $\Delta \rho_i^\sigma = \delta_3$  قابل بیان است. برای روشن شدن این موضوع می‌توان پژوهش [۱۱] را مطالعه کرد. حال پارامترهای جدول‌بندی جدید را به صورت زیر تعریف نمایید:

$\theta_1 := x_1^2$ ,  $\rho_5 = \theta_2 := x_2^2$   
 برای به دست‌آوردن مدل LPV سیستم با حداقل تعداد پارامترهای جدول‌بندی می‌توان ضرایب  $a_{0i}^\sigma$ ،  $a_{1i}^\sigma$  و  $a_{2i}^\sigma$  را

می‌شود. در غیر این صورت با شروع دوباره از گام ۲، این رویکرد بازگشتی ادامه می‌یابد.

به صورتی کاملاً مشابه می‌توان نتایج طراحی سیستم کنترل با کلیدزنی نرم در قضیه‌ی ۲ را در قالب بهینه‌سازی LMI وابسته به پارامتر استخراج کرد. جهت رعایت اختصار از تکرار مطالب آن خودداری می‌شود.

### ۶- شبیه‌سازی

برای نمایش میزان کاربردی بودن و تأثیرات روش پیشنهادی، نتایج عددی طراحی کنترل‌کننده سیستم غیرخطی آونگ معکوس بر ارا به در این قسمت ارائه می‌شوند. مدل فضای حالت LPV این سیستم در زیر به نمایش در آمده است [۱۱]:

$$A_p^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1 \rho_4^\sigma \rho_5 + c_2 \rho_2^\sigma & c_3 \rho_1^\sigma & 0 & c_4 \rho_3^\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_6 \rho_4^\sigma + c_7 \rho_2^\sigma \rho_5 & c_8 \rho_3^\sigma & 0 & c_9 \rho_1^\sigma \end{bmatrix}, \\
 B_w^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_5 \rho_3^\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{10} \rho_1^\sigma & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_u^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_5 \rho_3^\sigma \\ 0 \\ c_{10} \rho_1^\sigma \end{bmatrix}, \\
 C_z^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_{zw}^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{zu}^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 C_y^\sigma(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{yw}^\sigma(\theta, \delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

که در آن:

$$\rho_1^\sigma := \frac{1}{\left( (M + m_p)(J + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos(x_1)^2 \right)}, \\
 \rho_2^\sigma := \frac{\sin(x_1)}{\left( (M + m_p)(J + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos(x_1)^2 \right)}, \\
 \rho_3^\sigma := \frac{\cos(x_1)}{\left( (M + m_p)(J + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos(x_1)^2 \right)}, \\
 \rho_4^\sigma := \frac{\sin(x_1) \cos(x_1)}{\left( (M + m_p)(J + m_p l^2) - m_p^2 l^2 \cos(x_1)^2 \right)}, \\
 \rho_5 := x_2^2 \quad (۳۸)$$

و همچنین:

از سوی دیگر، برای طراحی سیستم کنترل با کلیدزنی نرم نواحی پنج‌گانه‌ی جدول ۳ را با تعریف‌های  $\Theta^{(1)} \setminus \Theta^{(2)}$ ،  $\Theta^{(1)} \setminus \Theta^{(3)}$  و  $\Theta^{(2)} \setminus \Theta^{(3)}$  در نظر بگیرید. حال می‌توان ضرایب تقریب مورد استفاده در رویکرد کلیدزنی نرم را محاسبه کرد. برای مشاهده‌ی آنها جدول ۴ را ببینید.

برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی طراحی باید ابتدا روابط وابسته به پارامتر دارای بعد بی‌نهایت را به نامساوی‌های ماتریسی خطی دارای بعد محدود تبدیل نمود. این کار توسط ابزار حل ROLMIP [۲۳] انجام می‌شود. در نهایت به کمک ابزار حل LMI نتایج طراحی محاسبه خواهند شد. به عنوان مثال می‌توان از بسته‌های نرم‌افزاری Mosek [۲۴] به همراه رابط کاربر Yalmip [۲۵] بهره‌گیری نمود. لازم به ذکر است، پارامترهای لیاپانوف و متغیرهای طراحی بر حسب پارامترهای جدول بندی از درجه‌ی افاین انتخاب شده‌اند. اکنون طراحی با استفاده از رویکرد بازگشتی ۱ به ازای  $\lambda_0 = 10^{-1}$ ,  $\beta_0 = 10^3$ ,  $\varepsilon_0 = 0.005$ ,  $itr_0 = 100$  انجام می‌شود.

سپس برای شرایط اولیه حالت‌های سیستم به صورت  $x(0) = x_0 = [1.25 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  شبیه‌سازی زمانی در نظر گرفته شده است. نمودار منحنی اغتشاش نیرو در راستای افقی مطابق شکل ۱ به سیستم حلقه‌بسته اعمال می‌شود. جهت انجام مقایسه‌ی عددی بهتر نتایج طراحی، انتگرال مربع بردار عملکرد خروجی  $z$  به صورت  $IS_z := \int_0^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} (z(t)^T z(t)) dt$  معرفی می‌گردد.

جدول ۳- بازه‌ی تغییرات پارامترها (رویکرد کلیدزنی نرم)

نواحی	بازه‌ی تغییرات		
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\delta_1$
$\Phi^{(1)}$	[0,0.537]	[0,400]	[-0.012,0.0282]
$\Theta^{(1,2)}$	[0.537,0.697]	[0,400]	[-0.004,0.008]
$\Phi^{(2)}$	[0.697,1.017]	[0,400]	[-0.023,0.046]
$\Theta^{(2,3)}$	[1.017,1.177]	[0,400]	[-0.007,0.013]
$\Phi^{(3)}$	[1.177,1.714]	[0,400]	[-0.074,0.148]

به کمک روش حداقل مربعات خطای (LSE) محاسبه کرد. فرض کنید، بازه تغییرات متغیرهای  $x_1$  و  $x_2$  و در نهایت پارامترهای جدول بندی به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} |x_1| \leq \frac{5\pi}{12} \Rightarrow 0 \leq \theta_1 \leq \left(\frac{5\pi}{12}\right)^2, \\ |x_2| \leq 20 \Rightarrow 0 \leq \theta_2 \leq 400 \end{cases} \quad (39)$$

بازه‌ی تغییرات پارامترهای جدول بندی و نامعینی در جدول ۱ برای طراحی نوع صرفاً کلیدزن آورده شده‌اند. همچنین در جدول ۲ ضرایب تقریب  $a_{0i}^\sigma$ ،  $a_{1i}^\sigma$  و  $a_{2i}^\sigma$  برای طراحی

کلیدزن (به صورت  $\begin{bmatrix} a_{01}^\sigma \\ a_{02}^\sigma \\ a_{03}^\sigma \\ a_{04}^\sigma \end{bmatrix}$  و ...) گردآوری شده‌اند.

جدول ۱- بازه‌ی تغییرات پارامترها (رویکرد کلیدزن)

نواحی	بازه تغییرات		
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\delta_1$
$\Theta^{(1)}$	[0,0.697]	[0,400]	[-0.033,0.072]
$\Theta^{(2)}$	[0.537,1.177]	[0,400]	[-0.009,0.184]
$\Theta^{(3)}$	[1.017,1.714]	[0,400]	[-0.126,0.250]

جدول ۲- ضرایب تقریب  $\rho_i^\sigma$  (رویکرد کلیدزن)

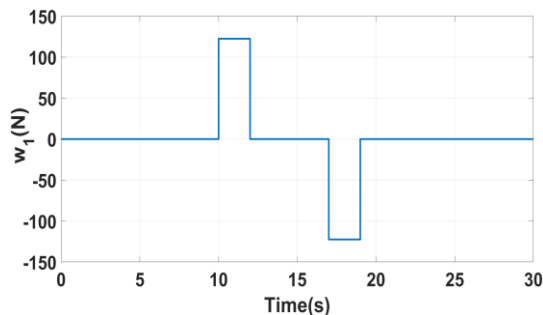
نواحی	مقدار ضرایب		
	$a_{0i}^\sigma$	$a_{1i}^\sigma$	$a_{2i}^\sigma$
$\Theta^{(1)}$	[28.799]	[-3.084]	[1]
	[28.785]	[-7.579]	[1.485]
	[28.747]	[-16.382]	[2.756]
	[28.691]	[-19.972]	[4.682]
$\Theta^{(2)}$	[28.238]	[-1.770]	[1]
	[27.973]	[-5.672]	[1.432]
	[27.230]	[-12.821]	[2.684]
	[26.055]	[-13.801]	[4.710]
$\Theta^{(3)}$	[26.538]	[-0.405]	[1]
	[25.668]	[-3.813]	[1.315]
	[22.731]	[-9.207]	[2.645]
	[17.830]	[-7.215]	[4.955]

جدول ۵- مقایسه عملکردی نتایج طراحی

روش طراحی	عملکرد $H_o$	
	$\gamma$	$IS_c$
کلیدزن (قضیه ۱)	0.742 <sub>13</sub>	7.321
کلیدزنی نرم (قضیه ۲)	0.573 <sub>11</sub>	3.523

جدول ۶- مقایسه پیچیدگی محاسباتی روش‌های طراحی

رویکرد بازگشتی	تعداد ردیف‌های LMI		تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری	
	قضیه ۱	قضیه ۲	قضیه ۱	قضیه ۲
گام ۱	5728	10440	791	935
گام ۲	12592	22608	318	462
گام ۳	12592	22608	791	935



شکل ۱- نیروی اغتشاش وارد بر سیستم

نوع صرفاً کلیدزن رقم خورده است. علاوه بر آن، رفتار مناسب‌تری را برای سیگنال کلیدزنی و ورودی تلاش کنترلی در شکل ۳ در این روش (قضیه ۲) مشاهده می‌کنیم. بر خلاف نوع صرفاً کلیدزن در قضیه ۱، هم شاهد کلیدزنی‌های کمتری در قضیه ۲ هستیم و هم تغییر بین نواحی بدون جهش‌های ناگهانی و ناپیوستگی‌های لحظه‌ای انجام می‌شود. این رفتار موجب جلوگیری از ایجاد تنش و تغییرات ناخواسته و پرش نامطلوب در سیستم‌های مختلف مهندسی می‌شود. به علاوه مقدار پارامترهای جدول‌بندی برای این طراحی‌ها تنها در بازه تغییرات از پیش معین قرار می‌گیرد؛ هم‌چنین نیاز است، روش‌های پیشنهادی این

جدول ۴- ضرایب تقریب  $\rho_i^\sigma$  (رویکرد کلیدزنی نرم)

نواحی	مقدار ضرایب		
	$a_{0i}^\sigma$	$a_{1i}^\sigma$	$a_{2i}^\sigma$
$\Phi^{(1)}$	28.817	-3.323	1
	28.812	-7.934	1.491
	28.798	-17.041	2.764
	28.777	-21.093	4.682
$\Theta^{(1,2)}$	28.631	-2.604	1
	28.536	-6.870	1.491
	28.286	-15.064	2.764
	27.902	-17.722	4.682
$\Phi^{(2)}$	28.225	-1.840	1
	27.951	-5.768	1.466
	27.190	-13.004	2.732
	25.994	-14.135	4.688
$\Theta^{(2,3)}$	27.525	-1.130	1
	26.971	-4.773	1.375
	25.335	-11.120	2.632
	22.678	-10.773	4.792
$\Phi^{(3)}$	26.159	-0.241	1
	25.175	-3.600	1.284
	21.727	-8.774	2.685
	15.945	-6.402	5.132

نتایج طراحی در جدول ۵ مقایسه شده‌اند. در این جدول مقدار اندیس  $\gamma$  بیان‌گر تعداد نهایی انجام فرایند بازگشتی تکرار شده است. نتایج عملکرد مناسب‌تر روش کلیدزنی نرم را تأیید می‌کنند.

هم‌چنین از دیدگاه محاسباتی مقایسه این دو رویکرد در جدول ۶ صورت گرفته است.

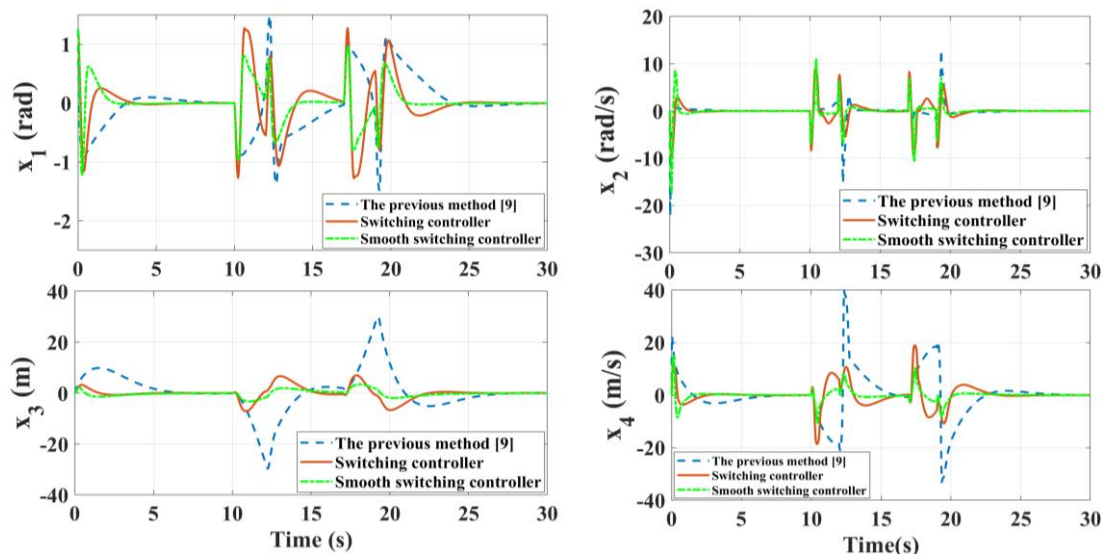
گرچه در کلیدزنی نرم شاهد حجم محاسباتی غیربرخط بیشتری هستیم اما در نهایت میزان حافظه‌ی مورد نیاز در کنترل‌کننده جهت ذخیره‌ی متغیرهای طراحی برای پیاده‌سازی زمان-حقیقی یکسان است. واضح است که مرتبه این دو سیستم کنترل نیز برابر خواهد بود.

در پایان با مقایسه نمودارهای حاصل از شبیه‌سازی در شکل ۲ می‌توان گفت، دفع اغتشاش بهتری برای سیستم حلقه‌بسته در طراحی سیستم کنترل با کلیدزنی نرم نسبت به

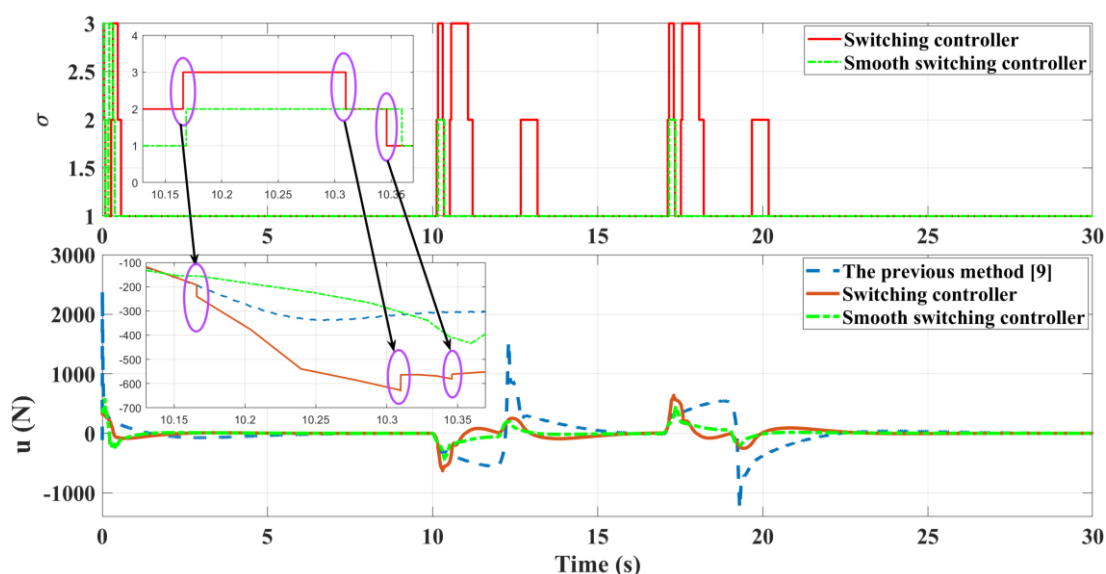
جدول ۷- نتایج عملکردی و پیچیدگی محاسباتی روش [۹]

عملکرد $H_\infty$		پیچیدگی محاسباتی	
$\gamma$	$IS_z$	تعداد ردیف‌های LMI	تعداد متغیرهای تصمیم‌گیری
۵۴۹/۶۱۸	۲۷/۱۲۰	۷۹۱	۹۳۵

مقاله با منابع پیشین مقایسه گردد. در مقایسه با مرجع اخیر [۹] می‌توان بر این موضوع صحنه گذاشت که بهبود قابل ملاحظه‌ای به کمک روش طراحی ارائه شده حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن نتایج موجود در جدول ۵ و جدول ۷ این نکته قابل استنتاج است.



شکل ۲- نمودار شبیه‌سازی زمانی مربوط به حالت‌های سیستم در رویکرد طراحی [۹]، روش‌های پیشنهادی در قضیه ۱ و قضیه ۲ به ترتیب با رنگ‌های آبی، قرمز و سبز



شکل ۳- نمودار زمانی مربوط به سیگنال کلیدزنی و ورودی کنترل در رویکرد طراحی [۹]، روش‌های پیشنهادی در قضیه ۱ و قضیه ۲ به ترتیب با رنگ‌های آبی، قرمز و سبز



به پارامترهای جدول‌بندی و هم‌چنین متغیرهای نامعینی از نوع چندجمله‌ای است. هم‌چنین فرض بر آن است که محدوده‌ی تغییرات پارامترهای جدول‌بندی و نامعینی از پیش معین باشد. طراحی به صورت بهینه‌سازی نامساوی‌های وابسته به پارامتر خطی با کمک یک فرایند بازگشتی انجام می‌شود. سرانجام روش فوق در طراحی کنترل‌کننده سیستم غیرخطی آونگ معکوس بر ارابه مورد استفاده قرار گرفته است. بررسی نتایج شبیه‌سازی، قابلیت‌های کاربردی و مزایای رویکرد کنترلی پیشنهادی در این مقاله را تأیید می‌کند.

#### ۸- مراجع

- [1] Hoffmann C, Werner H (2015) A survey of linear parameter-varying control applications validated by experiments or high-fidelity simulations. *IEEE T Contr Syst T* 23: 416-433.
- [2] Peixoto MLC, Coutinho PHS and Palhares RM (2021) Improved robust gain-scheduling static output-feedback control for discrete-time LPV systems. *Eur J Control* 58: 11-16.
- [3] Sereni B, Assuncao E, Teixeira MCM (2020) New gain-scheduled static output feedback controller design strategy for stability and transient performance of LPV systems. *IET Control Theory A* 14: 717-725.
- [4] Apkarian P, Adams RJ (1998) Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE T Contr Syst T* 6(1): 21-32.
- [5] De Caigny J, Camino JF, Oliveira RCLF, Peres PLD, Swevers J (2012) Gain-scheduled dynamic output feedback control for discrete-time LPV systems. *Int J Robust Nonlin* 22(5): 535-558.
- [6] Yuan C, Duan C, Wu F (2018) Almost output regulation of LFT systems via gain-scheduling control. *Int J Control* 91: 1161-1170.
- [7] Vesely V, Ilka A (2017) Generalized robust gain-scheduled PID controller design for affine LPV systems with polytopic uncertainty. *Syst Control Lett* 105: 6-13.
- [8] Wang S, Pfifer H, Seiler P (2016) Robust synthesis for linear parameter varying systems using integral quadratic constraints. *Automatica* 68: 111-118.
- [9] Sadeghzadeh A (2018a) Gain-scheduled continuous-time control using polytope-bounded inexact scheduling parameters. *Int J Robust Nonlin* 28: 5557-5574.
- [10] Sadeghzadeh A (2018b) On exploiting inexact scheduling parameters for gain-scheduled control of linear parameter-varying discrete-time systems. *Syst Control Lett* 117: 1-10.
- [11] Sadeghzadeh A (2019) LMI relaxations for robust gain-scheduled control of uncertain linear

جالب توجه آن است که در مقایسه با روش پیشین رفتار دینامیکی بهتری برای سیگنال کنترلی در روش کلیدزن نرم رقم می‌خورد. لازم به ذکر است، در بهینه‌سازی طراحی روش [۹]، جستجوی خطی بخش‌بندی شده‌ی ده نقطه‌ای لگاریتمی یکسان برای متغیرهای عددی  $\lambda$  و  $\alpha$  در خلال بازه‌های  $[10^{-3}, 10^{+5}]$  انجام می‌شود. مقدار زیربهینه پس از انجام تعداد تکراری ۱۰۰ فرایند بهینه‌سازی حاصل می‌گردد. توجه نمایید که هر چه تعداد این فرایند در مرجع بیشتر شود، مقدار زیربهینه به مقدار بهینه آن نزدیک‌تر می‌شود. این موضوع، مزیت روش پیشنهادی را هنگام مقایسه با مرجع [۹] حتی به لحاظ بار محاسباتی بهینه‌سازی نشان می‌دهد.

#### ۷- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، رویکردی نوین به منظور طراحی کنترل‌کننده‌ی جدول‌بندی پس‌خورده خروجی دینامیکی مرتبه کامل مقاوم کلیدزن برای سیستم‌های پارامتر متغیر خطی نامعین کلیدزن ارائه می‌شود. در هر ناحیه جدول‌بندی سیستم حلقه‌باز دارای یک مدل فضای حالت منحصر به فرد می‌باشد که طبق منطق کلیدزنی هیستریزس وابسته به پارامترهای جدول‌بندی به صورت زمانی تغییر می‌کنند. ابتدا، طراحی کنترل‌کننده کلیدزن مورد بررسی قرار گرفته است؛ به گونه‌ای که علاوه بر تضمین پایداری، بهره  $L_2$  خروجی عملکردی سیستم حلقه‌بسته نامعین کلیدزن را کمینه می‌نماید. با این وجود، جهش‌های سیگنال کنترلی در لحظات کلیدزنی از دیدگاه عملی مطلوب نیست و چالشی اساسی محسوب می‌شود. چون این مسئله می‌تواند باعث وارد شدن آسیب‌های جدی به سیستم شود یا موجب اشباع سیگنال کنترل گردد، بنابراین پذیرفتنی نیست. بر همین اساس، در ادامه طراحی سیستم کنترل به کمک رویکرد کلیدزنی نرم ارائه شده است. به کمک خانواده‌ای از ماتریس‌های لیاپانوف مستقل و متغیرهای کمکی، کلیدزنی نرم در کنترل‌کننده با بهبود عملکرد خروجی همراه است. به کمک یک تبدیل غیرخطی، فضای حالت کنترل‌کننده که صرفاً وابسته به پارامترهای جدول‌بندی است، به دست می‌آید. در حقیقت در محاسبه‌ی قانون کنترل نیازی به اندازه‌گیری نرخ زمانی پارامترهای جدول‌بندی و متغیرهای نامعینی نیست. لازم به ذکر است که وابستگی ماتریس‌های فضای حالت سیستم حلقه‌باز کلیدزن

- [19] Jiang W, Dong C, Wang Q (2015) Smooth switching linear parameter-varyin control for hypersonic vehicles via a parameter set automatic partition method. *IET Control Theory A* 9(16): 2377-2386.
- [20] He T, Zhu GG, Swei SSM, Su W ( 2019) Smooth-switching LPV control for vibration suppression of a flexible airplane wing. *Aerosp Sci Technol* 84: 895-903.
- [21] He T, Zhu GG, Swei SSM ( 2020) Smooth switching LPV Dynamic output-feedback control. *Int J Control Autom* 18: 1367-1377.
- [22] Chang XH, Park JH, Zhou J (2015) Robust static output feedback  $H_\infty$  control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Syst Control Lett* 85: 23-32.
- [23] Agulhari CM, de Oliveira RCLF, Peres PLD (2012) Robust LMI Parser: A computational package to construct LMI conditions for uncertain systems. in: XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012), Campina Grande, PB, Brazil. 2298-2305.
- [24] Lofberg J (2004) YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: CACSD Conference.
- [25] ApS M (2015) The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28). parameter varying systems. *IET Control Theory A* 13: 486-495.
- [12] Yavari R, Sadeghzadeh A, Shamaghdari S (2021) Comments on “improved synthesis conditions for mixed  $H_2/H_\infty$  gain-scheduling control subject to uncertain scheduling parameters”. *Int J Control* 94: 804-806.
- [13] Yavari R, Sadeghzadeh A, Shamaghdari S (2020) Improved multiobjective  $H_2/H_\infty$  switching gain-scheduled controller synthesis exploiting inexact scheduling parameters. *Int J Robust Nonlin* 30: 7706-7730.
- [14] Rotondo D, Nejjari F, Puig V (2014) Robust state-feedback control of uncertain LPV systems: An LMI-based approach. *J Frankl Inst* 351: 2781-2803.
- [15] Zhao P, Nagamune R (2017) Switching LPV controller design under uncertain scheduling parameters. *Automatica* 76: 243-250.
- [16] Yang D, Zhao J (2019)  $H_\infty$  bumpless transfer for switched LPV systems and its application. *Int J Control* 92: 1500-1508.
- [17] Yang D, Zong G, Nguang SK (2020)  $H_\infty$  bumpless transfer reliable control of Markovian switching LPV systems subject to actuator failures. *Inform Sciences* 431-445.
- [18] Chen P (2012) The design of smooth switching control with application to V/STOL aircraft dynamics under input and output constraints. *Asian J Control* 14(2): 439453.