مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۹/ دوره ۱۰/ شماره ۴/ صفحه ۲۷۵-۲۸۵

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/jsfm.2020.9979.3237

مطالعه تحلیلی ارتعاش طولی میله ویسکوالاستیک ترک‌دار تحت تأثیر میدان مغناطیسی

دانا علی‌پاشائی[۱] و امیرعبدالله قادری[۲,*]

[۱] کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

[۲] استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

یادداشت تحقیقاتی، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۲۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱

چکیده

میله‌ها یکی از اعضای مهم در سازه‌های مهندسی هستند و تحلیل ارتعاشات آنها به علت کاربرد وسیع در تجهیزات مکانیکی مختلف، دارای اهمیت بسیاری است. درک ارتعاشات طولی میله در شرایط تکیه‌گاهی مختلف و در حضور ترک، بسیار مفید است. در این تحقیق، ارتعاشات طولی میله ویسکوالاستیک ترک‌دار واقع در میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ترک به صورت کاهش سفتی موضعی سازه مدل‌سازی شده و به منظور در نظر گرفتن فرضیات واقع‌بینانه‌تر، در این تحقیق و برای اولین بار ترک به صورت ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود و برای به دست آوردن معادلات حاکم از قانون دوم نیوتن و میرایی ساختاری استفاده می‌شود. سپس شرایط مرزی و بین مرزی در محل ترک اعمال گردیده و معادله مشخصه سیستم استخراج می‌شود. از حل معادله مشخصه، فرکانس‌های طبیعی میله به دست می‌آیند که به نوبه خود به شرایط مرزی و مشخصات هندسی سازه شامل موقعیت و عمق ترک بستگی دارند. جهت ارزیابی دقت روش و صحت سنجی آن، نتایج به دست آمده از روش حاضر با نتایج موجود در ادبیات فن مقایسه می‌شود. در نهایت، تأثیر پارامترهای مختلف بر مشخصه‌های ارتعاشاتی میله مطالعه می‌شود.

کلمات کلیدی: ارتعاشات طولی، میله ویسکوالاستیک، ترک ویسکوالاستیک، میدان مغناطیسی، فرکانس طبیعی.

Analytical Study on Longitudinal Vibration of Viscoelastic Cracked Rod under Magnetic Field

D. Ali Pashaee[1], A.A.Ghaderi [2,*]

[1] Master of Science (MSc), Department of Mechanical Engineering ,Tabriz Branch, Islamic Azad University,Tabriz, Iran.

[2] Assoc. Prof., Department of Mechanical Engineering ,Tabriz Branch, Islamic Azad University,Tabriz, Iran.

Abstract

Rods are one of the most important members in engineering structures and due to the wide application in different mechanical equipments, vibration analysis of them have great importance. Uderstanding the longitudinal vibration of the rod in different support conditions and in the presence of crack is very useful. In this study, vibration analysis of cracked viscoelastic rod in magnetic field is studied. The crack is modeled as the local stiffness reduction of the structure. To consider the more realistic assumptions, in this study and for the first time, viscoelastic behavior is considered for crack. Newton's second law and structural damping are used to obtain the governing equations. Then boundary and inter-boundary conditions are applied at the crack location and characteristic equation of the system is derived. By solving the characteristic equation, the natural frequencies of the rod which in turn depends on boundary conditions and geometrical characteristics, including location and depth of crack, are obtained. To evaluate the accuracy and validity of the mention method, the results are compared with the literature. Finally, The effect of different parameters on the vibration characteristics of the rod is studied.

Keywords: Longitudinal Vibrations; Viscoelastic Rod; Viscoelastic Crack; Magnetic Field; Natural Frequency.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۴۳۱۳۹۶۴۳؛ فکس: ۰۴۱۳۳۳۰۷۳۳۶

آدرس پست الکترونیک: gaderi@iaut.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر و با توسعه فناوری‌های نوین، تجهیزات میکروالکترومکانیکی در صنایع مختلف کاربردهای متنوعی یافته‌اند. اعضای مکانیکی مورد استفاده در این سیستم‌ها، اغلب اعضایی ساده مانند صفحات، تیرها و یا میله‌ها می‌باشند که تحت تأثیر نیروهای مختلف قرار دارند [۱-۳]. در این سیستم‌ها، اعضا اغلب تحت تاثیر نیروهای مختلف مانند، نیروهای مکانیکی، حرارتی، تحریک الکترواستاتیک، پیزوالکتریک و میدان‌های الکترومغناطیس قرار می‌گیرند. [۶-۴]. بر این اساس، بررسی رفتار دینامیکی سازه‌های مختلف تحت تاثیر نیروهای مغناطیسی در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، حائز اهمیت فراوانی است. بررسی‌های تحلیلی و تجربی نشان می‌دهد که خاصیت ویسکوالاستیسیته علاوه بر پلیمرها در فلزات پرکاربرد صنعتی همچون فولاد و آلومینیوم [۷] نیز به ویژه در دماهای بالا مشاهده می‌شود. بر این اساس، طیف بسیار وسیعی از مواد مورد استفاده در صنایع مختلف، دارای رفتار ویسکوالاستیک می‌باشند. از این رو، شناخت رفتار مکانیکی این مواد به دلیل رفتار متفاوت آنها نسبت به مواد الاستیک، از اهمیت فراوانی برخوردار است و گستردگی انواع روش‌های ارائه شده برای منظور نمودن اثرات خاصیت ویسکوالاستیسیته در تحقیقات علمی محققان، نشان از اهمیت این موضوع دارد.

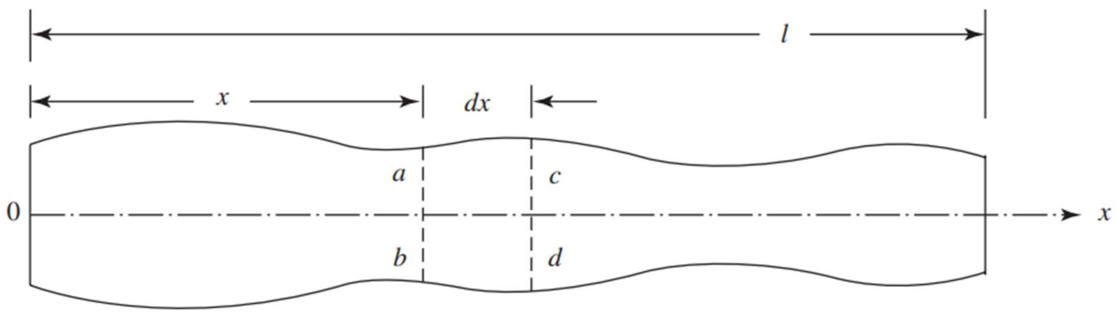
ارتعاش طولی میله‌ها به خاطر کاربرد آنها در محدوده وسیعی از سیستم‌های مکانیکی، مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۸-۱۱]. از اولین مطالعات در این زمینه می‌توان به مطالعه انجام شده توسط نایفه در سال ۱۹۷۵ [۱۲] اشاره کرد. او در تحقیق خود انتشار موج‌های طولی در امتداد میله‌ای با سطح مقطع غیریکنواخت را بررسی و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، بسط یکنواخت مرتبه اول برای دامنه‌های کوچک را به دست آورده است. رامان [۱۳] در مطالعه خود رفتار ارتعاشات خطی میله با سطح مقطع متغیر را به صورت تحلیلی بررسی کرده است. لی و همکاران [۱۴]، حل تحلیلی دقیقی را برای ارتعاش طولی میله غیریکنواخت با جرم‌های متمرکزی را ارائه کردند که به وسیله فنر به میله وصل شده بودند. آنها نشان دادند، با استفاده از تبدیلات دیفرانسیلی مناسب، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش طولی میله با سطح مقطع متغیر با حالت‌های خاص مثل، تابع توانی و تابع نمایی به معادلات بسل یا معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت کاهش می‌یابد. موسوی و فریبرز [۱۵]، با به کار بردن تابع تنش پیولا-کیرشهف نوع دو ارتعاش آزاد طولی میله را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در تحقیقی دیگر، معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد میله تحت کرنش محدود به وسیله اصل هامیلتون توسط باغستانی و همکاران [۱۶]، به دست آمده است. سلیمان‌رودی و همکاران [۱۷]، به تحلیل ارتعاش آزاد میله با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت بر اساس تئوری کرنش محدود پرداخته و برای به دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت از کرنش گرین- لاگرانژی، میرایی ساختاری و اصل همیلتون استفاده کرده‌اند. در پژوهش مذکور و با استفاده از روش گالرکین، معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. در تحقیقی دیگر، پور جعفری و همکاران [۱۸]، به بررسی ارتعاشات آزاد طولی میله با سطح مقطع متغیر تحت کرنش محدود پرداختند. ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت میله با سطح مقطع مخروطی استخراج و سپس معادلات به وسیله روش گالرکین و با در نظر گرفتن یک شکل مود و با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، صورت تحلیلی حل شده است. نارندار [۱۹]، انتشار موج محوری در میله الاستیک الکترومغناطیسی را بررسی کرده و رفتار موج را با استفاده از تئوری غیرمحلی مورد مطالعه قرار داده است. لبزکی و همکاران [۸]، با استفاده از روش تحلیلی به بررسی ارتعاشات طولی میله ویسکوالاستیک پرداختند. گوون [۲۰] با استفاده از روش تحلیلی و با در نظر گرفتن ترک به صورت یک فنر بدون جرم به مطالعه ارتعاشات طولی میله ترک‌دار در حضور میدان مغناطیسی پرداخت. نتایج مطالعه او نشان می‌دهد که وجود ترک، باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود و با افزایش عمق ترک، تأثیر آن بر کاهش فرکانس‌ها بیشتر می‌شود. ایلقامو [۲۱] با استفاده از مدل پیوسته ترک، رفتار ارتعاشات طولی میله‌های الاستیک را مورد مطالعه قرار داد. در یکی از جدیدترین تحقیقات انجام شده در زمینه مطالعه رفتار ارتعاش طولی میله‌های ویسکوالاستیک، سلیمانی رودی و همکاران [۲۲]، ارتعاش طولی میله ویسکوالاستیک با شرایط مرزی مختلف را بررسی کردند. آنها برای به دست آوردن معادلات حاکم از روابط کرنش گرین- لاگرانژ، اصل همیلتون

و دمپینگ سازه‌ای استفاده و سپس با استفاده از روش گالرکین به حل معادلات حاکم پرداختند.

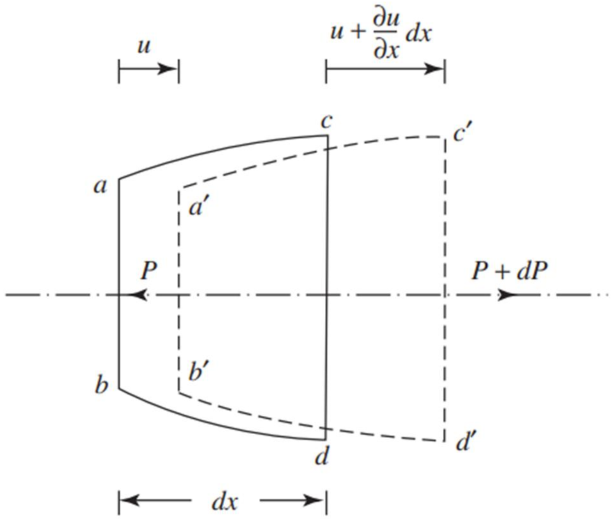
بررسی مطالعات انجام شده در زمینه رفتار ارتعاشات طولی میله‌های ترک‌دار نشان می‌دهد که هر چند تاکنون در این زمینه مطالعات زیادی انجام پذیرفته، ولی این تحقیقات عمدتاً با فرض رفتار الاستیک مواد بوده است و تاکنون رفتار ارتعاشات طولی میله‌های ویسکوالاستیک ترک‌دار مطالعه نگردیده است. بر این اساس، در تحقیق حاضر با در نظر گرفتن فرضیات واقع‌بینانه‌تر برای اولین بار ترک به صورت فنر-دمپر بدون جرم در نظر گرفته شده و ارتعاشات طولی میله‌های ویسکوالاستیک ترک‌دار به صورت تحلیلی، مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور با اعمال شرایط مرزی و بین مرزی در محل ترک، معادله مشخصه حاکم بر سیستم به ازای شرایط مرزی دوسرگیردار و یکسرگیردار استخراج و تأثیر پارامترهای ترک شامل، موقعیت و عمق ترک و رفتار ویسکوالاستیک بر مشخصه‌های ارتعاشی این سیستم‌ها مطالعه شده است.

۲- استخراج معادلات حرکت

در این قسمت به استخراج معادله حرکت حاکم بر رفتار ارتعاشات طولی میله ویسکوالاستیک ترک‌دار پرداخته می‌شود. به منظور استخراج معادله حرکت از قانون دوم نیوتن استفاده شده و رفتار ویسکوالاستیک میله با استفاده از مدل ماکسول شبیه‌سازی می‌شود. مطابق شکل ۱ میله‌ای به طول l و مساحت سطح مقطع $A(x)$ در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۱ب المانی از این میله نشان داده شده که در راستای طولی تحت جابجایی du قرار گرفته است.



(الف)



(ب)

شکل ۱- الف) ارتعاشات طولی میله و ب) المانی از آن [۱]

نیروی وارد شده بر المان میله که به صورت P و $P+dP$ است، با رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$P=\sigma A \tag{۱}$$

با فرض رفتار ویسکوالاستیک برای میله و با در نظر گرفتن $\varepsilon=\partial u/\partial x$ و مدل ویسکوالاستیک ماکسول خواهیم داشت [۲۳]:

$$\sigma+\alpha\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\gamma\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \tag{۲}$$

که در آن σ تنش محوری و γ و α ثوابت ویسکوالاستیک ماده است. اگر $f(x,t)$ نیروی خارجی بر واحد طول اعمالی بر میله باشد، در این صورت با نوشتن قانون دوم نیوتن در راستای محور طولی خواهیم داشت:

$$(P+dP)+fdx-P=\rho Adx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۳}$$

که در آن ρ چگالی میله است.

با استفاده از رابطه $dP=(\partial P/\partial x)dx$ و ضرب طرفین معادله (۳) در $\left(1+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)$ و انجام برخی عملیات ریاضی، معادله حاکم بر رفتار ارتعاشات طولی میله ویسکوالاستیک با مدل ماکسول با رابطه (۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma A+f(x,t)=\left(1+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۴}$$

اگر سطح مقطع میله به صورت یکنواخت فرض شود، در این صورت معادله فوق با رابطه (۵) ساده می‌شود:

$$\gamma A\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+f(x,t)=\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\rho A\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \tag{۵}$$

۲-۱- شرایط مرزی حاکم

در ادامه معادلات مرزی دو نوع مختلف شرایط مرزی برای میله بیان گردیده است:

- میله یکسرگیردار-یکسرآزاد

$$u(0,t)=0,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0 \tag{۶}$$

- میله دو سرگیردار

$$u(0,t)=0,\ \ u(l,t)=0 \tag{۷}$$

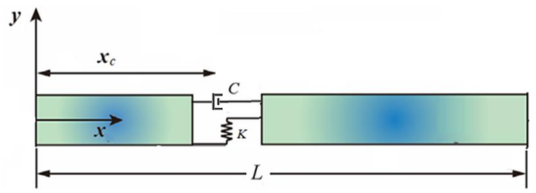
۲-۲- شبیه‌سازی ترک

برای شبیه‌سازی ترک روش‌های مختلفی وجود دارد که یکی از بهترین این روش‌ها، روش کاهش سفتی موضعی است. در این روش ترک با استفاده از یک فنر بدون وزن با سفتی معادل K مدل‌سازی می‌شود که در موقعیت ترک باعث کاهش سفتی موضعی در میله می‌شود.

با در نظر گرفتن ترک به صورت ویسکوالاستیک، مدل ریاضی آن به صورت یک فنر طولی با سفتی معادل K و یک دمپر بدون جرم با میرایی معادل C ارائه می‌شود که دو قسمت سالم میله را در محل ترک به هم متصل نموده‌اند. (شکل ۲). در این حالت، شرایط بین مرزی که شامل پیوستگی جابجایی طولی و پیوستگی نیروی محوری بوده در محل ترک به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۴]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_c,t)=\frac{\partial u_2}{\partial x}(x_c,t),\\&K\left[u_2(x_c,t)-u_1(x_c,t)\right]\\&+C\left[\frac{\partial u_2}{\partial t}(x_c,t)-\frac{\partial u_1}{\partial t}(x_c,t)\right]=EA\frac{\partial u_2}{\partial x}(x_1,t)\end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن E مدول یانگ است. لازم به ذکر است که در صورتی که مقدار C برابر صفر باشد، شرایط بین مرزی فوق به حالت متناظر مدل ترک الاستیک تبدیل خواهد شد.



شکل ۲- مدل ریاضی میله ویسکوالاستیک ترک‌دار با مدل ترک ویسکوالاستیک

۲-۳- رابطه ماکسول

معادلات ماکسول چگونگی ایجاد میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را توسط بارها و جریانات الکتریکی و نیز پیدایش یکی از این میدان‌ها، توسط تغییر میدان دیگر را توصیف می‌کنند [۲۵-۲۸]. این معادلات مبانی الکترومغناطیس کلاسیک به شمار می‌روند که اولین بار توسط فیزیکدان اسکاتلندی جیمز کلرک ماکسول فرمول‌بندی شده‌اند. اگر $\mathbf{J}$ بردار چگالی جریان الکتریکی، $\mathbf{h}$ بردار توزیع میدان الکتریکی و $\mathbf{e}$ بردار شدت میدان الکتریکی باشد، در این صورت رابطه ماکسول را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۲۹]:

$$\mathbf{J}=\nabla\times\mathbf{h} \tag{۹}$$

$$\nabla\times\mathbf{e}=-\eta\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} \tag{۱۰}$$

$$\nabla . \mathbf{h} = 0 \tag{۱۱}$$

$$\mathbf{e} = -\eta\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \times \mathbf{H}\right) \tag{۱۲}$$

$$\mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}) \tag{۱۳}$$

در روابط اخیر η تراوایی میدان مغناطیسی[1] است. عملگر ∇ اپراتور همیلتونی بوده و به صورت $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ تعریف می‌شود. اگر بردار جابجایی به صورت $\mathbf{U} = (u, v, w)$ باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{h} = P_1\mathbf{i} + P_2\mathbf{j} + P_3\mathbf{k} \tag{۱۴-الف}$$

که در آن

$$\begin{aligned} P_1 &= H_x w_{,xy} - H_z u_{,xy} - H_y w_{,yy} - H_z v_{,yy} \\ &\quad + H_y u_{,xz} - H_x v_{,xz} - H_z v_{,xx} + H_y w_{,xx} \\ P_2 &= H_z u_{,xx} - H_x w_{,xx} + H_y w_{,xy} + H_z v_{,xy} \\ &\quad + H_y u_{,yz} - H_x v_{,yz} - H_z u_{,zz} - H_x w_{,zz} \\ P_3 &= H_x v_{,xx} - H_y u_{,xx} + H_z v_{,xz} - H_y w_{,xz} \\ &\quad - H_y u_{,yy} + H_x v_{,yy} - H_z u_{,yz} + H_x w_{,yz} \end{aligned} \tag{۱۴-ب}$$

نیروی لورنتس به صورت نیروی وارد بر بار نقطه‌ای در میدان الکترومغناطیسی تعریف می‌شود. این نیرو با استفاده از رابطه (۱۵) بیان می‌شود که شامل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی است [۳۰]:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k} = \eta(\mathbf{J} \times \mathbf{H}) \\ &= \eta\Big[(H_z P_2 - H_y P_3)\mathbf{i} + (H_x P_3 - H_z P_1)\mathbf{j} \\ &\qquad + (H_y P_1 - H_x P_2)\mathbf{k}\Big] \end{aligned} \tag{۱۵}$$

در تحلیل حاضر فرض می‌شود که میدان مغناطیسی تنها دارای مؤلفه‌های عرضی بوده و به صورت $\mathbf{H} = (0, H_y, H_z)$ بر میله اعمال می‌شود؛ همچنین، با فرض صفر بودن مؤلفه‌های v و w، مؤلفه نیروهای لورنتس به صورت زیر خواهند بود:

$$f_x = \eta\left(H_y^2 + H_z^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{۱۶}$$

$$f_y = 0 \tag{۱۷}$$

با توجه به اینکه در تحلیل ارتعاشات میله در تحقیق حاضر فرض شده است که $u = u(x,t)$، نیروی لورنتس تنها در راستای طولی میله خواهد بود و مقدار آن با توجه به روابط (۱۶)-(۱۸) برابر است با [۳۲-۳۱]:

$$\mathbf{f} = \eta\left(H_y^2 + H_z^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathbf{i} \tag{۱۹}$$

بنابراین، نیروی الکترومغناطیسی ایجاد شده در واحد طول به صورت $P = \int_A f_x \mathrm{d}A = \eta A\left(H_y^2 + H_z^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ به دست می‌آید [۳۳].

۲-۴- ارتعاشات میله ویسکوالاستیک ترک‌دار

با در نظر گرفتن نیروهای ناشی از میدان مغناطیسی، معادله حاکم بر ارتعاشات آزاد میله ویسکوالاستیک تحت تأثیر نیروی محوری با توجه به رابطه (۵) و رابطه (۱۹) به صورت رابطه (۲۰) به دست می‌آید:

$$\gamma A \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \eta A\left(H_y^2 + H_z^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \tag{۲۰}$$

متغیرهای بی‌بعد با رابطه (۲۱) تعریف می‌شوند:

$$\begin{gathered} \hat{u} = \frac{u}{l},\ \hat{x} = \frac{x}{l},\ \hat{x}_c = \frac{x_c}{l},\ \delta = \frac{H_z}{H_y},\ \psi = \frac{\eta}{E}H_y^{\,2}, \\ \beta = \sqrt{\frac{\rho\omega^2 L^2}{E}},\quad \mu = \alpha\frac{L^2}{E}\left(\frac{E}{\rho L^2}\right)^{3/2} \\ \xi = \gamma\sqrt{\frac{1}{E\rho L^2}},\ \ \tau = \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}t,\ \ \Omega = \frac{\beta}{\sqrt{1+\psi(1+\delta^2)}} \end{gathered} \tag{۲۱}$$

در ادامه به منظور رعایت اختصار از علامت بالانویس (^) روی متغیرهای بی‌بعد صرفنظر می‌شود. بر این اساس، معادله حرکت (۲۰) را می‌توان به فرم بی‌بعد (۲۲) بیان کرد:

$$\xi\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \tau} + \psi\left(1+\delta^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \mu\frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \tag{۲۲}$$

همچنین، شرایط بین مرزی ناشی از پیوستگی شیب و پیوستگی نیروی محوری در محل ترک با رابطه (۲۳) به دست می‌آید [۳۴]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial x}(x_c,\tau) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_c,\tau), \\ &K\left[u_2(x_c,\tau) - u_1(x_c,\tau)\right] \\ &+ C\left[\frac{\partial u_2}{\partial \tau}(x_c,\tau) - \frac{\partial u_1}{\partial \tau}(x_c,\tau)\right] = EA\frac{\partial u_2}{\partial x}(x_c,\tau) \end{aligned} \tag{۲۳}$$

[1] Magnetic Field Permeability

که در آن C ضریب میرایی ترک و K سفتی معادل ترک بوده و با استفاده از رابطه (۲۴) به دست می‌آید [۳۵]:

$$K = \frac{1}{2h(1-\nu^2)\varphi(s)} \quad (۲۴)$$

در رابطه اخیر ν نسبت پواسون بوده، تابع $\varphi(s)$ که وابسته به عمق نسبی ترک، $s = a/h$ است، با رابطه (۲۵) تعیین می‌شود [۳۶]:

$$\varphi(s) = 0.7314s^8 - 1.0368s^7 + 0.5803s^6 + 1.205s^5 - 1.038s^4 + 0.238s^3 + 0.985s^2 \quad (۲۵)$$

با در نظر گرفتن معادله حرکت (۲۰)، معادله حاکم بر نوسانات طولی میله در دو طرف ترک را می‌توان به صورت رابطه (۲۶-۲۷) بیان کرد:

$$\xi\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial \tau} + \psi\left(1+\delta^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \mu\frac{\partial^3 u_1}{\partial \tau^3}, \quad 0 < x < x_c \quad (۲۶)$$

$$\xi\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial \tau} + \psi\left(1+\delta^2\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \mu\frac{\partial^3 u_2}{\partial \tau^3}, \quad x_c < x < 1 \quad (۲۷)$$

به منظور حل معادلات فوق، با استفاده از روش جداسازی متغیرها، پاسخ سیستم را می‌توان با رابطه (۲۸) بیان کرد:

$$u_1(x,\tau) = \phi_1(x)q_1(\tau)$$
$$u_2(x,\tau) = \phi_2(x)q_2(\tau) \quad (۲۸)$$

در آن $\phi_i(x),\ i=1,2$ معرف شکل مودهای ارتعاشی سیستم است. با جایگذاری روابط اخیر در معادلات (۲۶) و (۲۷)، خواهیم داشت:

$$\frac{\left[1+\psi\left(1+\delta^2\right)\right]\phi_1''}{\phi_1} = \frac{\ddot{q}_1 + \mu\dddot{q}_1}{q_1 + \left(\xi/\psi\left(1+\delta^2\right)\right)\dot{q}_1} = -\Omega^2, \quad 0 < x < x_c \quad (۲۹)$$

$$\frac{\left[1+\psi\left(1+\delta^2\right)\right]\phi_1''}{\phi_1} = \frac{\ddot{q}_2 + \mu\dddot{q}_2}{q_2 + \left(\xi/\psi\left(1+\delta^2\right)\right)\dot{q}_2} = -\Omega^2, \quad x_c < x < 1 \quad (۳۰)$$

که در آن $\Omega = \beta/\sqrt{1+\psi(1+\delta^2)}$ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد سیستم است. از حل معادلات (۲۹) و (۳۰) متغیر بخش مکانیکی معادلات که در واقع شکل مودهای ارتعاشی میله هستند، با روابط (۳۱-۳۲) به دست می‌آیند:

$$\phi_1(x) = A_1\cos(\Omega x) + B_1\sin(\Omega x), \quad 0 < x < x_c \quad (۳۱)$$

$$\phi_2(x) = A_2\cos(\Omega x) + B_2\sin(\Omega x), \quad x_c < x < 1 \quad (۳۲)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی یکسرگیردار-یکسر آزاد و همچنین با استفاده از شرایط بین مرزی ذکر شده در رابطه (۲۳) و با استفاده از روابط (۲۸)، شرایط بین مرزی حاکم بر سیستم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۳۴]:

$$\phi_1'(x_c) = \phi_2'(x_c),$$
$$k\left[\phi_2(x_c) - \phi_1(x_c)\right] + c\Omega\left[\phi_2(x_c) - \phi_1(x_c)\right] = \phi_2'(x_c)$$

(۳۳-الف)

که در آن

$$k = \frac{KL}{EA},\ c = \frac{CL}{EA}\sqrt{\frac{\rho L^2}{E}} \quad (۳۳\text{-ب})$$

با جایگذاری روابط (۳۱) و (۳۲)، در شرایط مرزی و بین مرزی اخیر خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} [R] & [P] \\ [Q] & [S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (۳۴)$$

که در آن

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad [P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega \end{bmatrix},$$
$$[Q] = \begin{bmatrix} -\sin\Omega x_c & \cos\Omega x_c \\ (k+c\Omega)\cos\Omega x_c & (k+c\Omega)\sin\Omega x_c \\ -\Omega\sin\Omega x_c & +\Omega\cos\Omega x_c \end{bmatrix},$$
$$[S] = \begin{bmatrix} \sin\Omega x_c & -\cos\Omega x_c \\ -(k+c\Omega)\cos\Omega x_c & -(k+c\Omega)\sin\Omega x_c \end{bmatrix}. \quad (۳۵)$$

با توجه به اینکه دستگاه معادلات فوق یک دستگاه معادله جبری همگن است، بنابراین به منظور داشتن جواب‌های غیر بدیهی برای آن باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله مشخصه حاکم بر ارتعاش طولی میله ویسکوالاستیک ترک‌دار با مدل ترک ویسکوالاستیک تحت تأثیر نیروی الکترومغناطیس با شرایط مرزی یکسرگیردار-یکسر آزاد با رابطه (۳۶) به دست می‌آید:

$$-(k+c\Omega)\cos(\Omega) + \frac{1}{2}\Omega\sin(\Omega) - \frac{1}{2}\Omega\sin(2\Omega x_c - \Omega) = 0 \quad (۳۶)$$

همچنین، برای شرایط مرزی دوسرگیردار معادله مشخصه با رابطه (۳۷) به دست می‌آید:

$$\cos(\Omega) - (k+c\Omega)\cos^2(\Omega x_c)\Omega\sin(\Omega) + (k+c\Omega)\Omega\cos(\Omega x_c)\cos(\Omega)\sin(\Omega x_c) = 0 \quad (۳۷)$$

از حل معادلات اخیر، می‌توان مقادیر ویژه سیستم را که معرف فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد هستند، به دست آورد.

۳- بررسی نتایج

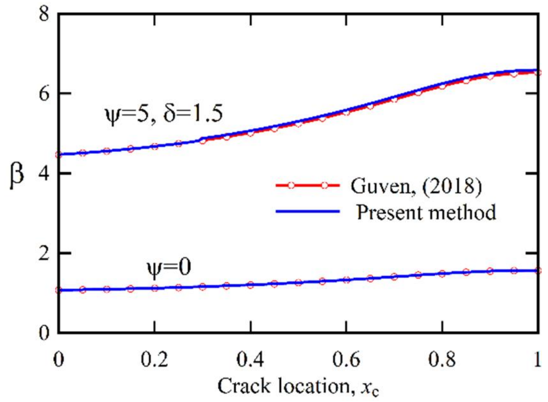
در این بخش به بررسی تأثیر ترک بر مشخصه‌های ارتعاشی میله‌های ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. در ادامه پس از بررسی صحت نتایج، تأثیر ترک الاستیک ($c=0$) و ویسکوالاستیک بر رفتار ارتعاشی این سازه‌ها مطالعه می‌شود.

۳-۱- صحت نتایج

با توجه به اینکه تاکنون رفتار ارتعاشات میله‌های ویسکوالاستیک ترک‌دار مورد بررسی قرار نگرفته است، بنابراین به منظور فراهم آوردن امکان مقایسه و صحت‌سنجی نتایج از مطالعه گون و همکاران [۲۰] استفاده می‌شود که رفتار ارتعاشات طولی میله الاستیک ترک‌دار با ترک الاستیک و تحت اثر میدان مغناطیسی را بررسی کرده‌اند. در شکل ۳ تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب موقعیت ترک و مقایسه آن با نتایج مرجع [۲۰] نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج تحقیق حاضر سازگاری قابل قبولی با نتایج مرجع [۲۰] دارد.

۳-۲- ارتعاشات میله ویسکوالاستیک ترک‌دار

در این بخش به بررسی تأثیر مشخصات ترک ویسکوالاستیک بر رفتار ارتعاش طولی میله ویسکوالاستیک پرداخته و اثر در نظر گرفتن رفتار ویسکوالاستیک برای ترک مطالعه می‌شود. در شکل‌های ۴ و ۵ تأثیر میرایی در محل ترک بر فرکانس‌های طبیعی اول و دوم میله ویسکوالاستیک ترک‌دار با مدل ترک ویسکوالاستیک نشان داده شده است. همانطور که نتایج نشان می‌دهد، ترک ویسکوالاستیک تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی میله دارد و با افزایش سفتی معادل سازه باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی میله می‌شود. به عنوان نمونه برای میله ویسکوالاستیک یکسر گیردار با افزایش میرایی بی‌بعد در محل ترک از صفر به ۱، فرکانس طبیعی اول از مقدار 4.4Hz به 5.02Hz افزایش می‌یابد که نشان دهنده افزایش فرکانس طبیعی اول در حدود ۱۲ درصد است. همانطور که مشاهده می‌شود، هر چه موقعیت ترک به محل تکیه‌گاه گیردار نزدیک‌تر باشد، اختلاف بین فرکانس



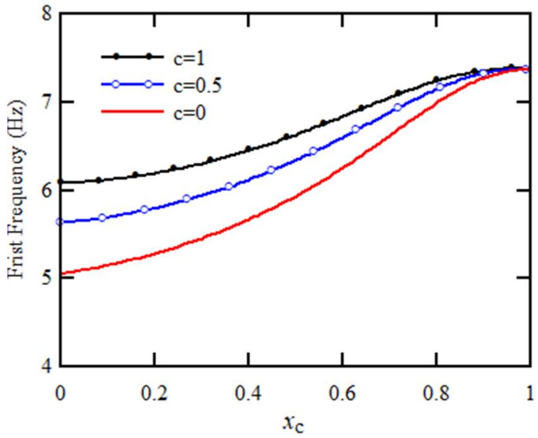
شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب موقعیت ترک و مقایسه آن با نتایج مرجع [۲۰]

طبیعی به دست آمده از مدل ترک ویسکوالاستیک با مدل ترک الاستیک بیشتر می‌شود؛ همچنین، هر چه موقعیت ترک به انتهای آزاد میله نزدیک می‌شود، اختلاف این دو فرکانس کمتر شده و فرکانس به دست آمده از هر دو نوع مدل ترک به یک مقدار مساوی میل می‌کند. در مورد تأثیر ترک ویسکوالاستیک بر فرکانس طبیعی دوم نیز چنین حالتی مشاهده می‌شود.

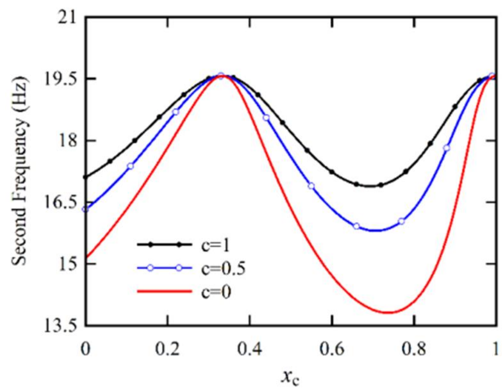
شکل ۴ نشان می‌دهد که برای ترک‌های با عمق کم و یا ترک‌های واقع در نزدیکی انتهای آزاد میله، تغییرات فرکانس طبیعی اول بسیار کم بوده و در چنین حالتی می‌توان از اثر ترک بر کاهش فرکانس طبیعی اول میله صرف‌نظر کرد. با توجه به شکل ۵، نتیجه مشابهی برای تغییرات فرکانس دوم حاصل می‌شود. با این تفاوت که برای مود دوم، کمترین کاهش فرکانس طبیعی مربوط به ترک واقع در انتهای آزاد میله و موقعیت $x_c=0.33$ است. در صورتی که کمترین کاهش فرکانس طبیعی اول مربوط به ترک واقع در انتهای آزاد میله است. علت این امر را می‌توان به‌طور اختصار بدین صورت بیان کرد که در مود اول، مشتق اول تابع شکل مود ارتعاشی در انتهای آزاد تیر برابر صفر است، به عبارت دیگر، نیروی محوری ایجاد شده در اثر ارتعاش میله در مودهای اول و دوم در نقاط مذکور صفر است و با توجه با این که عمده‌ترین عامل کاهش فرکانس‌های طبیعی ناشی از ترک، در اثر نیروی محوری است، بنابراین در مود ارتعاشی اول هر چه موقعیت ترک به انتهای آزاد میله نزدیک می‌شود، تأثیر آن بر فرکانس طبیعی اول کاهش می‌یابد.

در شکل ۶ تأثیر عمق نسبی ترک بر فرکانس طبیعی اول میله ویسکوالاستیک ترک‌دار نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رفت، نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی اول میله به ازای شرایط مرزی مختلف کاهش می‌یابد و برای ترک واقع در موقعیت نسبی ۰/۱۵، اثر وجود ترک بر کاهش فرکانس میله با شرایط تکیه‌گاهی یکسرگیردار بسیار بیشتر از میله دوسرگیردار است. به عنوان مثال به ازای شدت میدان مغناطیسی برابر 5، با افزایش عمق نسبی ترک از ۰ به ۰/۵ فرکانس طبیعی اول میله ویسکوالاستیک یکسرگیردار از 6.5Hz به 1Hz کاهش پیدا کرده است، در حالی که این مقادیر برای میله ویسکوالاستیک دوسرگیردار به ترتیب برابر با 13Hz و 8.2Hz است؛ بنابراین می‌توان بیان نمود که تأثیر ترک بر مشخصه‌های ارتعاشی میله، وابستگی زیادی به شرایط مرزی میله داشته و به ازای شرایط مرزی مختلف اثر آن بر کاهش فرکانس‌های طبیعی متفاوت خواهد بود.

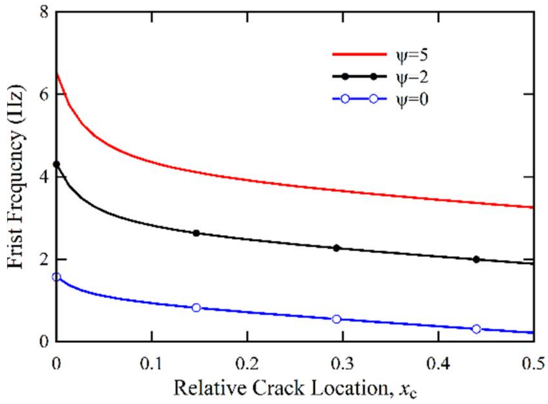
در شکل ۷ تغییرات فرکانس طبیعی اول میله یکسرگیردار ترک‌دار با مدل ترک ویسکوالاستیک برحسب ضریب میرایی در محل ترک و به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد نیروی مغناطیسی ارائه شده است. همان گونه که مشخص است، با افزایش شدت میدان مغناطیسی، میزان سختی تیر افزایش یافته و فرکانس طبیعی بیشتر می‌شود. به



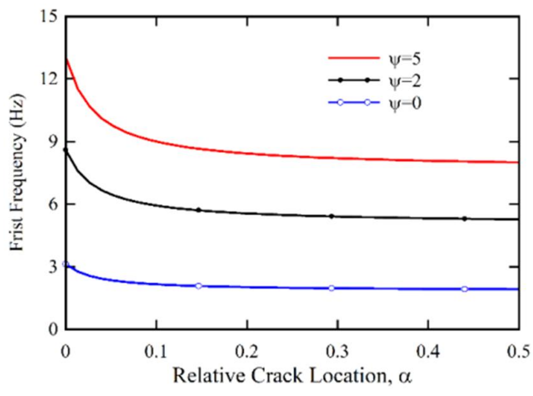
شکل ۴- تأثیر موقعیت ترک ویسکوالاستیک بر تغییرات فرکانس طبیعی اول میله ویسکوالاستیک ترک‌دار یکسرگیردار با ترک ویسکوالاستیک دارای عمق نسبی $\alpha = 0.5$



شکل ۵- تأثیر موقعیت ترک ویسکوالاستیک بر تغییرات فرکانس طبیعی دوم میله ویسکوالاستیک ترک‌دار یکسرگیردار با ترک ویسکوالاستیک دارای عمق نسبی $\alpha = 0.5$

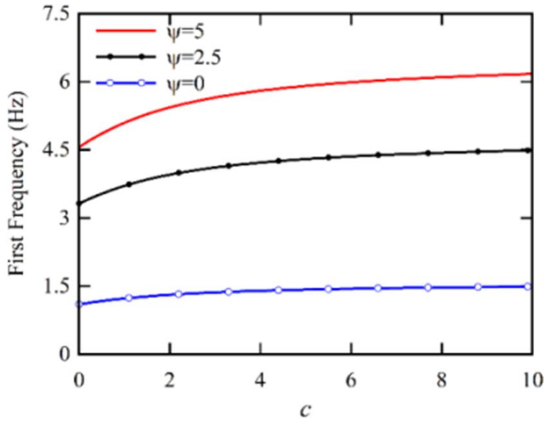


(الف)

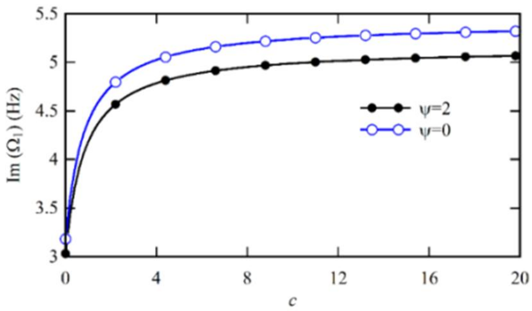


(ب)

شکل ۶- تأثیر عمق نسبی ترک، بر تغییرات فرکانس طبیعی اول میله ویسکوالاستیک ترک‌دار الف) یکسرگیردار و ب) دوسرگیردار



شکل ۷- تغییرات فرکانس طبیعی اول میله ویسکوالاستیک ترک‌دار یکسرگیردار با مدل ترک ویسکوالاستیک برحسب ضریب میرایی در محل ترک



شکل ۸- تأثیر ضریب میرایی ترک بر بخش موهومی مقادیر ویژه میله ویسکوالاستیک ترک‌دار

دلیل تغییرات نیروی محوری میله بین بیشینه مقدار خود در دو انتها و وسط میله، اثر ترک در محل‌های مختلف متفاوت است. از آنجا که نیروی مغناطیسی وارد بر میله ثابت است، با افزایش میرایی ترک، سختی معادل میله افزایش یافته بنابراین، فرکانس‌های طبیعی میله ویسکوالاستیک ترک‌دار واقع در میدان مغناطیسی نسبت به حالت سالم آن افزایش می‌یابد.

در شکل ۸ تأثیر ضریب میرایی ترک بر بخش موهومی مقادیر ویژه میله ویسکوالاستیک ترک‌دار یکسرگیردار نشان داده شده است. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب میرایی ترک، بخش موهومی مقادیر ویژه نیز افزایش می‌یابد و با افزایش مقدار میرایی بی‌بعد از صفر به ۲۰، بخش موهومی مقدار ویژه اول از ۳/۱۲ به مقدار ۵/۲ افزایش می‌یابد. نتیجه قابل توجهی که از این شکل می‌توان مشاهده کرد، در این است که با افزایش میرایی ترک، آهنگ افزایش بخش موهومی مقادیر ویژه کاهش یافته و به ازای مقادیر ضریب میرایی بی‌بعد در حدود ۰/۸، بخش موهومی مقادیر ویژه به مقدار مشخصی همگرا می‌شوند.

۴- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر رفتار ارتعاشات طولی میله‌های ترک‌دار واقع در میدان مغناطیسی به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار گرفت. به منظور در نظر گرفتن شرایط واقع‌بینانه‌تر، برای اولین بار اثرات میرایی در محل ترک در معادلات لحاظ شده و ترک به صورت فنر-دمپر متمرکز بدون جرم مدل‌سازی شده است. معادله مشخصه حاکم بر سیستم با اعمال شرایط مرزی و بین مرزی در محل ترک استخراج و سپس به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر مشخصه‌های ارتعاشی این سازه‌ها پرداخته شده است. نتایج نشان می‌دهد که هر چند وجود ترک باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود، ولی در نظر گرفتن رفتار ویسکوالاستیک برای ترک تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی میله دارد و با افزایش مقدار میرایی ترک، فرکانس‌های طبیعی میله نیز افزایش می‌یابند. علاوه بر این، مشاهده می‌شود که تأثیر ترک بر مشخصه‌های ارتعاشی میله، وابستگی زیادی به شرایط مرزی میله داشته و به ازای شرایط مرزی مختلف اثر آن بر فرکانس‌های طبیعی متفاوت خواهد بود. با عنایت به بی بعد سازی معادلات حاکم بر رفتار مساله، پژوهش حاضر و نتایج حاصل از آن محدود به نوع خاصی از مواد ویسکوالاستیک نبوده و قابل تعمیم برای انواع مختلف میله‌های ویسکوالاستیک است.

۵- مراجع

[۱] سام پور س، معین خواه ح، رحمانی ح (۲۰۱۹) حل تحلیلی پاسخ گذرای غیرخطی میکروتیر ویسکوالاستیک با تحریک الکتریکی بر اساس تئوری الاستیسیته ریز قطبی. *مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۹(۳): ۱۲۵-۱۳۸.

[۲] جلیلی م، درعلی‌زاده م م (۲۰۱۷) مدلسازی وتحلیل ارتعاشات غیرخطی میکروسکوپ نیروی اتمی در محیط مایع به روش تحلیلی. مجله مدل‌سازی در مهندسی ۱۵(۵۱): ۲۰۹-۲۲۴.

[۳] قنبری م، حسین‌پور س، رضازاده ق (۲۰۱۵) اثرات محیط سیال روی ارتعاشات رزوناتور میکروتیر با استفاده ازتئوری میکروپولار. مجله مهندسی مکانیک مدرس ۲۱۰-۲۰۵ :(۱۰)۱۴.

[۴] اندخشیده ع، مالکی س، مرعشی س ص (۲۰۱۸) بررسی پدیده‌ی غیرخطی ولتاژ کشیدگی در میکروتیرهای هدفمند تحت بارگذاری الکترواستاتیک. *مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۱۵۱-۱۳۵ :(۳)۸.

[۵] عطار ع، طهماسبی‌پور م، دهقان م (۲۰۱۸) بررسی تاثیر پارامترهای هندسی بر جابه جایی خارج از صفحه میکروتیر پیزوالکتریکی با سطح مقطع T شکل. *مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۹-۱ :(۴)۸.

[۶] رهایی فرد م (۲۰۱۹) بررسی اثر تحریک الکترواستاتیک بر رفتار الکترومکانیکی میکرو حسگرهای فشار خازنی. *مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۱۵۲-۱۴۱ :(۲)۹.

[7] Lakes R (2009) Viscoelastic materials. Cambridge university press.

[8] Łabędzki P, Pawlikowski R, Radowicz A (2018) Axial vibration of bars using fractional viscoelastic material models. Vib Phys Syst 15: 43-65.

[9] McDowell T, Xu X, Warren C, Welcome D, Dong R (2018) The effects of feed force on rivet bucking bar vibrations. Int J Ind Ergon 67: 145-158.

[10] Zhao W, Yang Y, Niu P (2018) Frequency and buckling load analysis of an axial compressive bar resting on an elastic foundation. IJLCPE 2(3-4): 210-222.

[11] Liu X, Liu Q, Wu S, Li R, Gao H (2018) Analysis of the vibration characteristics and adjustment method of boring bar with a variable stiffness vibration absorber. Int J Adv Manuf Technol 98: 95-105.

[12] Nayfeh A (1975) Finite-amplitude longitudinal waves in non-uniform bars. J Sound Vib 42(3): 357-361.

[13] Raman V (1983) On analytical solutions of vibrations of rods with variable cross sections. Appl 7(5): 356-361.

[14] Li Q, Li G, Liu D (2000) Exact solutions for longitudinal vibration of rods coupled by translational springs. Int J Mech Sci 42(6): 1135-1152.

[15] Mousavi S, Fariborz S (2012) Free vibration of a rod undergoing finite strain. J Phys Conf Ser 382: 1-8.

[16] Baghestani A, Fariborz S, Mousavi S (2014) Low-frequency free vibration of rods with finite strain. J Appl Nonlinear Dyn 3(1): 85-93.

[۱۷] پورجعفری م، فتوحی ع، جلیلی م م (۲۰۱۹) ارتعاشات آزاد طولی میله با سطح مقطع متغییر تحت کرنش محدود. مهندسی مکانیک مدرس ۴۳۷-۴۲۹ :(۲)۱۹.

[18] Soleimani Roody B, Fotuhi A, Jalili M (2018) Nonlinear longitudinal free vibration of a rod undergoing finite strain. Amirkabir J Mech Eng 50(5): 353-356.

[19] Narendar S (2016) Wave dispersion in functionally graded magneto-electro-elastic nonlocal rod. Aerosp Sci Technol 51:42-51.

[20] Güven U (2016) Longitudinal vibration of cracked beams under magnetic field. Mech Syst Signal Process 81: 308-317.

[21] Il'gamo M (2017) Longitudinal vibrations of a bar with incipient transverse cracks. Mech Solids 52(1): 18-24.

[22] Soleimani Roody B, Fotuhi R, Jalili M (2018) Nonlinear longitudinal forced vibration of a rod undergoing finite strain. Proc. Inst Mech Eng Part C 232(12): 2229-2243.

[۲۳] رضایی م، عرب ملکی و (۲۰۱۹) ارائه حل تحلیلی برای مطالعه رفتار دینامیکی لوله‌های ویسکوالاستیک حامل سیال با اعمال فرم کلی مدل ساختاری. نشریه پژوهشی مهندسی مکانیک ایران ۲۹-۶ :(۱)۲۱.

[24] Loghmani M, Yazdi M, Nikkhah Bahrami M (2018) Longitudinal vibration analysis of nanorods with multiple discontinuities based on nonlocal elasticity theory using wave approach. Microsyst Technol 24(5): 2445-2461.

[25] Arani A, Maboudi M, Arani A.G, Amir S (2013) 2D-magnetic field and biaxiall in-plane pre-load effects on the vibration of double bonded orthotropic graphene sheets. J Solid Mech 5(2): 193-205.

[26] Kiani K (2014) Magnetically affected single-walled carbon nanotubes as nanosensors. Mech Res Commun 60: 33-39.

[27] Murmu T, McCarthy M, Adhikari S (2012) Vibration response of double-walled carbon nanotubes subjected to an externally applied longitudinal magnetic field: A nonlocal elasticity approach. J Sound Vib 331(23): 5069-5086.

[28] Murmu T, McCarthy M.A, Adhikari S (2012) Nonlocal elasticity based magnetic field affected vibration response of double single-walled carbon nanotube systems. J Appl Phys 111(11): 113-121.

[29] Karličić D, Cajić M, Murmu T, Kozić P, Adhikari S (2015) Nonlocal effects on the longitudinal vibration of a complex multi-nanorod system subjected to the transverse magnetic field. Meccanica 50(6): 1605-1621.

[30] Satish N, Narendar S, Raju K.B (2017) Magnetic field and surface elasticity effects on thermal vibration properties of nanoplates. Compos Struct 180: 568-580.

[31] Narendar S, Gupta S, Gopalakrishnan S (2012) Wave propagation in single-walled carbon nanotube under longitudinal magnetic field using nonlocal Euler–Bernoulli beam theory. Appl Math Model 36(9): 4529-4538.

[32] Wang H, Dong K, Men F, Yan Y, Wang X (2010) Influences of longitudinal magnetic field on wave propagation in carbon nanotubes embedded in elastic matrix. Appl Math Model 34(4): 878-889.

[33] Bahaadini R, Hosseini M (2016) Nonlocal divergence and flutter instability analysis of embedded fluid-conveying carbon nanotube under magnetic field. Microfluid Nanofluidics 20(7): 1-14.

[34] Hsu JC, Lee HL, Chang WJ (2011) Longitudinal vibration of cracked nanobeams using nonlocal elasticity theory. Curr Appl Phys 11(6): 1384-1388.

[35] Anderson TL (2017) Fracture mechanics: fundamentals and applications. CRC press.

[36] Hai T, Nguyen K, Lien P (2019) Characteristic equation for antiresonant frequencies of multiple cracked bars and application for crack detection. Nondestruct. Test Evaluation 34(3): 299-323.