



تحلیل مسائل دو-بعدي و سه-بعدي هدايت حرارت حالت گذرا شامل منابع حرارتي متحرک نقطه‌اي با استفاده از روش جواب‌هاي اساسي

مهرداد محمدي*

استاديار، بخش مهندسي مکانیک، دانشکده فني و مهندسي، دانشگاه آزاد اسلامي واحد شيراز، شيراز، ايران
مقاله مستقل، تاريخ دريافت: ۱۳۹۸/۰۴/۱۸؛ تاريخ بازنگري: ۱۳۹۸/۰۹/۲۶؛ تاريخ پذيرش: ۱۳۹۹/۰۹/۲۹

چکیده

در اين تحقيق، يک فرمول‌بندي موثر مبتني بر روش جواب‌هاي اساسي، جهت تحليل مسائل هدايت حرارت حالت گذرا شامل منابع حرارتي متحرک نقطه‌اي ارائه گرديده است. اين فرمول‌بندي جديد بوده و تاکنون ارائه نشده است. در فرمول‌بندي ارائه شده، مسير حرکت و شدت منبع حرارتي متحرک نقطه‌اي، توابع دلخواهي از زمان هستند و تعداد منابع حرارتي متحرک نيز، محدوديتي ندارد. حل مساله، بصورت يک ترکيب خطي از جواب‌هاي اساسي وابسته به زمان و حل ويژه مربوط به اثر منبع حرارتي در نظر گرفته شده است. حل ويژه بدون استفاده از هرگونه سلول يا نقاط داخلي و بدون نياز به تبديل زماني بدست آمده است. مثال‌هاي عددي، کارايي و دقت روش پيشنهاد شده را در مقايسه با روش المان محدود نشان مي‌دهند. در روش المان محدود، لازم است که از يک شبکه‌بندي الماني ريز براي مسير عبور منبع متحرک استفاده شود که هزينه مرحله پيش پردازش را افزايش مي‌دهد. روش پيشنهاد شده بسيار ساده است و با تعداد کمی از نقاط چشمه به نتايج بسيار خوبي مي‌رسد. به عنوان نمونه، در مثال حل شده دوم، ميانگين درصد اختلاف نسبي بين نتايج روش ارائه شده با ۲۱۸ نقطه چشمه و روش المان محدود با ۷۲۶۸ گره، ۰/۶۵ درصد است.

کلمات کلیدی: روش جواب‌هاي اساسي؛ هدايت حرارت حالت گذرا؛ منبع حرارتي متحرک؛ روش بدون المان.

Analysis of Two- and three-dimensional transient heat Conduction Problems Including Moving Point Heat Sources Using the Method of Fundamental Solutions

M. Mohammadi*

Assis. Prof., Dep. of Mech. Eng., College of Eng., Shiraz Branch, Islamic Azad Univ., Shiraz, Iran.

Abstract

In this research, an effective formulation based on the method of fundamental solutions is presented for analyzing transient heat conduction problems including moving point heat sources. This is a new formulation and has not been presented yet. The path of motion and the intensity of the moving point heat sources are arbitrary functions of time and the number of them is unlimited. Solution of the problem is considered as a linear combination of time-dependent fundamental solutions and a particular solution involving the heat source effect. The particular solution is obtained without using any internal cells or points and without any time transformation. Numerical examples show the efficiency and accuracy of the proposed method in comparison with the finite element method. In the finite element method, it is necessary to use a fine mesh in the path of the moving source that increases the cost of the preprocessing step. The proposed method is very simple and gives very good results with a small number of source points. For example, in the second example, the average relative difference percentage between the results of the proposed method with 218 source points and the finite element method with 7268 nodes is 0.65%.

Keywords: Method of fundamental solutions; Transient heat conduction; Moving heat source; Meshless method

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۷۳۱۱۴۵۵۴

آدرس پست الکترونیک: mohammadi_mehرداد@iaushiraz.ac.ir

۱- مقدمه

در کاربردهای مهمی از مهندسی مانند، جوشکاری نقطه‌ای، گرمایش الکتریکی، برشکاری با استفاده از لیزر، لعاب‌کاری با استفاده از لیزر و گرمایش مادون قرمز، نیاز به تحلیل مسائل هدایت حرارت حالت گذرا شامل، منابع حرارتي متحرک نقطه‌ای است. تاکنون راه‌حل‌های تحلیلی مختلفی برای مسائل دارای شرایط ساده ارائه شده است. به عنوان چند نمونه، در سال ۱۹۴۲ منبع حرارتي متحرک ایجاد شده در تماس‌های لغزشی بررسی شد و مدلی برای این منبع حرارتي ارائه گردید [۱]؛ در سال ۲۰۰۸، راه‌حلی برای تحلیل اثرات منبع حرارتي متحرک در یک جسم نیمه-نامحدود در مسائل شبه-پایدار سه-بعدي ارائه گردید و پدیده تبدیل مارتنزیت در فولادهای کم کربن توضیح داده شد [۲]؛ در سال ۲۰۱۰، هدایت حرارت حالت گذرا در سطح تماس یک ماده دو لایه تحت اثر منبع حرارتي متحرک تحلیل شد که مدل ارائه شده، قابلیت تخمین مقاومت حرارتي بین لایه‌ها را دارد [۳] و در سال ۲۰۱۷، فرمولی برای تحلیل حرارتي یک قطعه سه-بعدي تحت اثر یک منبع حرارتي متحرک نقطه‌ای با سرعت و شدت ثابت ارائه گردید و به عنوان نتیجه، عوامل موثر بر جریان حرارتي در منبع حرارتي متحرک نقطه‌ای تعیین شد [۴]. باید در نظر داشت که حل تحلیلی این مسائل، فقط برای دامنه‌ها و مسیر حرکت ساده قابل دستیابی است و برای حل مسائل کاربردی پیچیده، باید به روش‌های عددی قدرتمند و توسعه یافته متوسل شد. معروفترین و پرکاربردترین روش عددی جهت حل مسائل گوناگون علمی و مهندسی، روش المان محدود است که روشی متکی بر تقسیم‌بندی دامنه است. تاکنون تحقیقات مختلفی با استفاده از روش المان محدود در زمینه منابع حرارتي متحرک نقطه‌ای انجام شده است. بطور مثال، در سال ۱۹۸۵، یک کد المان محدود قابل توسعه به کد تجاری، جهت تعیین توزیع دما در یک جسم دو-بعدي تحت اثر منبع حرارتي متحرک لیزر ارائه گردید و نتایج بدست آمده با نتایج تحلیلی مقایسه شد [۵]؛ در سال ۲۰۰۳، تحلیل المان محدود و آزمایشگاهی فرایند لعاب‌کاری با استفاده از لیزر انجام گردید و اثرات پارامترهای موثر بر این فرایند جهت تعیین مقادیر بهینه بررسی شد [۶]؛ در سال ۲۰۰۶، یک روش معکوس مبتنی بر روش المان محدود جهت تعیین شدت و مکان دو منبع حرارتي متحرک نقطه‌ای ارائه

گردید و نشان داده شد که افزایش تعداد نقاط اندازه‌گیری، بر دقت و پایداری نتایج موثر است [۷] و در سال ۲۰۱۶، عملیات حرارتي سطوح تحت اثر لیزر متحرک مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که مدل ارائه شده قابلیت پیش‌بینی دما در اینگونه مسائل را دارد [۸]. به‌رحال در مدل‌سازی منابع حرارتي متمرکز به روش المان محدود، دشواری‌هایی وجود دارد. بطور مثال لازم است که شبکه‌بندی المان‌ها در ناحیه منبع حرارتي متمرکز به اندازه کافی ریز باشد که در مورد منابع حرارتي متحرک که باید از یک روش شبکه‌بندی مجدد استفاده شود، مدل‌سازی المان محدود زمان‌بر و دشوار خواهد بود. روش المان مرزی، روش‌های بدون المان [۹، ۱۰] و روش جواب‌های اساسی^۱ از روش‌های دیگر عددی هستند که در چند دهه اخیر توسعه زیادی یافته‌اند. این روش‌ها در حل بسیاری از مسائل کاربردی، می‌توانند جایگزین بسیار مناسبی برای روش‌های مبتنی بر تقسیم‌بندی دامنه باشند. در این روش‌ها، مدل‌سازی و تحلیل منابع حرارتي متمرکز، بسیار ساده و کارا است که به عنوان نمونه می‌توان به تحقیقات شیاه و همکاران [۱۱] و همیتیان و همکاران [۱۲] در زمینه روش المان مرزی؛ محمدی و همکاران [۱۳] با استفاده از روش جواب‌های اساسی و غیائی و خسروی‌فرد [۱۴] در زمینه روش‌های بدون المان اشاره کرد. مهمترین نتیجه بدست آمده در تحقیقات [۱۱-۱۴] این است، روش‌های المان مرزی، بدون المان و جواب‌های اساسی، مرحله پیش پردازش ساده‌تری نسبت به روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی دامنه دارند و با استفاده از تعداد بسیار کمتری گره نسبت به روش‌های دامنه‌ای، به دقت‌های بسیار خوبی منجر می‌شوند.

روش جواب‌های اساسی، یک روش مرزی بدون المان است که بدلیل سادگی و دقتش، قابلیت تبدیل شدن به یک روش محبوب و موفق عددی را دارد. برای استفاده از این روش، مشابه با روش المان مرزی، لازم است که ابتدا جواب اساسی مساله مورد نظر استخراج شده باشد. از مزیت‌های مهم این روش نسبت به سایر روش‌ها از جمله، روش المان مرزی این است که در روش جواب‌های اساسی نیاز به هیچ‌گونه انتگرال‌گیری روی المان‌های مرزی و یا سلول‌های

¹ Method of Fundamental Solutions

در تحقیق حاضر، از روش جواب‌های اساسی، جهت تحلیل مسائل دو-بعدی و سه-بعدی هدایت حرارت حالت گذرا در دامنه‌های همسانگرد شامل، منابع حرارتی متحرک نقطه‌ای استفاده می‌شود. هرچند که در تحقیقات سایر محققان، از روش جواب‌های اساسی برای حل مسائل هدایت حرارت حالت گذرا استفاده شده است، اما بر اساس اطلاعات نویسنده، تاکنون یک فرمول‌بندی مناسب و ساده مبتنی بر روش جواب‌های اساسی، جهت حل مسائل شامل منابع حرارتی متحرک نقطه‌ای ارائه نگردیده است. نوآوری مهم این تحقیق، نشان دادن قابلیت‌های روش جواب‌های اساسی در مقایسه با روش المان محدود، جهت حل ساده و موثر اینگونه مسائل است. در فرمول‌بندی ارائه شده، مسیر حرکت و شدت منبع حرارتی متحرک، توابع دلخواهی از زمان در نظر گرفته شده‌اند و تعداد منابع حرارتی متحرک نیز محدودیتی ندارد. در روش پیشنهادی، حل مساله بصورت یک ترکیب خطی از جواب‌های اساسی وابسته به زمان و حل ویژه ناشی از منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای در نظر گرفته می‌شود. این حل ویژه بصورت یک انتگرال دامنه‌ای وابسته به زمان ارائه می‌شود. با توجه به اینکه جذابیت اصلی روش جواب‌های اساسی در عدم استفاده از هرگونه سلول داخلی یا المان است، محاسبه مناسب انتگرال دامنه‌ای ناشی از منبع حرارتی، بدون استفاده از هرگونه سلول یا نقاط داخلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. روش ارائه شده در این تحقیق، این قابلیت مهم را دارد و جذابیت روش جواب‌های اساسی را حفظ می‌کند. با ارائه مثال‌های عددی دو-بعدی و سه-بعدی، کارایی و دقت روش جواب‌های اساسی پیشنهاد شده اثبات خواهد شد.

۲- فرمول‌بندی روش جواب‌های اساسی برای معادله‌ی هدایت حرارت حالت گذرا

در شکل ۱، یک دامنه همسانگرد Ω با مرز Γ نشان داده شده است. در این دامنه، معادله هدایت حرارت حالت گذرا به فرم رابطه (۱) قابل بیان است:

$$\kappa \nabla^2 \theta(X, t) - \frac{\partial \theta(X, t)}{\partial t} = - \frac{s(X, t)}{\rho c}, \quad X \in \Omega \quad (1)$$

داخلی نمی‌باشد. این مزیت باعث می‌شود که کدنویسی و مدل‌سازی مساله در روش جواب‌های اساسی بسیار ساده و سریع باشد [۱۳ و ۱۵]. در روش جواب‌های اساسی، حل تقریبی مساله مورد نظر بصورت یک ترکیب خطی از جواب‌های اساسی در نظر گرفته می‌شود و به همین دلیل معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله بصورت دقیق ارضا خواهد شد [۱۶]. معمولاً در این روش، نقاط چشمه^۱ مربوط به جواب‌های اساسی، در بیرون از دامنه اصلی مساله و روی یک مرز مجازی^۲، در برگیرنده مرز فیزیکی، چیده می‌شوند. شدت این نقاط چشمه در ابتدا مجهول است که با ارضاء کردن شرایط مرزی مساله در تعدادی از نقاط مرزی، این شدت‌ها تعیین می‌شوند. در واقع، روش جواب‌های اساسی، یک روش هم‌آیی^۳ است و شرایط مرزی مساله فقط در تعدادی از نقاط مرزی بصورت دقیق ارضا می‌شود. در مطالعه انجام شده در مرجع [۱۷]، توسعه این روش در چند دهه اخیر مورد بررسی قرار گرفته است. تاکنون تحقیقات مختلفی با استفاده از روش جواب‌های اساسی در زمینه حل مسائل هدایت حرارت حالت گذرا انجام شده است. به عنوان مثال، در سال ۱۹۹۸، حل معادله انتشار با استفاده از تبدیل لاپلاس و جواب اساسی معادله هلمهولتز اصلاح یافته، مورد بررسی قرار گرفت [۱۸]؛ در سال ۲۰۰۴، کاربرد جواب اساسی وابسته به زمان در حل معادله انتشار، در فضاهای یک-بعدی، دو-بعدی و سه-بعدی، نشان داده شد [۱۹]؛ در سال ۲۰۰۶، بین نتایج استفاده از جواب اساسی وابسته به زمان و جواب اساسی معادله هلمهولتز اصلاح یافته در حل معادله هدایت حرارت وابسته به زمان، مقایسه‌ای انجام شد [۲۰]؛ در سال ۲۰۱۱، خصوصیات تراکمی جواب اساسی وابسته به زمان جهت تحلیل مسائل دو-بعدی هدایت حرارت حالت گذرا اثبات شد [۲۱] و در سال ۲۰۱۳، کاربرد روش جواب‌های اساسی در حل مسائل معکوس هدایت حرارت حالت گذرا نشان داده شد [۲۲]. نتایج بدست آمده در تحقیقات [۱۸-۲۲] نشان دهنده دقت بسیار خوب و پتانسیل بالای روش جواب‌های اساسی در تحلیل مسائل گوناگون هدایت حرارت است.

¹ Source Points

² Pseudo Boundary

³ Collocation Method

که a_m^j [m³C] شدت نقطه چشمه z_m در لحظه زمان τ_m ، حل $\theta_p(X, t)$ ویژه ناشی از اثر منبع حرارتي و F حل اساسي وابسته به زمان بصورت رابطه (۵) است [۱۷]:

$$F(X, t; \xi_j, \tau) = \frac{H(t - \tau)}{(4\pi\kappa(t - \tau))^{d/2}} \exp\left(\frac{-r^2}{4\kappa(t - \tau)}\right) \quad (5)$$

d بعد مساله مورد نظر، r فاصله نقطه میدان X از نقطه چشمه ξ_j و H تابع هویساید به صورت رابطه (۶) است:

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 1 & t > \tau \\ 0 & t \leq \tau \end{cases} \quad (6)$$

با ایده گرفتن از اساس کار روش جواب‌هاي اساسي که در رابطه (۴) ارائه شده است، حل ویژه، بصورت انتگرال زمانی-مکانی رابطه (۷) ارائه می‌شود:

$$\theta_p(X, t) = \int_0^t \int_{\Omega} \frac{s(\xi_j, \tau)}{\rho c} F(X, t; \xi_j, \tau) d\Omega d\tau \quad (7)$$

نحوه تعیین $(M + 1)N$ شدت مجهول a_m^j در رابطه (۴) به این ترتیب است که شرایط مرزی مساله، در N نقطه مرزی قرار گرفته روی مرز فیزیکی و برای $(M + 1)$ لحظه زمان t_m ارضا می‌شود. لحظه‌هاي زمانی t_m در بازه زمانی $[0, T]$ به صورت رابطه (۸) مشخص می‌شوند:

$$t_m = \frac{(m - 1)T}{M}, \quad m = 1, 2, \dots, M + 1 \quad (8)$$

با استفاده از رابطه (۴) و ارضا کردن شرط مرزی (۲) در N نقطه مرزی و در $(M + 1)$ لحظه زمان t_m ، یک دستگاه $(M + 1)N$ معادله خطی با $(M + 1)N$ مجهول a_m^j به فرم رابطه (۹) بدست می‌آید:

$$\sum_{m=1}^{M+1} \sum_{j=1}^N a_m^j \left[g_1(Y_k, t_i) F(Y_k, t_i; \xi_j, \tau_m) + g_2(Y_k, t_i) \frac{\partial F(Y_k, t_i; \xi_j, \tau_m)}{\partial n} \right] = \left[g_3(Y_k, t_i) - g_1(Y_k, t_i) \theta_p(Y_k, t_i) - g_2(Y_k, t_i) \frac{\partial \theta_p(Y_k, t_i)}{\partial n} \right] \quad (9)$$

$$i = (1, 2, \dots, M + 1)$$

$$k = (1, 2, \dots, N); Y_k \in \Gamma \quad (9)$$

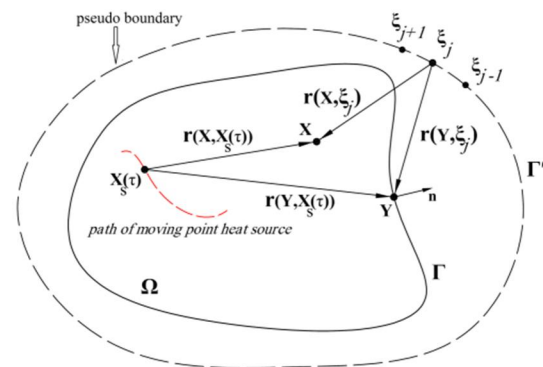
این دستگاه به صورت رابطه (۱۰) قابل بیان است:

$$[A]_{(M+1)N \times (M+1)N} \{C\}_{(M+1)N \times 1} = \{B\}_{(M+1)N \times 1} \quad (10)$$

که ∇^2 عملگر لاپلاس، θ [C] دما، κ [m²/sec] ضریب انتشار گرمایی، s [W/m³] منبع حرارتي داخلی، ρ [kg/m³] چگالی و c [J/kg.C] ظرفیت گرمایی ویژه است. شرط مرزی مساله، بصورت کلی (۲) قابل بیان است:

$$g_1(Y, t) \theta(Y, t) + g_2(Y, t) \frac{\partial \theta}{\partial n}(Y, t) = g_3(Y, t) \quad Y \in \Gamma; t \geq 0 \quad (2)$$

که g_1 ، g_2 و g_3 توابع مشخص شده روی مرز و n جهت عمود بر مرز است. دمای اولیه برای تمام نقاط دامنه $\theta = 0^\circ \text{C}$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- دامنه‌ی مساله، مرز مجازی، نقاط چشمه و منبع حرارتي متحرک نقطه‌اي

فرض کنید که حل معادله (۱) در بازه زمانی $[0, T]$ مورد نظر باشد. در روش جواب‌هاي اساسي، مطابق با شکل (۱)، روی یک مرز مجازی Γ' که در برگیرنده مرز فیزیکی Γ است، N نقطه چشمه با موقعیت‌هاي مکانی معلوم ξ_j و شدت‌هاي مجهول، در نظر گرفته می‌شود. شدت‌هاي نقاط چشمه متغیر با زمان انتخاب شده و در بازه زمانی $[-\varepsilon, T]$ تغییر داده می‌شوند [۱۷]. بازه زمانی $[-\varepsilon, T]$ به $(M + 1)$ لحظه زمانی τ_m به صورت رابطه (۳) گسسته می‌شود:

$$\tau_m = (2m - 3) \frac{T}{2M}, \quad m = 1, 2, \dots, M + 1 \quad (3)$$

حل معادله (۱) به صورت یک ترکیب خطی از جواب‌هاي اساسي وابسته به زمان و حل ویژه ناشی از اثر منبع حرارتي، بصورت رابطه (۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$\theta(X, t) = \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{j=1}^N a_m^j F(X, t; \xi_j, \tau_m) + \theta_p(X, t) \quad (4)$$

رابطه (۱۳) در رابطه (۷)، جواب ویژه به صورت رابطه (۱۴) قابل محاسبه است:

$$\theta_p(X, t) = \int_0^{t_s(\tau)} \frac{F(X, t; X_s(\tau), \tau) d\tau}{\rho c} \quad (14)$$

برای محاسبه انتگرال زمانی رابطه (۱۴)، بازه زمانی $[0, t]$ به K زیر بازه تقسیم شده و رابطه (۱۴) بصورت رابطه (۱۵) نوشته می‌شود:

$$\theta_p(X, t) = \sum_{n=1}^K \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{s(\tau) F(X, t; X_s(\tau), \tau) d\tau}{\rho c} \quad (15)$$

که بازه‌های زمانی، بصورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شود:

$$t_n = (n-1) \frac{t}{K} \quad n=1, 2, \dots, K \quad (16)$$

با قرار دادن مقدار $s(\tau)$ و $X_s(\tau)$ در لحظه میانی هر بازه، رابطه (۱۵) را می‌توان بصورت رابطه (۱۷) نوشت:

$$\theta_p(X, t) = \sum_{n=1}^K \frac{s(t_{n+0.5})}{\rho c} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(X, t; X_s(t_{n+0.5}), \tau) d\tau \quad (17)$$

لحظه میانی هر بازه بصورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$t_{n+0.5} = \frac{(t_{n+1} + t_n)}{2} \quad n=1, 2, \dots, K \quad (18)$$

با استفاده از رابطه (۱۷)، رابطه (۱۷) در حالت 2D به صورت رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود:

$$\theta_p(X, t) = \frac{1}{4\pi\kappa\rho c} \sum_{n=1}^K s(t_{n+0.5}) [Ei(-a_2) - Ei(-a_1)] \quad (19)$$

که:

$$a_1 = \frac{r^2}{4\kappa(t-t_n)}, \quad a_2 = \frac{r^2}{4\kappa(t-t_{n+1})} \quad (20)$$

که r فاصله نقطه میدان X از منبع نقطه‌ای X_s در لحظه $t_{n+0.5}$ است.

در رابطه (۱۹)، Ei تابع انتگرال نمایی به صورت رابطه (۲۱) است:

$$Ei(a) = \int_{-\infty}^a \frac{\exp(u)}{u} du \quad (21)$$

در حالت 3D، رابطه (۱۷) بصورت (۲۲) قابل محاسبه است:

$$\theta_p(X, t) = \frac{1}{4\pi\kappa\rho c} \sum_{n=1}^K \frac{s(t_{n+0.5})}{r} [\text{erf}(\sqrt{a_2}) - \text{erf}(\sqrt{a_1})] \quad (22)$$

که erf ، تابع خطا به فرم (۲۳) است:

که اعضای ماتریس $[A]$ و بردارهای $\{B\}$ و $\{C\}$ به صورت رابطه (۱۱) قابل بیان هستند:

$$\begin{aligned} A_{rc} &= g_1(Y_k, t_i) F(Y_k, t_i; \xi_j, \tau_m) \\ &\quad + g_2(Y_k, t_i) \frac{\partial F(Y_k, t_i; \xi_j, \tau_m)}{\partial n} \\ B_r &= g_3(Y_k, t_i) - g_1(Y_k, t_i) \theta_p(Y_k, t_i) \\ &\quad - g_2(Y_k, t_i) \frac{\partial \theta_p(Y_k, t_i)}{\partial n} \\ C_r &= a_m^j \end{aligned} \quad (11)$$

لازم بذکر است که با وجود اینکه مساله بیان شده توسط روابط (۱) و (۲) یک مساله خوش-وضعیت است، اما معمولاً ماتریس ضرائب $[A]$ ، ایجاد شده در روش جواب‌های اساسی، یک ماتریس بد-وضعیت بوده [۲۱] و بهتر است که در حل دستگاه (۱۰) از روش‌های تنظیم‌سازی استفاده شود. یکی از روش‌های موثر تنظیم‌سازی، روش تیخونوف است که برای حل رابطه (۱۰)، حل معادله (۱۲) را پیشنهاد می‌دهد:

$$([A]^T [A] + \lambda [I]) \{C\} = [A]^T \{B\} \quad (12)$$

که $[I]$ ماتریس همانی و λ پارامتر تنظیم‌سازی بوده که توسط روش‌های مختلفی مانند روش L-curve [۲۲] قابل تعیین است.

بعد از حل دستگاه (۱۲) و تعیین شدت‌های مجهول a_m^j ، دما در هر نقطه از دامنه و در هر لحظه از زمان با استفاده از رابطه (۴) قابل تعیین است.

جهت حفظ جذابیت روش مرزی و بدون المان جواب‌های اساسی، لازم است که حل ویژه $\theta_p(X, t)$ ، ارائه شده در رابطه (۷)، بنحو موثر و بدون استفاده از هرگونه نقاط و سلول‌های دامنه‌ای محاسبه شود. در قسمت بعد، این جواب ویژه برای منابع حرارتی متحرک نقطه‌ای ارائه می‌شود.

۳- محاسبه جواب ویژه ناشی از منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای

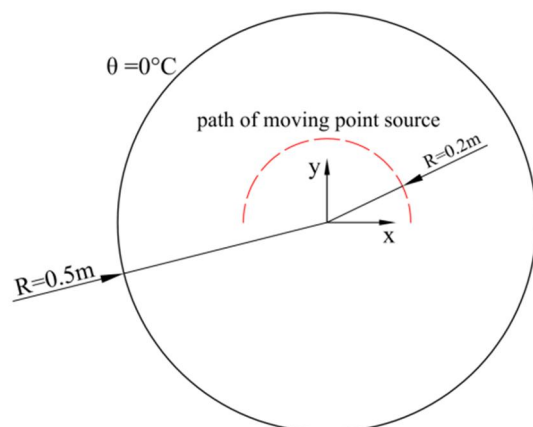
در این قسمت $\theta_p(X, t)$ برای منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای ارائه می‌شود. منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای را می‌توان به صورت رابطه (۱۳) تعریف کرد:

$$s(X, t) = s(t) \delta(X, X_s(t)) \quad (13)$$

که s شدت منبع متحرک نقطه‌ای، X_s مکان منبع متحرک نقطه‌ای و δ ، تابع دلتای دیراک است. با قرار دادن

دامنه دایره‌ای، شرط مرزی و مسیر حرکت منبع حرارتي متحرک نقطه‌ای در شکل ۲ نشان داده شده است.

در مدل‌سازی مساله به روش المان محدود، بعد از آنالیز شبکه، مقدار گام زمانی 0.02sec انتخاب شده و از ۳۸۹۶ المان درجه دوم (دارای ۷۹۳۷ گره) استفاده شده است. گره‌های مدل المان محدود در شکل ۳ نشان داده شده است. در روش جواب‌های اساسي ارائه شده در تحقیق حاضر، دو حالت در نظر گرفته شده است. در حالت اول، با ثابت نگاه داشتن تعداد نقاط چشمه و نقاط مرزی، اثر تغییر در اندازه گام زمانی روی همگرایی جواب‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت، ۸ نقطه چشمه و به تناسب ۸ نقطه مرزی به ترتیب روی مرزهای مجازی و فیزیکی مساله در نظر گرفته شده و سه گام زمانی 0.1sec، 0.2sec و 0.05sec، به ترتیب با $M=5$ ، $M=10$ و $M=20$ در روابط (۳) و (۸)، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مرز مجازی جهت قرار دادن نقاط چشمه، دایره‌ای به مرکز (0,0) و شعاع $R'=2m$ است. تغییرات دما بر حسب زمان برای نقطه‌ی (0,0) در شکل ۴ و تغییرات دما روی قطر عمودی در لحظه‌ی $t=1sec$ در شکل ۵ نشان داده شده است. قابل توجه است که همخوانی بسیار خوب ملاحظه شده در شکل‌های ۴ و ۵ بین پاسخ‌های روش حاضر و روش المان محدود در شرایطی بدست آمده است که تنها از ۸ نقطه‌ی چشمه در روش جواب‌های اساسي استفاده شده است. این در حالیست که برای دستیابی به دقت مشابه در روش المان محدود به تعداد بسیار بیشتری گره نیاز است.



شکل ۲- دامنه‌ی دایره‌ای، شرط مرزی و مسیر حرکت منبع حرارتي متحرک نقطه‌ای در مثال اول

$$\text{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \exp(-u^2) du \quad (23)$$

لازم بذکر است که برای محاسبه روابط (۱۹) و (۲۲)، به هیچ‌گونه تقسیم‌بندی دامنه و نقاط داخلی نیاز نیست و جواب ویژه θ_p بسادگی قابل محاسبه است. در قسمت بعد، با ارائه دو مثال عددی، درستی و کارایی روش جواب‌های اساسي پیشنهاد شده نشان داده می‌شود.

۴- مثال‌های عددی

جهت ارزیابی و صحت سنجی روش جواب‌های اساسي ارائه شده، دو مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته است. در هر دو مثال، $\rho c = 1 J/m^3 C$ و $\kappa = 1 m^2/sec$ در نظر گرفته شده و دمای اولیه $\theta = 0^\circ C$ است. کدهای روش جواب‌های اساسي در محیط نرم افزار متلب نوشته شده و نتایج بدست آمده از آن با نتایج روش المان محدود کم خطا مقایسه شده است. جهت مدل‌سازی المان محدود، از نرم افزار انسیس استفاده شده و در هر مثال با ریز کردن شبکه‌بندی و تغییر گام زمانی از بزرگ به کوچک، از کم خطا بودن و همگرایی نتایج آن اطمینان حاصل شده است.

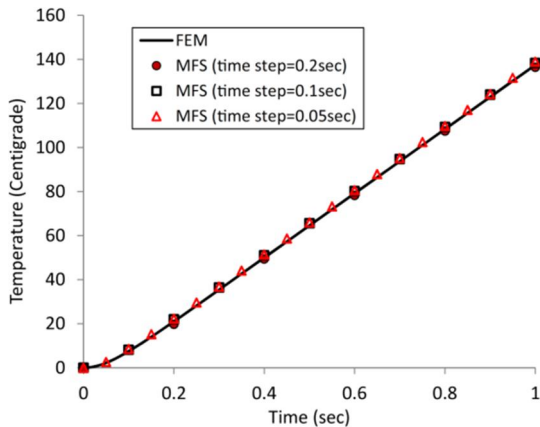
لازم بذکر است که در مثال‌ها، مدت زمان اجرای کدهای جواب‌های اساسي و المان محدود مقایسه نشده است. دلیل این است که نرم‌افزارهای متلب و انسیس از نظر ساختاری با یکدیگر تفاوت دارند و زمان اجرای آنها قابل مقایسه نیست. در صورتی که کد المان محدود نیز در نرم افزار متلب نوشته شود، می‌توان مقایسه زمان اجرا را انجام داد.

۴-۱- مثال اول: یک منبع حرارتي متحرک نقطه‌ای در

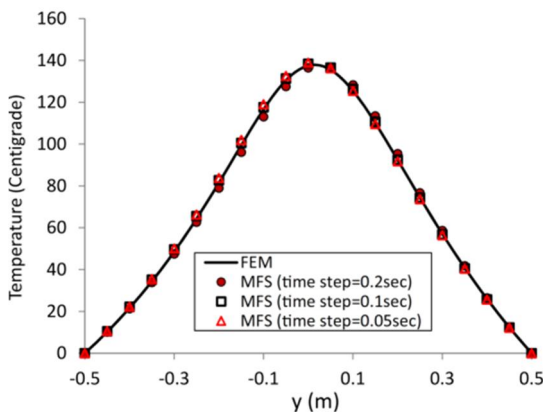
یک دامنه‌ی دایره‌ای

در مثال اول، یک منبع حرارتي متحرک نقطه‌ای در یک دامنه دایره‌ای به مرکز (0,0) و شعاع $R=0.5m$ در نظر گرفته شده است. مرز دایره در دمای ثابت $0^\circ C$ قرار دارد و زمان کل حل مساله $T=1sec$ در نظر گرفته شده است. مسیر حرکت منبع متحرک نقطه‌ای و شدت آن به صورت توابع زیر انتخاب شده‌اند:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= 0.2 \cos(\pi t) \\ y_s(t) &= 0.2 \sin(\pi t) \quad 0 \leq t \leq 1sec \\ s(t) &= 1000 t \end{aligned} \quad (24)$$

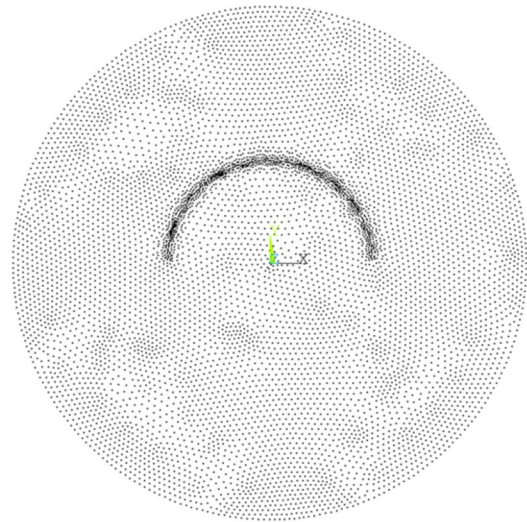


شکل ۴- تغییرات دما بر حسب زمان برای نقطه‌ی (0,0)، حالت اول از مثال اول



شکل ۵- تغییرات دما بر روی قطر عمودی در لحظه‌ی $t=1\text{sec}$ ، حالت اول از مثال اول

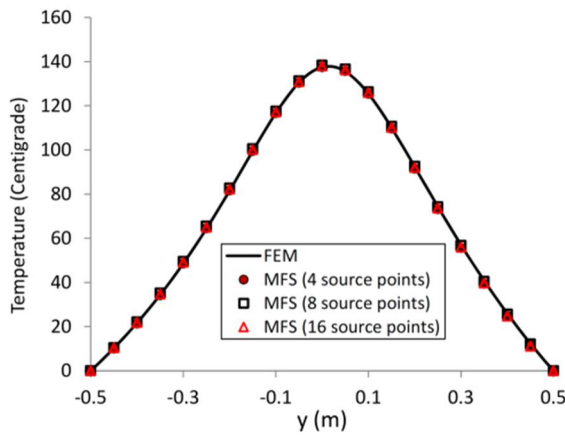
حاضر و روش المان محدود مشاهده می‌شود و درصد اختلاف نسبی دو روش، با افزایش تعداد نقاط چشمه کمتر شده است. نتایج روش جواب‌های اساسی پیشنهاد شده، تنها با استفاده از ۸ نقطه چشمه و گام زمانی 0.1sec، به نتایج المان محدود کم خطا با ۷۹۳۷ گره و گام زمانی 0.02sec همگرا گردیده است. جهت انجام مقایسه کیفی بین نتایج حاصل از روش المان محدود و روش جواب‌های اساسی، کانتورهای دما حاصل از دو روش در لحظه $t=1\text{sec}$ بترتیب در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده‌اند. لازم بذکر است که با توجه به روابط (۵) و (۱۴)، مقدار دما در خود منبع نقطه‌ای، بی‌نهایت می‌شود و در نقاط بسیار نزدیک به محل قرارگیری منبع نقطه‌ای، کانتورها صرفاً از نظر کیفی قابل مقایسه هستند.



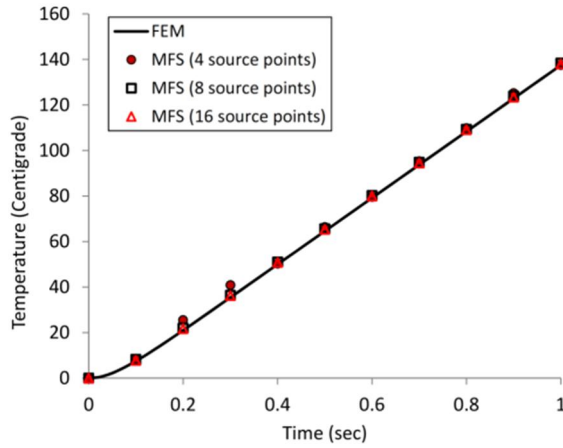
شکل ۳- ۷۹۳۷ گره در مدل‌سازی مثال اول به روش المان محدود

در حالت دوم از مثال اول، با ثابت نگاه داشتن اندازه گام زمانی، اثر تغییر در تعداد نقاط چشمه روی همگرایی جواب‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت، گام زمانی 0.1sec بوده و تعداد نقاط چشمه ۴، ۸ و ۱۶ انتخاب شده‌اند. تغییرات دما بر حسب زمان برای نقطه (0,0) در شکل (۶) و تغییرات دما بر روی قطر عمودی در لحظه $t=1\text{sec}$ در شکل (۷) نشان داده شده است. در جدول (۱) نیز، درصد اختلاف نسبی بین نتایج حاصل از روش المان محدود و روش جواب‌های اساسی برای نقطه‌ی (0,0) آورده شده است. لازم بذکر است که در شکل ۴ مشاهده می‌شود که دمای مرکز دایره با زمان به صورت تقریباً خطی افزایش پیدا می‌کند که این رفتار با توجه به افزایش خطی شدت منبع حرارتی متحرک با زمان، یک رفتار قابل انتظار است. همچنین در شکل ۵ دیده می‌شود که در لحظه $t=1\text{sec}$ که منبع حرارتی متحرک به انتهای مسیر خود رسیده است، مرکز دایره بالاترین دما را در بین نقاط واقع بر قطر عمودی دارد. از آنجاییکه در لحظه $t=1\text{sec}$ ، مرکز دایره نسبت به سایر نقاط واقع بر قطر عمودی، نزدیکترین نقطه به محل منبع حرارتی است، بیشترین شار حرارتی را از منبع دریافت می‌کند و بالاترین دما را خواهد داشت.

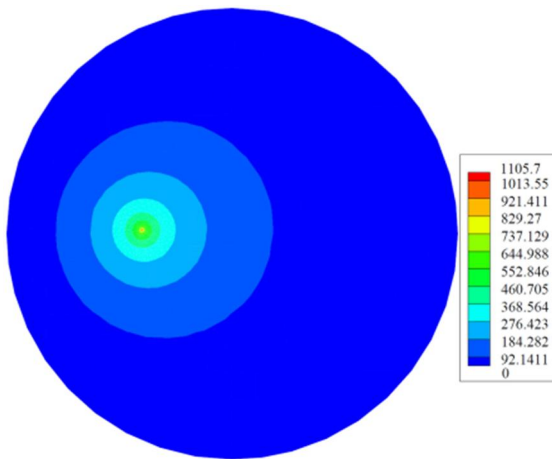
همانطور که در شکل‌های ۴ الی ۷ و جدول ۱ نشان داده شده است، تطابق خوبی بین پاسخ‌های بدست آمده از روش



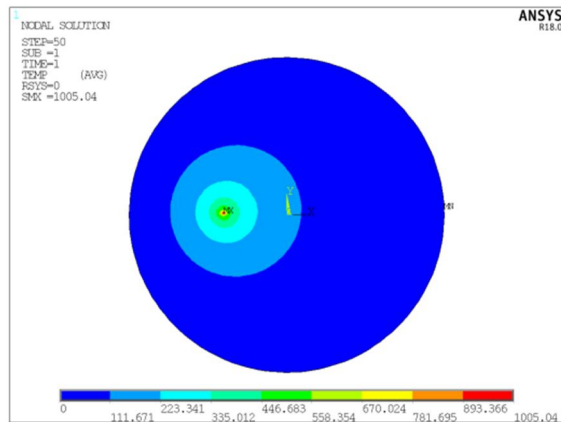
شکل ۷- تغییرات دما روی قطر عمودی در لحظه $t=1\text{sec}$ حالت دوم از مثال اول



شکل ۸- تغییرات دما بر حسب زمان برای نقطه $(0,0)$ ، حالت دوم از مثال اول



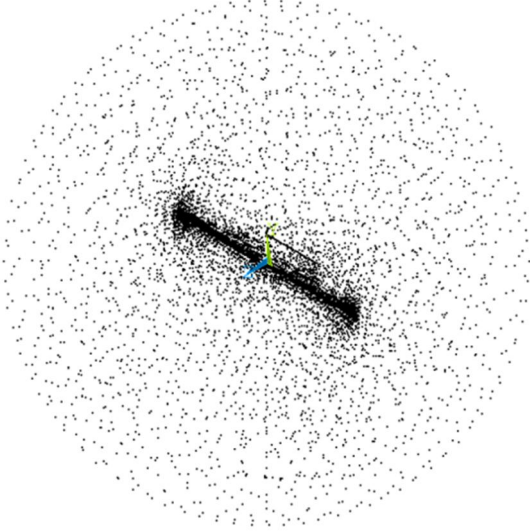
شکل ۹- کانتور دما در $t=1\text{sec}$ برای روش جواب‌هاي اساسي، مثال اول



شکل ۱۰- کانتور دما در $t=1\text{sec}$ برای روش المان محدود، مثال اول

جدول ۱- درصد اختلاف نسبي بين نتايج روش المان محدود و نتايج روش جواب‌هاي اساسي (گام زمانی 0.1sec) برای دمای نقطه $(0,0)$ ، مثال اول

زمان	جواب‌هاي اساسي ۴ نقطه چشمه	جواب‌هاي اساسي ۸ نقطه چشمه	جواب‌هاي اساسي ۱۶ نقطه چشمه
0/2	21/4	4/8	3/2
0/4	2/5	2/1	1/6
0/6	1/4	1/3	0/95
0/8	1/4	0/95	0/67
1/0	0/71	0/68	0/39



شکل ۱۰- ۷۲۶۸ گره در مدل سازی مثال دوم به روش المان محدود

زمان برای نقطه $(0,0,0.5)$ به صورت تقریباً سینوسی است و در لحظه $t=10\text{sec}$ دمای این نقطه به بالاترین مقدار خود می‌رسد. این رفتار با توجه به تغییرات سینوسی شدت منبع حرارتی متحرک با زمان قابل توجیه است که در رابطه (۲۶) داده شده است. دقت شود که در لحظه $t=10\text{sec}$ شدت منبع حرارتی به بالاترین مقدار و منبع حرارتی به نزدیکترین فاصله از نقطه $(0,0,0.5)$ می‌رسد. در شکل ۱۲ دیده می‌شود که در لحظه $t=5\text{sec}$ که منبع حرارتی متحرک ربع مسیر خود را طی کرده است، مرکز دامنه کروی بالاترین دما را در بین نقاط واقع بر محور y دارد. از آنجایی که در لحظه $t=5\text{sec}$ ، مرکز کره نسبت به سایر نقاط واقع بر محور y ، نزدیکترین نقطه به محل منبع حرارتی است، بیشترین شار حرارتی را دریافت کرده و بالاترین دما را خواهد داشت.

در حالت دوم از مثال دوم، با ثابت نگاه داشتن اندازه گام زمانی، اثر تغییر در تعداد نقاط چشمه روی همگرایی جوابها مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت، گام زمانی 0.5sec در نظر گرفته شده و تعداد نقاط چشمه ۷۸، ۹۸ و ۲۱۸ انتخاب شده‌اند. تغییرات دما بر حسب زمان برای نقطه $(0,0,0.5)$ در شکل ۱۳ و تغییرات دما روی محور y در لحظه $t=5\text{sec}$ در شکل ۱۴ نشان داده شده است.

۴-۲- مثال دوم: یک منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای در

یک دامنه‌ی کروی

در مثال دوم، یک دامنه کروی به شعاع $R=1\text{m}$ و به مرکز $(0,0,0)$ در نظر گرفته شده است که شامل یک منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای است. در این مثال کل زمان حل مساله $T=20\text{sec}$ در نظر گرفته شده و دمای سطح کره به صورت تابع زیر انتخاب شده است:

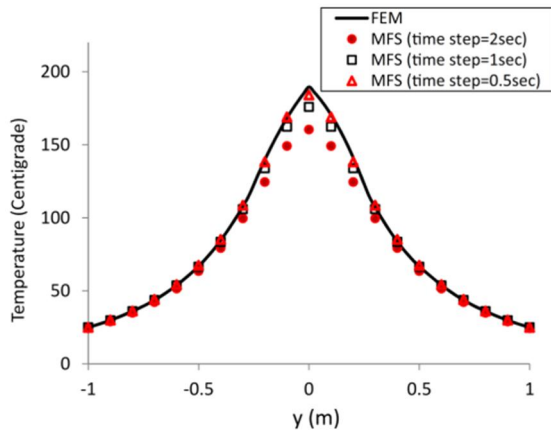
$$\theta(t) = \begin{cases} 5t & 0 \leq t \leq 10 \\ 50 & t \geq 10 \end{cases} \quad (25)$$

مسیر حرکت منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای و شدت آن به صورت توابع (۲۶) از زمان انتخاب شده‌اند:

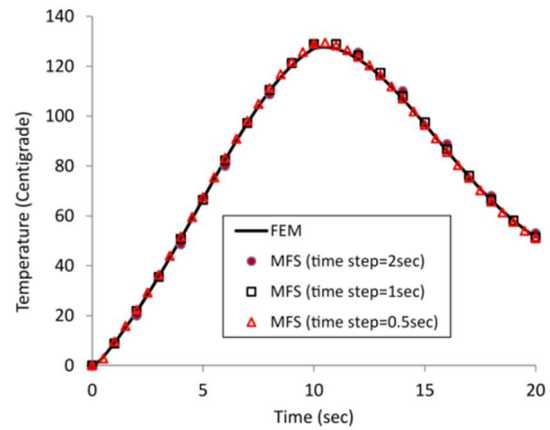
$$\begin{aligned} x_s(t) &= 0.5 - 0.05t \\ y_s(t) &= 0 \\ z_s(t) &= 0 \quad 0 \leq t \leq 20\text{sec} \\ s(t) &= 1000 \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right) \end{aligned} \quad (26)$$

در مدل سازی مساله به روش المان محدود، بعد از آنالیز شبکه، اندازه گام زمانی 0.2sec انتخاب شده و از 5.085 المان سه بعدی درجه دوم (دارای ۷۲۶۸ گره) استفاده شده است. گره‌های مدل المان محدود در شکل ۱۰ نشان داده شده است. در روش جواب‌های اساسی ارائه شده، دو حالت در نظر گرفته شده است. در حالت اول، با ثابت نگاه داشتن تعداد نقاط چشمه و نقاط مرزی، اثر تغییر اندازه گام زمانی روی همگرایی جوابها، مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت، ۹۸ نقطه چشمه و به تناسب ۹۸ نقطه مرزی به ترتیب روی مرزهای مجازی و فیزیکی مساله در نظر گرفته شده و سه گام زمانی 1sec ، 2sec و 0.5sec ، به ترتیب با $M=10$ ، $M=20$ و $M=40$ در روابط (۳) و (۸)، مورد بررسی قرار گرفته است. مرز مجازی جهت قرار دادن نقاط چشمه، سطح کره‌ای به مرکز $(0,0,0)$ و شعاع $R=3.5\text{m}$ انتخاب شده است. تغییرات دما بر حسب زمان برای نقطه $(0,0,0.5)$ در شکل ۱۱ و تغییرات دما روی محور y در لحظه $t=5\text{sec}$ در شکل ۱۲ نشان داده شده است.

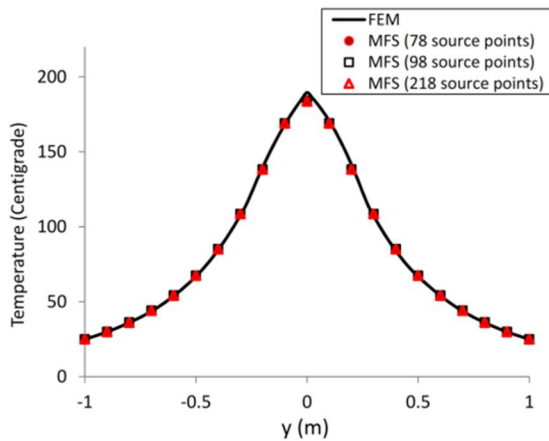
تطابق بسیار خوب بین پاسخهای بدست آمده از روش حاضر و روش المان محدود، موید دقت بسیار خوب روش جواب‌های اساسی برای تحلیل مسائل حاوی منبع حرارتی متحرک است. در شکل ۱۱ دیده می‌شود که تغییرات دما با



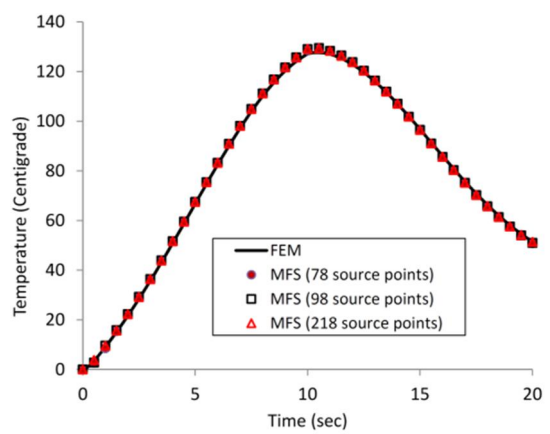
شکل ۱۲- تغييرات دما روی محور y در لحظه $t=5\text{sec}$ حالت اول از مثال دوم



شکل ۱۱- تغييرات دما بر حسب زمان برای نقطه $(0,0,0.5)$ ، حالت اول از مثال دوم



شکل ۱۴- تغييرات دما روی محور y در لحظه $t=5\text{sec}$ حالت دوم از مثال دوم



شکل ۱۳- تغييرات دما بر حسب زمان برای نقطه $(0,0,0.5)$ ، حالت دوم از مثال دوم

جدول ۲- درصد اختلاف نسبي بين نتايج روش المان محدود و نتايج روش جواب‌هاي اساسي (گام زمانی 0.5sec) برای دمای نقطه $(0,0,0.5)$ ، مثال دوم

زمان	جواب‌هاي اساسي ۷۸ نقطه چشمه	جواب‌هاي اساسي ۹۸ نقطه چشمه	جواب‌هاي اساسي ۲۱۸ نقطه چشمه
5	۱/۲۱	۱/۱۴	۱/۰۸
10	۱/۱۹	۱/۱۱	۱/۰۹
15	۰/۳۶	۰/۲۹	۰/۲۹
20	۱/۴	۰/۹۰	۰/۱۴

در جدول ۲، درصد اختلاف نسبي بين نتايج حاصل از روش المان محدود و روش جواب‌هاي اساسي برای نقطه $(0,0,0.5)$ آورده شده است. شکل‌هاي ۱۱ الی ۱۴ و جدول ۲ نشان می‌دهند که پاسخ‌هاي بدست آمده از روش حاضر و

در جدول ۲، درصد اختلاف نسبي بين نتايج حاصل از روش المان محدود و روش جواب‌هاي اساسي برای نقطه $(0,0,0.5)$ آورده شده است. شکل‌هاي ۱۱ الی ۱۴ و جدول ۲ نشان می‌دهند که پاسخ‌هاي بدست آمده از روش حاضر و

در مدل‌سازی مساله به روش المان محدود، بعد از انجام آنالیز شبکه، اندازه گام زمانی 0.02sec انتخاب شده و از ۵۸۵۲ المان سه بعدی درجه دوم (دارای ۸۳۱۱ گره) استفاده شده است. گره‌های مدل المان محدود در شکل ۱۵ نشان داده شده است. در روش جواب‌های اساسی ۲۱۸ نقطه چشمه و به تناسب ۲۱۸ نقطه مرزی به ترتیب روی مرزهای مجازی و فیزیکی مساله در نظر گرفته شده و گام زمانی 0.05sec انتخاب شده است. تغییرات دما بر حسب زمان برای نقطه (0,0,0) در شکل ۱۶ و تغییرات دما روی محور z در لحظه t=1sec در شکل ۱۷ نشان داده شده است.

نتایج مثال‌ها نشان می‌دهد که در صورت استفاده از روش ارائه شده در تحقیق حاضر، می‌توان با تعداد بسیار کم مجهول و بدون نیاز به درگیر شدن با پیچیدگی‌های شبکه‌بندی دامنه مساله، به پاسخ‌های بسیار دقیق برای تحلیل مسائل شامل منابع حرارتی متحرک دست یافت.

در اینجا لازم است که به مواردی از محدودیت‌ها و ضعف‌های روش جواب‌های اساسی نیز اشاره شود. محدودیت این روش در این است که فقط برای مسائلی قابل اجراست که جواب اساسی آن مساله موجود باشد. از ضعف‌های این روش نیز می‌توان به بد-وضعیت شدن دستگاه معادلات نهایی اشاره کرد که جهت حل آنها باید از روش‌های عددی خاص بهره گرفت. در مورد نحوه چیدمان نقاط چشمه و نقاط مرزی نیز روش اثبات شده خاصی وجود ندارد و تحقیقات در این زمینه ادامه دارد.

۵- نتیجه‌گیری

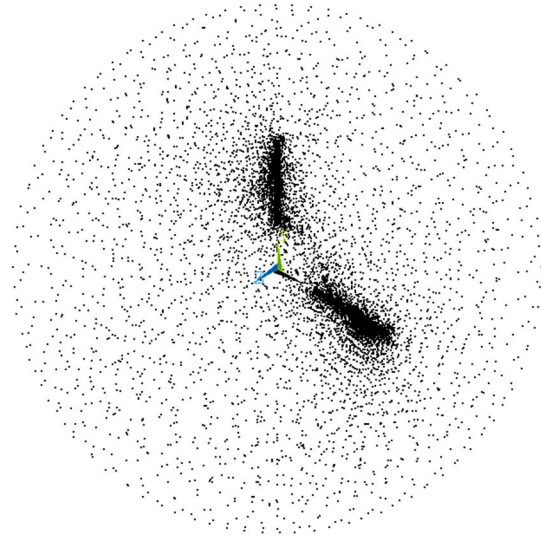
در این تحقیق، یک فرمولبندی جدید مبتنی بر روش جواب‌های اساسی، جهت تحلیل مسائل دو-بعدی و سه-بعدی هدایت حرارت حالت گذرا شامل منابع حرارتی متحرک نقطه‌ای ارائه شد. در روش پیشنهاد شده، حل مساله بصورت یک ترکیب خطی از جواب‌های اساسی وابسته به زمان و حل ویژه‌ی ناشی از اثر منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای در نظر گرفته شد. این حل ویژه بصورت یک انتگرال زمانی-مکانی ارائه گردید که بسادگی و بدون استفاده از هرگونه تبدیل زمانی و سلول یا نقاط داخلی قابل محاسبه است. برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی در تحقیق حاضر، دو مثال عددی دو-بعدی و دو مثال سه-بعدی ارائه گردید. در این

روش المان محدود، تطابق خوبی دارند و درصد اختلاف نسبی دو روش، با افزایش تعداد نقاط چشمه کمتر شده است. نتایج روش جواب‌های اساسی، تنها با انتخاب ۹۸ نقطه چشمه و اندازه گام زمانی 0.5sec، به نتایج المان محدود کم خطا با ۷۲۶۸ گره و اندازه گام زمانی 0.2sec همگرا شده است.

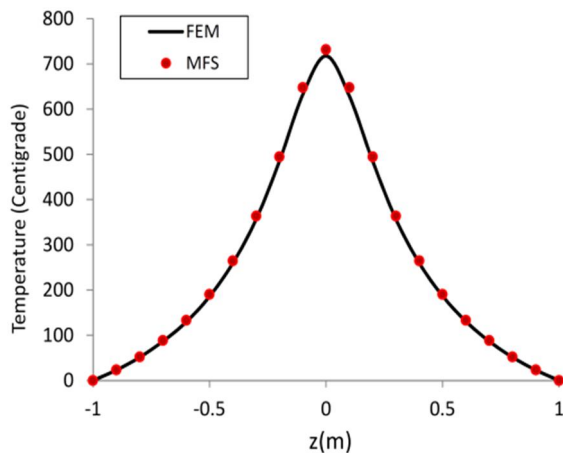
۴-۳- مثال سوم: دو منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای در یک دامنه‌ی کرووی

در مثال سوم، یک دامنه کرووی مشابه با مثال دوم در نظر گرفته شده است که شامل دو منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای است. در این مثال کل زمان حل مساله T=1.0sec در نظر گرفته شده و دمای سطح کره $\theta = 0^\circ C$ است. مسیر حرکت دو منبع حرارتی متحرک نقطه‌ای و شدت آن به صورت توابع زیر از زمان انتخاب شده‌اند:

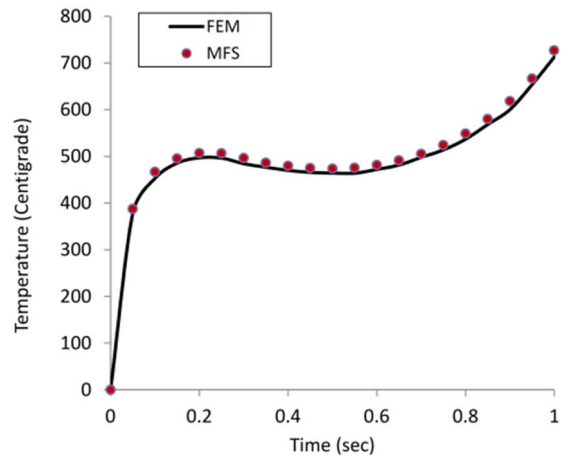
$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0.6 - 0.4t, y_1(t) = 0, z_1(t) = 0 \\ s_1(t) &= 2000 \text{ Watt} \\ 0 &\leq t \leq 1 \text{ sec} \\ x_2(t) &= 0, y_2(t) = 0.2 + 0.4t, z_2(t) = 0 \\ s_2(t) &= 2000 \text{ Watt} \end{aligned} \quad (27)$$



شکل ۱۵- ۸۳۱۱ گره در مدل‌سازی مثال سوم به روش المان محدود



شکل ۱۷- تغییرات دما روی محور z در لحظه $t=1$ sec مثال سوم



شکل ۱۶- تغییرات دما بر حسب زمان برای نقطه $(0,0,0)$ ، مثال سوم

moving laser heat source. Opt Lasers Eng 6: 137-143.

- [6] Nisar A, Schmidt MJJ, Sheikh MA, Li L (2003) Three-dimensional transient finite element analysis of the laser enameling process and moving heat source and phase change considerations. Proc Inst Mech Eng B J Eng Manuf 217: 753-764.
- [7] Yang CY (2006) The determination of two moving heat sources in two-dimensional inverse heat problem. Appl Math Model 30: 278-292.
- [8] Zdeněk V, Milan H, Jiří M (2016) 3D model of laser treatment by a moving heat source with general distribution of energy in the beam. Appl Opt 55: 140-150.

[۹] میکاییلی ص، بهجت ب (۱۳۹۵) تحلیل سه‌بعدي خمش ورق هدفمند ضخیم با استفاده از روش بدون المان گلرکین در شرایط مرزی مختلف. مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها ۱۲۰-۱۰۹: ۲(۶).

[۱۰] تورنجی پور پ، خسروی فردا، وطن خواه ر (۱۳۹۷) تحلیل ورق‌های تحت بارگذاری متمرکز دارای حرکت با استفاده از یک روش بدون المان با بازچیدمان گرهی تطبیقی. مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها ۲۵-۱۱: ۴(۸).

- [11] Shiah YC, Guao TL, Tan CL (2005) Two-dimensional BEM thermoelastic analysis of anisotropic media with concentrated heat sources. CMES 7: 321-338.
- [12] Hematiyan MR, Mohammadi M, Aliabadi MH (2011) Boundary element analysis of two- and three-dimensional thermo-elastic problems with various concentrated heat sources. J Strain Anal Eng 46: 227-242.

مثال‌ها، از نتایج بدست آمده از روش المان محدود با شبکه بندی ریز و اندازه گام زمانی کوچک، به عنوان حل مرجع استفاده شده است. در مدل‌سازی منابع حرارتي متحرک نقطه‌اي به روش المان محدود، دشواری‌هایی وجود دارد و لازم است که شبکه‌بندی المان‌ها در مسیر عبور منبع حرارتي متحرک نقطه‌اي به اندازه‌ی کافی ریز باشد و یا از یک استراتژی شبکه‌بندی مجدد استفاده شود. در مقایسه با روش المان محدود، روش جواب‌هاي اساسي پیشنهاد شده در این تحقیق، بسیار ساده و موثر است و با استفاده از تعداد کمی از نقاط چشمه به نتایج بسیار خوبی می‌رسد.

۶- مراجع

- [1] Jaeger JC (1942) Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts. Proc R Soc New South Wales 76: 203-224.
- [2] Levin P (2008) A general solution of 3-D quasi-steady-state problem of a moving heat source on a semi-infinite solid. Mech Res Commun 35: 151-157.
- [3] Belghazi H, El Ganaoui M, Labbe JC (2010) Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source. Int J Therm Sci 49: 311-318.
- [4] Sobamowo GM, Jaiyesimi L, Waheed AO (2017) Transient three-dimensional thermal analysis of a slab with internal heat generation and heated by a point moving heat source. JMEE 18: 43-64.
- [5] Ascough J (1985) A single step finite element analysis of the temperature distribution around a

- Carlo method for diffusion equations. *Int J Numer Meth Eng* 43: 1421-1435.
- [19] Young DL, Tsai CC, Murugesan K, Fan CM, Chen CW (2004) Time dependent fundamental solutions for homogeneous diffusion problems. *Eng Anal Bound Elem* 28: 1463-1473.
- [20] Chantasiriwan S (2006) Methods of fundamental solutions for time dependent heat conduction problems. *Int J Numer Meth Eng* 66: 147-165.
- [21] Johansson BT, Lesnic D, Reeve T (2011) A method of fundamental solutions for two dimensional heat conduction. *Int J Comput Math* 88: 1697-1713.
- [22] Reeve T, Johansson BT (2013) The method of fundamental solutions for a time-dependent two-dimensional Cauchy heat conduction problem. *Eng Anal Bound Elem* 37: 569-578.
- [23] Johansson B, Lesnic D (2008) A method of fundamental solutions for transient heat conduction. *Eng Anal Bound Elem* 32: 697-703.
- [24] Hansen PC (1992) Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM Rev* 34(4): 561-580.
- [13] Mohammadi M, Hematiyan MR, Shiah YC (2018) An efficient analysis of steady-state heat conduction involving curved line/surface heat sources in two/three-dimensional isotropic media. *J Theor App Mech* 56: 1123-1137.
- [14] Ghiasi N, Khosravifard A (2019) A Novel method for estimation of intensity and location of multiple point heat sources based on strain measurement. *Eng Anal Bound Elem* 98: 203-216.
- [15] Haghghi A, Hematiyan MR (2018) Optimization of the cross-section of hollow bars under torsion using the method of fundamental solutions. *MME* 17(11): 269-276. (in Persian)
- [16] Mathon R, Johnston RL (1977) The approximate solution of elliptic boundary value problems by fundamental solutions. *SIAM J Numer Anal* 14(4): 638-650.
- [17] Fairweather G, Karageorghis A (1998) The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Adv Comput Math* 9: 69-95.
- [18] Chen CS, Golberg MA, Hon YC (1998) The method of fundamental solutions and quasi-Monte-