

رفتار ارتعاشاتی میکروتیر مدرج محوری ویسکو الاستیک چرخان با حرکت طولی تحت بار محوری در میدان مغناطیسی براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده

علی فروغی^۱ و علی ابراهیمی ممغانی^{۲*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

^۲ دکتری تخصصی، دانشکده مهندسی برق، مکانیک و کامپیوتر، دانشگاه ایوان کی، ایوان کی، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۲

چکیده

رفتار ارتعاشاتی یک میکروتیر مدرج محوری با جفت حرکت‌های محوری و چرخشی تحت بارهای محوری در یک میدان مغناطیسی براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده بررسی شده است. یک مطالعه مفصل به منظور تحلیل اثر فاکتورهای مختلف مانند نرخ درجه‌بندی محوری مواد، نوع توزیع مواد، ضریب ویسکوزیته، شدت میدان مغناطیسی، پارامتر مقیاس طولی ماده، چرخش و حرکت عبوری کوپل بر مشخصات دینامیکی سیستم انجام شده است. فرض شده است، مشخصات مادی سیستم در راستای طولی به صورت خطی یا نمایی تغییر می‌کنند. با استفاده از تکنیک گسسته سازی گالرکین و تحلیل مقدار ویژه، سرعت‌های محوری و چرخشی بحرانی سیستم به دست می‌آیند. یک روش تحلیلی نیز برای شناسایی آستانه‌های ناپایداری سیستم به کار برده شده است. نقشه‌های پایداری سیستم آزموده شدند و نشان داده شده است که با افزایش شدت میدان مغناطیسی و پارامتر مقیاس طولی، پایداری سیستم بهبود می‌یابد؛ همچنین نتایج نشان داده‌اند که با تعیین هم‌زمان گرادینان چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی، می‌توان اثرات مخرب نیروی محوری فشاری را کاهش داد.

کلمات کلیدی: مواد مدرج تابعی محوری؛ میکروتیر متحرک محوری و چرخان؛ ارتعاشات کوپل؛ تحلیل دایورژنس و فلاتر؛ میدان مغناطیسی.

Vibrational Behavior of Viscoelastic AFG Rotating Micro-Beam with Longitudinal Motion under Axial Load in Magnetic Field Based on the Modified Couple Stress Theory

A. Forooghi¹, A. Ebrahimi-Mamaghani^{2,*}

¹ MSc. Student, Mech. Eng., Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

² PhD, Faculty of Electrical, Mechanical and Computer Engineering, University of Eyvanekey, Eyvanekey, Iran.

Abstract

The vibrational behavior of an axially graded micro-beam with both axial and rotational motion under axial load have been studied in the magnetic field. A detailed parametric study was performed to explain the effect of various factors such as range of axial graded of materials, type of material distribution, viscosity coefficient, and magnetic field strength, length scale parameter of material, rotation and coupling crossing motion on the dynamical characteristics of the system. It is assumed that the material properties of the system change linearly or exponentially in the longitudinal direction. The critical axial and rotational speeds of the system are obtained by using Galerkin discretization technique and eigenvalue analysis. An analytical method has also been used to identify system instability thresholds. System stability maps were tested, and it has been shown that by increasing the magnetic field strength and the length scale parameter, the system stability can be improved. The results also show that the simultaneous determination of density gradient and elastic modulus in the longitudinal direction can reduce the destructive effects of compressive axial load.

Keywords: Axially Functionally Graded Material; Axially Moving and Rotary Micro-Beam; Coupled Vibrations; Investigation of the Divergence and the Flutter; Magnetic Field.

۱- مقدمه

دینامیک میکرو/ماکروسازه‌های متحرک محوری، موضوع شمار زیادی از پژوهش‌های علمی در طول سال‌های گذشته بوده است [۱-۷]؛ همچنین، میکرو/ماکروسازه‌های چرخان به دلیل کاربردهای گسترده در صنایع مهندسی مختلف، توسط پژوهشگران بی‌شماری مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۸-۱۴]. مواد مدرج نوع خاصی از مواد مرکب هستند که خواص ترمومکانیکی شان در راستای مشخصی از جسم، به صورت نرم و پیوسته تغییر می‌کنند. در مقایسه با مواد همگن و لایه‌ای مرسوم، مواد مدرج ویژگی‌های عالی مانند، چقرمگی شکست بالاتر، تمرکز تنش کمتر، مقاومت خوردگی و دمایی بهتر را نمایش می‌دهند [۱۵-۲۰]. به همین دلیل، به کارگیری مواد مدرج در سازه‌های متحرک محوری می‌تواند منجر به نتایج برجسته شود. در این زمینه، کیانی [۲۱] ناپایداری‌های عرضی و طولی نانوتیر متحرک ساخته شده از مواد مدرج را بررسی کرد. نتایج او نشان می‌دهد، اثر پارامتر کوچکی اندازه روی فرکانس، به مرتبه مود و سرعت نانوتیر متحرک مدرج تابعی وابستگی قابل ملاحظه‌ای دارد؛ همچنین، ترکیب مواد مدرج و سازه‌های چرخان توسط محققان متعددی مطالعه شده است. به طور مثال، لی و ژانگ [۲۲] پاسخ دینامیکی تیرهای مخروطی مدرج تابعی محوری چرخان را با روش بی-اسپلاین مطالعه کردند. آن‌ها اثرات نسبت مخروطی، ناهمگنی ماده، سرعت دورانی و شعاع توپی را بر روی دینامیک سیستم بررسی کردند.

تیرهای چرخان متحرک محوری، یکی از حیاتی‌ترین المان‌ها در سازه‌های مکانیکی هستند و کاربردهای حساسی در ماشین‌های حفاری، رشته‌های حفاری چاه‌های نفت، میل گاردان‌های خودرو و اجزا متحرک روی ماهواره‌های چرخان دارند. به دلیل داشتن هم‌زمان حرکت محوری و حرکت چرخشی، این سیستم‌های بایژروسکوپی، دارای پویایی دینامیکی غنی بین سیستم‌های ژيروسکوپیک هستند؛ اما علیرغم اهمیت بالای این سازه‌های کاربردی، مطالعات محدودی در زمینه مدل‌سازی ریاضی و تحلیل دینامیکی آن‌ها انجام شده است. در این زمینه، ژو و چانگ [۲۳]، پاسخ ارتعاشی و پایداری یک تیر چرخان متحرک محوری را بر اساس تئوری تیر رایلی مطالعه کردند. آن‌ها نشان دادند که با افزایش ممان اینرسی، نواحی پایداری سیستم کوچک

می‌شوند. یانگ و همکاران [۲۴]، دینامیک تیر چرخان متحرک محوری را بررسی کردند. آن‌ها فرکانس‌های طبیعی و نقاط انشعاب سیستم را به ازای تغییرات سرعت محوری و سرعت دورانی به دست آوردند. برخلاف سازه‌های چرخان متحرک همگن، ادبیات فنی موجود روی تحلیل ارتعاشاتی سیستم‌های چرخان متحرک کامپوزیتی محدودتر است. قایش و همکاران [۲۵]، تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک روتور همراه با حرکت محوری را انجام دادند. آن‌ها با به کارگیری روش مقیاس چندگانه، فرکانس‌های غیرخطی و محدوده‌های پایداری پاسخ حالت ماندگار را به دست آوردند. صاحبکار و همکاران [۲۶]، ارتعاشات غیرخطی یک رشته حفاری متحرک محوری در یک چاه اریب را بررسی کردند. آن‌ها اثرات جرم نامتوازن و نیروی غیرخطی سیال بر پاسخ دینامیکی و مودهای غیرخطی را مطالعه کردند. اخیراً لی و همکاران [۲۷]، مشخصه‌های کوپل شده ارتعاشاتی یک تیر کامپوزیتی جدار نازک چرخان متحرک محوری را مطالعه کردند. آن‌ها اثرات مشخصه‌های هندسی همچون، نسبت‌های طول و ضخامت به شعاع و خواص مواد نظیر زاویه جهت بندی الیاف را روی رفتار دینامیکی بررسی کردند.

بر طبق اطلاعات نویسنندگان، تحلیل ارتعاشاتی میکروتیرهای مدرج محوری با جفت حرکت محوری و دورانی تحت نیروی محوری و میدان مغناطیسی براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده تا به حال مطالعه نشده است؛ همچنین اثر به کارگیری مواد مدرج تابعی، نیروهای محوری و میدان مغناطیسی و پارامتر مقیاس طولی بر رفتار ارتعاشاتی و پایداری دینامیکی سیستم‌های بایژروسکوپی تاکنون گزارش نشده است. ابتدا در بخش ۲، معادلات دینامیکی سیستم استخراج می‌شوند. سپس در بخش ۳، برای استخراج معادلات کاهش مرتبه یافته، تکنیک گسسته سازی گالرکین استفاده می‌شود. در ادامه، مسئله مقدار ویژه در بخش ۴ انجام می‌شود. نهایتاً، برای اطمینان از درستی روش مورد استفاده در پژوهش حاضر، نتایج به دست آمده با نتایج موجود در ادبیات مقایسه می‌شوند. سپس، اثر پارامترهای کلیدی بر مرزهای پایداری و مشخصات دینامیکی سیستم بحث می‌شوند؛ همچنین مرزهای دایورژنس سیستم به صورت تحلیلی و عددی به دست آمده و مقایسه می‌شوند. در نهایت، نیز بعضی از نتایج مهم بیان خواهند شد.

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (۷)$$

$$\sigma_{xx} = E(x)\varepsilon_{xx} + \beta \frac{D}{Dt} \varepsilon_{xx} \quad (۸)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -Gl^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۹)$$

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (۱۰)$$

$$m_{xz} = m_{zx} = -Gl^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (۱۱)$$

$$\chi_{xz} = \chi_{zx} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (۱۲)$$

که w و v به ترتیب جابجایی عرضی در راستای محورهای y و z هستند. ضمناً ضریب ویسکوزیته، کرنش طولی، ε_{xx} ، تنش محوری، m قسمت انحرافی تنش کوپل و χ قسمت متقارن تنش انحنا است. انرژی پتانسیل چنین است:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2m_{xy} \chi_{xy} + 2m_{xz} \chi_{xz}) A dx \quad (۱۳)$$

انرژی جنبشی سیستم این چنین بیان می شود [۲۴]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A \left(u^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - \Omega w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega v \right)^2 \right) dx \quad (۱۴)$$

کار نیروی محوری و مغناطیسی نیز مطابق رابطه (۱۵) بدست می آید [۳۳-۳۲]:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L (P - N_M) \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (۱۵)$$

که نیروی ناشی از میدان مغناطیسی عبارت است از [۳۴]:

$$N_M = \theta AB^2 \quad (۱۶)$$

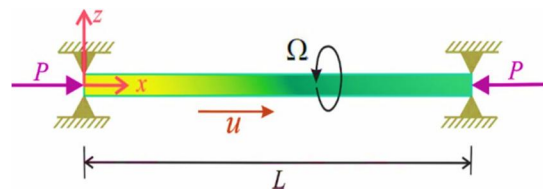
که θ ضریب نفوذپذیری و B شدت میدان مغناطیسی است. برای استخراج معادلات از اصل همیلتون استفاده می شود:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W - V) dt = 0 \quad (۱۷)$$

براساس اصل همیلتون، معادلات دینامیکی و شرایط مرزی سیستم دوسرمفصل طبق روابط (۱۸-۲۱) استخراج می شوند:

۲- مدل سازی ریاضی

شکل ۱ شماتیک یک میکروتیر دو سر مفصل با حرکت های محوری و دورانی را نشان می دهد. تیر نسبت به محور طولی متقارن است و تحت نیروی محوری فشاری P است. تیر به صورت همزمان با سرعت ثابت u در راستای محوری حرکت می کند و با سرعت دورانی Ω می چرخد. طول تیر L ، ممان اینرسی آن I و سطح مقطع آن نیز A است.



شکل ۱- شماتیک سیستم مدرج با حرکت محوری و دورانی

فرض می شود که چگالی، $\rho(x)$ و مدول الاستیک، $E(x)$ ، در راستای طولی تیر به صورت خطی یا نمایی تغییر می کنند:

$$\rho(x) = \rho_0 g(x) \quad (۱)$$

$$E(x) = E_0 f(x) \quad (۲)$$

که ρ_0 و E_0 چگالی و مدول الاستیک در ابتدای تیر هستند:

$$g(x) = 1 + \frac{x}{L} (\alpha_\rho - 1) \quad \text{or} \quad g(x) = e^{\frac{x \ln(\alpha_\rho)}{L}} \quad (۳)$$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{L} (\alpha_E - 1) \quad \text{or} \quad f(x) = e^{\frac{x \ln(\alpha_E)}{L}} \quad (۴)$$

در روابط ۵ و ۶، α_ρ و α_E به ترتیب پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک هستند و چنین تعریف می شوند:

$$\alpha_\rho = \frac{\rho_L}{\rho_0} \quad (۵)$$

$$\alpha_E = \frac{E_L}{E_0} \quad (۶)$$

در روابط ۵ و ۶، ρ_L و E_L چگالی و مدول الاستیک در انتهای تیر هستند. با در نظرگیری رابطه خطی کرنش-جابجایی و معادله ترکیبی اساسی ماده ویسکوالاستیک براساس مدل کلون-وویت و تئوری تنش کوپل، می توان نوشت [۲۸-۳۱]:

$$\begin{aligned}
 &g(x)(\ddot{v} + 2u\dot{v}' - 2\Omega\dot{w} + u^2v'' - 2u\Omega w' \\
 &\quad - \Omega^2v) + \lambda(x)u(\dot{v} + uv' - \Omega w) \\
 &\quad + (P - \psi)v'' + (\mu + f(x))v'''' \\
 &\quad + 2\gamma(x)v'''' + \mu(x)v'' \\
 &\quad + \eta(\dot{v}'''' + uv''''') = 0 \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &g(x)(\ddot{w} + 2u\dot{w}' + 2\Omega\dot{v} + u^2w'' + 2u\Omega v' \\
 &\quad - \Omega^2w) + \lambda(x)u(\dot{w} + uw' + \Omega v) \\
 &\quad + (P - \psi)w'' + (\mu + f(x))w'''' \\
 &\quad + 2\gamma(x)w'''' + \mu(x)w'' \\
 &\quad + \eta(\dot{w}'''' + uw''''') = 0 \quad (24)
 \end{aligned}$$

۳- روش گسسته سازی

برای گسسته‌سازی معادلات و به دست آوردن معادله مرتبه کاهش یافته، از روش گالرکین استفاده می‌شود. جابجایی‌های عرضی سیستم طبق روابط (۲۵-۲۶) تخمین زده می‌شوند:

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^n q_j(t)\phi_j(x) \quad (25)$$

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^n p_j(t)\phi_j(x) \quad (26)$$

در آن n تعداد مودهای در نظر گرفته شده، q و p به ترتیب مختصات تعمیم یافته وابسته به زمان در راستای محورهای y و z هستند؛ همچنین، ϕ تابع تخمینی برای جابجایی عرضی سیستم در راستای محورهای y و z هستند [۲۴]:

$$\phi_j(x) = \sqrt{2} \sin(j\pi x) \quad (27)$$

با جایگذاری روابط ۲۵-۲۶ در معادلات ۲۳ و ۲۴ و به کارگیری روش گالرکین، معادلات گسسته به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \\ -\mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Q}} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (28)
 \end{aligned}$$

که در آن:

$$\mathbf{Q} = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 &(GAL^2 + E(x)I)v'''' + 2E'(x)Iv'''' \\
 &\quad + E''(x)Iv'' + \beta I(\dot{v}'''' + uv''''') \\
 &\quad + (P - N_M)v'' + \rho'(x)Au(\dot{v} + uv' - \Omega w) \\
 &\quad + \rho(x)A(\ddot{v} + 2u\dot{v}' - 2\Omega\dot{w} \\
 &\quad + u^2v'' - 2u\Omega w' - \Omega^2v) = 0 \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(GAL^2 + E(x)I)w'''' + 2E'(x)Iw'''' \\
 &\quad + E''(x)Iw'' + \beta I(\dot{w}'''' + uw''''') \\
 &\quad + (P - N_M)v'' + \rho'(x)Au(\dot{w} + uw' + \Omega v) \\
 &\quad + \rho(x)A(\ddot{w} + 2u\dot{w}' + 2\Omega\dot{v} \\
 &\quad + u^2w'' + 2u\Omega v' - \Omega^2w) = 0 \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$v(0) = w(0) = v(L) = v(L) = 0 \quad (20)$$

$$v''(0) = w''(0) = v''(L) = v''(L) = 0 \quad (21)$$

که پریم و دات به ترتیب بیانگر مشتق نسبت به x و t هستند. برای استخراج روابط بی بعد، پارامترهای (۲۲) تعریف می‌شوند:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad v^* = \frac{v}{L}, \quad w^* = \frac{w}{L},$$

$$\mu = \frac{GAL^2}{EI}, \quad \psi = \frac{\theta AB^2 L^2}{EI}$$

$$t^* = t \sqrt{\frac{E_0 L^2}{\rho_0 A}}, \quad u^* = \frac{u}{L^2} \sqrt{\frac{\rho_0 A}{E_0}}$$

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{L} \sqrt{\frac{\rho_0 A}{E_0}}, \quad P^* = \pm \frac{PL^2}{EI}$$

$$\eta = \frac{\beta L}{\sqrt{\rho_0 A E_0}}, \quad \lambda(x^*) = g'(x)L,$$

$$\gamma(x^*) = f'(x)L, \quad \mu(x^*) = f''(x)L^2 \quad (22)$$

که ψ پارامتر میدان مغناطیسی، μ پارامتر مقیاس طولی و η ضریب ویسکوالاستیک است. در نیروی محوری (P^*)، علامت‌های مثبت و منفی، به نیروهای فشاری و کششی ارجاع داده می‌شوند. معادلات دینامیکی بدون بعد به دست می‌آیند:

$$E = \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ -K_2 & K_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, Z(\tau) = \begin{bmatrix} Q \\ P \\ \dot{Q} \\ \dot{P} \end{bmatrix} \quad (37)$$

حال با فرض راه حل $Z= Ae^{\lambda t}$ معادله مرتبه کاهش یافته (۳۶) منجر به مسئله مقدار ویژه (۳۸) می شود:

$$YA - \lambda I = 0 \quad (38)$$

که I ماتریس همانی است، λ مقدار ویژه مختلط سیستم است و $Y = -B^{-1}E$. قسمت موهومی مقدار ویژه ($\omega = \text{Image}(\lambda)$) به فرکانس طبیعی ارتعاشات و قسمت حقیقی ($\delta = \text{Real}(\lambda)$) به دمپینگ مربوط می شود. هنگامی که $\omega=0$ سیستم دچار دایورژنس می شود و هنگامی که $\delta > 0$ است، در سیستم ناپایداری فلاتر رخ خواهد داد.

۵- بحث و نتایج

۵-۱- اعتبارسنجی مدل

در جدول ۱ آزمون همگرایی برای روش گالرکین ارائه شده است. مطابق این جدول و مرجع [۲۴]، برای استخراج نتایج می توان از شش مود در سیستم بهره برد. در شکل ۲، قسمت موهومی و حقیقی دو مقدار ویژه اول ماکروتیر همگن هنگامی که $\Omega=5$ است رسم شده است. نتایج پژوهش حاضر با نتایج یانگ و همکاران [۲۴] تطابق خوبی دارد.

جدول ۱- آزمون همگرایی برای روش گالرکین
($P=\eta=\mu=0, u=1, \Omega=5$)

تعداد مود (n)	فرکانس بی بعد			
	اول	دوم	سوم	چهارم
۱	۳/۱۲۵	-	-	-
۲	۳/۵۰۱	۱۲/۸۶۴	-	-
۳	۳/۹۲۴	۱۳/۱۲۸	۳۳/۸۸۱	-
۴	۴/۱۰۱	۱۳/۳۵۹	۳۳/۹۰۴	-
۵	۴/۲۶۵	۱۴/۲۶۴	۳۴/۰۶۸	۴۴/۰۷۸
۶	۴/۲۶۵	۱۴/۲۶۴	۳۴/۰۶۸	۴۴/۰۷۸

$$P = [p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)]^T \quad (30)$$

$$(M_1)_{sr} = \int_0^1 g(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx \quad (31)$$

$$(G_1)_{sr} = u \int_0^1 2g(x) \phi_s(x) \phi_r'(x) dx + u \int_0^1 \lambda(\xi) \phi_s(x) \phi_r(x) dx + \eta \int_0^1 \phi_s(x) \phi_r''''(x) dx \quad (32)$$

$$(G_2)_{sr} = -2u \int_0^1 2g(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx \quad (33)$$

$$(K_1)_{sr} = u^2 \int_0^1 g(x) \phi_s(x) \phi_r''(x) dx - \Omega^2 \int_0^1 g(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx + u^2 \int_0^1 \lambda(x) \phi_s(x) \phi_r'(x) dx + (P - \psi) \int_0^1 \phi_s(x) \phi_r''(x) dx + \int_0^1 (\mu + f(x)) \phi_s(x) \phi_r''''(x) dx + 2 \int_0^1 \gamma(x) \phi_s(x) \phi_r''''(x) dx + \int_0^1 \mu(x) \phi_s(x) \phi_r''(x) dx + \eta u \int_0^1 \phi_s(x) \phi_r''''(x) dx \quad (34)$$

$$(K_2)_{sr} = -2u\Omega \int_0^1 g(x) \phi_s(x) \phi_r'(x) dx - u\Omega \int_0^1 \lambda(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx \quad (35)$$

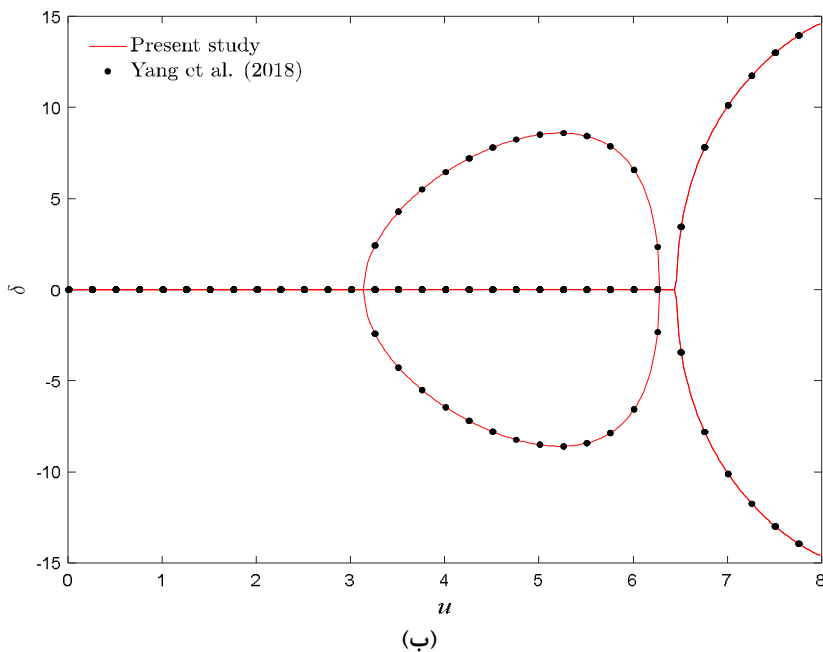
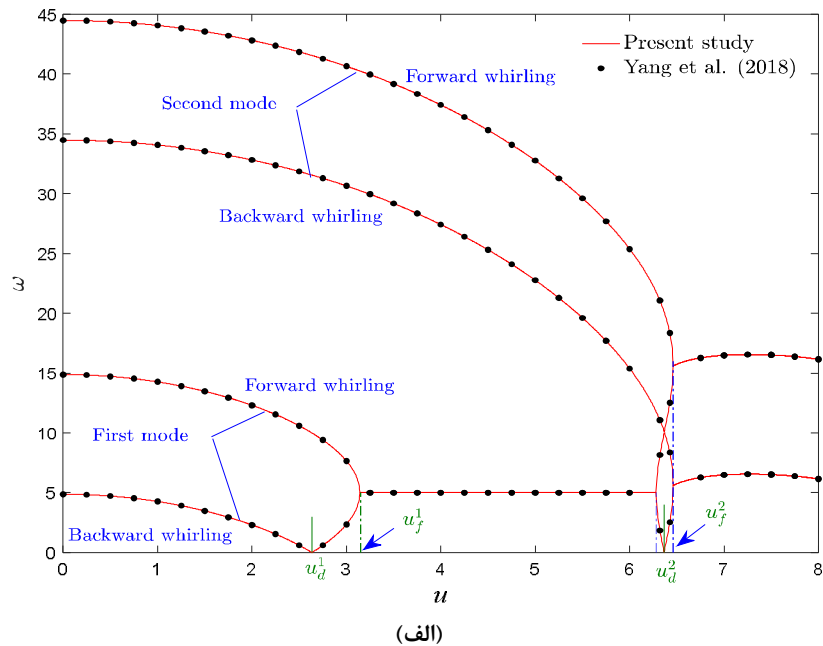
۴- حل تحلیلی

معادله ماتریسی مرتبه دوم حرکت سیستم را می توان به فرم مرتبه اول زیر کاهش داد:

$$B\dot{Z}(\tau) + EZ(\tau) = 0 \quad (36)$$

که در آن:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ -G_2 & G_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$



شکل ۲- الف) قسمت موهومی و ب) حقیقی دو مقدار ویژه اول تیر همگن به ازای $P=\mu=\eta=0, \Omega=5$

می‌کنند. به بیان دیگر، مطابق شکل ۲، در مقایسه با سیستم‌های مونوژیروسکوپیک، سیستم‌های بایژیروسکوپیک با افزایش سرعت محوری، می‌توانند دو سرعت مختلف دایورژنس ($u_d^1=2.63$ و $u_d^2=3.36$) و دو سرعت مختلف فلاتر ($u_f^1=3.15$ و $u_f^2=6.46$) را تجربه کنند؛ همچنین هنگامی که

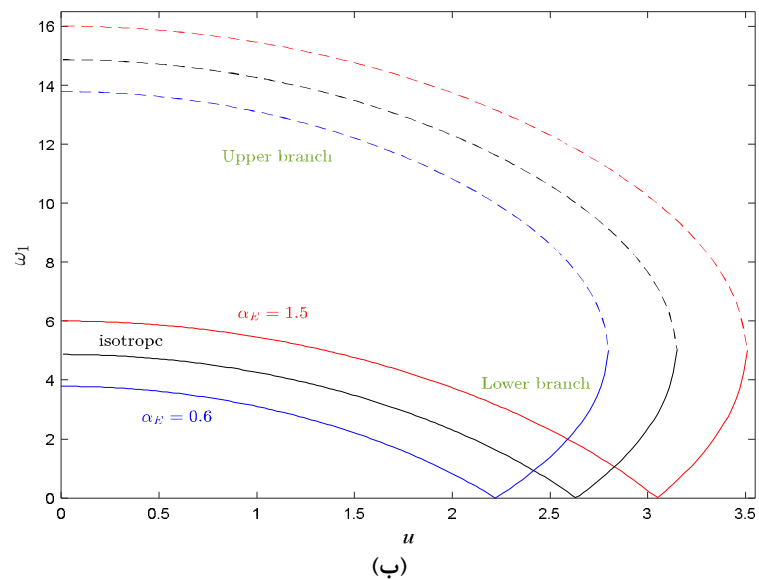
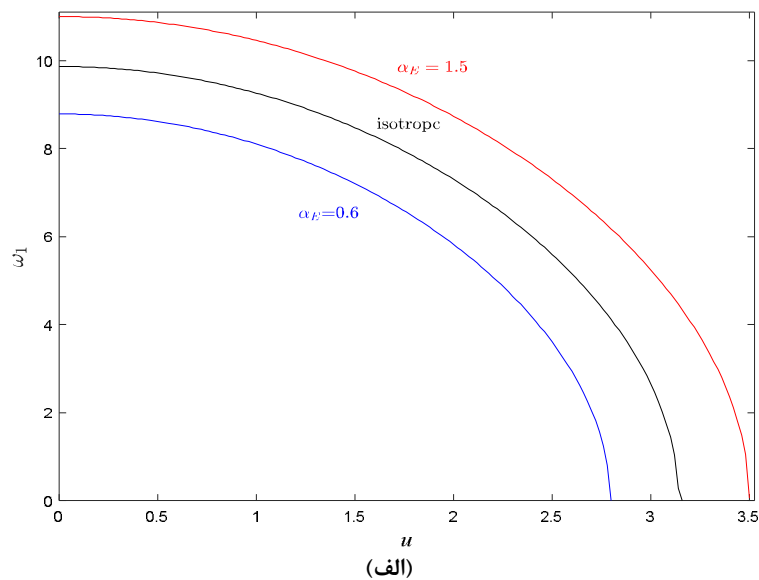
همان‌طور که مشاهده می‌شود، در مقایسه با تیرهای متحرک محوری و تیرهای چرخان، تیرهایی که هم‌زمان حرکت محوری و چرخشی دارند، روند تکامل پایداری "پایدار-مود اول دایورژنس-پایدار-ترکیب مودفلاتر-پایدار-مود اول دایورژنس-پایدار-ترکیب مودفلاتر" را تجربه

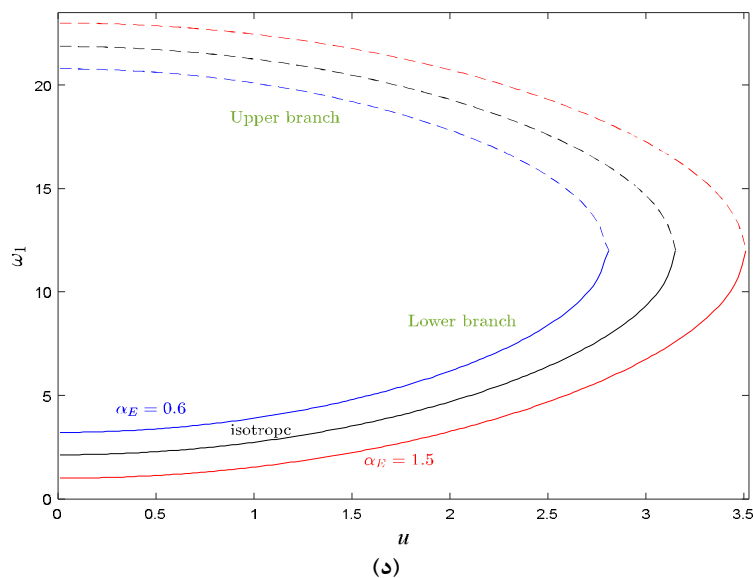
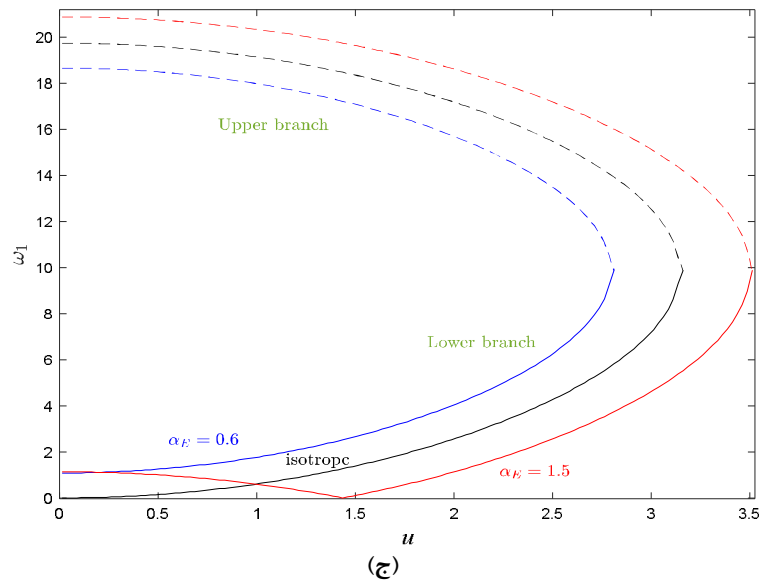
برحسب تغییرات سرعت محوری سیستم به ازای سرعت‌های دورانی مختلف رسم شده است. همچنان که در شکل ۳-الف مشاهده می‌شود، در نبود سرعت دوران در سیستم ($\Omega=0$)، فرکانس پایه‌ای سیستم یک شاخه دارد. در این حالت، با افزایش سرعت محوری، فرکانس پایه‌ای سیستم به‌طور یکنوا کاهش می‌یابد تا در سرعت محوری دایورژنس (u_d)، فرکانس پایه‌ای سیستم صفر می‌شود و بعد از آن سیستم در یک محدوده مشخصی از سرعت محوری متحمل پدیده دایورژنس می‌شود. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، با

دو مود باهم یکی می‌شوند، فلاتر رخ می‌دهد. ضمناً هنگامی که سیستم تحت دوران قرار می‌گیرد، در منحنی‌های فرکانسی، انشعاب (دوشاخگی) مشاهده می‌شود که در ادامه به آن می‌پردازیم.

۵-۲- اثر پارامتر گرادبان مدول الاستیک

در این بخش فرض می‌شود که مدول الاستیک سیستم به‌طور خطی در راستای طولی تیر درجه‌بندی شده است. در شکل‌های ۳ (الف-د)، تغییرات فرکانس پایه‌ای سیستم





شکل ۳- فرکانس سیستم بر حسب سرعت محوری به ازای $\alpha_p=1, P=\eta=\mu=0$ (الف $\Omega=0$ ، ب $\Omega=5$ ، ج $\Omega=9.87$ و د $\Omega=12$)

متحمل پدیده دایورژنس می‌شود. افزایش پارامتر گرادبان مدول الاستیک، منجر به ساختار سفت‌تر سیستم می‌شود. هنگامی که سیستم ترکیبی از حرکت محوری و دورانی دارد (شکل‌های ۳ ب-د)، به دلیل اثر ژيروسکوپیک کوریولیس، یک انشعاب در فرکانس‌های طبیعی رخ می‌دهد؛ در نتیجه فرکانس پایه‌ای سیستم به دو شاخه مجزای چرخش پسرو (شاخه پایینی) و چرخش پیشرو (شاخه بالایی) تقسیم می‌شود که این مطلب قبلاً در [۳۵] اثبات شده است. در این

افزایش پارامتر گرادبان مدول الاستیک، فرکانس پایه‌ای بعلاوه سرعت محوری دایورژنس سیستم افزایش می‌یابد. این روند را می‌توان با این حقیقت توجیه کرد که از آنجایی که پارامتر گرادبان مدول الاستیک، تنها در ماتریس سختیسیستم نقش دارد، بنابراین می‌توان گفت، افزایش پارامتر گرادبان مدول الاستیک، اثر افزایش سختی بر سیستم القا می‌کند؛ در نتیجه، با افزایش α_E مقاومت سیستم به دایورژنس افزایش پیدا می‌کند و سیستم در سرعت‌های بالاتر

محوری، به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند. در سرعت‌های دورانی زیاد (مثلاً $\Omega=12$)، در سیستم دایورژنس رخ نمی‌دهد (شکل ۳-د). در این حالت، با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، فرکانس‌های پایه‌ای پسر و پیشرو، به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابند. بر اساس شکل‌های ۳ الف-د، با افزایش سرعت دورانی سیستم، شاخه‌های فرکانس پایه‌ای سیستم به سمت مقادیر فرکانس‌های بیشتر جابجا می‌شوند؛ در نتیجه سرعت دایورژنس سیستم با افزایش سرعت دورانی سیستم کاهش می‌یابد تا اینکه در سرعت‌های دورانی زیاد، در سیستم دایورژنس رخ نمی‌دهد. ذکر این نکته حائز اهمیت است که تغییرات سرعت دورانی، روی سرعت فلاتر سیستم اثری ندارد، درحالی‌که با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک می‌توان سرعت‌های دایورژنس و فلاتر را به‌طور هم‌زمان به تأخیر انداخت.

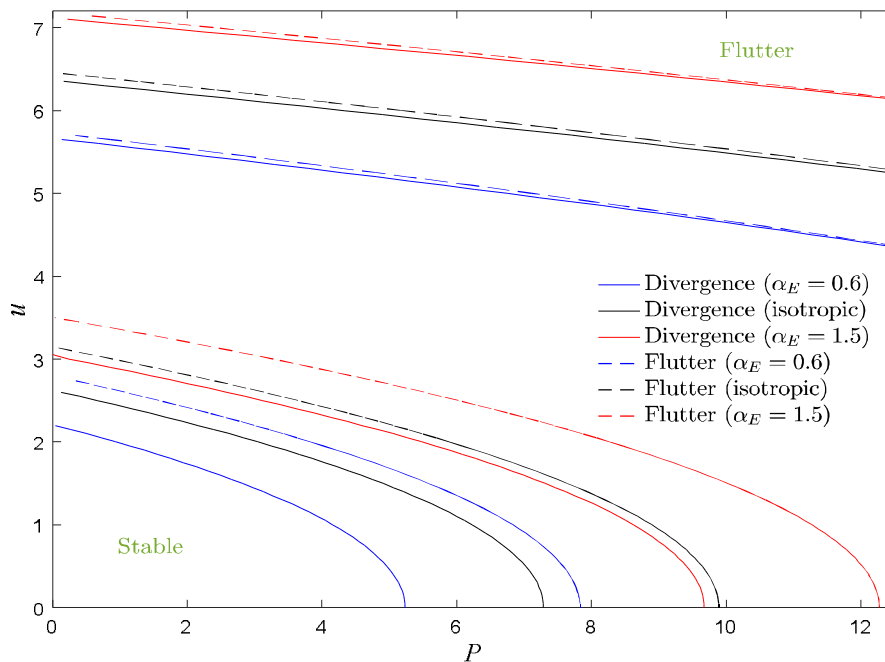
نقشه پایداری در صفحه $u-P$ در شکل ۴ به ازای $\Omega=5$ رسم شده است و سرعت‌های مربوط به دایورژنس و فلاتر نشان داده شده‌اند. سیستم به ازای تمامی سرعت‌های کمتر از اولین سرعت محوری دایورژنس ($u < u_d^1$) پایدار است؛ همچنین فراتر از دومین سرعت محوری فلاتر ($u < u_f^2$)، سیستم ناپایداری فلاتر را تجربه خواهد کرد. از آنجاکه با افزایش نیروی محوری فشاری سختی مؤثر سیستم کاهش می‌یابد، در نتیجه مناطق پایداری سیستم کوچک می‌شوند و مقاومت سیستم به دایورژنس و فلاتر کم می‌شود. به‌بیان‌دیگر، افزایش نیروی محوری فشاری، جابجایی مرزهای

حالت، حرکت‌های چرخشی پیشرو و پسر و برای دو مود اول به‌نوبت اتفاق می‌افتند و یک موج عرضی با پیکربندی فضایی در طول ارتعاشات ارائه می‌شود. اثر تغییرات سرعت محوری بر فرکانس پایه‌ای سیستم، وابسته به مقدار سرعت دورانی است. به‌طوری‌که مطابق شکل ۳-ب، در سرعت‌های دورانی کوچک (مثلاً $\Omega=5$)، ابتدا با افزایش سرعت محوری تیر فرکانس‌های پایه‌ای پسر و پیشرو به آرامی کاهش می‌یابند تا در یک سرعت محوری مشخص، فرکانس پایه‌ای پسر و صفر می‌شود و سیستم پدیده کماتش را تجربه می‌کند. بعد از آن، بلافاصله با افزایش سرعت محوری، سیستم مجدداً پایدار می‌شود. در این شرایط با افزایش بیشتر سرعت محوری، فرکانس پسر و روند افزایشی پیدا می‌کند، درحالی‌که فرکانس شاخه بالایی همچنان کاهش می‌یابد. این روند ادامه پیدا می‌کند تا در سرعت محوری فلاتر، شاخه‌های پایینی و بالایی فرکانس با یکدیگر تلاقی پیدا می‌کنند و باهم یکی می‌شوند و سیستم دچار پدیده فلاتر می‌شود و یک کوپلینگ فلاتر در دو جهت عرضی اتفاق می‌افتد. در این حالت جابجایی‌های سیستم با نوسان ناپایدار می‌شوند. با افزایش α_E سرعت‌های محوری متناظر پدیده‌های دایورژنس و فلاتر هر دو افزایش می‌یابند (جدول ۲).

همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای سرعت‌های محوری کمتر از سرعت محوری دایورژنس ($u < u_d$)، تغییرات محوری مواد اثر یکسانی بر شاخه‌های پایینی و بالایی فرکانس پایه‌ای سیستم دارد، به‌طوری‌که با افزایش α_E فرکانس‌های پیشرو و پسر سیستم افزایش می‌یابند؛ اما به ازای $u > u_d$ این اثر بر شاخه پایینی فرکانس پایه‌ای سیستم معکوس می‌شود. در سرعت‌های دورانی متوسط، سرعت محوری دایورژنس سیستم همگن به مقدار صفر نزدیک می‌شود. به‌طور مثال همان‌طور که در شکل ۳-ج مشاهده می‌شود، به ازای $\Omega=9.87$ ، سرعت محوری دایورژنس سیستم همگن برابر صفر می‌شود؛ در نتیجه به ازای $\alpha_E > 1$ ، از آنجاکه در سیستم دایورژنس رخ می‌دهد، رفتار دینامیکی سیستم و اثر گرادیان محوری مواد بر آن مشابه شکل ۳-ب است؛ اما به ازای $\alpha_E < 1$ ، در سیستم ناپایداری دایورژنس رخ نمی‌دهد و سیستم فقط ناپایداری فلاتر را تجربه می‌کند. در این حالت شاخه‌های پایینی و بالایی، با افزایش سرعت

جدول ۲- سرعت دایورژنس شکل‌های ۳ (الف-د)

	سرعت دایورژنس		
	$\alpha_E=1.5$	همگن	$\alpha_E=0.6$
$\Omega=0$	2.8	3.15	3.5
$\Omega=5$	3.05	2.62	2.22
$\Omega=9.87$	1.42	0	-
$\Omega=12$	-	-	-

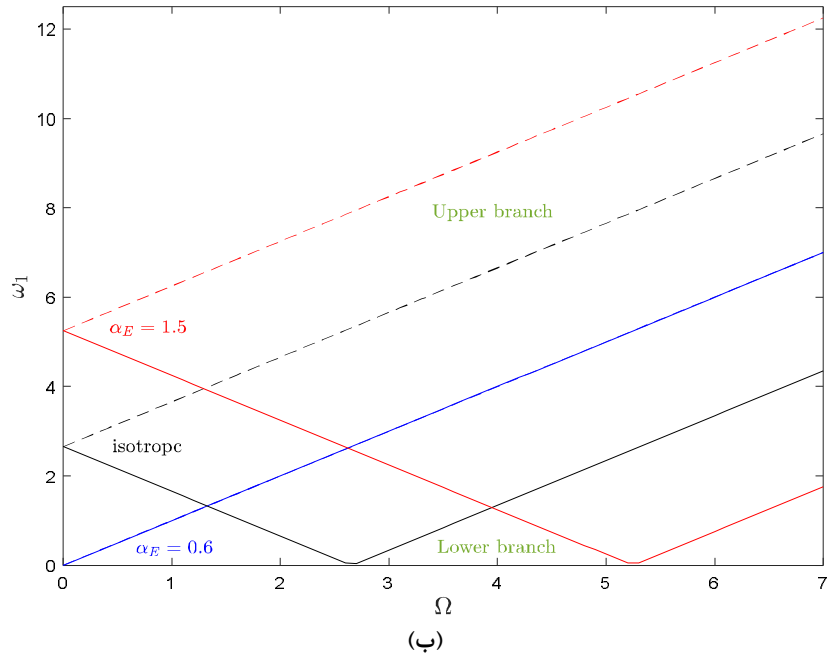
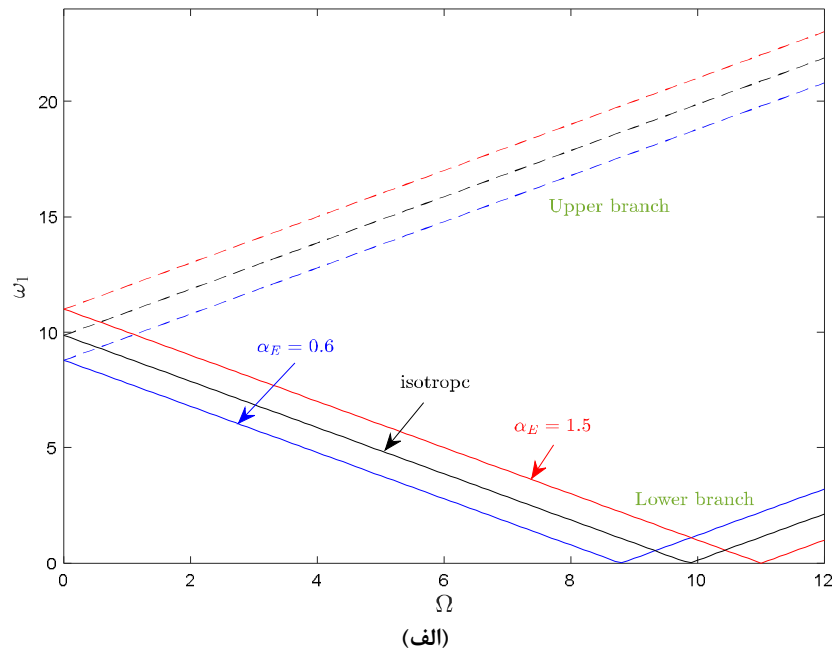


شکل ۴- سرعت‌های محوری دایورژنس و فلاتر سیستم بر حسب نیروی محوری به ازای $\Omega=5, \alpha_p=1, \mu=\eta=0$

می‌شود و سیستم دچار دایورژنس می‌شود. سرعت دورانی متناظر، سرعت دورانی دایورژنس (Ω_d) نامیده می‌شود. بعد از این نقطه، با افزایش بیشتر سرعت دورانی سیستم، فرکانس‌های پسر و پیشرو سیستم هر دو افزایش می‌یابند و شاخه‌های فرکانسی پایینی و بالایی سیستم باهم موازی می‌شوند. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، با کاهش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، سرعت دورانی دایورژنس سیستم کاهش می‌یابد. به ازای سرعت‌های دورانی کمتر از سرعت دورانی دایورژنس ($\Omega < \Omega_d$)، با کاهش α_E ، هردوی فرکانس‌های پایه‌ای پسر و پیشرو سیستم کاهش می‌یابند، در حالی که به ازای سرعت‌های دورانی بیشتر از سرعت دورانی دایورژنس ($\Omega > \Omega_d$)، فرکانس پایه‌ای پسر و با کاهش پارامتر گرادیان مدول الاستیک روند افزایشی دارد. مطابق شکل ۵-ب، هنگامی که سرعت محوری سیستم افزایش می‌یابد (مثلاً $u=3$)، در سیستم همگن فرکانس پایه‌ای پیشرو کاهش می‌یابد؛ اما فرکانس پایه‌ای پسر سیستم به ازای $\Omega < \Omega_d$ کاهش می‌یابد، در حالی که به ازای $\Omega > \Omega_d$ افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر در یک سرعت چرخشی یکسان، با افزایش سرعت محوری فرکانس پایه‌ای پیشرو سیستم کاهش می‌یابد؛ اما فرکانس پایه‌ای پسر سیستم

ناپایداری فلاتر و دایورژنس به سمت سرعت‌های کمتر را نتیجه می‌دهد؛ همچنین، همان‌طور که مشاهده می‌شود، افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، نقش تعیین‌کننده‌ای در جابجایی مرزهای پایداری دایورژنس و فلاتر به سرعت‌های بالاتر ایفا می‌کند. به بیان دیگر، در مقایسه با سیستم همگن، سرعت‌های محوری دایورژنس و فلاتر با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک افزایش می‌یابند و مناطق پایداری سیستم منبسط می‌شوند. اثر گرادیان محوری بر سرعت‌های دایورژنس و فلاتر اول محسوس‌تر است.

در شکل‌های ۵ (الف-ب)، فرکانس پایه‌ای تیر مدرج محوری بر حسب سرعت چرخشی به ازای سرعت‌های محوری مختلف هنگامی که $P=0$ است رسم شده است. بخش‌هایی از نمودار که دارای شیب منفی هستند، اشاره به فرکانس طبیعی پسر یا مود فرکانسی فرد و قسمت‌های دارای شیب مثبت مربوط به فرکانس طبیعی پیشرو یا مود فرکانسی زوج می‌باشند. بر اساس شکل ۵-الف، هنگامی که سیستم همگن تنها دارای حرکت دورانی است (یعنی $u=0$)، با افزایش سرعت دورانی، فرکانس پایه‌ای پیشرو، افزایش می‌یابد، در حالی که فرکانس پایه‌ای پسر کاهش می‌یابد. این روند ادامه می‌یابد تا فرکانس پایه‌ای پسر در یک سرعت دورانی مشخص صفر



شکل ۵- فرکانس پایه‌ای سیستم برحسب سرعت دورانی به ازای $\alpha_p=1$, $P=\eta=\mu=0$ (الف) $u=0$ (ب) $u=3$

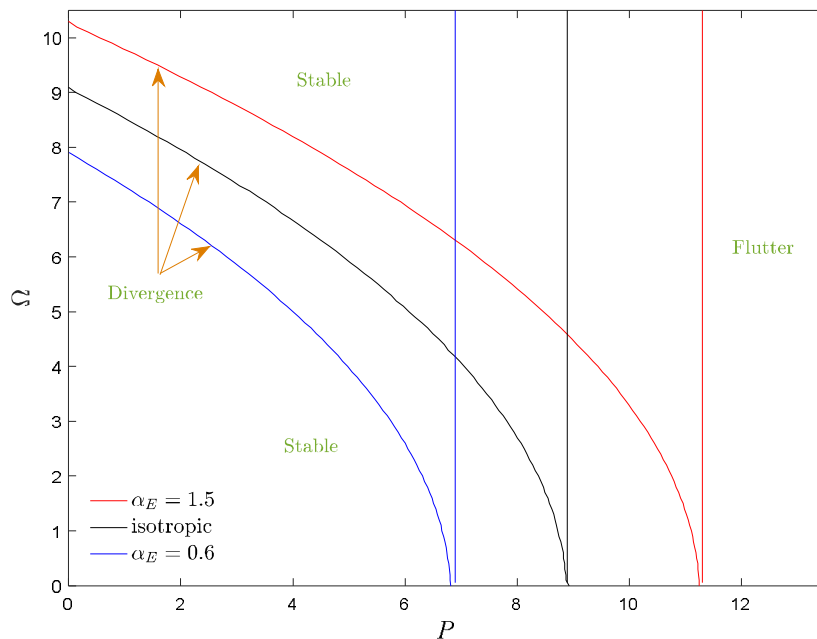
هستند. بر طبق شکل ۵ (الف-ب)، هنگامی شاخه‌های بالایی و پایینی فرکانس روی هم منطبق نباشند، سرعت چرخشی فلاتر سیستم از نظر تئوری بی‌نهایت است. در این حالت نیز با کاهش α_E ، سرعت دورانی دایورژنس و فرکانس‌های پایه‌ای پیشرو سیستم کاهش می‌یابند؛ همچنین با کاهش α_E

به ازای سرعت‌های دورانی کمتر و بیشتر از سرعت دورانی دایورژنس، به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد؛ همچنین با افزایش سرعت محوری، سرعت دورانی دایورژنس سیستم کاهش می‌یابند. با افزایش سرعت محوری سیستم، شاخه‌های فرکانس پایه‌ای سیستم بعد از دایورژنس موازی یکدیگر

می‌شود و سپس مجدداً پایدار می‌شود. به عبارت دیگر، برای سرعت‌های دورانی نسبتاً کم، ناپایداری اولیه همیشه از نوع دایورژنس است. همان‌طور که در این شکل مشخص است، دو ناحیه پایدار توسط مرز ناپایداری دایورژنس از هم جدا می‌شوند و پدیده دایورژنس فقط روی این مرز اتفاق می‌افتد و ناحیه ناپایداری دایورژنس وجود ندارد. به طور فیزیکی، در این حالت تیر در هر دو راستای عرضی کمانش می‌کند؛ همچنین از آنجایی که سیستم کانسرواتیو است، ناپایداری اولیه که در سیستم رخ می‌دهد، دایورژنس است. با افزایش بیشتر نیروی محوری فشاری، سیستم به ازای $P > 8.9$ از طریق ناپایداری فلاتر، پایداری خود را از دست می‌دهد و دیگر پایداری خود را به دست نمی‌آورد. به عبارت دیگر، در سمت راست خطوط قایم نشان داده شده، سیستم متحمل ناپایداری فلاتر می‌شود؛ همچنین به ازای سرعت‌های دورانی زیاد (مثلاً $\Omega > 9.1$)، سیستم ناپایداری دایورژنس را تجربه نمی‌کند و با افزایش نیروی فشاری محوری ابتدا پایدار است و سپس در سیستم ناپایداری فلاتر رخ خواهد داد. سیستم همگن، به ازای نیروهای محوری فشاری کم (مثلاً $P < 8.9$) می‌تواند پایدار باشد و ناپایداری دایورژنس را تجربه کند، اما به ازای $P > 8.9$ ، تنها ناپایداری فلاتر را متحمل می‌شود. نقشه پایداری

فرکانس پسر و سیستم به ازای $\Omega < \Omega_d$ و $\Omega > \Omega_d$ به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابد. مطابق شکل‌های ۵ (الف-ب)، با تغییرات α_E ، شاخه‌های فرکانس پایه‌ای سیستم به صورت موازی جابجا می‌شوند.

مطابق شکل ۵-ب، با کاهش پارامتر گردان مدول الاستیک (مثلاً $\alpha_E = 0.6$)، در رفتار دینامیکی سیستم، ناپایداری دایورژنس مشاهده نمی‌شود. در این حالت شاخه‌های پسر و پیشرو روی هم منطبق می‌شوند و سیستم پایداری خود را به ازای تمامی سرعت‌های دورانی از طریق ناپایداری فلاتر از دست می‌دهد. بر طبق شکل ۵ (الف-ب)، هنگامی شاخه‌های بالایی و پایینی فرکانس روی هم منطبق نباشند، سرعت چرخشی فلاتر سیستم از نظر تئوری بی‌نهایت است. براساس شکل‌های ۳ و ۵ می‌توان گفت، در مقایسه با حالت همگن، با تغییرات پارامتر گردان مدول الاستیک، می‌توان روند تکاملی پایداری سیستم را تغییر داد. نقشه پایداری سیستم در صفحه Ω - P در شکل ۶ به ازای $\mu=1$ رسم شده است و محدوده‌های مربوط به دایورژنس و فلاتر نشان داده شده‌اند. برای سیستم همگن، به ازای سرعت‌های دورانی کم (مثلاً $\Omega < 9.1$)، با افزایش P ، ابتدا سیستم پایدار است و در یک نیروی محوری مشخص متحمل ناپایداری دایورژنس



شکل ۶- نقشه پایداری سیستم در صفحه Ω - P به ازای $\mu=1, \alpha_p=1, \eta=\mu=0$

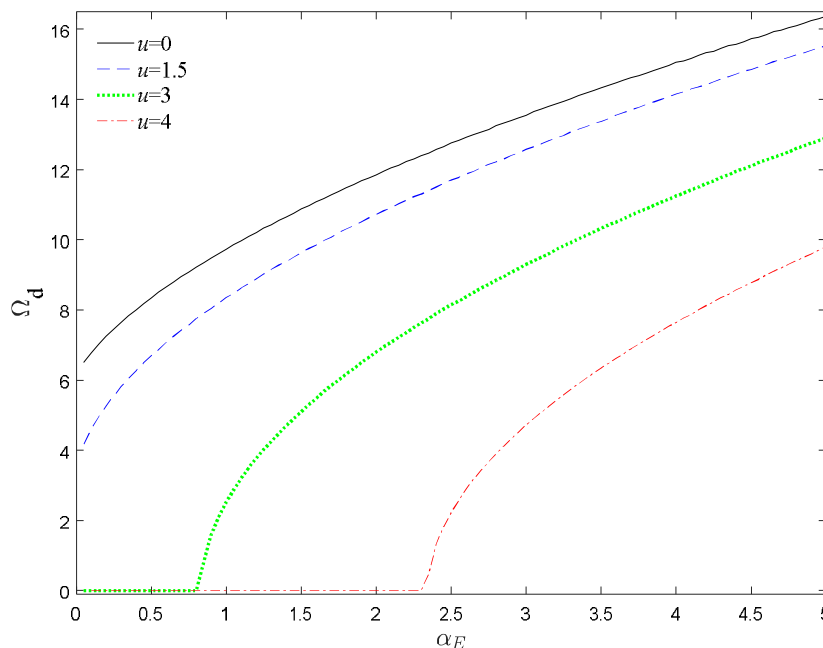
می‌یابند؛ همچنین برای سرعت‌های محوری بزرگ، به ازای مقادیر کوچک α_E ، سرعت دورانی دایورژنس ناپدید می‌شوند. در این حالت تیر متحرک محوری حتی در نبود حرکت چرخشی، در شرایط فلاتر قرار دارد که با افزایش سرعت محوری سیستم، محدوده رخداد ناپایداری فلاتر نیز افزایش می‌یابد.

۵-۳- اثر پارامتر گرادیان چگالی

در این بخش فرض می‌شود که چگالی سیستم به‌طور خطی در راستای طولی تیر درجه‌بندی شده است. برای بررسی اثرات تغییرات محوری چگالی بر رفتار ارتعاشاتی سیستم، تغییرات فرکانس پایه‌ای برحسب سرعت محوری در شکل ۸ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش α_p ، فرکانس‌های پایه‌ای پیشرو به ازای تمامی سرعت‌های محوری کاهش می‌یابد؛ همچنین، برای سرعت‌های محوری کمتر از سرعت محوری دایورژنس ($u < u_d$)، با افزایش پارامتر گرادیان چگالی فرکانس پایه‌ای پسرو کاهش می‌یابد، درحالی‌که برای $u > u_d$ این روند معکوس می‌شود. ضمناً همان‌طور که مشخص است، با افزایش α_p ، سرعت‌های محوری دایورژنس و

نشان می‌دهد که با افزایش سرعت دورانی تیر و در نتیجه افزایش اثرات ژيروسکوپیک در سیستم، نواحی پایداری گسترش می‌یابند. بر اساس شکل ۶، با افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک، مرزهای دایورژنس به سمت نیروهای محوری فشاری و سرعت‌های دورانی بیشتر جابجا می‌شوند.

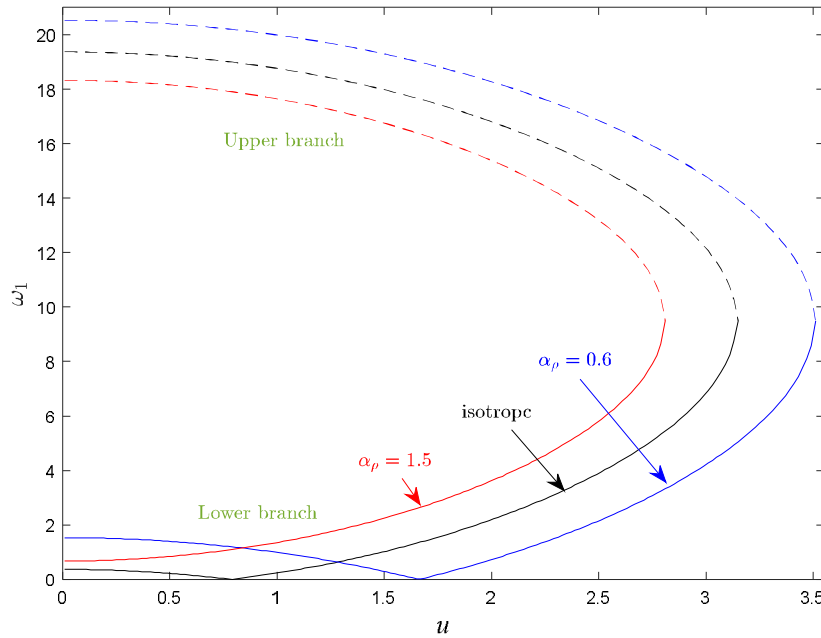
با افزایش α_E ناحیه پایداری اولیه برای سیستم بزرگ‌تر می‌شود. از آنجا که افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک خاصیت افزایش سختی دارد، در نتیجه محدوده فلاتر نیز به سمت نیروهای محوری بزرگ‌تر جابجا می‌شوند و پدیده فلاتر در نیروهای محوری فشاری بزرگ‌تر رخ می‌دهد. افزایش سرعت دورانی و سرعت محوری در سیستم، به ترتیب موجب کاهش سرعت محوری دایورژنس و سرعت دورانی دایورژنس می‌شود. به‌منظور بررسی بهتر رفتار دینامیکی سیستم، سرعت دورانی دایورژنس سیستم برحسب پارامتر گرادیان مدول الاستیک به ازای سرعت‌های محوری مختلف در شکل ۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، منحنی‌های سرعت دورانی دایورژنس سیستم به ازای تمامی سرعت‌های محوری با افزایش α_E افزایشی هستند. با افزایش سرعت محوری، سرعت‌های دورانی دایورژنس سیستم کاهش



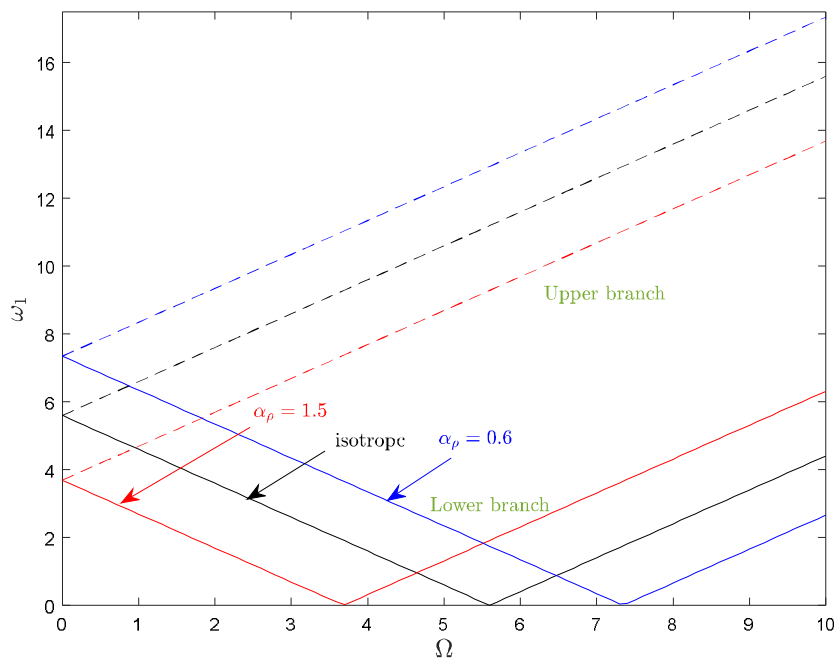
شکل ۷- سرعت دورانی دایورژنس تیر مدرج محوری برحسب پارامتر گرادیان مدول الاستیک به ازای $\alpha_p=1, P=\eta=\mu=0$

منحنی‌های فرکانس پایه‌ای سیستم همچنان موازی باقی می‌مانند. با افزایش α_p ، فرکانس پایه‌ای پیشرو سیستم به ازای تمامی مقادیر Ω کاهش می‌یابد؛ همچنین برای $\Omega < \Omega_h$

فلاتر کاهش می‌یابد. تغییرات فرکانس پایه‌ای سیستم بر حسب سرعت دورانی در شکل ۹ رسم شده است. همان‌طور که مشخص است، با تغییر چگالی سیستم در راستای طولی،



شکل ۸- فرکانس پایه‌ای سیستم بر حسب سرعت محوری به ازای $\Omega=9.5, P=0, \alpha_E=1$



شکل ۹- فرکانس پایه‌ای سیستم بر حسب سرعت دورانی به ازای $P=\eta=\mu=0, u=2.5, \alpha_E=1, \eta=0$

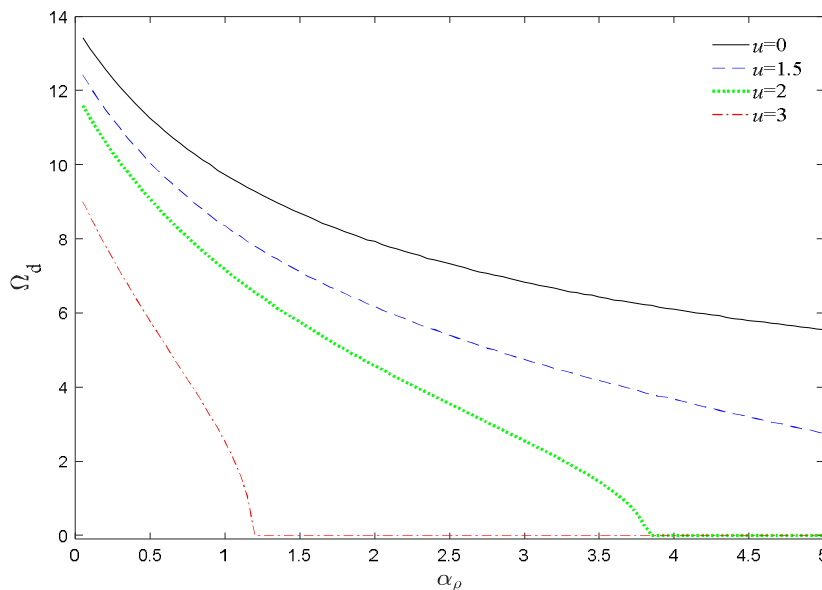
گرادیان چگالی بر پایداری اثر کاهشی دارد. با توجه شکل‌های ۸-۱۰، اثر افزودگی جرم پارامتر گرادیان چگالی بر رفتار دینامیکی سیستم غالب است و افزایش پارامتر گرادیان چگالی اثر ناپایدارکننده بر سیستم دارد. بر اساس شکل‌های ۳-۱۰، افزایش سختی ساختاری بعلاوه کاهش نسبت جرمی، روش‌های مؤثر برای بهبود رفتار پایداری سیستم‌های بایژروسکوپی و به تأخیر انداختن شروع ناپایداری‌های استاتیکی و دینامیکی هستند.

۵-۴- اثر پروفایل توزیع مشخصات مادی

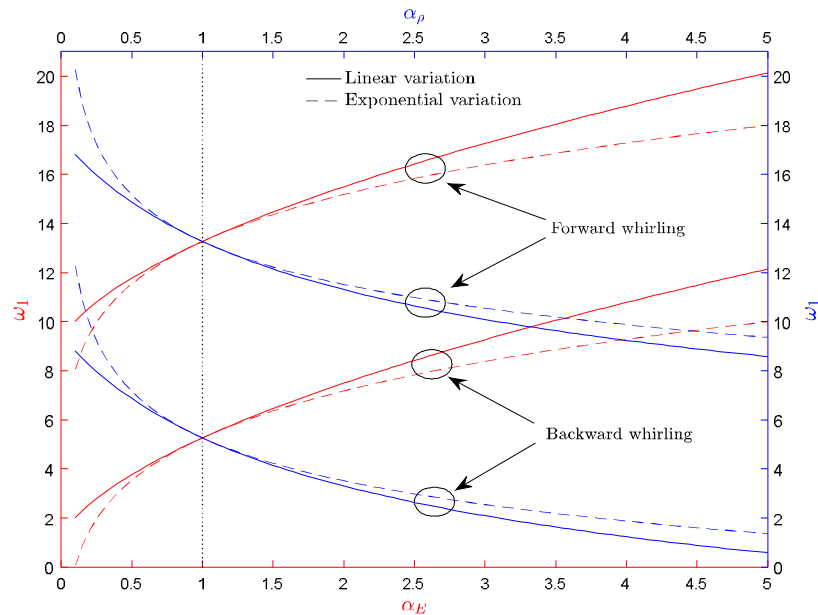
در این بخش فرض می‌شود که چگالی و مدول الاستیک سیستم جداگانه به صورت خطی یا نمایی در راستای طولی تیر درجه‌بندی شده‌اند. در شکل ۱۱، فرکانس‌های پایه‌ای پسر و پیشرو با توزیع‌های نمایی و خطی مشخصات مادی برحسب پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک رسم شده‌اند. همان‌طور که مشخص است، فرکانس پایه‌ای سیستم با افزایش α_E و α_p به ترتیب افزایشی و کاهشی هستند. ذکر این نکته حائز اهمیت است که هنگامی که $\alpha_E=1$ یا $\alpha_p=1$ است، سیستم موردنظر به حالت همگن کاهش می‌یابد، در نتیجه در این حالت فرکانس‌های طبیعی برای توزیع‌های نمایی

فرکانس پایه‌ای پسر و با افزایش α_p کاهش می‌یابد، درحالی‌که برای $\Omega_d > \Omega_d$ این روند معکوس می‌شود؛ در نتیجه پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک اثرات معکوس بر رفتار ارتعاشاتی دارند.

با هدف بررسی دقیق‌تر رفتار دینامیکی به ازای تغییرات α_p تغییرات سرعت دورانی دایورژنس برحسب پارامتر گرادیان چگالی برای سرعت‌های محوری مختلف هنگامی که $P=0$ است، در شکل ۱۰ رسم شده است. با افزایش سرعت محوری، سرعت دورانی دایورژنس کاهش می‌یابد. این موضوع اشاره به آن دارد که کاهش سرعت محوری، منجر به بزرگ شدن ناحیه پایداری سیستم می‌شود، مخصوصاً در α_p های بزرگ. به عبارت دیگر، تیرهای چرخان بدون حرکت محوری، پایداری بیشتری نسبت تیرهای تحت حرکت چرخشی و محوری هم‌زمان دارند. علاوه بر این با افزایش سرعت محوری، در α_p های بزرگ سرعت دورانی دایورژنس سیستم صفر می‌شود. در این حالت در سیستم ناپایداری دایورژنس رخ نمی‌دهد و به ازای تمامی سرعت‌های دوران، ناپایداری فلاتر رخ خواهد داد. یک نکته مهم دیگر در این شکل این است که برعکس نمودارهای سرعت دورانی دایورژنس در صفحه $\Omega_d-\alpha_E$ ، منحنی‌های $\Omega_d-\alpha_p$ با افزایش پارامتر گرادیان چگالی کاهشی می‌باشند؛ در نتیجه می‌توان گفت، پارامتر



شکل ۱۰- سرعت دورانی دایورژنس تیر مدرج محوری برحسب پارامتر گرادیان چگالی به ازای $P=0, \alpha_E=1, \mu=0$



شکل ۱۱- فرکانس‌های پایه‌ای تیر مدرج محوری برحسب پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک به ازای $u=1, \Omega=4, P=\eta=\mu=0$

گرادیان (α) برای بارهای محوری مختلف ترسیم شده است. همان‌طور که واضح است، مرزهای دایورژنس سیستم که به‌صورت عددی محاسبه شده‌اند، با نتایج حل تحلیلی ارائه شده در ضمیمه مطابقت خوبی دارد. با کاهش نیروی محوری فشاری و یا افزایش نیروی کششی، مناطق پایداری بزرگ می‌شوند. در حالت نیروی فشاری افزایش پارامتر گرادیان خاصیت پایدارکننده بر سیستم دارد، درحالی‌که در حالت نیروی کششی، افزایش پارامتر گرادیان خاصیت ناپایدارکننده بر سیستم دارد. یک تغییر سریع در سرعت محوری دایورژنس سیستم در مقادیر کم پارامتر گرادیان مشاهده می‌شود. به ازای مقادیر بزرگ α ، سرعت محوری دایورژنس حساسیت خود را نسبت به نیروی محوری از دست می‌دهد و مرزهای پایداری سیستم به ازای نیروهای محوری مختلف، باهم موازی می‌شوند. با تعیین هم‌زمان گرادیان چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی اثرات ناپایدارکننده نیروی محوری فشاری را تقلیل داد.

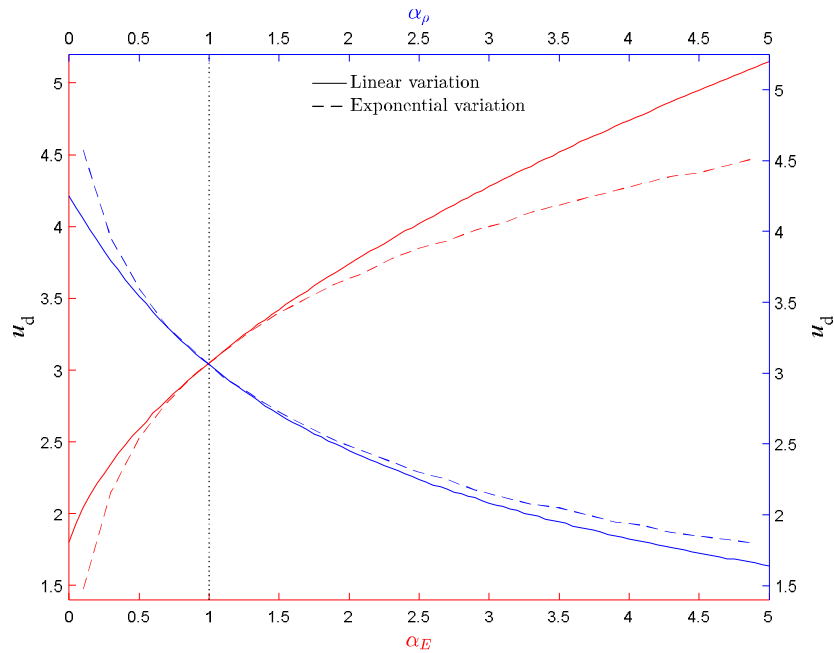
۵-۶- اثر ویسکوزیته

با هدف بررسی اثر مواد ویسکوالاستیک بر دینامیک سیستم، قسمت حقیقی و موهومی دو فرکانس طبیعی اول ارتعاشات تیر برحسب سرعت متحرک محوری در شکل ۱۴ (الف-ب)

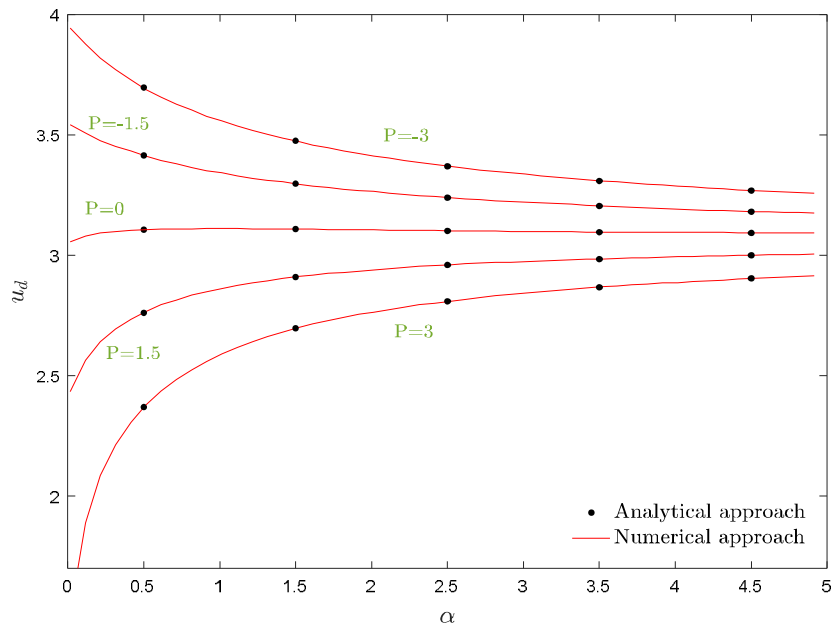
و خطی مشخصات مادی سیستم باهم برابر هستند. یک ویژگی مهم دیگر در این نمودار، این است که در مقایسه با تغییرات نمای مدول الاستیک، فرکانس‌های پایه سیستم به ازای تغییرات خطی مدول الاستیک بزرگ‌تر هستند. درحالی‌که فرکانس‌های پایه‌ای سیستم در حالت تغییرات نمایی چگالی در مقایسه با تغییرات خطی چگالی بزرگ‌تر هستند. در شکل ۱۲ اثر توزیع‌های مختلف مشخصات مواد بر مرزهای دایورژنس تیر مدرج محوری نشان داده شده است. مرزهای دایورژنس سیستم به ازای $\alpha_E=1$ و یا $\alpha_p=1$ روی هم منطبق می‌شوند. سیستم در حالت تغییرات محوری چگالی و مدول الاستیک، به ترتیب در حالت‌های توزیع نمایی و خطی پایدارتر است. در حالت چگالی متغیر، توزیع نمایی، ناحیه پایداری بزرگ‌تری پیش‌بینی می‌کند و در حالت مدول الاستیک متغیر، توزیع خطی منجر به یک سیستم پایدارتر خواهد بود. افزایش α_E و کاهش α_p منجر به سیستم پایدارتر می‌شود.

۵-۵- اثر تغییرات هم‌زمان چگالی و مدول الاستیک

چگالی و مدول الاستیک هم‌زمان ($\alpha_p=\alpha_E=\alpha$) به‌صورت خطی در راستای طولی تیر درجه‌بندی شده‌اند. در شکل ۱۳، تغییرات سرعت محوری دایورژنس سیستم برحسب پارامتر



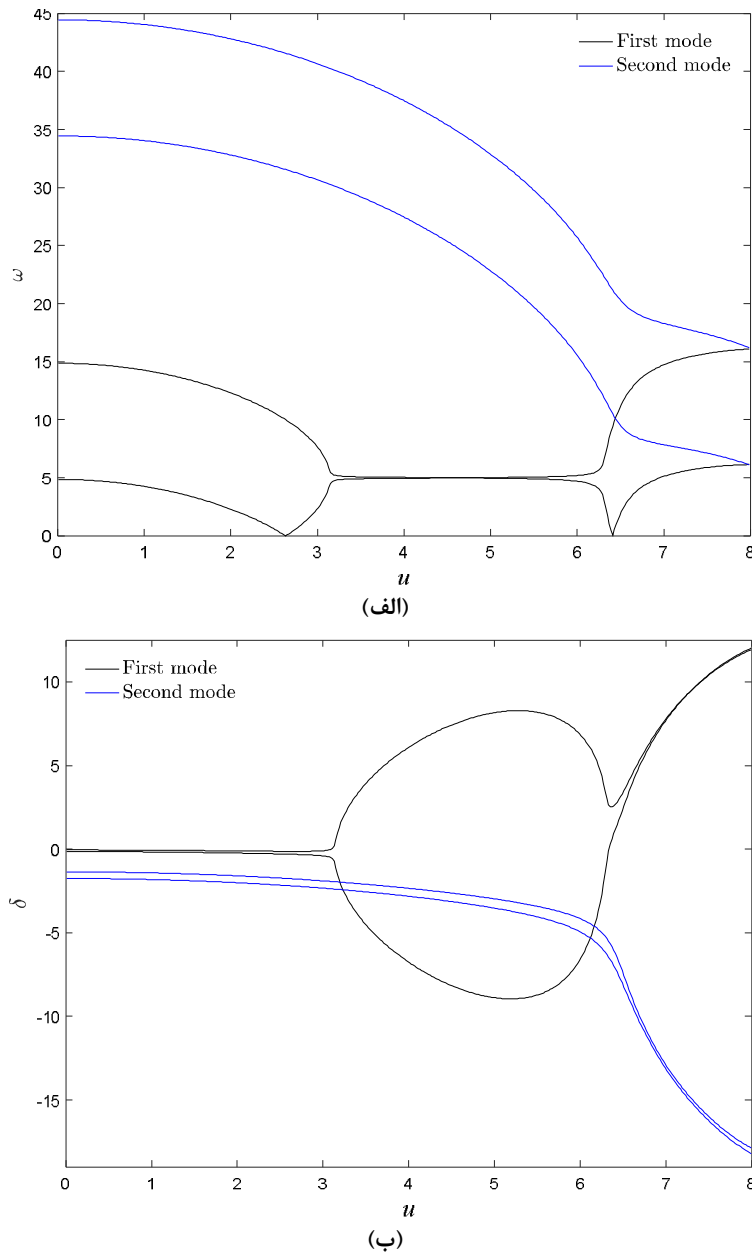
شکل ۱۲- سرعت محوری دایورژنس تیر مدرج محوری برحسب پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک به ازای $\Omega=2, P=0$,



شکل ۱۳- سرعت محوری دایورژنس سیستم برحسب پارامتر گرادیان به ازای $\Omega=1, \eta=0$

ویسکوالاستیک، ناپایستار است، فرکانس‌های طبیعی سیستم قبل از رخداد دایورژنس مختلط می‌شوند، مخصوصاً فرکانس‌های موهای بالاتر. براساس شکل ۱۴-الف، هنگامی که سیستم ویسکوالاستیک باشد، قسمت موهومی منحنی‌های

به ازای $\eta=0.001$ نمایش داده شده است. با افزایش خاصیت ویسکوالاستیک مواد، سرعت بحرانی دایورژنس سیستم تغییر نمی‌کند که این ویژگی با راه‌حل تحلیلی ارائه شده در پیوست، قابل اثبات است. از آنجایی که سیستم



شکل ۱۴- الف) قسمت حقیقی و ب) مجازی دو فرکانس طبیعی اول برحسب سرعت محوری به ازای $P=0, \eta=0.001, u=2, \Omega=5$

و گرادیان محوری مواد، نقش مهمی در تعیین مقدار کمی سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی سیستم دارد.

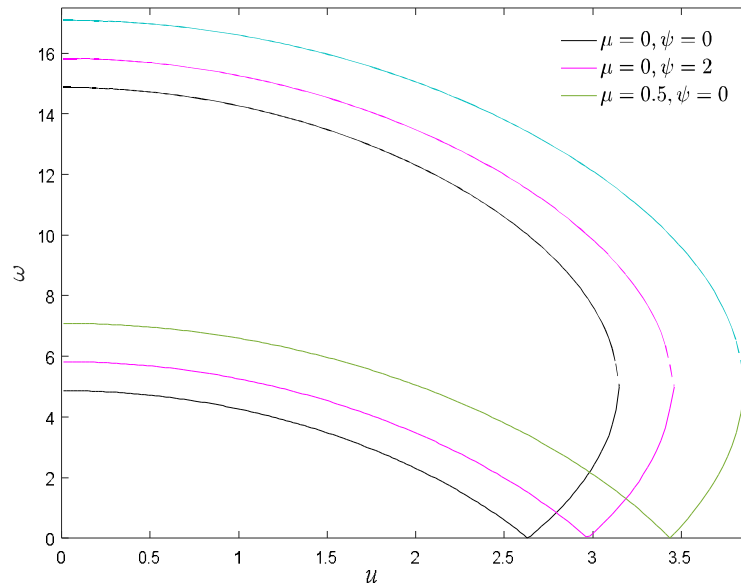
۵-۷- اثر پارامتر طول مشخصه و میدان مغناطیسی
در شکل ۱۵، فرکانس پایه‌ای سیستم به ازای مقادیر مختلف پارامترهای طول مشخصه ماده و میدان مغناطیسی رسم شده

فرکانسی، تقارن خود را نسبت به محور x از دست می‌دهند. سیستم ویسکوالاستیک، روند تکامل پایداری "پایدار-فلاتر مود اول-دایورژنس مود دوم" را تجربه می‌کند. در مقایسه با سیستم همگن، مواد ویسکوالاستیک روند تکامل پایداری سیستم را تغییر می‌دهند. پایداری کیفی تیرهای متحرک محوری به اثرات مواد ویسکوالاستیک سیستم وابستگی دارد

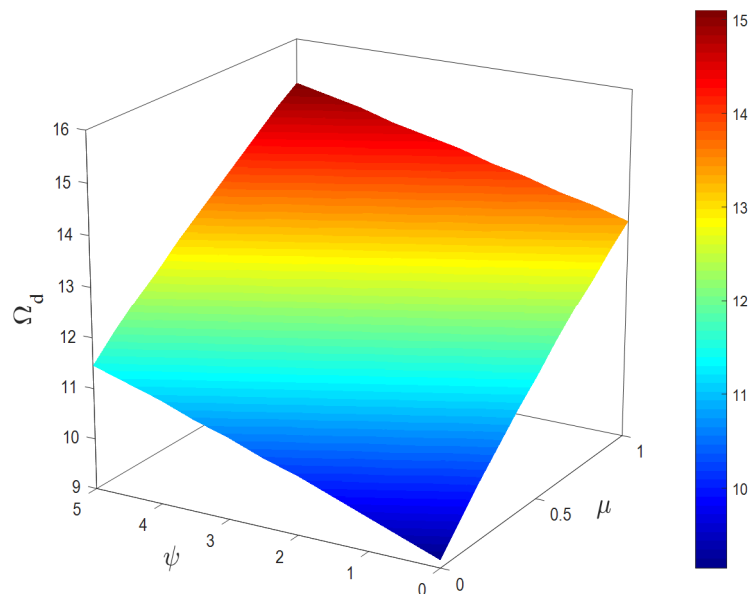
شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش هر دو پارامتر مذکور پایداری سیستم افزایش می‌یابد؛ در نتیجه می‌توان گفت که این پارامترها افزایش سختی بر سیستم دارند.

است. براساس این شکل هرچه میدان مغناطیسی و پارامتر طول مشخصه بزرگ‌تر باشد، فرکانس‌های سیستم بزرگ‌تر خواهند بود.

در شکل ۱۶، سرعت بحرانی چرخشی سیستم در فضای سه‌بعدی پارامترهای مغناطیسی و مقیاس طولی ماده رسم



شکل ۱۵- فرکانس پایه‌ای سیستم همگن بر حسب سرعت محوری به ازای $\Omega=9.5, P=0$



شکل ۱۶- اثر کوپل میدان مغناطیسی و پارامتر مقیاس طولی بر سرعت چرخشی دایورژنس سیستم

۶- نتیجه گیری

یک تحقیق روی دینامیک سازه‌ای میکروتیرهای مدرج محوری با حرکت محوری و دورانی تحت بار محوری و میدان مغناطیسی انجام شده است. روش‌های عددی و تحلیلی به‌کاربرده شدند تا شرایط ناپایداری دایورژنس و فلاتر سیستم مطالعه شود. نتایج افشا کردند که با افزایش مدول الاستیک و کاهش چگالی در راستای طولی سیستم، فرکانس پایه‌ای پیشرو سیستم افزایش می‌یابد. اثر گرادیان محوری مواد بر فرکانس پایه‌ای پسر سیستم پیچیده‌تر است. اگر در سیستم ناپایداری دایورژنس رخ دهد، افزایش پارامتر گرادیان مدول الاستیک و کاهش پارامتر گرادیان چگالی، فرکانس پایه‌ای پسر را در سرعت‌های کمتر و بیشتر از سرعت محوری دایورژنس به ترتیب افزایش و کاهش می‌دهند، در غیر این صورت، منجر به کاهش فرکانس پایه‌ای پسر سیستم می‌شود. در حالت چگالی متغیر و مدول الاستیک متغیر، به ترتیب توزیع‌های نمایی و خطی منجر به فرکانس‌های بزرگ‌تر و سیستم پایدارتر می‌شوند. فهمیده شد که پارامترهای گرادیان چگالی و مدول الاستیک، به ترتیب اثرات ناپایدارکننده و پایدارکننده بر سیستم دارند. در مقایسه با تیرهای همگن، تیرهای مدرج محوری هنگامی که چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی سیستم به ترتیب کاهش و افزایش یابند، پایدارتر خواهند بود؛ همچنین، نشان داده شد که با تنظیم درست تغییرات محوری مواد می‌توان مرز ناپایداری دایورژنس را حذف نمود و محدوده‌های ناپایداری فلاتر را به تعویق انداخت. نتایج نشان دادند که با تعیین هم‌زمان گرادیان چگالی و مدول الاستیک در راستای طولی می‌توان اثرات ناپایدارکننده نیروی محوری فشاری را تقلیل داد؛ همچنین، از آنجاکه میدان‌های مغناطیسی و تنش کوپل اثر افزایش سختی بر سیستم دارند، با افزایش پارامترهای میدان مغناطیسی و مقیاس طولی ماده، فرکانس‌های طبیعی و سرعت‌های بحرانی سیستم افزایش می‌یابند. نتایج پژوهش حاضر می‌تواند در طراحی سیستم‌های بایزروسکوپیک غیرهمگن مفید باشد.

۷- پیوست

هنگامی که سیستم سرعت بحرانی دارد، فرکانس پایه‌ای پسر سیستم صفر می‌شود و سیستم سختی خود را از دست

می‌دهد. در سرعت بحرانی مربوط به مود اول، معادله (۲۸) با در نظر گرفتن یک مود ($r=s=1$)، به معادله زیر کاهش می‌یابد:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1(\tau) + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1(\tau) + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \mathbf{q}_1(\tau) = 0 \quad (\text{الف-۱})$$

با فرض تغییرات خطی مشخصات مادی و نادیده‌گیری اثرات اندازه و میدان مغناطیسی می‌توان نوشت:

$$k_{11} = \pi^4(\alpha_E + 1) - \pi^2((\alpha_\rho + 1)u^2 + 2P) - u^2(\alpha_\rho - 1) - \Omega^2(\alpha_\rho + 1) \quad (\text{الف-۲})$$

$$k_{12} = 2u\alpha_\rho - 4\Omega \quad (\text{الف-۳})$$

$$k_{21} = 2u(\alpha_\rho - 2) + 4\Omega \quad (\text{الف-۴})$$

$$k_{22} = \pi^4(\alpha_E + 1) - \pi^2((\alpha_\rho + 1)u^2 + 2P) - u^2(\alpha_\rho - 1) - \Omega^2(\alpha_\rho + 1) \quad (\text{الف-۵})$$

بر طبق تئوری پایداری سیستم‌های خطی ژيروسکوپیک، هنگامی که مقادیر ویژه سیستم صفر شود، درمینان ماتریس سختی صفر می‌شود؛ در نتیجه سرعت محوری (یا دورانی) بحرانی سیستم را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0 \quad (\text{الف-۶})$$

در نتیجه سرعت محوری بحرانی این چنین به دست می‌آید:

$$u_d^2 = \left(\pi^4(\alpha_E + 1) - \Omega^2(\alpha_\rho + 1) - 2\pi^2P - 2\sqrt{\alpha_\rho - 4\Omega(\Omega + 1)} \right) / ((\pi^2 + 1)(\alpha_\rho + 1)) \quad (\text{الف-۷})$$

۸- مراجع

- [1] Ebrahimi-Mamaghani A, Mirtalebi SH, Ahmadian MT (2020) Magneto-mechanical stability of axially functionally graded supported nanotubes. Mater Res Express 6(3): 1250-1255.
- [2] Ebrahimi-Mamaghani A, Sarparast H, Rezaei M (2020) On the vibrations of axially graded Rayleigh beams under a moving load. Appl Math Model 84(3): 554-570.
- [3] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghani R, Mostoufi N (2019) Dynamics of two-

- considering surface effects and inter-molecular interactions. *Int J Mech Mater Des* 15(1): 489-505.
- [16] Esfahani S, Khadem SE, Mamaghani AE (2019) Nonlinear vibration analysis of an electrostatic functionally graded nano-resonator with surface effects based on nonlocal strain gradient theory. *Int J Mech Sci* 151(1): 508-522.
- [17] Sarparast H, Ebrahimi-Mamaghani A (2019) Vibrations of laminated deep curved beams under moving loads. *Compos Struct* 226(3): 111262.
- [18] Mirtalebi SH, Ahmadian MT, Ebrahimi-Mamaghani A (2019) On the dynamics of micro-tubes conveying fluid on various foundations. *SN Appl Sci* 1(1): 547.
- [19] Mirtalebi SH, Ebrahimi-Mamaghani A, Ahmadian MT (2019) Vibration control and manufacturing of intelligibly designed axially functionally graded cantilevered macro/micro-tubes. *IFAC-PapersOnLine* 52(2): 382-387.
- [20] Zhu, X., Lu, Z., Wang, Z., Xue, L., and Ebrahimi-Mamaghani, A. (2020). Vibration of Spinning Functionally Graded Nanotubes Conveying Fluid. *Engineering with Computers*. doi: 10.1007/s00366-020-01123-7.
- [21] Kiani, K. (2014). Longitudinal and transverse instabilities of moving nanoscale beam-like structures made of functionally graded materials. *Composite Structures* 107(1):610-619.
- [22] Li L, Zhang D (2015) Dynamic analysis of rotating axially FG tapered beams based on a new rigid-flexible coupled dynamic model using the B-spline method. *Compos Struct* 124(2): 357-367.
- [23] Zhu K, Chung J (2019) Vibration and stability analysis of a simply-supported Rayleigh beam with spinning and axial motions. *Appl Math Model* 66(3): 362-382.
- [24] Yang XD, Yang JH, Qian YJ, Zhang W, Melnik RV (2018) Dynamics of a beam with both axial moving and spinning motion: An example of bi-gyroscopic continua. *Eur J Mech A-Solid* 69(3): 231-237.
- [25] Ghayesh MH, Ghazavi MR, Khadem SE (2010) Non-linear vibration and stability analysis of an axially moving rotor in sub-critical transporting speed range. *Struct Eng Mech* 34(5): 507-523.
- [26] Sahebkar S, Ghazavi M., Khadem S, Ghayesh M (2011) Nonlinear vibration analysis of an axially moving drillstring system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well. *Mech Mach Theory* 46(6): 743-760.
- [27] Li X, Qin Y, Li Y, Zhao X (2018) The coupled vibration characteristics of a spinning and axially moving composite thin-walled beam. *Mech Adv Matl Struct* 25(5): 722-731.
- [28] Rezaee M, Lotfan S (2015) Non-linear nonlocal vibration and stability analysis of axially moving nanoscale beams with time-dependent velocity. *Int J Mech Sci* 96(2): 36-46.
- phase flow in vertical pipes. *J Fluid Struct* 87(1): 150-173.
- [4] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2020) Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes. *Mech Based Des Struc* 1-30.
- [5] Ebrahimi Mamaghani A, Hosseini R, Shahgholi M, Sarparast H (2018) Free lateral vibration analysis of inhomogeneous beams under various boundary conditions. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(1): 123-135. (In Persian)
- [6] Ebrahimi Mamaghani A, sarparast H (2018) Target energy transfer from a doubly clamped beam subjected to the harmonic external load using nonlinear energy sink. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 8(9): 165-177. (In Persian)
- [7] Hosseini R, Ebrahimi mamaghani A, Nouri M (2017) An Experimental Investigation into width reduction effect on the efficiency of piezopolymer vibration energy harvester. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 7(3): 41-51. (In Persian)
- [8] Mamaghani AE, Khadem S, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynam* 86(1): 1761-1795.
- [9] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S, Pourkiaee SM (2018) Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment. *Int J Mech Sci* 138(8): 427-447.
- [10] Mamaghani AE, Zohoor H, Firoozbakhsh K, Hosseini R (2013) Dynamics of a running below-knee prosthesis compared to those of a normal subject. *Journal of Solid Mechanics* 6(3): 152-160.
- [11] Hosseini R, Hamedi M, Ebrahimi Mamaghani A, Kim HC, Kim J, Dayou J (2017) Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution. *Int J Smart Nano Mater* 8(2): 110-124.
- [12] Safarpour M, Rahimi A, Alibeigloo A, Bisheh H, Forooghi A (2019) Parametric study of three-dimensional bending and frequency of FG-GPLRC porous circular and annular plates on different boundary conditions. *Mech Based Des Struc* 1-31.
- [13] Jermsittiparsert K, Ghabussi A, Forooghi A, Shavalipour A, Habibi M, Won Jung D, Safa M (2020) Critical voltage, thermal buckling and frequency characteristics of a thermally affected GPL reinforced composite microdisk covered with piezoelectric actuator. *Mech Based Des Struc* 1-23.
- [14] Abdelmalek Z, Karbon M, Eyvazian A, Forooghi A, Safarpour H, Tlili I (2020) On the dynamics of a curved microtubule-associated proteins by considering viscoelastic properties of the living biological cells. *J Biomol Struct Dyn* 1-15.
- [15] Esfahani S, Esmaeilzade Khadem S, Ebrahimi Mamaghani A (2019) Size-dependent nonlinear vibration of an electrostatic nanobeam actuator

- [32] Bahaadini R, Saidi AR (2018) On the stability of spinning thin-walled porous beams. *Thin Wall Struct* 132(5): 604-615.
- [33] Bahaadini R, Saidi AR (2018) Stability analysis of thin-walled spinning reinforced pipes conveying fluid in thermal environment. *Eur J Mech A-Solid* 72(1): 298-309.
- [34] Dehrouyeh-Semnani AM, Nikkhah-Bahrami M, Yazdi MRH (2017) On nonlinear stability of fluid-conveying imperfect micropipes. *Int J Eng Sci* 120(2): 254-271.
- [35] Filipich C, Maurizi M, Rosales M (1987) Free vibrations of a spinning uniform beam with ends elastically restrained against rotation. *J Sound Vib* 116(2): 475-482.
- [29] Zinati RF, Rezaee M, Lotfan S (2019) Nonlinear vibration and stability analysis of viscoelastic rayleigh beams axially moving on a flexible intermediate support. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering* 1-15.
- [30] Ghayesh MH (2011) Nonlinear forced dynamics of an axially moving viscoelastic beam with an internal resonance. *Int J Mech Sci* 53(1): 1022-1037.
- [31] Dehrouyeh-Semnani AM, Nikkhah-Bahrami M, Yazdi MRH (2017) On nonlinear stability of fluid-conveying imperfect micropipes. *Int J Eng Sci* 120(2): 254-271.