



ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی مدرج تابعی چرخان با وصله‌های از جنس مواد هوشمند

محمد جعفری نیاسر^{۱*}، علی اصغر جعفری^۲ و محسن ایرانی رهقی^۳

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

^۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

^۳ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان

طرح پژوهشی، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۳/۰۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۱۵

چکیده

در مقاله حاضر ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی چرخان با وصله‌های هوشمند چسبیده به آن بررسی می‌شود. پوسته به صورت جدار نازک در نظر گرفته شده و همچنین معادلات سیستم از روش انرژی بدست آورده شده است. وصله‌ها به صورت جفت داخل و روی پوسته هستند که تعدادشان چهار است و نقش سنسور و عملگر را در کنترل سازه بازی می‌کنند. با استفاده از نظریه کلاسیک، روابط کرنش-جابجایی لاو، روابط تنش-کرنش هوک و در ادامه از طریق پاسخ‌های حدس زده شده که در آنها توابع مکانی معلوم و توابع زمانی مجهول است و همچنین معادله لاگرانژ، دینامیک حاکم بر سیستم به صورت ODE بدست آمده است. حسن این روش عدم استفاده از اصل همپلتون و درگیر نشدن در مشتق‌گیری و انتگرال‌های جز به جز است. فرکانس‌های طبیعی در دو حالت وجود و عدم وجود مواد هدفمند و همچنین در دو شرط مرزی با نتایج پژوهش‌های قبلی مقایسه گردیده و پس از آن اثر سرعت دورانی، مساحت وصله‌ها، شرایط مرزی و ضریب ناهمگنی هر دو ماده مدرج تابعی (پوسته و ماده هدفمند) روی فرکانس طبیعی بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: مخروطی مدرج تابعی؛ نظریه کلاسیک؛ پوسته چرخان؛ مواد هوشمند.

Free Vibration of Rotating FGM Conical Shell with Smart Patches

M. Jafari Niasar^{1*}, A.A. Jafari², M. Irani Rahaghi³

¹ MS.c, Mech. Eng., K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

² Prof., Mech. Eng., K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

³ Assis Prof., Mech. Eng., Kashan University, Kashan, Iran.

Abstract

In this paper, free vibrations of rotating conical shell with smart patches are investigated. Shell is considered as a thin-wall and equations of motion are obtained from the energy method. Patches are in pairs on the inner and outer shell and play role of sensor and actuator in control of the system. Number of these patches are four. Using classical theory, Love strain-displacement relations, stress-strain relations, and guessed answer with known Location functions and unknown time functions, and the Lagrange equation, governing equation of motion as ODE are obtained. The benefit of this method is the non-use of Hamilton's principle and get involved in differentiation and partial integrals. Natural frequencies with and without smart patches in two boundary conditions are compared with results of previous studies and then effect of angular velocity, patches area, boundary conditions and non-homogeneous index of both functionally graded material (shell and smart material) on natural frequency are investigated.

Keywords: FGM Conical; Classical Theory; Rotating Shell; Smart Material.

۱- مقدمه

پوسته‌های دوار امروزه در صنایع پیشرفته همچون هوافضا، موشکی و همچنین در سانتیفریوژها، مخازن مخلوط کننده، روتورها و ... کاربرد دارند. از آنجایی که در بعضی از محیط‌ها ممکن است، گرادیان‌های دمایی بالا و یا بارهای مکانیکی زیاد با امکان ایجاد تمرکز تنش وجود داشته باشد؛ لذا نمی‌توان از مواد همسانگرد و یا حتی از کامپوزیت‌ها استفاده کرد. در این زمان است که مواد مدرج تابعی کاربرد خود را نشان می‌دهند. مواد مدرج تابعی یا به اختصار FGM، در علم مواد به موادی جدید و پیشرفته با ساختاری ناهمگن گفته می‌شود که به واسطه تغییر تدریجی ترکیبات شیمیایی، توزیع و جهت‌گیری در یک یا چند بعد خواص متفاوتی را در مناطق مختلف از خود بروز می‌دهند.

از طرف دیگر ارتعاشات ناخواسته در سیستم‌های دوار بعضاً باعث ایجاد خسارت می‌شود. یکی از راهکارهای حذف ارتعاشات استفاده از کنترل فعال است که از طریق اضافه کردن سنسور، عملگر و کنترلر به سیستم انجام می‌گیرد؛ اما قبل از کنترل سیستم لازم است که ارتعاشات سیستم با وجود این مواد بررسی شود. در این زمینه پژوهش‌هایی در دنیا انجام شده که چند نمونه در اینجا ذکر می‌شود.

علی بیگلو و همکاران [۱]، ارتعاشات آزاد استوانه مدرج تابعی با دو لایه پیزوالکتریک را بررسی کردند. مدل‌سازی آنها بر اساس تئوری سه بعدی الاستیسیته انجام شده و برای حل از دو روش تحلیل و نیمه تحلیلی استفاده کردند؛ همچنین اثر شرایط مرزی، عدد موج، طول و شعاع استوانه و ... را روی فرکانس طبیعی بررسی کردند. عارفی و همکاران [۲]، ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای ساندویچی مدرج تابعی را با لایه‌های پیزوالکتریک مطالعه کردند. نظریه مورد استفاده آنها برشی مرتبه اول بود؛ همچنین آنها با روش گالرکین معادلات با مشتقات جزئی را به معادلات معمولی تبدیل و سپس سیستم را بررسی کردند. شکاری و همکاران [۳]، ارتعاشات مخروط چرخان با دو لایه پیزوالکتریک را بر اساس نظریه برشی بهبود یافته مطالعه کردند. حل معادلات آنها بر اساس گسسته سازی معادلات با مشتقات جزئی با هدف رسیدن به معادلات ODE بود. شنگ و همکاران [۴]، به مطالعه کنترل فعال پوسته استوانه مدرج تابعی پرداختند. آنها با استفاده از دو لایه پیزوالکتریک، نظریه برشی مرتبه اول و

همچنین در نظر گرفتن تنش‌های حرارتی و مکانیکی مدل-سازی سیستم را انجام دادند. آنها کنترل را از روش پس‌خورد منفی سرعت انجام داده و در نهایت اثر تغییرات دما، جنس پیزوالکتریک، بهره پس‌خورد و ... را روی سیستم بررسی کردند. لی و همکاران [۵]، کنترل فعال پوسته مخروطی با استفاده از تکه‌های پیزوالکتریک را مطالعه کردند. آنها پوسته و پیزوالکتریک را به صورت همسانگرد در نظر گرفته و پس از همگرا کردن پاسخ ارتعاشات، از طریق مدل‌سازی ۸ تکه پیزوالکتریک سیستم را کنترل کردند. عارفی [۶]، تحلیل الکترواستاتیکی یک پوسته میکروالاستیک با دو لایه پیزوالکتریک را انجام داده است. این سازه روی یک بستر پاسترناک قرار گرفته و معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی توسعه یافته است. در این تحقیق پارامترهایی نظیر، طول، پتانسیل الکتریکی و تغییر شکل سازه مورد بررسی قرار گرفته است.

بیشتر پژوهش‌های انجام شده برای پوسته‌های ساندویچی در حضور لایه‌های پیزوالکتریک انجام شده است، اما اگر بحث اقتصادی در ساخت سازه برای طراح مهم باشد، باید به سمت اضافه کردن وصله‌های پیزوالکتریک برای کنترل سازه رفت. برای همین منظور در این مقاله از ۴ جفت وصله پیزوالکتریک استفاده شده است، همچنین یکی دیگر از نوآوری‌های انجام شده، مدرج تابعی در نظر گرفتن خواص این وصله‌ها است.

۲- مدل‌سازی

شما تیک پوسته مخروطی جدار نازک با شعاع متغیر که در رابطه ۱ بیان شده است، در اشکال ۱ و ۲ در دو نمای روبرو و جانبی مشاهده می‌شود که با سرعت Ω در حال چرخیدن حول محور خود است. مکان هر ذره در دستگاه مختصات استوانه‌ای که در صفحه میانی پوسته قرار گرفته با (x, θ, z) مشخص شده است؛ همچنین چهار جفت سنسور و عملگر داخل و روی پوسته مدل قرار داده شده که ضخامت سنسور با h_s و ضخامت عملگر با h_a نشان داده شده‌اند.

هندسه پیزوالکتریک نیز بر اساس مختصات در راستای x و θ تعیین می‌شود. این مختصات شامل، نقاط ابتدایی و انتهایی پیزوالکتریک در دو جهت ذکر شده است. در شکل ۳ پارامترهای مورد نیاز برای مدل‌سازی نمایش داده شده است.

در این شکل X_{p1} و X_{p2} نقطه ابتدا و انتهای پیزوالکتریک را در جهت مولد مخروط نشان می‌دهد؛ همچنین θ_1 کمان ابتدایی و θ_2 کمان انتهایی سنسور و عملگر را مشخص می‌کند.

$$r(x) = a + x \sin(\alpha) \quad (1)$$

۲-۱- نظریه کلاسیک و روابط کرنش-جابجایی

برای مدل‌سازی ورق و پوسته حداقل سه نظریه مختلف وجود دارد که یکی از آنها نظریه کلاسیک است. بر اساس این نظریه نسبت ضخامت به کوچکترین شعاع پوسته، باید کمتر از 0.5 باشد، همچنین کرنش‌های عرضی و نرمال صفر فرض می‌شود $[\gamma] (\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_z = 0)$. بر اساس فرضیات بالا رابطه بین کرنش و جابه‌جایی لاو با رابطه (۲) تعریف می‌شود: [۸]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{0x} + z\kappa_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_{0\theta} + z\kappa_\theta = \frac{1}{r(x)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u \sin(\alpha) + w \cos(\alpha)}{r(x)} \\ &\quad - z \left(-\frac{1}{r(x)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r(x)^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos(\alpha) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r(x)} \sin(\alpha) \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{x\theta} &= \varepsilon_{0x\theta} + z\kappa_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r(x)} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{\sin(\alpha)}{r(x)} v - 2z \left(\frac{1}{r(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\sin(\alpha)}{r(x)^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(\alpha)}{r(x)} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{r(x)^2} v \right) \end{aligned} \quad (2)$$

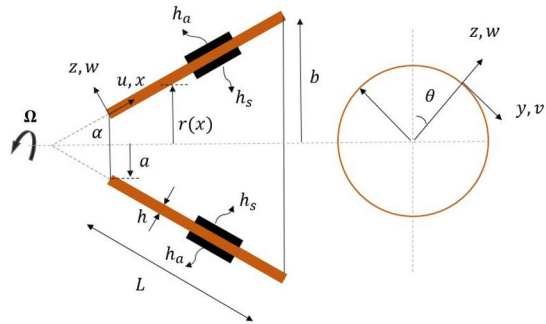
۲-۲- روابط تنش، کرنش و میدان الکتریکی

روابط تنش-کرنش و جابه‌جایی الکتریکی-میدان الکتریکی برای پوسته و پیزوالکتریک به صورت زیر است [۹]:

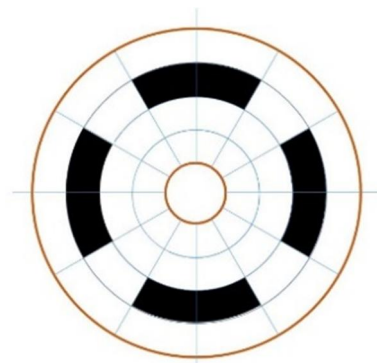
$$\sigma_i = \{\sigma_x \cdot \sigma_\theta \cdot \sigma_{x\theta}\}^T \quad . \quad i = f.p$$

$$\varepsilon_i = \{\varepsilon_x \cdot \varepsilon_\theta \cdot \varepsilon_{x\theta}\}^T \quad . \quad i = f.p$$

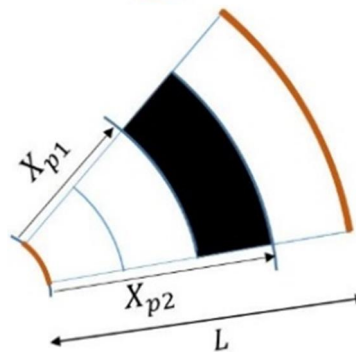
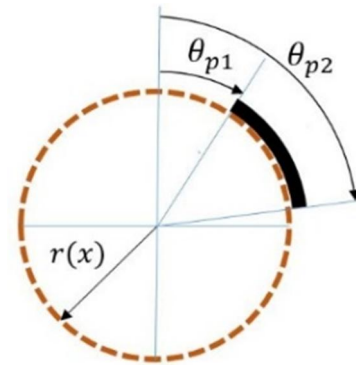
$$shell \quad \rightarrow \quad \sigma_f = C_f \varepsilon \quad \xrightarrow{Range} \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$$



شکل ۱- نمای جانبی پوسته مخروطی چرخان



شکل ۲- نمای روبرو پوسته مخروطی چرخان



شکل ۳- هندسه پیزوالکتریک

با توجه به نازک در نظر گرفتن پیزوالکتریک، میدان الکتریکی را می‌توان بدون تعریف تابع پتانسیل الکتریکی تنها وابسته به ولتاژ و ضخامت عملگر دانست [۵]:

$$E_z = \frac{V_a}{h_a} \quad (7)$$

۲-۳- تعریف خواص مواد

تابع تغییرات خواص پوسته و پیزوالکتریک به صورت توانی در نظر گرفته شده است. خواص پوسته در جهت ضخامت بین دو ماده در حال تغییر است و شروع تغییرات خواص پیزوالکتریک از یک ماده همسانگرد است. روابط به صورت (۸) است [۲ و ۱۱]:

$$\begin{cases} E_f(z) = (E_C - E_M) \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^P + E_M \\ \rho_f(z) = (\rho_C - \rho_M) \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^P + \rho_M \end{cases} \rightarrow \frac{-h}{2} < z < \frac{h}{2}$$

$$\begin{cases} Q_{ij}^p = Q_{ij}^0 \left(\frac{z}{h/2}\right)^N & e_{ij} = e_{ij}^0 \left(\frac{z}{h/2}\right)^N \\ \zeta_{ij} = \zeta_{ij}^0 \left(\frac{z}{h/2}\right)^N & \rho_p = \rho^0 \left(\frac{z}{h/2}\right)^N \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{sensor} : \frac{-h}{2} - h_s < z < \frac{-h}{2} \\ \text{actuator} : \frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} + h_a \end{cases} \quad (8)$$

اندیس f مربوط به پوسته و اندیس C و M به ترتیب مربوط به سرامیک و فلز است، همانطور که مشخص است، دو پارامتر چگالی و مدول الاستیسیته پوسته در راستای ضخامت متغیر است؛ همچنین دو سطر بعدی تغییرات خواص مکانیکی و الکتریکی پیزوالکتریک را نشان می‌دهد. P و N نیز به ترتیب بیانگر ضریب ناهمگنی ماده مدرج تابعی پوسته و پیزوالکتریک است که آنها به ترتیب از صفر تا بی نهایت و [۲، -۲] می‌توانند تغییر کنند [۱۲]. نکته قابل ذکر آنکه نسبت پواسون (ν) در پوسته ثابت در نظر گرفته شده است.

۲-۴- انرژی‌های سیستم

در اکثر پژوهش‌ها، برای بدست آوردن معادلات ارتعاشی از روش انرژی استفاده می‌شود. این انتخاب به دلیل آسانتر

$$\begin{cases} \sigma_p = C_p \varepsilon - e^T E_p \\ D = e \varepsilon + \zeta E_p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{sensor} : \frac{-h}{2} - h_s < z < \frac{-h}{2} \\ \text{actuator} : \frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} + h_a \end{cases} \quad (3)$$

دو سطر اول تنش و کرنش صفحه‌ای را برای پوسته و پیزوالکتریک نشان می‌دهد. سطر بعدی مربوط به پوسته است که ماتریس سفتی C_f ارتباط بین تنش و کرنش را برقرار می‌کند. در سطر آخر نیز علاوه بر تنش و کرنش، ارتباط بین میدان الکتریکی و جابه‌جایی الکتریکی پیزوالکتریک بیان شده است. C_p ماتریس سفتی، e ماتریس تاثیر پذیری^۱، ζ ماتریس دی‌الکتریک^۲، E میدان الکتریکی و D جابه‌جایی الکتریکی را نشان می‌دهد. که همگی به شکل رابطه (۴) هستند [۵ و ۱۰]:

$$E = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_\theta \\ E_z \end{Bmatrix} \quad D = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_f = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E_f(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E_f(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{66} = \frac{E_f(z)}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} Q_{11}^p & Q_{12}^p & 0 \\ Q_{21}^p & Q_{22}^p & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^p \end{bmatrix} \quad (4)$$

همچنین با توجه به اینکه مدل سازی پیزوالکتریک نیز مانند پوسته است، می‌توان از جابه‌جایی و میدان الکتریکی در دو جهت θ و x صرف نظر کرد؛ بنابراین ماتریس‌های فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شوند [۵]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= Q_{11}^p \varepsilon_x + Q_{12}^p \varepsilon_\theta - e_{31} E_z \\ \sigma_\theta &= Q_{21}^p \varepsilon_x + Q_{22}^p \varepsilon_\theta - e_{32} E_z \\ \sigma_{x\theta} &= Q_{66}^p \varepsilon_{x\theta} \\ D_x &= 0 & D_\theta &= 0 \\ D_z &= e_{31} \varepsilon_x + e_{32} \varepsilon_\theta + \zeta_3 E_z \end{aligned} \quad (5)$$

¹ Effective
² Dielectric

گام آخر محاسبه انرژی تنش محیطی است، این انرژی که علت آن نیروی گریز است برای پوسته، عملگر و سنسور در رابطه ۱۲ بیان شده است. N_θ همان نیروی کشش حلقوی است که با نوشتن رابطه تعادل در جهت شعاعی پوسته بدست می‌آید [۱۵].

$$N_\theta = \rho_i(z)\Omega^2 r(x)^2 \rightarrow \left(\frac{N}{m^2}\right) \quad i = f, s, a$$

$$U_{hf} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (N_\theta \epsilon_\theta^0) dV$$

$$U_{ha} = \frac{1}{2} \sum_1^{n_a} \int (N_\theta \epsilon_\theta^0) dV$$

$$U_{hs} = \frac{1}{2} \sum_1^{n_s} \int (N_\theta \epsilon_\theta^0) dV \quad (12)$$

ترم ϵ_θ^0 در واقع کرنش ایجاد شده توسط این نیرو را نشان می‌دهد که به صورت زیر است [۱۵، ۱۶]:

$$\epsilon_\theta^0 = \frac{1}{r(x)^2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin(\alpha) + w \cos(\alpha) \right)^2 + \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \quad (13)$$

نکته قابل ذکر آنکه n_s و n_a در این بخش به ترتیب تعداد وصله‌های سنسور و عملگر را نشان می‌دهد و حدود انتگرال‌های روی سطح و ضخامت وصله‌های پیزوالکتریک نیز در شکل ۲ و رابطه ۳ مشخص شده است.

۲-۵- معادلات حاکم بر سیستم

برای بدست آوردن معادلات در این مقاله، نیاز است که توابع شکل مود سیستم معلوم باشد، بنابراین پاسخ ارتعاشات سیستم به صورت رابطه (۱۴) در نظر گرفته می‌شود [۱۶]:

$$u(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [u_1^{mn}(t) \cos n\theta - u_2^{mn}(t) \sin n\theta] U_m(x)$$

$$v(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [v_1^{mn}(t) \sin n\theta + v_2^{mn}(t) \cos n\theta] V_m(x)$$

بودن و داشتن یک روند منطقی آن نسبت به روش مشابه، یعنی نیرویی است. انرژیهای کرنشی و جنبشی در تمام سیستم‌های الاستیک وجود دارد. حال اگر سیستم حول محور خود بچرخد، انرژی تنش محیطی نیز اضافه می‌شود. در این بخش نحوه محاسبه این سه انرژی ارائه می‌شود.

انرژی کرنشی پوسته برابر است با حاصل ضرب بردار تنش در بردار کرنش [۱۳]. برای عملگر یک ترم الکتریکی که همان ولتاژ است، در انتگرال انرژی اضافه خواهد شد، اما برای سنسور از تاثیر ولتاژ آن (سنسور) روی خودش صرف نظر می‌شود، لذا فقط به عنوان یک جرم اضافه در نظر گرفته می‌شود [۱۴]. روابط به صورت (۹) است:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_f^T \epsilon) dV$$

$$U_a = \frac{1}{2} \sum_1^{n_a} \int (\sigma_p^T \epsilon - D^T E) dV$$

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_1^{n_s} \int (\sigma_p^T \epsilon) dV$$

$$dV = r(x) dz dx d\theta \quad (9)$$

انرژی جنبشی نیز باید برای پوسته، عملگر و سنسور محاسبه شود. روش محاسبه هر سه برابر است با این تفاوت که چگالی پوسته با پیزوالکتریک فرق دارد. با این تفاسیر روابط به صورت (۱۰) خواهد بود [۱۵]:

$$T_f = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vec{V} \cdot \vec{V} \rho_f(z) dV$$

$$T_a = \frac{1}{2} \sum_1^{n_s} \int (\rho_p(z) \vec{V} \cdot \vec{V}) dV$$

$$T_s = \frac{1}{2} \sum_1^{n_a} \int (\rho_p(z) \vec{V} \cdot \vec{V}) dV \quad (10)$$

سرعت موجود در انرژی جنبشی به بردار جابه‌جایی و سرعت دورانی وابسته است که به صورت (۱۱) بیان می‌گردد:

$$\vec{V} = \vec{R} + \vec{\Omega} \times \vec{R}$$

$$\vec{R} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

$$\vec{\Omega} = -\Omega \cos(\alpha)\hat{i} + \Omega \sin(\alpha)\hat{k} \quad (11)$$

$$\zeta_m = -\left(\frac{\sin(\lambda_m) + \sinh(\lambda_m)}{\cos(\lambda_m) + \cosh(\lambda_m)}\right) \quad (19)$$

با قرار دادن رابطه ۱۴ در روابط ۲۰ و ۲۱ سیستم از حالت پیوسته به صورت گسسته در می‌آید. در این حالت به راحتی با استفاده از معادلات لاگرانژ و بدون استفاده از اصل همیلتون و درگیر شدن در پیچیدگی‌های آن، دینامیک حاکم بر سیستم ارتعاشاتی بدست می‌آید [۱۶]:

$$U_t = U_c + U_a + U_s + U_{hc} + U_{ha} + U_{hs} \quad (20)$$

$$T_t = T_c + T_a + T_s \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U_t}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1.2.3 \dots 6 \quad (22)$$

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq + K_a V_a = 0$$

$$q = \{u_1^{mn} \cdot u_2^{mn} \cdot v_1^{mn} \cdot v_2^{mn} \cdot w_1^{mn} \cdot w_2^{mn}\}^T$$

$$V_a = \{v_{a1} \cdot v_{a2} \cdot v_{a3} \cdot v_{a4}\}^T \quad (23)$$

به این ترتیب شش معادله درجه دوم به دست می‌آید. M ماتریس جرم، C ماتریس ژيروسکوپ و K_a ماتریس ضریب ولتاژ عملگر است؛ همچنین K ماتریس سختی و ناشی از انرژی کرنشی و تنش محیطی است. ماتریس ژيروسکوپ که ناشی از چرخش است، به صورت پادمتقارن، ماتریس‌های سختی و جرم به صورت متقارن خواهند بود. از طرفی وجود عملگر باعث ظاهر شدن ترم ناهمگنی، یعنی همان ولتاژ خارجی (V_a) در معادله می‌شود. برای بدست آوردن فرکانس طبیعی می‌توان معادلات را به فرم فضای حالت نوشت [۱۴]:

$$\begin{aligned} \vec{Z} = \begin{Bmatrix} \vec{q} \\ \dot{\vec{q}} \end{Bmatrix} &\rightarrow \dot{\vec{Z}} = AZ + B_a V_a \\ \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} & \quad B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}K_a \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

از آنجایی که سیستم به طور خطی مدل‌سازی شده است، لذا عامل خارجی نمی‌تواند روی فرکانس طبیعی در حالتی اثرگذار باشد که حلقه کنترلی وجود ندارد. به همین دلیل ترم $B_a V_a$ در این بخش حذف می‌شود؛ بنابراین فرکانس طبیعی به صورت رابطه (۲۵) محاسبه می‌شود:

$$w(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [w_1^{mn}(t) \cos n\theta - w_2^{mn}(t) \sin n\theta] W_m(x) \quad (14)$$

در رابطه ۱۴ مشاهده می‌شود که توابع شکل مود، معلوم و توابع زمانی، مجهول و مستقل از یکدیگر هستند؛ همچنین برای هر متغیر دو تابع زمانی مجهول در نظر گرفته شده است. سه تابع $U_m(x)$ ، $V_m(x)$ و $W_m(x)$ وابسته به شرایط مرزی اعمالی است. در این پروژه چهار شرط مرزی بررسی می‌شود [۸]:

$$\begin{aligned} \phi_m(x) = & \left[\zeta_1 \sin\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \zeta_2 \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) \right] \\ & + \zeta_m \left[\zeta_3 \cos\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \zeta_4 \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

۱- دو سر ساده ($Ss - Sl$):

$$U(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$V(x) = W(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (16)$$

۲- دو سر گیردار ($Cs - Cl$):

$$U(x) = V(x) = W(x) = \phi_m(x)$$

$$\zeta_1 = \zeta_3 = -1 \quad \zeta_2 = \zeta_4 = 1$$

$$\cos(\lambda_m) \cos(\lambda_m) = 1$$

$$\zeta_m = \frac{\sinh(\lambda_m) - \sin(\lambda_m)}{\cos(\lambda_m) - \cosh(\lambda_m)} \quad (17)$$

۳- دو سر آزاد ($Fs - Fl$):

$$U(x) = V(x) = W(x) = \phi_m(x)$$

$$\zeta_1 = \zeta_3 = \zeta_2 = \zeta_4 = 1$$

$$\cos(\lambda_m) \cos(\lambda_m) = 1$$

$$\zeta_m = \frac{\sin(\lambda_m) - \sinh(\lambda_m)}{\cosh(\lambda_m) - \cos(\lambda_m)} \quad (18)$$

۴- گیردار - آزاد ($Cs - Fl$):

$$U(x) = V(x) = W(x) = \phi_m(x)$$

$$\zeta_1 = \zeta_3 = 1 \quad \zeta_2 = \zeta_4 = -1$$

$$\cos(\lambda_m) \cos(\lambda_m) = -1$$

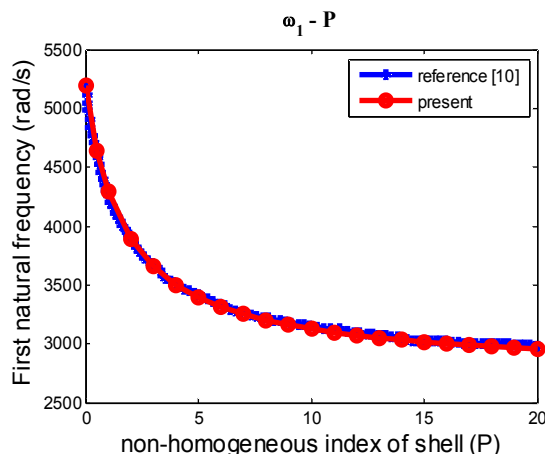
خواص مکانیکی و نسبت‌های هندسی برای این مقایسه در مرجع مورد به طور واضح بیان شده است.

در گام بعدی به بررسی پارامترهای مختلف پوسته و پیزوالکتریک روی فرکانس طبیعی پرداخته می‌شود. قبل از آن باید خواص مکانیکی پوسته، خواص مکانیکی و الکتریکی پیزوالکتریک و همچنین نسبت‌های هندسی مشخص شده باشند که همگی در جداول ۳ تا ۵ نشان داده شده‌اند [۲ و ۱۹]. لازم به ذکر است، در نمودارهایی که عدد موج ذکر نشده منظور مود اول ارتعاشات ($n = 1, m = 1$) است.

جدول ۱- فرکانس طبیعی بی بعد مخروط چرخان همسانگرد

با شرایط مرزی $S-S$
 $\alpha = 30^\circ, h/a = 0.01, /a = 6, m = 1, v = 0.3, \Omega^* = 1$

f	n	۱	۲	۳	۴
	Han [18]	۰/۶۶۹۲	۰/۴۰۹۵	۰/۳۳۶۲	۰/۳۷۹۷
f_f	Present	۰/۶۸۰۶	۰/۴۰۰۵	۰/۳۳۶۶	۰/۳۸۲۸
	error	٪ ۱/۷	٪ -۲/۲	٪ ۰/۱۲	٪ ۰/۱۸۲
	Han [18]	۰/۸۱۱۶	۰/۵۲۲۰	۰/۴۳۰۸	۰/۴۵۲۸
f_b	Present	۰/۸۳۸۸	۰/۵۲۱۲	۰/۴۲۷۸	۰/۴۵۴۵
	error	٪ ۲/۳	٪ -۲/۰	٪ -۰/۷	٪ ۰/۱۵



شکل ۴- مقایسه فرکانس طبیعی اول استوانه غیر چرخان در شرط مرزی $S-S$ به همراه دو لایه پیزوالکتریک با مرجع [۲]

$$\omega_i = eig(A) \rightarrow \omega = \alpha \pm \beta i \rightarrow \alpha = 0 \quad (25)$$

قسمت حقیقی صفر بدست می‌آید. لازم به ذکر است که در هر مود ارتعاشاتی شش فرکانس مجزا وجود دارد که سه فرکانس به عنوان پیشرو و بقیه به عنوان پسرو شناخته می‌شوند [۱۷].

۳- بحث و نتایج

در این بخش ابتدا به منظور حصول اطمینان از مدل‌سازی و درستی استخراج روابط، فرکانس طبیعی بی بعد و بعددار با نتایج مراجع مختلف در دو شرایط مرزی مقایسه می‌شود. برای بی بعد سازی از رابطه ۲۶ استفاده می‌شود.

$$\Omega^* = \Omega b \sqrt{\frac{\rho(1-v^2)}{E}}$$

$$f_f = \omega_f b \sqrt{\frac{\rho(1-v^2)}{E}}$$

$$f_b = \omega_b b \sqrt{\frac{\rho(1-v^2)}{E}} \quad (26)$$

نخست در جدول ۱ فرکانس طبیعی بی بعد مخروط چرخان همسانگرد بدون پیزوالکتریک با نتایج مرجع [۱۸] مقایسه می‌شود. نتایج این جدول انطباق خوب دو روش تحلیلی که در این پژوهش استفاده شده و روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته، برای حل معادلات را نشان می‌دهد.

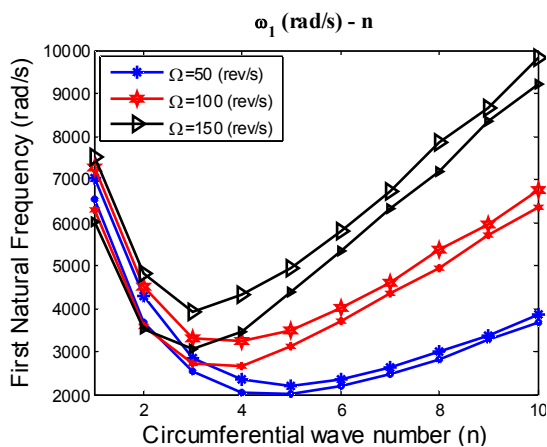
مقایسه بعدی در مورد شرط مرزی دو سر گیردار است. در جدول ۲ فرکانس طبیعی مخروط غیر چرخان همسانگرد با نتایج مرجع [۸] مقایسه شده است.

در ادامه فرکانس‌های طبیعی یک استوانه غیر چرخان با دو لایه پیزوالکتریک که داخل و روی پوسته گسترانیده شده‌اند در P های مختلف و در شرط مرزی دو سر ساده رسم گردیده و با مرجع [۲] که اطلاعات نمودار آن توسط نرم افزار استخراج شده مقایسه گردیده است. با نگاهی به شکل ۴ می‌توان فهمید که دو نمودار کاملاً روی هم منطبق هستند و اختلاف‌های بسیار کوچک ناشی از خطای انسانی در استخراج اطلاعات نمودار مرجع مورد نظر است. لازم به ذکر است که

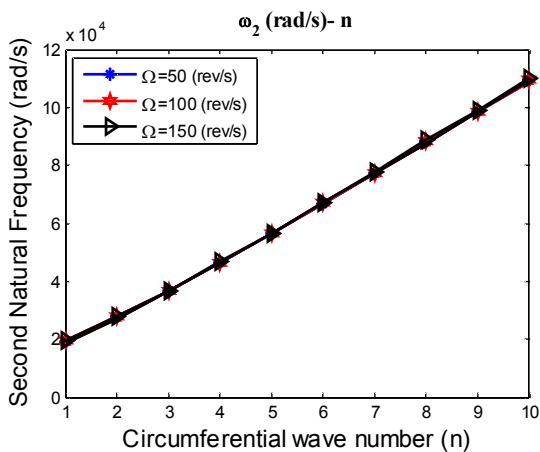
جدول ۲- فرکانس طبیعی بی بعد مخروط غیر چرخان همسانگرد با شرایط مرزی C - C

$$L \sin(\alpha) / b = 0.5 \cdot h / b = 0.01 \cdot \nu = 0.3 \cdot m = 1 \cdot \Omega^* = 0$$

n	$\alpha = 45$			$\alpha = 60$		
	Present	[λ]	error	Present	[λ]	error
۱	۰/۸۵۷۶	۰/۸۴۵۲	٪۱/۴	۰/۶۴۹۸	۰/۶۴۴۹	٪۰/۷۶
۲	۰/۷۰۷۲	۰/۶۸۰۳	٪۳/۹	۰/۵۷۲۶	۰/۵۵۶۸	٪۲/۸
۳	۰/۵۷۹۷	۰/۵۵۵۳	٪۴/۴	۰/۴۹۹۷	۰/۴۸۱۸	٪۳/۷
۴	۰/۴۹۲۷	۰/۴۷۷۸	٪۳/۱	۰/۴۵۰۱	۰/۴۳۶۱	٪۳/۲
۵	۰/۴۴۳۴	۰/۴۳۹۵	٪۰/۸۹	۰/۴۲۷۹	۰/۴۲۰۲	٪۱/۸



شکل ۵- فرکانس طبیعی اول بر حسب (n) و (Ω) برای شرط مرزی S - S



شکل ۶- فرکانس طبیعی دوم بر حسب (n) و (Ω) برای شرط مرزی S - S

جدول ۳- خواص مکانیکی پوسته

	E (Gpa)	ρ ($\frac{kg}{m^3}$)	ν
Al_2O_3	۳۸۰	۳۸۰۰	۰/۳۳
Al	۷۰	۲۷۰۰	۰/۳۳

جدول ۴- خواص پیزوالکتریک (PZT - 4)

Q	e	ζ	ρ			
GPa	Cm^{-2}	$10^{-9} Fm^{-1}$	$\frac{kg}{m^3}$			
Q_{11}^0	Q_{12}^0	Q_{66}^0	e_{31}^0	e_{32}^0	ζ_{33}^0	ρ_p^0
۱۳۹	۷۷/۸	۳۰/۶	-۵/۲	-۵/۲	۵/۶۲	۷۸۰۰

جدول ۵- نسبت‌های هندسی

$\frac{h}{a}$	$\frac{L}{a}$	$\frac{h_a}{h}$	$\frac{h_s}{h}$	α	N	P	$\frac{\Omega}{rev/s}$
۰/۰۱	۶	۰/۲۵	۰/۲۵	۳۰°	۲	۱	۱۵۰

پس از اعتبار سنجی، به بررسی فرکانس‌های طبیعی پرداخته می‌شود. نخست اثر عدد موج محیطی در سه شکل ۵ تا ۷ بررسی می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، فرکانس‌های دوم و سوم مودهای مختلف کاملاً روند صعودی داشته و تغییرات سرعت چرخش نیز روی آنها اثر ندارد؛ اما برای فرکانس طبیعی اول به نقطه کمینه مشاهده می‌شود که می‌تواند با تغییر سرعت دورانی جابه‌جا شود؛ همچنین

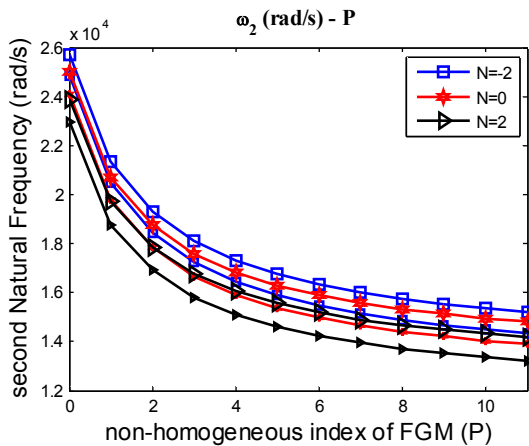
است که با حرکت این عدد از منفی به سمت مثبت نیز، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد.

پارامتر مهم بعدی ضخامت پیزوالکتریک است که می‌توان با معرفی یک پارامتر بی بعد تاثیر آن را روی فرکانس طبیعی بررسی کرد. در این مقاله نسبت ضخامت پیزوالکتریک به ضخامت پوسته تحت همین عنوان انتخاب شده است. با تغییر این عدد از صفر تا یک روند فرکانس‌های طبیعی در اشکال ۱۱ تا ۱۳ بررسی شده است.

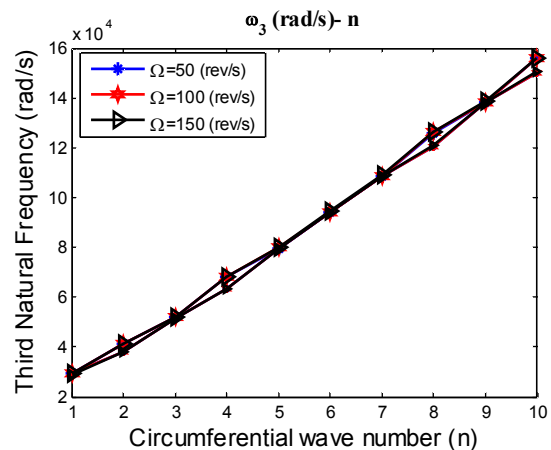
افزایش ضخامت پیزوالکتریک (از نوع $PZT-4$)، باعث کاهش هر سه فرکانس طبیعی شده است. در طرف دیگر، سه نوع مختلف پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفته که نمودار

بی‌نظمی‌هایی موجود در اختلاف بین فرکانس پیشرو و پسرو به دلیل وجود پیزوالکتریک است. لازم به ذکر است که خط چین‌ها فرکانس پیشرو و خطوط ممتد فرکانس پسرو را نشان می‌دهند.

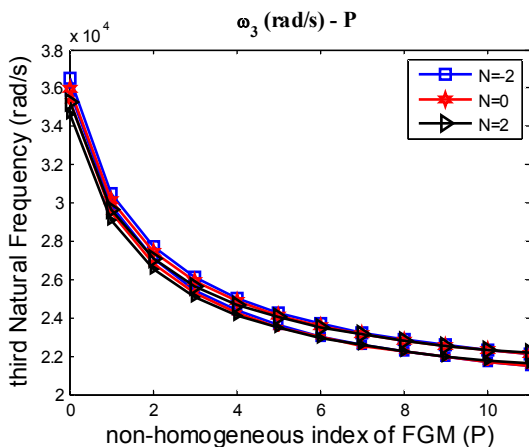
تغییرات ضریب ناهمگنی پوسته و پیزوالکتریک روی فرکانس‌های طبیعی در اشکال ۸ تا ۱۰ ترسیم شده است. اولین نکته، کاهش بودن هر سه فرکانس طبیعی بر اثر افزایش عدد P است که به دلیل کاهش سختی نسبت به جرم سیستم اتفاق می‌افتد که این خود به دلیل بزرگتر شدن نسبت انتگرال سختی به انتگرال چگالی در طول ضخامت پوسته با افزایش P است. محدوده تغییرات N نیز، $[-2, 2]$



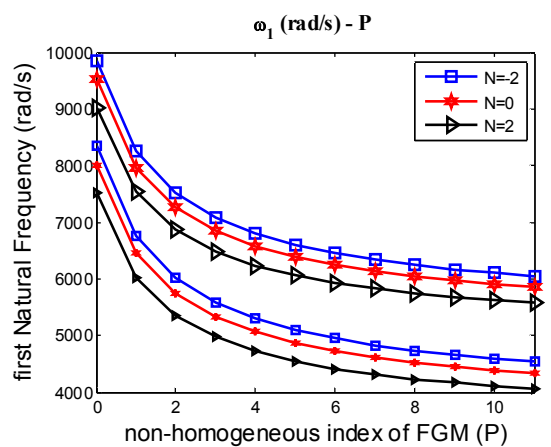
شکل ۹- فرکانس طبیعی دوم بر حسب (P) و (N) برای شرط مرزی $S-S$



شکل ۷- فرکانس طبیعی سوم بر حسب (n) و (Ω) برای شرط مرزی $S-S$



شکل ۱۰- فرکانس طبیعی سوم بر حسب (P) و (N) برای شرط مرزی $S-S$



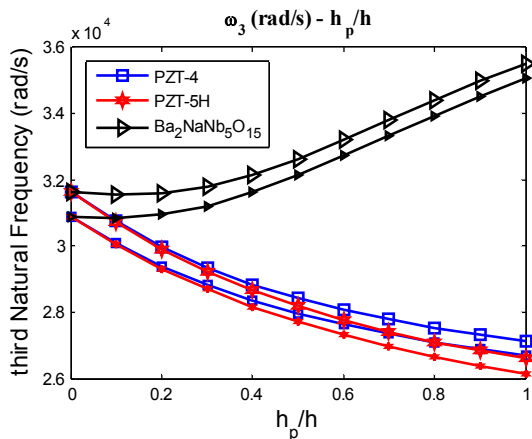
شکل ۸- فرکانس طبیعی اول بر حسب (P) و (N) برای شرط مرزی $S-S$

در نمودارهای ۱۴ تا ۱۶ اثر طول پیزوالکتریک به همراه محل قرارگیری آن در جهت مولد مخروط، بر فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. لازم به ذکر است که تمام پیزوالکتریک‌ها هم اندازه هستند. با توجه به مختصات در نظر گرفته شده، نصف طول و محل قرارگیری پیزوالکتریک به صورت زیر است:

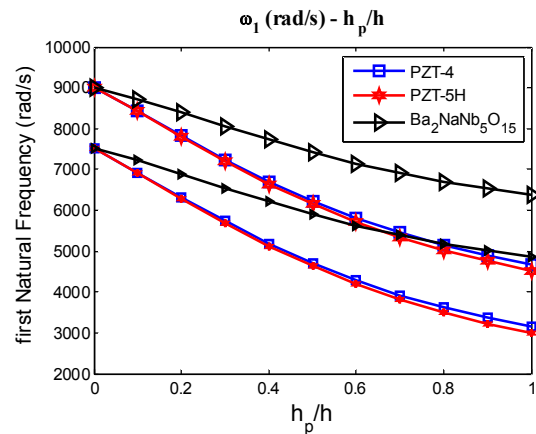
$$l_p = \frac{X_{p2} - X_{p1}}{2} \quad (27)$$

$$X_p = \frac{X_{p2} + X_{p1}}{2} \quad (28)$$

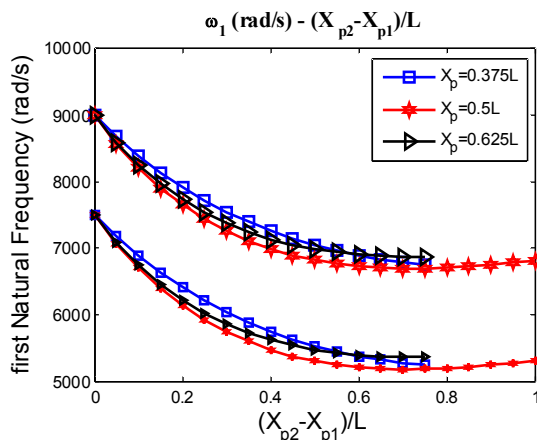
هر سه به دلیل صفر بودن ضخامت پیزوالکتریک در ابتدای نمودار روی هم منطبق است. خواص دو پیزوالکتریک $PZT-4$ و $PZT-5H$ به یکدیگر نزدیک است، به همین جهت اختلاف نمودار این دو بسیار اندک است؛ همچنین شیب کاهشی نمودار مربوط به $Ba_2NaNb_5O_{15}$ نسبت به دو نوع دیگر کمتر است. این شیب در فرکانس دوم کم شده و در فرکانس سوم روند کاملاً معکوس می‌شود. چرایی این روند را می‌توان به ترتیب در بیشتر و کمتر بودن ماتریس سفتی و چگالی پیزوالکتریک $Ba_2NaNb_5O_{15}$ از ماتریس سفتی و چگالی دو نوع دیگر دید.



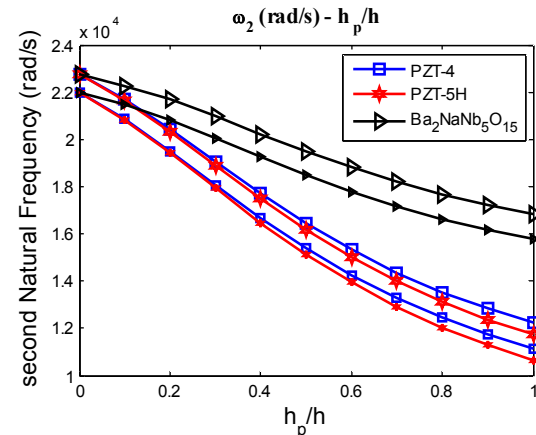
شکل ۱۳- فرکانس طبیعی سوم بر حسب نسبت (h_p/h) و جنس پیزوالکتریک برای شرط مرزی S - S



شکل ۱۱- فرکانس طبیعی اول بر حسب نسبت (h_p/h) و جنس پیزوالکتریک برای شرط مرزی S - S



شکل ۱۴- فرکانس طبیعی اول بر حسب (X_p) و $(2l_p)$ برای شرط مرزی S - S



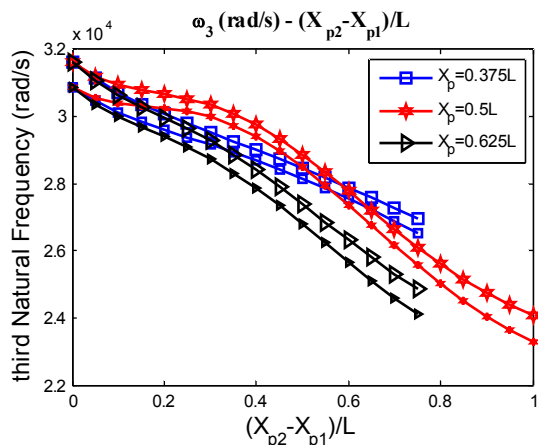
شکل ۱۲- فرکانس طبیعی دوم بر حسب نسبت (h_p/h) و جنس پیزوالکتریک برای شرط مرزی S - S

مشخص شود. در این قسمت اثر اضافه شدن وصله‌های پیزوالکتریک روی سیستم بررسی و فرکانس طبیعی بدست آمده با حالت عدم وجود پیزوالکتریک در سیستم مقایسه می‌شود. نخست تغییرات فرکانس‌های طبیعی در مود اول بر اثر تغییرات ضخامت پوسته که در نمودارهای ۱۷ تا ۱۹ برای شرط مرزی دو سر ساده ترسیم شده تجزیه و تحلیل می‌شود؛ همچنین این نمودار در N های مختلف رسم شده است.

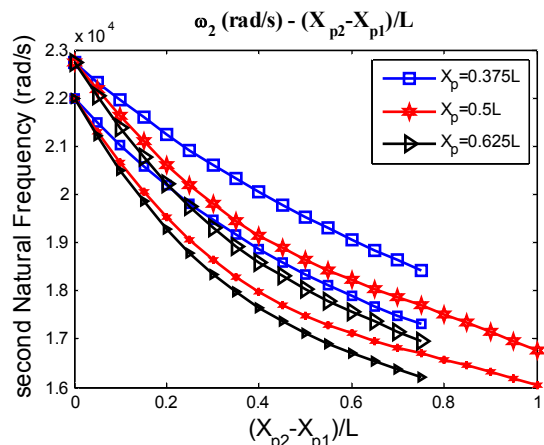
با توجه به نمودارهای ۱۷ تا ۱۹ مشخص است که هر سه فرکانس طبیعی در حالت بدون وجود پیزوالکتریک ثابت

با توجه به این سه نمودار، کاهش یافتن هر سه فرکانس طبیعی را می‌توان مشاهده کرد؛ بنابراین با افزایش طول پیزوالکتریک در راستای مولد، نسبت جرم به سختی سیستم افزایش می‌یابد. البته استثنا نیز وجود دارد. در نمودار ۱۴ هنگامی که پیزوالکتریک در $X_p = 0.5L$ قرار دارد، از یک طول خاصی به بعد روند فرکانس طبیعی اول با شیب اندکی افزایشی است.

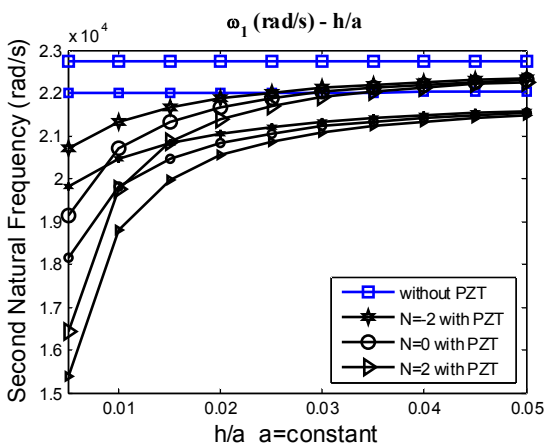
تا اینجا سعی شد، چند پارامتر مربوط به پیزوالکتریک و پوسته بررسی شود تا اثر هر یک روی فرکانس طبیعی



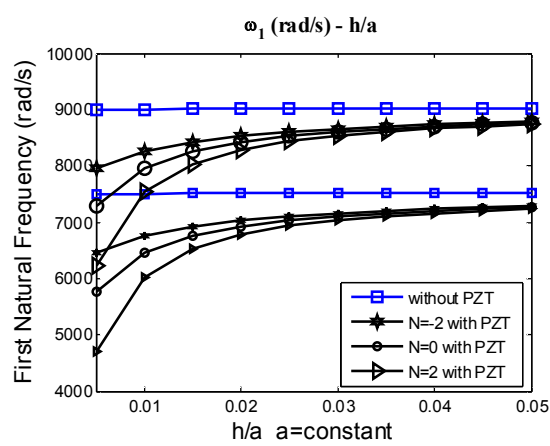
شکل ۱۶- فرکانس طبیعی سوم بر حسب $(2l_p)$ و (X_p) برای شرط مرزی $S-S$



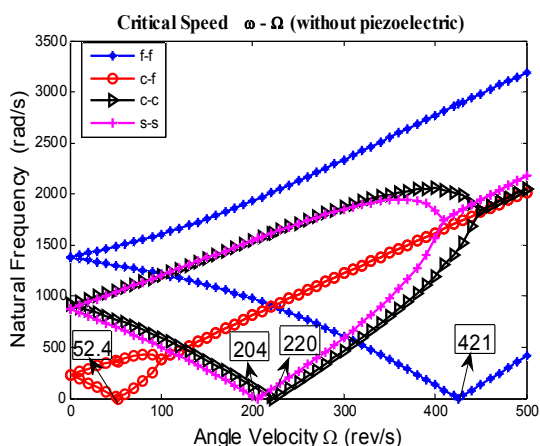
شکل ۱۵- فرکانس طبیعی دوم بر حسب $(2l_p)$ و (X_p) برای شرط مرزی $S-S$



شکل ۱۸- فرکانس طبیعی دوم بر حسب نسبت h/a در دو حالت وجود و عدم وجود پیزوالکتریک در شرط مرزی $S-S$



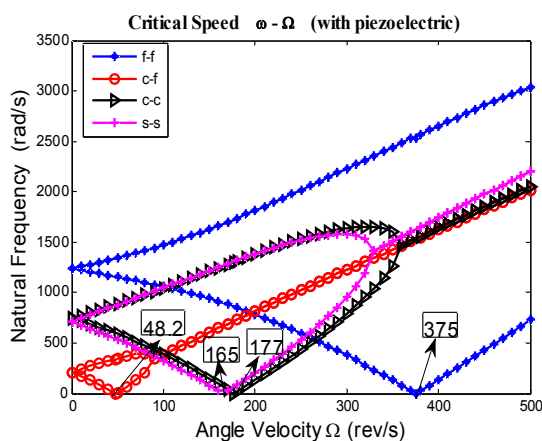
شکل ۱۷- فرکانس طبیعی اول بر حسب نسبت h/a در دو حالت وجود و عدم وجود پیزوالکتریک در شرط مرزی $S-S$



شکل ۲۰- سرعت بحرانی در چهار شرط مرزی بدون حضور پیزوالکتریک

$$\frac{h}{a} = 0.002 \cdot \frac{L}{a} = 10 \cdot \alpha = 45 \text{ (deg)} \cdot P = 1$$

$$N = 2 \cdot \frac{h_s}{h} = \frac{h_a}{h} = 0.25$$



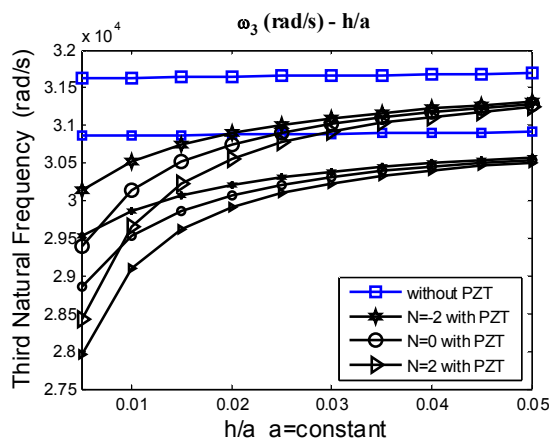
شکل ۲۱- سرعت بحرانی در چهار شرط مرزی در حضور

پیزوالکتریک

$$\frac{h}{a} = 0.002 \cdot \frac{L}{a} = 10 \cdot \alpha = 45 \text{ (deg)} \cdot P = 1$$

$$N = 2 \cdot \frac{h_s}{h} = \frac{h_a}{h} = 0.25$$

قابل ملاحظه در شیب خطوط نشده است؛ همچنین مشاهده می‌شود که فرکانس پیشرو و پسرو در دو شرط مرزی دو سر ساده و دو سر گیردار در نقاطی با هم برابر شده است. به این نقطه، نقطه واگرایی^۱ گفته شده که سیستم در آن



شکل ۱۹- فرکانس طبیعی سوم بر حسب نسبت h/a در دو حالت وجود و عدم وجود پیزوالکتریک در شرط مرزی S-S

مانده است؛ اما هنگامی که سنسور و عملگر به سیستم اضافه شده شیب تغییرات از صفر فاصله گرفته و روند صعودی به خود می‌گیرد. دلیل ثابت ماندن فرکانس طبیعی در حالت اول آن است که جرم و سختی و دمپینگ ناشی از چرخش سیستم متناسب با یکدیگر افزایش یافته و لذا باعث عدم تغییر در فرکانس طبیعی شده است. علت روند صعودی در حالت دوم نیز ثابت و افزایشی بودن جرم و سختی و دمپینگ به ترتیب در پیزوالکتریک و پوسته است، به گونه‌ای که هرچه ضخامت پوسته بیشتر شود، تاثیر پیزوالکتریک روی فرکانس طبیعی کمتر شده، بنابراین فرکانس طبیعی سیستم با سنسور و عملگر، به فرکانس طبیعی بدون پیزوالکتریک نزدیک می‌شود.

حالت بعدی مقایسه سرعت بحرانی در شرایط مرزی مختلف بین نمودار ۲۰ و نمودار ۲۱ در دو حالت وجود و عدم وجود پیزوالکتریک است. با افزایش سرعت دورانی معمولاً فرکانس پیشرو کاهش و فرکانس پسرو افزایش می‌یابد. این افزایش اختلاف به دلیل افزایش نیروی کریولیس است. کاهش فرکانس پیشرو تا صفر شدن مقدار آن ادامه پیدا می‌کند سرعتی که در آن فرکانس پیشرو صفر می‌شود، سرعت بحرانی نام دارد که در این حالت سیستم ناپایدار می‌شود.

با توجه به نمودارهای ۲۰ و ۲۱ اثر پیزوالکتریک روی سیستم، کاهش سرعت بحرانی است. از طرف دیگر روند دو نمودار به یکدیگر شبیه بوده، لذا پیزوالکتریک باعث تغییری

¹ Divergence

۵- منابع

- [1] Alibeigloo A, Kani AM, Pashaei MH (2012) Elasticity solution for the free vibration analysis of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers. *Int J Pres Ves Pip* 89: 98-111.
- [2] Arefi M, Karroubi R, Irani-Rahaghi M (2016) Free vibration analysis of functionally graded laminated sandwich cylindrical shells integrated with piezoelectric layer. *Appl Math Mech-Engl* 37: 821-834.
- [3] Shekari A, Ghasemi FA, Malekzadehfard K, (2017) Free damped vibration of rotating truncated conical sandwich shells using an improved high-order theory. *Lat Am J Solids Struc* 14: 2291-2323.
- [4] Sheng GG, Wang X (2009) Active control of functionally graded laminated cylindrical shells. *Compos Struct* 90: 448-457.
- [5] Li FM, Song ZG, Chen ZB (2012) Active vibration control of conical shells using piezoelectric materials. *J Vib Control* 18: 2234-2256.
- [6] Arefi M, Arefi M (2019) Third-order electro-elastic analysis of sandwich doubly curved piezoelectric micro shells. *Mech Based Des Struc* 1-30.
- [7] فرنام م، غیور م (۱۳۹۳) تحلیل ارتعاشات پوسته‌های مخروطی شکل چرخان با ویژگی‌های عملکردی درجه بندی شده. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [8] Li H, Lam KY, Ng TY (2005) Rotating shell dynamics. Elsevier.
- [9] Tzou HS (1993) Piezoelectric shells. Dordrecht: Kluwer.
- [10] Talebitooti M (2018) Thermal effect on free vibration of ring-stiffened rotating functionally graded conical shell with clamped ends. *Mech Adv Mater Struc* 25:155-165
- [11] Arefi M (2015) The effect of different functionalities of FGM and FGPM layers on free vibration analysis of the FG circular plates integrated with piezoelectric layers. *Smart Struct Syst* 15: 1345-1362.
- [۱۲] جغفری نیاسر م، جغفری ع ع، ایرانی رهنقی م (۱۳۹۸) بررسی تاثیر وصله‌های پیزوالکتریک روی فرکانس ارتعاشات روتور پوسته‌ی مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی. کنفرانس بین المللی آکوستیک و ارتعاشات.
- [13] Karroubi R, Irani-Rahaghi M (2019) Rotating sandwich cylindrical shells with an FGM core and two FGPM layers: free vibration analysis. *Appl Math Mech-Engl* 40: 563-578.
- [14] Song ZG, Zhang LW, Liew KM (2016) Active vibration control of CNT-reinforced composite cylindrical shells via piezoelectric patches. *Compos Struct* 92-100.

کاملاً ناپایدار و به سرعت تخریب می‌شود [۲۰]. این نقطه نیز در اثر اضافه شدن پیزوالکتریک در سرعت چرخش پایین‌تری اتفاق می‌افتد. باید ذکر شود که تغییر نسبت‌های هندسی در این دو نمودار به دلیل بهتر نشان دادن سرعت بحرانی است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی چرخان با وصله‌هایی از جنس مواد هدفمند چسبیده به آن بررسی شد. خواص پوسته و ماده هوشمند به صورت مدرج تابعی در نظر گرفته شده و وصله‌ها داخل و روی پوسته به سیستم اضافه شده‌اند. مدل‌سازی سیستم با استفاده از نظریه کلاسیک انجام شده است. انرژی‌های محاسبه شده سیستم با استفاده از روابط تنش-کرنش، کرنش-جاب‌جایی و میدان الکتریکی-جاب‌جایی الکتریکی بر حسب جاب‌جایی پوسته بازنویسی شدند و در مرحله بعد سیستم پیوسته به گسسته تبدیل شد. در نهایت از طریق معادله لاگرانژ، معادلات حاکم بر سیستم بدست آمد. در ادامه اعتبارسنجی انجام شده، سپس تاثیر پارامترهای مختلف پوسته و پیزوالکتریک، همچنین شرایط مرزی روی فرکانس طبیعی بررسی و نتایج زیر حاصل شد:

- ۱- اختلاف مقدار پیشرو و پسروی فرکانس‌های طبیعی دوم و سوم اندک است و این به دلیل عدم تاثیر پذیری این دو از عامل به وجود آورنده دو بخش شدن فرکانس طبیعی، یعنی نیروی کریولیس است.
- ۲- افزایش عدد موج محیطی ابتدا باعث کاهش و سپس افزایش فرکانس طبیعی اول می‌شود؛ اما روند فرکانس‌های دوم و سوم کاملاً صعودی است.
- ۳- تغییرات ضریب ناهمگنی لایه مدرج تابعی پوسته و پیزوالکتریک رابطه مستقیمی با هر سه فرکانس طبیعی دارد.
- ۴- هرچه ضخامت پوسته بیشتر شود، تاثیر پیزوالکتریک روی سیستم کمتر می‌شود.
- ۵- علاوه بر سرعت بحرانی، سرعت دیگری نیز وجود دارد که در آن سیستم ناپایدار می‌شود، نام آن، سرعت واگرایی است.

- [19] Mehralian F, Beni YT (2018) Vibration analysis of size-dependent bimorph functionally graded piezoelectric cylindrical shell based on nonlocal strain gradient theory. *J Braz Soc Mech Sci* 40:27.
- [20] Daneshjou K, Talebitooti M, Talebitooti R, Googarchin HS, (2013). Dynamic analysis and critical speed of rotating laminated conical shells with orthogonal stiffeners using generalized differential quadrature method. *Lat Am J Solids Stru* 10: 349-390.
- [15] Wang J, Cao Y, Lin G (2016) Vibration analysis of high-speed rotating conical shell with arbitrary boundary conditions. *Proc Meet Acoust* 29: 065001
- [16] Sun S, Liu L, Cao D (2018) Nonlinear travelling wave vibrations of a rotating thin cylindrical shell. *J sound vib* 431:122-136.
- [17] Soedel W, Qatu MS (2005) *Vibrations of shells and plates*. CRC Press.
- [18] Han Q, Chu F (2014) Parametric resonance of truncated conical shells rotating at periodically varying angular speed. *J sound vib* 333:2866-2884.