مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۸/ دوره ۹/ شماره ۴/ صفحه ۱۱۷-۱۳۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/jsfm.2020.8886.3013

شبیه‌سازی عددی انتقال حرارت جابجایی طبیعی پایا و ناپایای نانوسیال در فضای بین حلقه‌های هم‌مرکز و غیر هم‌مرکز در یک محیط متخلخل

محمدرضا محبوبی فولادی[۱] و پوریا اکبرزاده[۲،*]

[۱] کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

[۲] دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۱۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۹/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۰۴

چکیده

در این مقاله به شبیه‌سازی عددی پدیده انتقال حرارت جابجایی طبیعی پایا و ناپایای نانوسیال در فضای بین حلقه‌های هم‌مرکز و غیر هم‌مرکز پرشده از یک ماده متخلخل پرداخته شده است. معادلات حاکم بر جریان سیال شامل، معادلات بقای جرم، ممنتوم و انرژی به کمک روش عددی تفاضل محدود گسسته و در حل آنها از روش ضمنی جهت متغیر (ADI) و روش فوق تخفیفی (SOR) استفاده شده است. در پژوهش حاضر به بررسی اثرات عدد رایلی، کسر حجمی نانوسیال (در محدوده ۰ تا ۴ درصد)، عدد دارسی، ضریب تخلخل محیط متخلخل و نسبت خروج از مرکز دو حلقه بر مقدار عدد ناسلت متوسط، عدد ناسلت محلی، خطوط جریان و خطوط هم‌دما و تغییرات آنها با زمان پرداخته شده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که با افزایش عدد رایلی، ضریب تخلخل و کسر حجمی نانوذرات، میزان انتقال حرارت افزایش می‌یابد. کاهش عدد دارسی، باعث کاهش نفوذپذیری محیط متخلخل شده و در نتیجه انتقال حرارت کاهش می‌یابد. در شرایط ناپایا با افزایش دامنه نوسان دمای دیواره داخلی (به دلیل افزایش گرادیان دمایی بین دو دیواره)، دامنه تغییرات عدد ناسلت متوسط نیز افزایش می‌یابد؛ همچنین نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد، فرکانس تغییرات عدد ناسلت متوسط بر فرکانس تغییرات دمایی دیواره داخلی منطبق خواهد بود.

کلمات کلیدی: انتقال حرارت جابجایی طبیعی ناپایا؛ نانوذره؛ عدد دارسی؛ عدد رایلی؛ نسبت خروج از مرکز.

Numerical Simulation of Steady and Unsteady Natural Convection Heat Transfer of Nanofluids in Eccentric and Concentric Porous Annuluses

M. R. Mahboubi Fooladi[1], P. Akbarzadeh[2,*]

[1] Msc. Department of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

[2] Assoc. Prof., Department of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract

This paper is devoted to numerical simulation of steady and unsteady natural heat transfer convection of nanofluids in an eccentric porous annulus. Governing equations including mass, momentum, and energy conservation are discretized by means of finite difference methods and they are solved by Alternating Direction Implicit (ADI) method and Successive over Relaxation (SOR) method. In the present study, the effect of Rayleigh number, nanoparticle volume fraction (in the range of 0 to 4 percent), Darcy number, porosity coefficient, and eccentricity ratio on average Nusselt number, local Nusselt number, streamlines, and isothermal lines are investigated. The results show that by increasing Rayleigh number, the porosity coefficient, and the nanoparticle volume fraction, the heat transfer rate increases. Reducing the Darcy number reduces the permeability of the porous medium and therefore reduces the heat transfer. In unsteady conditions, by increasing the amplitude of the inner wall temperature fluctuation, (due to the increase of the temperature gradient between the two walls), the average Nusselt number increases, and the frequency of the variation of the average Nusselt number is consistent with the inner wall temperature variation frequency.

Keywords: Unsteady Natural Heat Transfer Convection; Nanoparticles; Darcy Number; Rayleigh Number; Eccentricity Ratio.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۲۲۰۲۲۷۷۶؛ فکس: ۰۲۳۳۲۳۰۰۲۵۸

آدرس پست الکترونیک: akbarzad@ut.ac.ir; p.akbarzadeh@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه کاربرد پدیده انتقال حرارت جابجایی طبیعی در لوله‌های هم‌مرکز یا غیر هم‌مرکز در شاخه وسیعی از علوم مهندسی و دانشگاهی نظیر، دریافت کننده‌های کلکتورهای خورشیدی[1]، ذوب اولیه مواد تغییر فازدهنده[2] در اطراف لوله‌های گرمایشی سیستم‌های ذخیره‌ساز حرارتی، خنک‌کننده‌های راکتورهای هسته‌ای، برج‌های خنک‌کن در نیروگاه‌ها، خنک‌کاری موتورها و ژنراتورهای الکتریکی، خنک‌کاری کابل‌های الکتریکی زیر زمینی، عایق‌های حرارتی کابل‌های فشار قوی، صنایع نفت و گاز، صنایع هوافضا و غیره بسیار حائز اهمیت شده است. درگذشته آب، روغن و اتیلن گلیکول به‌عنوان سیال‌های رایج در موضوع انتقال حرارت، مورد توجه صنایع و تحقیقات دانشگاهی قرار داشته است. با این حال این سیالات رایج، به دلیل پایین بودن ویژگی هدایت حرارتی خود، دارای محدودیت‌هایی در بهبود و افزایش انتقال حرارت می‌باشند.

برای اولین بار چوی [۱] در سال ۱۹۹۵ سخن از ذرات جامد ریزی، با نام نانوذره[3] به میان آورد. ذراتی که با اضافه شدن به سیال‌های پایه (نظیر آب، روغن و اتیلن گلیکول) به دلیل تأثیرشان بر کمیت‌های فیزیکی، مثل بالا بردن ضریب هدایت حرارتی و وجود حرکت براونی[4] سبب بالا بردن ضریب انتقال حرارت می‌شوند. ذرات در مقیاس نانو معمولاً فلزات، اکسیدهای فلزی و غیره (نظیر مس، اکسید آلومینیوم، اکسید تیتانیوم، طلا، نقره، اکسید مس و غیره) هستند که در سیال‌های پایه‌ای از قبیل، آب، روغن و اتیلن گلیکول به‌صورت ترکیبی از آن‌ها معلق می‌باشند. یکی از مصادیق کاربردی انتقال حرارت جابجایی طبیعی، جریان همرفتی در لوله‌های هم‌مرکز یا غیر هم‌مرکز در اثر اختلاف دمای جداره لوله‌ها می‌باشند که بررسی وضعیت انتقال حرارت در آنها با حضور یا عدم حضور نانوسیال مورد توجه محققان قرار داشته است.

هیدا [۲] در سال ۱۹۵۹ اولین فردی بود که به کمک تابع گرین به تحلیل عددی معادله ممنتوم در حالت جریان آرام سیال، بین حلقه‌های غیر هم‌مرکز پرداخت. سپس رینولدز و همکارانش [۳] در سال ۱۹۶۳، مسأله مربوط به انتقال حرارت را در حالت جریان آرام و آشفته سیال بین حلقه‌های غیر هم‌مرکز را بررسی کردند. ترومبتا [۴] در سال ۱۹۷۱، به تحلیل انتقال حرارت پدیده جابجایی اجباری در ناحیه توسعه‌یافته هیدرودینامیکی و گرمایی در جریان آرام سیال بین حلقه‌های غیر هم‌مرکز پرداخت. کوهن و گلدشتاین [۵]، در سال ۱۹۷۶ به بررسی آزمایشگاهی پدیده جابجایی طبیعی بین حلقه‌های افقی هم‌مرکز با نسبت شعاع $RR = 2.6$، عدد پرانتل[5] $\mathrm{Pr} = 0.7$ و اعدد رایلی[6] بین $3 \times 10^4 \leq \mathrm{Ra} \leq 10^5$ پرداختند. مواردی که آنها مورد بررسی قراردادند شامل، توزیع دما، مقدار متوسط و محلی انتقال حرارت بود که تقریباً با نتایج عددی موجود هم‌خوانی داشت. کوهن و گلدشتاین [۶] در سال ۱۹۷۸، به بررسی آزمایشگاهی پدیده جابجایی طبیعی بین حلقه‌های افقی غیر هم‌مرکز با نسبت شعاع $RR = 2.6$، عدد رایلی در بازه $3 \times 10^4 \leq \mathrm{Ra} \leq 10^5$ و عدد پرانتل $\mathrm{Pr} = 0.7$ نیز پرداختند. نتایج آنها نشان می‌داد که برای حالت حلقه‌های غیر هم‌مرکز، انتقال حرارت به‌طور قابل‌توجهی در هر سیلندر تغییر می‌یابد، اما تغییر ضریب انتقال حرارت به‌طورکلی با تغییرات نسبت خروج از مرکز کمتر از ۱۰ خواهد بود.

آلدوس و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۴، به بررسی جابجایی طبیعی پایا بین دو لوله هم‌مرکز پرداختند که به‌صورت جزئی با ماده متخلخل پر شده بود. نتایج کار آنها نشان می‌داد، چنانچه ماده متخلخل به شکل یک لایه نزدیک به دواره بیرونی قرار داشته باشد، عملکرد بهتری در انتقال حرارت خواهد داشت. در سال ۲۰۰۶ لونگ و لای [۸]، به کمک ترکیب روش بسط اغتشاشی و انتقال فوریه، یک حل تحلیلی برای انتقال حرارت طبیعی پایا بین دو لوله هم‌مرکز که از ماده متخلخل پر شده است، ارائه دادند. آنها تاثیر کمیت‌هایی نظیر، عدد رایلی، عدد دارسی[7] و ضخامت لایه متخلخل را بر میزان انتقال حرارت مورد ارزیابی قرار دادند. خانافر و همکاران [۹] در سال ۲۰۰۸، به بررسی عددی اثر

---

[1] Solar Collector Receiver
[2] Phase Change Material
[3] Nanoparticles
[4] Brownian Motion
[5] Prandtl Number
[6] Rayleigh Number
[7] Darcy Number

ضخامت لایه متخلخل در جابجایی طبیعی پایا بین دو لوله هم‌مرکز پرداختند. آنها نشان دادند، با افزایش ضخامت لایه مذکور، مقدار کلی انتقال حرارت کاهش می‌یابد. ابوندا و همکارانش [۱۰] در سال ۲۰۰۹، به بررسی اثرات لزجت و هدایت حرارتی متغیر نانوسیال آب-آلومینا بر یک حلقه افقی با نسبت‌های مختلف شعاع بررسی کردند. آن‌ها نتیجه گرفتند که در اعداد رایلی $Ra \leq 10^4$ با افزایش کسر حجمی نانوذرات،[1] عدد ناسلت میانگین[2] کاهش خواهد یافت؛ درحالی‌که در عدد رایلی $Ra = 10^3$ عدد ناسلت میانگین با افزایش کسر حجمی افزایش می‌یابد. در سال ۲۰۱۲ یو و همکارانش [۱۱]، به بررسی پدیده انتقال حرارتی جابجایی طبیعی نانوسیال آب - مس با حرکت براونی در یک حلقه افقی پرداختند. آن‌ها در طی مطالعات خود به این نتیجه رسیدند که با در نظر گرفتن حرکت براونی در اعداد رایلی ثابت، عدد ناسلت متوسط زمانی به‌تدریج کاهش خواهد یافت، درحالی‌که اگر اثرات حرکت براونی صرف‌نظر شود، عدد ناسلت متوسط زمانی بیشتر از حد انتظار افزایش خواهد یافت.

حبیبی متین و پاپ [۱۲] در سال ۲۰۱۳، به بررسی جابجایی طبیعی به همراه نانوسیال مس-آب بین دو دایره غیر هم‌مرکز پرداختند. آن‌ها متوجه شدند که نانوسیال‌ها قادر به تغییر الگوی جریان هستند و در نسبت خروج از مرکز منفی و در گستره اعداد رایلی $10^2 \leq Ra \leq 10^4$ به اعداد ناسلت بالاتری دست یافتند؛ همچنین در حالت هم‌مرکز شاهد انتقال حرارت بهتری از سیلندر داخلی به سمت سیلندر خارجی بودند. ضمناً آن‌ها متوجه شدند که کمیت خروج از مرکز کمیت مناسبی برای کنترل کمیت‌ها و خواص برای حلقه‌های پرشده از نانو سیال است. سیدی و همکارانش [۱۳] در سال ۲۰۱۴، به بررسی عددی انتقال حرارت جابجایی طبیعی نانوسیال آب - مس در محفظه حلقه‌ای تحت مدل‌سازی ماکسول و برینکمن پرداختند. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد که با افزایش عدد رایلی و کسر حجمی و نسبت شعاع، عدد ناسلت متوسط افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش زاویه چرخش مقدار عدد ناسلت متوسط کاهش می‌یابد. در سال ۲۰۱۴ بیلابید و چدادی [۱۴]، به شبیه‌سازی عددی انتقال حرارت جابجایی طبیعی با روش ضمنی جهت متغیر پرداختند. آن‌ها نشان دادند، درصورتی‌که از گام زمانی مناسب استفاده شود، روش ضمنی با جهت متغیر (ADI) بسیار سریع‌تر از روش‌های عددی گذشته عمل کرده است.

بحرایی و همکارانش [۱۵] در سال ۲۰۱۴، به بررسی عددی و بهینه‌سازی انتقال حرارت با نانوسیال آب - آلومینا در یک حلقه هم‌مرکز پرداختند. آنها اثرات کسر حجمی، اندازه ذرات و نسبت شار حرارتی بر ضریب انتقال حرارت جابجایی و ضریب اصطکاک دیواره‌های داخلی و خارجی را بررسی کردند. نتایج کار آنها نشان می‌داد که اندازه ذرات بر نرخ انتقال حرارت تأثیر می‌گذارند و هر چه اندازه ذرات کوچک‌تر باشد، ضریب انتقال حرارت بیشتر خواهد شد؛ همچنین با افزایش کسر حجمی و تغییر اندازه ذرات تغییرات زیادی در ضریب انتقال حرارت جابجایی و ضریب اصطکاک حاصل خواهد گشت. علوی و همکارانش [۱۶] در سال ۲۰۱۴، به بررسی انتقال حرارت جابجایی طبیعی در یک حلقه هم‌مرکز با نانوسیال اکسید سیلیکون پرداختند. نتایج آنها نشان داد که عدد ناسلت متوسط با افزایش نسبت شعاع، زوایای جهت‌گیری سطح و عدد رایلی افزایش خواهد یافت. در سال ۲۰۱۵ ژانگ و همکارانش [۱۷]، به بررسی انتقال حرارت جابجایی ناپایا نانوسیال، در یک حلقه هم‌مرکز با منبع سینوسی پرداختند. در این پژوهش اثرات حرکت براونی و ترموفرسیس[3] در نظر گرفته شد و نتیجه گرفتند که نرخ انتقال جرم و حرارت متأثر از نوسانات دمایی دیواره داخلی خواهد بود. معقولانی و ابو الزام [۱۸] در سال ۲۰۱۶، به بررسی تأثیرات نانوذرات بین دو حلقه دایره‌ای غیر هم‌مرکز متحرک پرداختند. آنها در حل معادلات حاکم از روش عددی حجم محدود استفاده کردند. آنها در پژوهش خود از نانوذرات مس، تیتانیوم اکسید و آلومینیوم اکسید استفاده کردند و سیال پایه را آب فرض کردند. دما در جداره‌های داخلی و خارجی متفاوت فرض شد. آن‌ها متوجه شدند که اضافه کردن نانوذرات الزاماً انتقال حرارت را افزایش نمی‌دهد، بعلاوه

[1] Nanoparticle Volume Fraction
[2] Average Nusselt Number
[3] Thermophersis

انتقال حرارت توسط نانوذرات به‌شدت به عدد ریچاردسون وابسته است.

یانگ هو و همکارانش [۱۹] در سال ۲۰۱۷، به بررسی پدیده جابجایی طبیعی بین دو حلقه غیر هم‌مرکز پرشده از نانوسیال مس-آب پرداختند و در حل معادلات حاکم از روش عددی لتیس بولتزمن[1] استفاده کردند. آن‌ها دریافتند که مقدار نسبت شعاع حلقه‌ها بر عدد ناسلت میانگین، بسیار مؤثر است. تیموری و همکارانش [۲۰] در سال ۲۰۱۷، به بررسی پدیده جابجایی طبیعی بین دو حلقه غیر هم‌مرکز پر شده از نانوسیال اکسید آلومینیوم با دیواره‌های چرخان پرداختند. نتایج نشان داد که در اعداد رینولدز پایین با افزایش کسر حجمی، عدد ناسلت در ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد، ولی در اعداد رینولدز بالا با افزایش کسر حجمی عدد ناسلت افزایش خواهد یافت. ضمناً وقتی که نسبت خروج از مرکز حلقه‌ها $(e = ۰/۶)$ باشد، افزایش کسر حجمی تأثیر ناچیزی بر عدد ناسلت می‌گذارد. در سال ۲۰۱۸ وی و همکاران [۲۱]، تاثیر چرخش استوانه داخلی روی پدیده ناپایداری دوشاخگی[2] جریان سیال در جابجایی طبیعی بین دو حلقه هم‌مرکز را به کمک روش عددی لتیس بولتزمن بررسی کردند. نتایج آنها وجود سه الگوی جابجایی مختلف به‌ازای سرعت‌های دورانی مختلف را نشان می‌داد. زیوفنگ و چارنگ [۲۲] در سال ۲۰۱۹، مساله انتقال حرارت جابجایی طبیعی پایا درون حلقه‌های هم‌مرکز را به روش عددی SPH[3] مورد ارزیابی قرار دادند. آنها به مطالعه عدد رایلی گذرا از حالت پایدار به حالت ناپایدار به‌ازای اعداد پرانتل مختلف پرداختند.

همانطور که ملاحظه می‌شود، اکثر مطالعات گذشته به بررسی تجربی یا عددی انتقال حرارت جابجایی طبیعی در فضای بین حلقه‌های هم‌مرکز یا غیر هم‌مرکز در شرایط دائمی و پایا پرداخته شده است؛ اما از آنجایی‌که رفتار گذرای جریان سیال و انتقال حرارت آن تا رسیدن به شرایط دائمی و پایا یا حتی شبه‌پایا[4] می‌تواند حائز اهمیت باشد (که نمونه‌ها کاربردهای آن در بخش "بررسی نتایج در حالت ناپایا" بیان شده است)، در این مطالعه به شبیه‌سازی عددی پدیده جابجایی طبیعی پایا و ناپایای نانوسیال در بین دوایر هم‌مرکز و غیر هم‌مرکز پرشده از یک ماده متخلخل پرداخته شده است. معادلات حاکم بر جریان سیال با روش عددی تفاضل محدود گسسته شده و برای حل آنها از روش ADI[5] و روش فوق تخفیفی SOR[6] استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با افزایش عدد رایلی، ضریب تخلخل[7] و کسر حجمی نانوذرات میزان انتقال حرارت افزایش می‌یابد. کاهش عدد دارسی باعث کاهش نفوذپذیری محیط متخلخل شده و درنتیجه انتقال حرارت کاهش می‌یابد. در شرایط ناپایا با افزایش دامنه نوسان دمای دیواره داخلی، دامنه عدد ناسلت متوسط نیز افزایش می‌یابد و همچنین فرکانس تغییرات عدد ناسلت متوسط منطبق بر فرکانس تغییرات دمایی دیواره داخلی خواهد بود.

۲- تعریف مسأله

در این پژوهش مطابق شکل ۱ دو حلقه دوبعدی افقی و غیر هم‌مرکز با محیطی متخلخل در نظر گرفته می‌شود که با نانوسیال تراکم ناپذیر پرشده است. حلقه داخلی به مرکز o و شعاع $\bar{r}_i$ و حلقه خارجی دارای مرکز C و شعاع $\bar{r}_o$ است. $\bar{e}$ فاصله مراکز دو حلقه، $\bar{R}_i$ فاصله مرکز حلقه داخلی تا دیواره حلقه خارجی، σ زاویه استقرار دو حلقه نسبت به یکدیگر و ξ زاویه نقطه دلخواه از دیواره حلقه خارجی است؛ همچنین دمای جداره داخلی T_h و دمای جداره خارجی T_c بوده به‌نحوی‌که $T_h > T_c$.

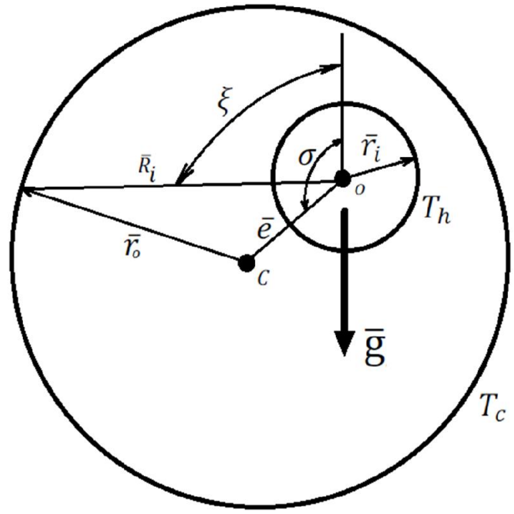
۳- فرضیات مسأله و معادلات حاکم

در این پژوهش جهت فرمول‌بندی و استخراج معادلات حاکم بر مسأله مذکور، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

- جریان نانوسیال دوبعدی و تراکم‌ناپذیر است و برای محاسبه چگالی نانوسیال و تأثیر دما بر چگالی از تقریب ابربک-بوزینسک[8] استفاده شده است [۱۲].

[1] Lattice Boltzmann
[2] Bifurcation Instability
[3] Smoothed Particle Hydrodynamics
[4] Quasi Steady

[5] Alternating Direction Implicit
[6] Successive Over Relaxation
[7] Porous Medium Porosity
[8] Oberbeck-Boussinesq



شکل ۱- تصویر شماتیک از مدل فیزیکی دو حلقه غیر هم‌مرکز

- برای مدل‌سازی خواص نانوسیال (نظیر لزجت، ضریب انتقال حرارت هدایتی و غیره) از مدل خواص مؤثر ماکسول- برینکمن[1] استفاده شده است [۱۰،۱۲].
- سرعت دارسی[2] از $(\bar{v}_{D,r},\bar{v}_{D,\theta})=(\varepsilon\bar{v}_r,\varepsilon\bar{v}_\theta)$ تبعیت خواهد کرد (که ε ضریب تخلخل محیط متخلخل است) [۱۲،۱۳].

با عنایت به فرضیات فوق و در نظر گرفتن مؤلفه‌های سرعت به کمک تابع جریان به‌شکل $\bar{v}_r=\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\theta},\bar{v}_\theta=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{r}}$ و با اعمال تبدیلات مبتنی بر تابع جریان-تاوایی (یعنی رابطه (۱)) و حذف میدان فشار، معادلات ممنتوم و انرژی در مختصات استوانه‌ای $(\bar{r},\theta)$ به‌صورت زیر بیان خواهند شد [۱۸-۲۰]:

$$\bar{\omega}=\nabla^2\bar{\psi}=\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{r}}+\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\theta^2}\qquad(۱)$$

$$\frac{\bar{\rho}_f}{\varepsilon}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{t}}+\frac{\bar{\rho}_f}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\theta}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\bar{r}}-\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{r}}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\theta}\right)
=\bar{\mu}_{nf}\nabla^2\bar{\omega}-\frac{\bar{\mu}_{nf}}{K_p}\bar{\omega}$$

$$-\bar{\rho}_f\bar{\mathrm{g}}\bar{\beta}_f\left[\frac{\partial T}{\partial\bar{r}}\sin\theta+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial T}{\partial\theta}\cos\theta\right]\qquad(۲)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\bar{t}}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\theta}\frac{\partial T}{\partial\bar{r}}-\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{r}}\frac{\partial T}{\partial\theta}
=\frac{\bar{k}_{nf}}{\bar{\rho}_f\bar{c}_{nf}}\left(\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial T}{\partial\bar{r}}\right)+\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2}\right)\qquad(۳)$$

که علامت بار ($\bar{}$) معرف کمیت بعددار، $\bar{v}_r$ مؤلفه شعاعی سرعت، $\bar{v}_\theta$ مؤلفه چرخشی سرعت، $\bar{p}$ میدان فشار، $\bar{\rho}$ چگالی سیال، $\bar{\mu}$ لزجت مؤثر سیال، T دمای سیال، $\bar{\mathrm{g}}$ شتاب جاذبه، $\bar{\beta}$ ضریب انبساط حجمی سیال، ε ضریب تخلخل، K_p بیانگر نفوذپذیری محیط متخلخل[3]، $\bar{c}$ ظرفیت ویژه حرارتی[4]، $\bar{t}$ زمان، $\bar{k}$ ضریب هدایت حرارتی، زیرنویس nf معرف نانوسیال و زیرنویس f معرف سیال پایه می‌باشند. جهت بی‌بعدسازی معادلات (۱) و (۲) از کمیت‌های بدون بعد زیر می‌توان استفاده کرد:

$$r=\frac{\bar{r}}{\bar{l}}\ ,r_o=\frac{\bar{r}_0}{\bar{l}}\ ,r_i=\frac{\bar{r}_i}{\bar{l}},e=\frac{\bar{e}}{\bar{l}}\ ,v=\frac{\bar{l}\bar{v}}{\bar{\alpha}_f},$$

$$u=\frac{\bar{l}\bar{u}}{\bar{\alpha}_f}\ ,t=\frac{\bar{t}\bar{\alpha}_f}{\bar{l}^2}\ ,\psi=\frac{\bar{\psi}}{\bar{\alpha}_f}\ ,\omega=\frac{\bar{\omega}\bar{l}^2}{\bar{\alpha}_f},$$

$$\Theta=\frac{T-T_c}{T_h-T_c},\ \ \mathrm{Pr}_f=\frac{\bar{\mu}_f}{\bar{\rho}_f\bar{\alpha}_f},\ \ \bar{\alpha}_f=\frac{\bar{k}_f}{\bar{\rho}_f\bar{c}_f},$$

$$\mathrm{Ra}_f=\frac{\bar{\rho}_f\bar{\mathrm{g}}\bar{\beta}_f\bar{l}^3(T_h-T_c)}{\bar{\alpha}_f\bar{\mu}_f},\ \ \mathrm{Da}=\frac{K_p}{\bar{l}^2}\qquad(۴)$$

که در روابط فوق $\bar{l}=\bar{r}_0-\bar{r}_i$، Ra_f عدد رایلی، Da عدد دارسی، Pr_f عدد پرانتل، e نسبت خروج از مرکز دو حلقه و $\bar{\alpha}_f$ ضریب نفوذ حرارتی[5] است. با اعمال کمیت‌های بی‌بعد فوق‌الذکر روی معادلات (۲) و (۳) و در نظر گرفتن رابطه $\bar{\mu}_{nf}=\bar{\mu}_f/(1-\varphi)^{2.5}$ معادلات حاکم بر مسأله در شکل بی بعد به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{1}{\varepsilon r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\omega}{\partial r}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)
=\varepsilon(1-\varphi)^{-2.5}\mathrm{Pr}_f\left(\nabla^2\omega-\frac{1}{\mathrm{Da}}\omega\right)
-\varepsilon\mathrm{Ra}_f\mathrm{Pr}_f\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\cos\theta\right)\qquad(۵)$$

[1] Maxwell-Brinkman
[2] Darcy Velocity
[3] Porous Medium Permeability
[4] Specific Heat
[5] Thermal Diffusivity

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} = K_c\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\right) \qquad (۶)$$

که در روابط فوق، φ کسر حجمی نانوذرات و همچنین $K_c = \frac{\bar{k}_{nf}/\bar{k}_f}{\bar{c}_{nf}/\bar{c}_f}$ است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود (در این رابطه زیرنویس p معرف نانوذره می‌باشد.):

$$K_c = \frac{1}{(1-\varphi)+\varphi\bar{c}_p/\bar{c}_f}\times\frac{\bar{k}_p+2\bar{k}_f-2\varphi\left(\bar{k}_f-\bar{k}_p\right)}{\bar{k}_p+2\bar{k}_f+\varphi\left(\bar{k}_f-\bar{k}_p\right)} \qquad (۷)$$

۴- شبکه‌بندی و نگاشت هندسی مسأله

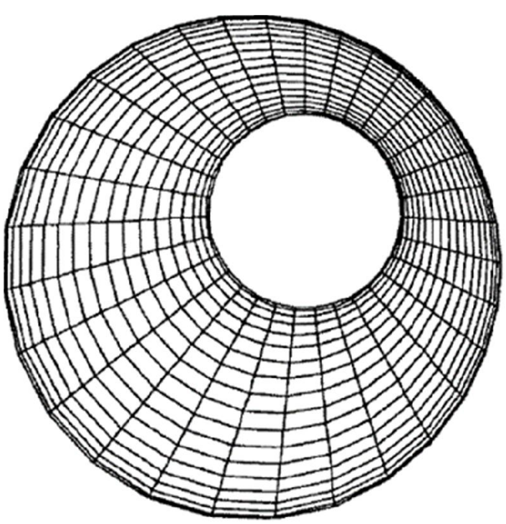
ایجاد شبکه‌ای با فواصل یکنواخت در یک قلمرو مستطیلی به کمک نگاشت‌های جبری[1] یکی از تکنیک‌های مرسوم شبکه‌بندی یک هندسه برای استفاده در روش‌های تفاضل محدود به‌شمار می‌آید. با توجه به اینکه مسأله مورد نظر در این مطالعه دو حلقه غیر هم‌مرکز است، برای حل معادلات حاکم به‌روش‌های تفاضل محدود، استفاده از چنین رویکردی مورد نیاز است. در این رویکرد از یک معادله جبری به عنوان نگاشت برای ایجاد ارتباط بین نقاط شبکه در قلمرو محاسباتی[2] و نقاط نظیر در قلمرو فیزیکی[3] استفاده می‌شود. در اینجا از دو متغیر محلی ξ و η برای ایجاد دستگاه مختصات محلی[4] مطابق روابط (۸) استفاده می‌شود [۲۳]:

$$\xi=\theta,\ \ \eta=\frac{r-r_i}{R_i-r_i} \qquad (۸)$$

که $R_i=\bar{R}_i/\bar{l}$ فاصله بی‌بعد مرکز حلقه کوچک‌تر تا حلقه بزرگ‌تر است و از رابطه ریاضی زیر محاسبه خواهد شد:

$$R_i=-e\cos\left(\xi-\sigma\right)+\sqrt{-e^2\sin^2(\xi-\sigma)+r_o^2} \qquad (۹)$$

شکل ۲ نمونه‌ای از شبکه‌بندی ناحیه فیزیکی را نشان می‌دهد. در قلمرو فیزیکی و محاسباتی، تعداد نقاط شبکه با IM (تعداد بیشینه نقاط در امتداد r یا η) و JM (تعداد بیشینه نقاط در امتداد θ یا ξ) مشخص می‌شود. لازم به توضیح است که مطابق معادله (۹)، R_i خود تابعی از ξ است؛ بنابراین داریم $\eta=\eta(r,\theta)$.



شکل ۲- تصویری از شبکه‌بندی ناحیه فیزیکی دو حلقه غیر هم‌مرکز

۵- شبکه‌بندی و نگاشت هندسی مسأله

برای حل عددی معادلات حاکم در مختصات محلی (ξ,η) لازم است، این معادلات در دستگاه جدید تبدیل شوند. شکل تبدیل‌شده معادله تابع جریان-تاوایی و معادلات حاکم (۵) و (۶) در دستگاه مختصات محلی مطابق معادلات (۱۰) الی (۱۲) نمایش داده شده است.

$$-\omega=\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \qquad (۱۰)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau}+\frac{1}{\varepsilon r}\frac{\partial\eta}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right) = \varepsilon(1-\varphi)^{-2.5}\mathrm{Pr}_f\left\{\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-\frac{1}{\mathrm{Da}}\omega\right\}$$

[1] Algebraic Mapping
[2] Computational Domain
[3] Physical Domain
[4] Local Coordinate

$$-\varepsilon \mathrm{Ra}_f \mathrm{Pr}_f \left[\sin\xi \frac{\partial\eta}{\partial r}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} + \frac{\cos\xi}{r}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right)\right] \tag{۱۱}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta} - \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right) = K_c\left\{\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta\partial\xi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\right\} \tag{۱۲}$$

لازم به توضیح است که مؤلفه‌های سرعت در دستگاه مختصات محلی از روابط (۱۳-۱۴) محاسبه می‌شوند:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) \tag{۱۳}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) \tag{۱۴}$$

در این مسأله برای محاسبه توابع متریک[1] نیز از روابط (۱۵) استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial\eta}{\partial r} = \frac{1}{R_i - r_i},$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{r - r_i}{d}\sin(\xi-\sigma)\left(e - \frac{e^2\cos(\xi-\sigma)}{\sqrt{-e^2\sin^2(\xi-\sigma) + r_o^2}}\right),$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} = \frac{(r - r_i)a - bc}{d^3} \tag{۱۵}$$

ضرایب a، b، c و d مطابق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$a = \left(2\,e\sin(\xi-\sigma) - \frac{e^2\sin(2(\xi-\sigma))}{2\sqrt{-e^2\sin^2(\xi-\sigma) + r_o^2}}\right)^2$$
$$b = e\left(\cos(\xi-\sigma) - \frac{e\sin(\xi-\sigma)^2(e^2 - r_o^2)}{\sqrt{(-e^2\sin^2(\xi-\sigma) + r_o^2)^3}}\right)$$
$$c = e\left(\cos(\xi-\sigma) - \frac{e\sin(\xi-\sigma)^2(e^2 - r_o^2)}{\sqrt{(-e^2\sin^2(\xi-\sigma) + r_o^2)^3}}\right)$$
$$\boldsymbol{d = -e\cos(\xi-\sigma) - r_i + \sqrt{-e^2\sin^2(\xi-\sigma) + r_o^2}}$$

۶- شرایط مرزی

با توجه به فیزیک مسأله مورد نظر، شرایط اولیه و شرایط مرزی به‌صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شوند:

$$\text{at }(\eta = 0):\quad \Theta = 1،\quad \psi = 0, -\omega = \frac{2}{r^2}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi} + \left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}$$
$$\text{at }(\eta = 1):\quad \Theta = 0,\quad \psi = 0,\quad -\omega = \left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\xi} \tag{۱۶}$$

لازم به توضیح است که برای تمام نقاط شبکه محاسباتی واقع روی خطوط $\xi = 0$ و $\xi = 2\pi$ از شرایط مرزی تکراری[2] استفاده می‌شود؛ همچنین عدد ناسلت محلی و عدد ناسلت میانگین روی حلقه داخلی از روابط (۱۷) و (۱۸) محاسبه می‌شوند:

$$\mathrm{Nu}_i(\theta) = \mathrm{Nu}(\theta)|_{\eta=1} = -\left(\frac{k_{nf}}{k_f}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}\bigg|_{\eta=1} \tag{۱۷}$$

$$\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}} = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\mathrm{Nu}(\theta)d\theta \tag{۱۸}$$

۷- گسسته‌سازی معادلات و الگوریتم حل عددی

به‌منظور حل صحیح مسأله لازم است، معادلات (۱۰) الی (۱۲) و شرایط مرزی ارائه شده در معادله (۱۶)، به‌صورت هم‌زمان حل شوند. بدین منظور برنامه‌ای عددی به زبان C++ نوشته شده است که الگوریتم اعمال شده در آن در ادامه بیان می‌گردد. همان‌طور که مشخص است، مسأله مورد نظر شامل سه معادله با سه مجهول تابع جریان، تاوایی و دمای سیال است که برای حل عددی و هم زمان آن‌ها، در لحظه اول سرعت، تابع جریان و تابع تاوایی برابر صفر و مقدار دما در تمام نقاط داخل دامنه حل عددی برابر یک در نظر گرفته می‌شوند. سپس با حل معادله (۱۲) به روش ضمنی ADI و استفاده از الگوریتم توماس و ژاکوبی دمای جدید به دست می‌آید. سپس با جایگذاری دمای به‌دست‌آمده در رابطه (۱۱) مقدار تاوایی جریان محاسبه خواهد شد. با به‌دست آوردن مقادیر تاوایی و جایگزینی آن در رابطه (۱۰)، مقدار تابع جریان با استفاده از روش تکرار فوق تخفیفی SOR به‌دست خواهد آمد. این فرآیند به‌صورت حلقه تکرار در یک گام زمانی ادامه داشته و زمانی پایان می‌یابد که خطای تابع

---

[1] Metric Functions

[2] Periodic Boundary Conditions

جریان برای هر گره شبکه محاسباتی کمتر از 10^{-4} باشد. سپس گام زمانی بعدی شروع شده و این روند تا رسیدن به هر زمان دلخواه (حتی زمان رسیدن به شرایط پایا) ادامه خواهد یافت. در این برنامه عددی جزئیات گسسته‌سازی معادله (۱۲) به روش ADI در راستای η مطابق رابطه (۱۹) خواهد بود:

$$\frac{\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-\Theta_{i,j}^{n}}{\Delta t}+\chi_1\frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta}-\chi_2\frac{\Theta_{i,j+1}^{n}-\Theta_{i,j-1}^{n}}{2\Delta\xi}=K_c\left\{\alpha\frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\eta^2}+\lambda\frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta}+\gamma\frac{\Theta_{i,j+1}^{n}-2\Theta_{i,j}^{n}+\Theta_{i,j-1}^{n}}{\Delta\xi^2}+\beta\frac{\Theta_{i+1,j+1}^{n}-\Theta_{i+1,j-1}^{n}-\Theta_{i-1,j+1}^{n}+\Theta_{i+1,j-1}^{n}}{4\Delta\eta\Delta\xi}\right\} \tag{۱۹}$$

که در رابطه (۱۹) داریم:

$$\chi_1=\frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\xi},\quad \chi_2=\frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\quad \alpha=\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2,\ \ \beta=\frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right),\quad \lambda=\frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2},\quad \gamma=\frac{1}{r^2} \tag{۲۰}$$

لازم به توضیح است که مقادیر χ_1 و χ_2 در گام زمانی n مقداردهی خواهند شد. معادله (۱۹) در گام زمانی $n+\frac{1}{2}$ تشکیل یک ماتریس سه‌قطری خواهد داد که با اعمال شرایط مرزی به کمک الگوریتم معروف توماس قابل حل است. جزئیات گسسته‌سازی معادله (۱۲) به روش ADI در راستای ξ در گام زمانی $n+1$ نیز مطابق رابطه (۲۱) خواهد بود:

$$\frac{\Theta_{i,j}^{n+1}-\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta \mathrm{t}}+\chi_1\frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta}-\chi_2\frac{\Theta_{i,j+1}^{n+1}-\Theta_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi}=K_c\left\{\alpha\frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-2\Theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\eta^2}+\gamma\frac{\Theta_{i,j+1}^{n+1}-2\Theta_{i,j}^{n+1}+\Theta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\xi^2}+\lambda\frac{\Theta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}+\Theta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta}+\beta\frac{\Theta_{i+1,j+1}^{n+\frac{1}{2}}-\Theta_{i+1,j-1}^{n+\frac{1}{2}}-\Theta_{i-1,j+1}^{n+\frac{1}{2}}+\Theta_{i+1,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{4\Delta\eta\Delta\xi}\right\} \tag{۲۱}$$

با اعمال شرایط مرزی، به‌ویژه شرط مرزی تکرار روی خطوط $\xi=0$ و $\xi=2\pi$، معادله (۲۱) در گام زمانی $n+1$ تشکیل یک ماتریس غیر سه‌قطری را خواهد داد که لازم است برای حل آن از الگوریتمی مانند الگوریتم شناخته شده ژاکوبی استفاده کرد. برای گسسته‌سازی معادله تاوایی یعنی رابطه (۱۰) نیز به شکل زیر عمل می‌شود:

$$-\omega_{i,j}=\alpha\left(\frac{\psi_{i+1,j}^{n}-2\psi_{i,j}^{n+1}+\psi_{i-1,j}^{n}}{\Delta\eta^2}\right)+\lambda\left(\frac{\psi_{i+1,j}^{n}-\psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta\eta}\right)+\gamma\left(\frac{\psi_{i,j+1}^{n}-2\psi_{i,j}^{n+1}+\psi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta\eta^2}\right)+\beta\left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^{n}-\psi_{i+1,j-1}^{n}-\psi_{i-1,j+1}^{n}+\psi_{i-1,j-1}^{n}}{4\Delta\eta\Delta\xi}\right) \tag{۲۲}$$

و در نهایت برای گسسته‌سازی معادله ممنتوم، یعنی معادله (۱۱) و تعیین مقدار تاوایی جریان در لحظه جدید، مطابق رابطه (۲۳) عمل خواهد شد:

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^{n}}{\Delta t}=-\chi_1\frac{\omega_{i+1,j}^{n}-\omega_{i-1,j}^{n}}{2\Delta\eta}+\chi_2\frac{\omega_{i,j+1}^{n}-\omega_{i,j-1}^{n}}{2\Delta\xi}+\varepsilon(1-\varphi)^{-2.5}\mathrm{Pr}_f\left\{\alpha\frac{\omega_{i+1,j}^{n}-2\omega_{i,j}^{n}+\omega_{i-1,j}^{n}}{\Delta\eta^2}+\beta\left(\frac{\omega_{i+1,j+1}^{n}-\omega_{i+1,j-1}^{n}-\omega_{i-1,j+1}^{n}+\omega_{i+1,j+1}^{n}}{4\Delta\eta\Delta\xi}\right)+\gamma\left(\frac{\omega_{i,j+1}^{n}-2\omega_{i,j}^{n}+\omega_{i,j-1}^{n}}{\Delta\xi^2}\right)+\lambda\left(\frac{\omega_{i+1,j}^{n}-\omega_{i-1,j}^{n}}{2\Delta\eta}\right)-\frac{1}{\mathrm{Da}}\omega_{i,j}^{n}\right\}-\varepsilon\mathrm{Ra}_f\mathrm{Pr}_f\left[\sin\xi\frac{\partial\eta}{\partial r}\frac{\Theta_{i+1,j}^{n}-\Theta_{i-1,j}^{n}}{2\Delta\eta}+\frac{\cos\xi}{r}\left(\frac{\Theta_{i,j+1}^{n}-\Theta_{i,j-1}^{n}}{2\Delta\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\Theta_{i+1,j}^{n}-\Theta_{i-1,j}^{n}}{2\Delta\xi}\right)\right\} \tag{۲۳}$$

۸- نتایج عددی

در این بخش نتایج به‌دست‌آمده از حل معادلات گسسته شده (۲۱) الی (۲۳) ارائه خواهد شد. در ابتدا به‌منظور دستیابی به تعداد شبکه مناسب، مطالعه استقلال حل از شبکه محاسباتی بررسی خواهد شد. سپس اعتبارسنجی برنامه عددی توسعه‌داده شده، برای حلقه‌های هم‌مرکز و غیر هم‌مرکز و مقایسه آنها با نتایج عددی موجود انجام می‌شود. سپس، تأثیر عدد رایلی، عدد دارسی، تخلخل محیط و کسر حجمی نانوسیال بر انتقال حرارت مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۸-۱- مطالعه استقلال حل از شبکه محاسباتی

جهت بررسی استقلال حل از شبکه محاسباتی، دو حلقه غیر هم‌مرکز $(e = 0.4)$ با نسبت شعاع $RR = 2.6$ که فضای متخلخل بین این دو حلقه با یک نانوسیال در غلظت $(\varphi = 0.015)$ با ویژگی‌های فیزیکی $\mathrm{Pr}_f = 0.706$، $\mathrm{Ra}_f = 10^4$ و $\mathrm{Da} = 0.01$ پر شده است، در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به عدد ناسلت متوسط $(\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}})$ برای چهار شبکه محاسباتی با ابعاد $N_1 = 31 \times 61$، $N_2 = 61 \times 121$، $N_3 = 121 \times 241$ و در نهایت $N_4 = 241 \times 481$ در جدول ۱ نمایش داده شده است. در سطر سوم این جدول نیز، خطای محاسبات ( ) نسبت به ریزترین شبکه یعنی (N_4) آورده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، نتایج مربوط به دو شبکه 121×241 و 241×481 تقریباً یکسان بوده و لذا برای انجام محاسبات در زمانی کوتاه‌تر، شبکه با ابعاد 121×241 مدنظر قرار گرفته شده است.

جدول ۱- مقایسه عدد ناسلت متوسط برای دو حلقه غیر هم‌مرکز با شرایط $e = 0.4$، $RR = 2.6$، $\varphi = 0.015$، $\mathrm{Pr}_f = 0.706$، $\mathrm{Ra}_f = 10^4$ و $\mathrm{Da} = 0.01$ برای چهار شبکه محاسباتی متفاوت

ابعاد شبکه	N_1	N_2	N_3	N_4
$\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$	2.2994	2.2891	2.2842	2.2840
[%]	0.67	0.22	0.01	–

۸-۲- اعتبار سنجی

با درنظر گرفتن دو حلقه هم‌مرکز $(e = 0)$ با نسبت شعاع $RR = 2.6$ که فضای بین این دو حلقه با یک سیال پایه (فاقد نانوذره) با ویژگی‌های فیزیکی $\mathrm{Pr}_f = 0.706$ و $\mathrm{Ra}_f = 4.7 \times 10^4$ پر شده است، نتایج توزیع دما بی‌بعد سیال روی خطوط $\theta = 180°, \theta = 90°, \theta = 0°$ در شکل ۳ نمایش و با نتایج کوهن و گلدشتاین [۵ و ۶] مقایسه شده است. در شرایطی که دو حلقه غیرهم مرکز با خروج از مرکزیت $e = 0.623$ در زاویه استقرار $\sigma = -180°$ قرار دارند، نتایج مربوط به توزیع دمای بی‌بعد سیال روی خطوط $\theta = 180°, \theta = 90°, \theta = 0°$ در شکل ۴ نمایش و با نتایج آزمایشگاهی کوهن و گلدشتاین [۵ و ۶] مقایسه شده است. لازم به ذکر است که کلیه این نتایج مربوط به شرایط دائمی و پایدار انتقال حرارت جابجایی سیال پایه می‌باشند. همان‌طور که در این دو شکل مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست‌آمده انطباق بسیار خوبی با نتایج مراجع ذکرشده هم در شرایط دو حلقه هم‌مرکز و هم در شرایط دو حلقه غیرهم‌مرکز دارد. با این وجود خطاهای مشاهده شده بین نتایج عددی این مطالعه و نتایج آزمایشگاهی کوهن و گلدشتاین [۵ و ۶] (که غالباً در مناطق دورتر از دیواره حلقه‌ها دیده می‌شود) می‌تواند به دلایل زیر باشد:

(الف) فرضیات و فرایندهای ساده‌سازی معادلات حاکم در روش حل عددی این مطالعه.

(ب) خطاها، عدم قطعیت و دقت تجهیزات آزمایشگاهی مورد استفاده در مراجع [۵ و ۶].

(ج) تاثیر حضور ترموکوپل‌های اندازه‌گیری دما در فضای بین دو حلقه بر الگوی جریان همرفتی سیال.

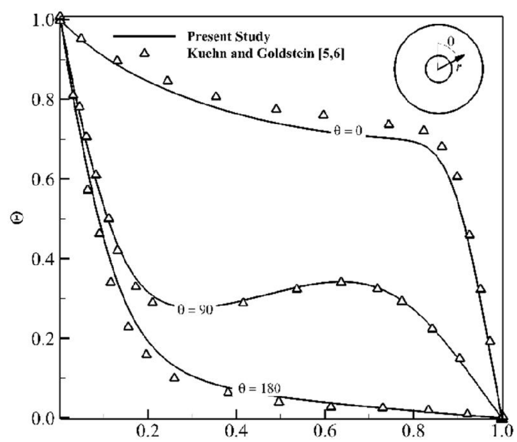
(د) بنابر اظهارات نویسندگان مراجع [۵ و ۶]، استفاده از روش درونیابی برای تخمین دمای نقاطی که فاقد ترموکوپل هستند.

جهت اعتبارسنجی صحت حل عددی پژوهش حاضر برای سیال حاوی نانوذره، مقدار عدد ناسلت متوسط برای دو حلقه غیرهم مرکز $(e = 0.5, \sigma = 0°)$ با نسبت شعاع $RR = 2.5$ و خواص $\mathrm{Pr}_f = 6.21$ و $\mathrm{Ra}_f = 10^4$ با درنظر گرفتن سه کسر حجمی متفاوت از نانوذره به‌صورت $(\varphi = 0, 0.015, 0.03)$ محاسبه و نتایج آن با کار عددی

حبیبی متین و پاپ [۱۲] در شرایط دائمی و پایدار (در شکل ۵) مقایسه شده است. همانطور که ملاحظه می‌گردد، نتایج به‌دست آمده انطباق قابل قبولی داشته و روند صعودی انتقال حرارت با افزایش کسر حجمی نانوذره به‌خوبی مشاهده می‌شود. با این وجود خطاهای مشاهده شده بین نتایج عددی این مطالعه و نتایج شبیه‌سازی حبیبی متین و پاپ [۱۲] می‌تواند به دلایل زیر باشد:

(الف) تفاوت در روش عددی حل مساله: روش عددی مورد استفاده برای حل معادلات حاکم در مرجع [۱۲]، حجم محدود به شکل پادبادسو مرتبه دو[1] و استفاده از الگوی روش تکراری[2] است.

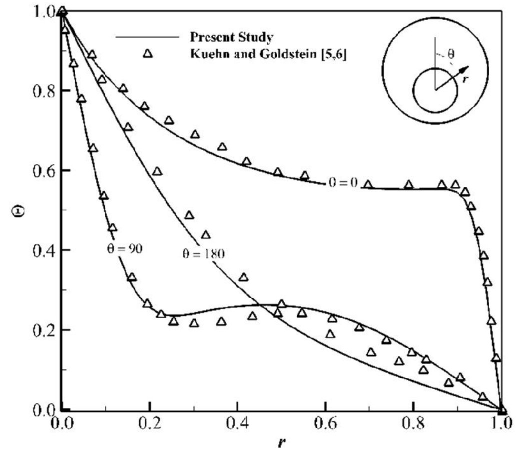
(ب) تفاوت در تعریف میزان خطای مورد استفاده در حلقه‌های تکرار عددی.



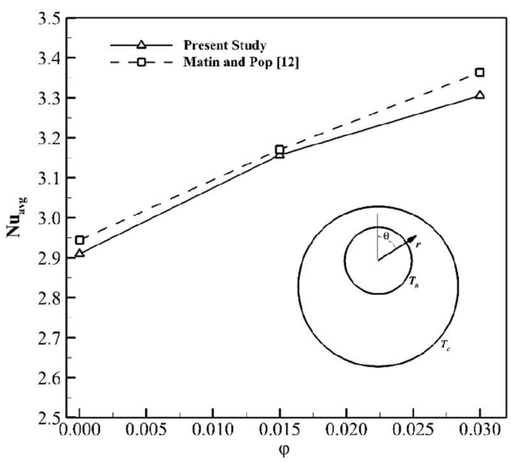
شکل ۳- توزیع دمای بی‌بعد سیال روی خطوط $\theta = 180°, \theta = 90°, \theta = 0°$ برای دو حلقه هم‌مرکز و مقایسه نتایج با مراجع [۵ و ۶] در شرایط $RR = 2.6$، $\mathrm{Pr}_f = 0.706$ و $\mathrm{Ra}_f = 4.7 \times 10^4$

جهت صحت‌سنجی حل عددی انجام شده در محیط متخلخل، مقدار عدد ناسلت متوسط $\mathrm{Nu_{avg}}$ و تابع جریان بیشینه $\psi_{\max}$ برای انتقال حرارت طبیعی پایا بین دو حلقه هم‌مرکز $(e = 0.0)$ پر شده از ماده متخلخل با نسبت شعاع

[1] Second Order Upwind
[2] Iteration Method



شکل ۴- توزیع دمای بی‌بعد سیال روی خطوط $\theta = 180°, \theta = 90°, \theta = 0°$ برای دو حلقه غیرهم‌مرکز و مقایسه نتایج با مراجع [۵ و ۶] در شرایط $RR = 2.6$، $\mathrm{Pr}_f = 0.706$ و $\mathrm{Ra}_f = 4.7 \times 10^4$



شکل ۵- عدد ناسلت متوسط برای دو حلقه هم‌مرکز $(e = 0.5, \sigma = 0°)$ با $RR = 2.5$ و خواص فیزیکی $\mathrm{Pr}_f = 6.21$ و $\mathrm{Ra}_f = 10^4$ بر حسب کسرحجمی نانوذره و مقایسه نتایج با پژوهش متین و پاپ [۱۲]

$RR = 2.0$ در اعداد رایلی $\mathrm{Ra}_f = 30, 100, 200$ محاسبه و نتایج آن با کار عددی بیلابید و چدادی [۱۴] در شرایط دائمی و پایدار (در جدول ۲) مقایسه شده است. همانطور که ملاحظه می‌گردد، نتایج به‌دست آمده انطباق قابل قبولی داشته، به‌گونه‌ای که برای عدد ناسلت متوسط و تابع جریان

بیشینه، بیشترین خطای نسبی به‌ترتیب برابر است با 0.144% و 0.108% که مربوط می‌شود، به عدد رایلی 200.

جدول ۲- عدد ناسلت متوسط و تابع جریان بیشینه در انتقال حرارت طبیعی پایا بین دو حلقه هم‌مرکز متخلخل

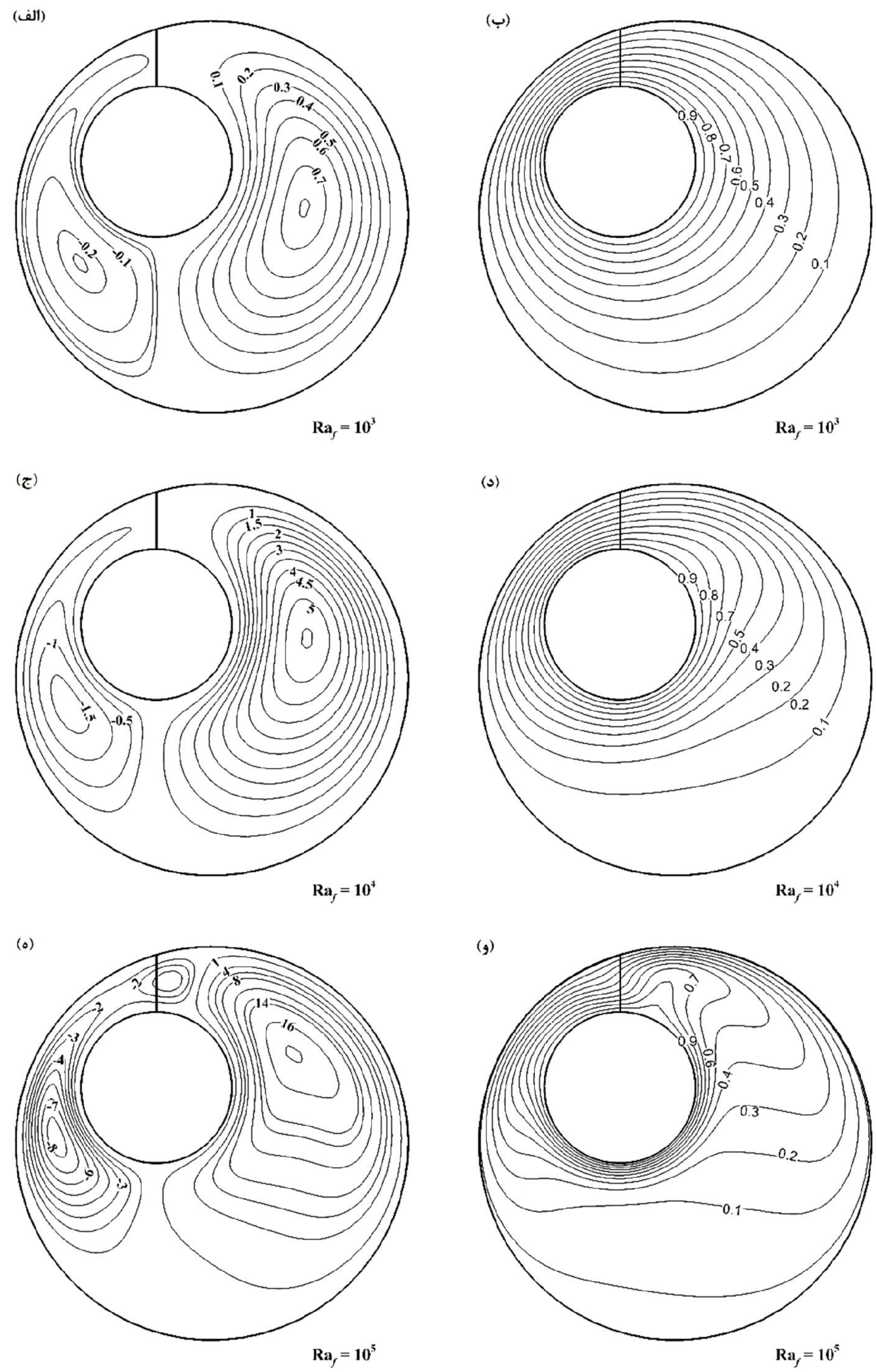
بیلابید و چدادی [۱۴]		مطالعه حاضر		
$\psi_{\max}$	$\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$	$\psi_{\max}$	$\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$	Ra_f
3.4618	1.1430	3.4585	1.1425	30
9.9713	1.8686	9.9700	1.8679	100
16.3145	2.6910	16.2968	2.6949	200

۸-۳- بررسی نتایج در حالت پایا

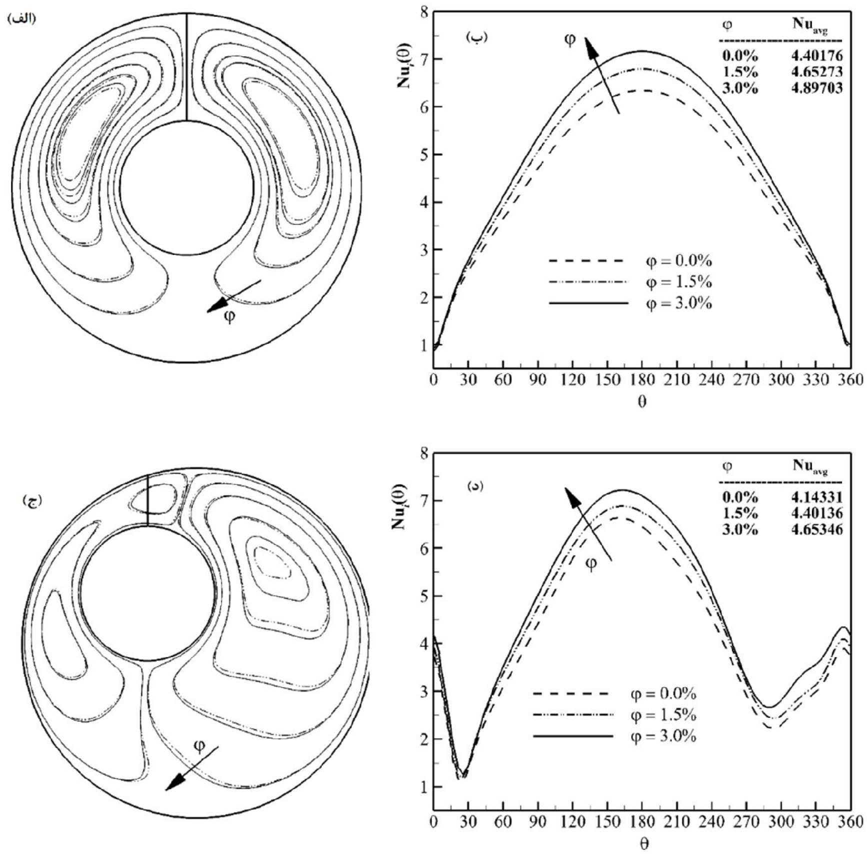
در این بخش نتایج مربوط به شبیه‌سازی انتقال حرارت جابجایی در شرایط پایا مورد بررسی قرار خواهد گرفت. هدف از این بخش، بررسی تأثیر کمیت‌هایی از قبیل، عدد رایلی، عدد دارسی و کسر حجمی نانوسیال بر ماهیت جریان و عملکرد انتقال حرارت در شرایط پایا است. شکل ۶ تأثیر عدد رایلی ($\mathrm{Ra}_f = 10^3, 10^4, 10^5$) بر خطوط جریان (تصاویر سمت چپ) و خطوط هم‌دما (تصاویر سمت راست) برای انتقال حرارت جابجایی طبیعی نانوسیال آب–مس (با کسر حجمی $\varphi = 0.03$) درون دو حلقه غیر هم‌مرکز با مشخصات ($e = 0.65, \sigma = -45°$) در شرایط فیزیکی $\mathrm{Da} = 0.01, RR = 2.6, \varepsilon = 0.4$ را نمایش می‌دهد. بررسی نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد، تغییر عدد رایلی بر ماهیت الگوی خطوط جریان سیال بسیار مؤثر است، به‌گونه‌ای که با افزایش عدد رایلی گردابه تشکیل‌شده به بالای حلقه متمایل خواهد شد و گرادیان دمای سیال در اطراف حلقه داخلی گرم افزایش می‌یابد. درواقع همان‌طور که می‌دانید، عدد رایلی با نیروی شناوری رابطه مستقیمی دارد، لذا با افزایش این عدد، نیروی شناوری افزایش یافته که به همراه آن حرکت چرخشی جریان سیال درون فضای دو حلقه افزایش می‌یابد که سبب افزایش دمای سیال اطراف دیواره داخلی خواهد شد. این افزایش گرادیان دما تأثیرات مطلوبی را در عدد ناسلت میانگین خواهد داشت و درنهایت سبب افزایش این عدد نیز خواهد شد.

شکل ۷ تأثیر افزودن نانوذره به سیال پایه با کسر حجمی‌های ($\varphi = 0\%, 1.5\%, 3.0\%$) بر الگوی خطوط جریان (تصاویر سمت چپ) و عدد ناسلت محلی روی دیواره حلقه داخلی (تصاویر سمت راست) برای انتقال حرارت جابجایی طبیعی نانوسیال در فضای بین دو حلقه در شرایط $\mathrm{Da} = 0.01, RR = 2.6, \varepsilon = 0.4, \mathrm{Ra}_f = 10^5$ را نمایش می‌دهد. شکل‌های ۷(الف) و ۷(ب) مربوط به دو حلقه هم‌مرکز و شکل‌های ۷(ج) و ۷(د) مربوط به دو حلقه غیر هم‌مرکز با مشخصات ($e = 0.65, \sigma = -45°$) است. همانطور که می‌دانید، افزودن نانوذرات سبب افزایش ضریب انتقال حرارت هدایتی و لزجت مؤثر سیال پایه خواهد شد. افزایش لزجت مؤثر سیال، پتانسیل جابجایی و چرخش سیال در اثر اختلاف دمای دو دیواره را کاهش می‌دهد؛ درحالی‌که افزایش ضریب انتقال حرارت هدایتی در افزایش انتقال حرارت از دیواره گرم به سیال نقش مؤثری خواهد داشت. الگوی خطوط جریان در شکل‌های ۷(الف) و ۷(ج) کاهش توانایی جابجایی و چرخش سیال با افزودن کسر حجمی نانوذره را نمایش می‌دهد؛ اما از آنجایی‌که غالباً درصد افزوده شدن نانوذره به سیال پایه در حدود $\varphi < 5\%$ د توصیه شده است، نقش کاهشی افزایش لزجت مؤثر نانوسیال در حرارت منتقل شده به سیال در مقابل نقش افزایشی افزایش ضریب انتقال حرارت هدایتی در حرارت منتقل شده به سیال بسیار ناچیز خواهد بود؛ لذا همانطور که در شکل‌های ۷(ب) و ۷(د) ملاحظه می‌شود، عدد ناسلت محلی $\mathrm{Nu}_i(\theta)$ و عدد ناسلت متوسط $\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$ روی دیواره حلقه داخلی با افزایش کسر حجمی نانوذره افزایش می‌یابد.

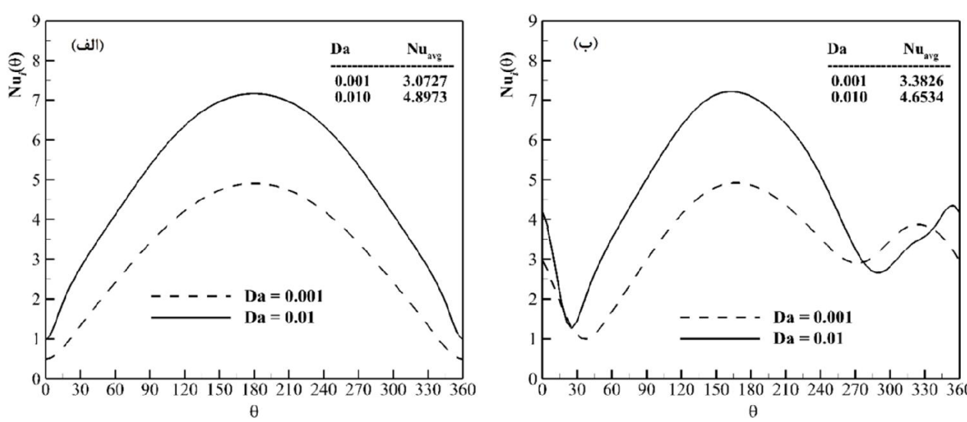
عدد دارسی کمیت بدون بعدی است که میزان نفوذپذیری یک محیط متخلخل را نشان می‌دهد؛ لذا کاهش این کمیت، فرایند جابجایی و عبور سیال از یک محیط متخلخل را دشوارتر خواهد کرد و این عاملی خواهد بود که عملکرد حرارتی جریان جابجایی طبیعی را کاهش می‌دهد. در اینجا تأثیر عدد دارسی بر عدد ناسلت محلی و عدد ناسلت متوسط برای انتقال حرارت جابجایی طبیعی نانوسیال آب–مس با کسر حجمی $\varphi = 3.0\%$ در شرایط فیزیکی $RR = 2.6, \varepsilon = 0.4, \mathrm{Ra}_f = 10^5$ و در فضای بین دو حلقه هم‌مرکز و غیر هم‌مرکز در شکل ۸ نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد با افزایش عدد دارسی (که



شکل ۶- تأثیر عدد رایلی ($Ra_f = 10^3, 10^4, 10^5$) بر خطوط جریان (تصاویر سمت چپ) و خطوط هم‌دما (تصاویر سمت راست) برای انتقال حرارت جابجایی طبیعی نانوسیال آب–مس (با کسرحجمی $\varphi = 0.03$) درون دو حلقه غیر هم‌مرکز با مشخصات ($e = 0.65, \sigma = -45°$) در شرایط فیزیکی $Da = 0.01, RR = 2.6, \varepsilon = 0.4$



شکل ۷- تأثیر کسر حجمی نانوذره بر خطوط جریان (تصاویر سمت چپ) و مقدار عدد ناسلت محلی روی دیواره حلقه داخلی (تصاویر سمت راست) در فضای بین دو حلقه در شرایط فیزیکی $\mathrm{Da} = 0.01, RR = 2.6, \varepsilon = 0.4, \mathrm{Ra}_f = 10^5$.
الف و ب) دو حلقه هم‌مرکز، ج و د) دو حلقه غیر هم‌مرکز با مشخصات ($e = 0.65, \sigma = -45°$)



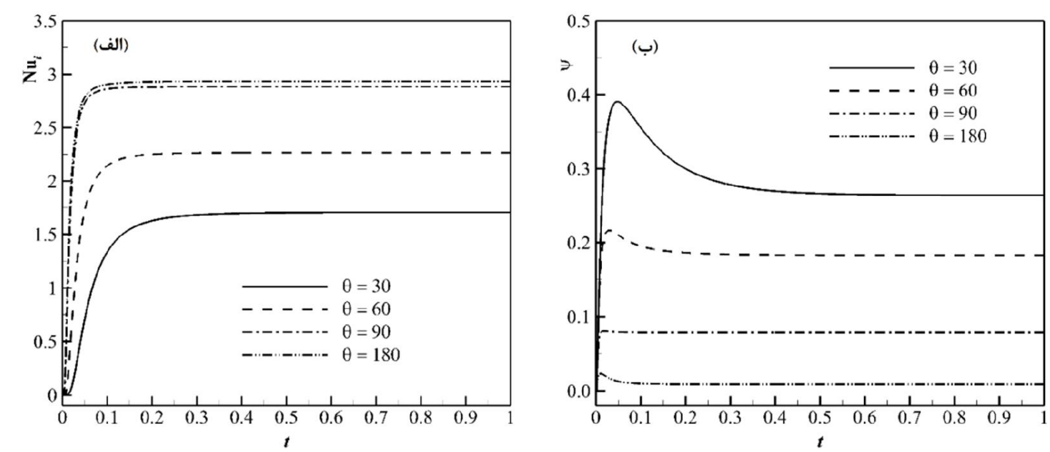
شکل ۸- تأثیر عدد دارسی بر مقدار عدد ناسلت محلی و عدد ناسلت متوسط روی دیواره حلقه داخلی در فضای بین دو حلقه در شرایط فیزیکی $\varphi = 0.03, RR = 2.6, \varepsilon = 0.4, \mathrm{Ra}_f = 10^5$. الف) دو حلقه هم‌مرکز و ب) دو حلقه غیر هم‌مرکز با مشخصات $e = 0.65, \sigma = -45°$

معرف افزایش میزان نفوذپذیری محیطی نیز است) میزان عدد ناسلت محلی و درنتیجه میزان عدد ناسلت متوسط روی دیواره حلقه داخلی افزایش می‌یابد که مطابق با پیش‌بینی مذکور است.

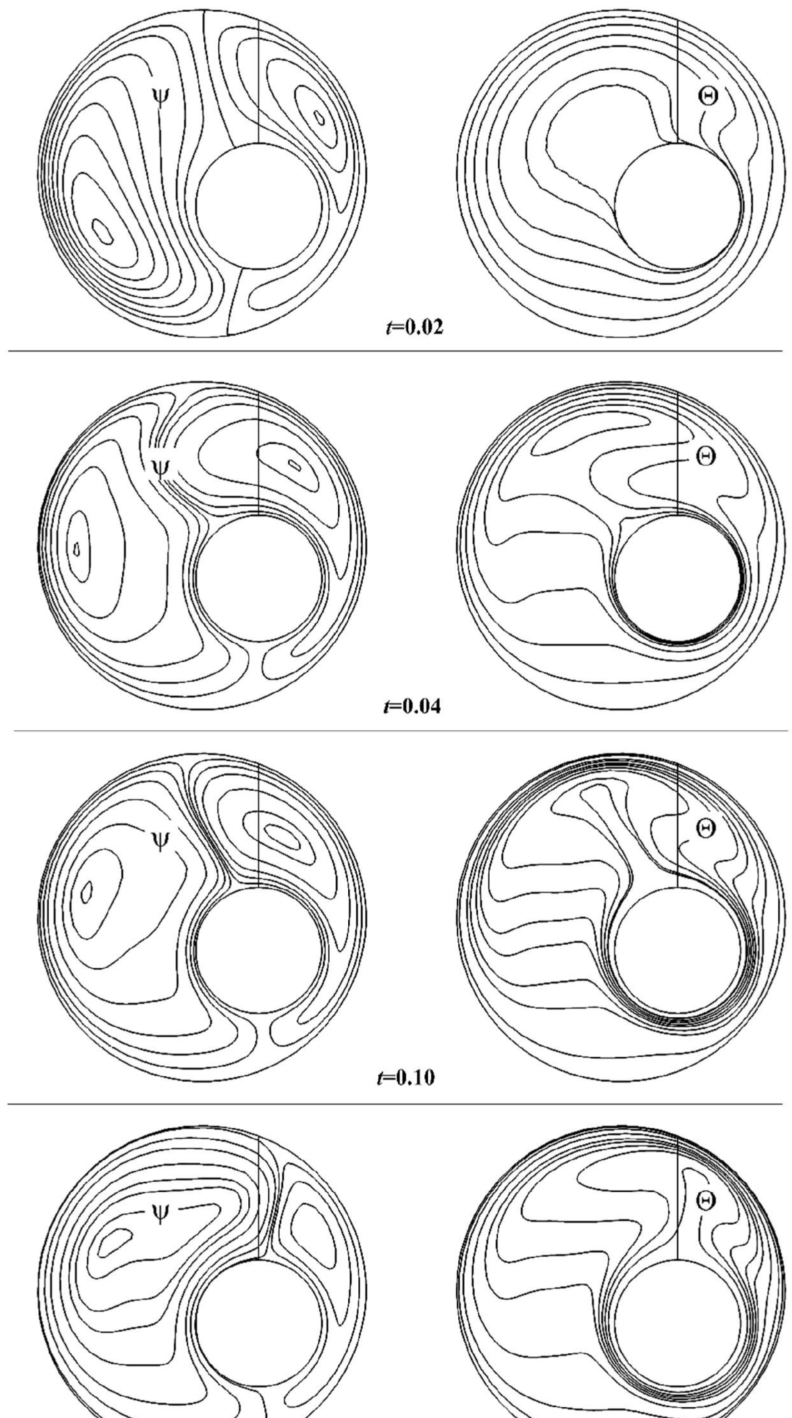
۴-۸- بررسی نتایج در حالت ناپایا

همانطور که قبلاً نیز بیان گردید ، در اغلب تحقیقات گذشته، رویکرد اصلی مطالعات حول شرایط دائمی و پایای انتقال حرارت جابجایی طبیعی در فضای بین حلقه‌های هم‌مرکز یا غیر هم‌مرکز متمرکز بود. با این وجود مطالعه روی شرایط گذرا (یا ناپایا) در انتقال حرارت طبیعی بین حلقه‌های هم‌مرکز یا غیرهم‌مرکز، به دلیل امکان حادث شدن ناپایداری دوشاخه‌گی حائز اهمیت است که می‌تواند ماهیتی حرارتی یا هیدرودینامیکی (یا ترکیبی از هردو) داشته باشد. وقوع این پدیده به نسبت شعاع دو حلقه، میزان خروج از مرکزیت، عدد پرانتل و عدد رایلی وابستگی دارد که تاثیر بسزایی در میزان انتقال حرارت خواهد داشت [۱۷و ۲۴]. مورد مشخص دیگری که اهمیت بررسی شرایط گذرا در انتقال حرارت طبیعی بین حلقه‌های هم‌مرکز یا غیرهم‌مرکز را برجسته می‌سازد، وقوع تغییرات ناگهانی دمای یکی از حلقه‌ها (مثلا حلقه داخلی) در اثر ورود سیال داغ (به شکلی غیر منتظره و کنترل نشده) در مبدل‌های دوحلقه‌ای یا در اثر افزایش ناگهانی جریان الکتریکی کابل‌های فشارقوی انتقال قدرت (که از یک گاز فشرده بین فضای کابل فشارقوی و پوسته بیرونی به جهت عایقکاری استفاده می‌شود) است که مطالعه تاثیر آن بر انتقال حرارات و خنک‌کاری لوله یا کابل داغ‌شده مورد توجه است [۶، ۷ و ۲۵]؛ لذا در این بخش نتایج مربوط به شبیه‌سازی انتقال حرارت جابجایی در شرایط ناپایا مورد بررسی قرار خواهد گرفت. هدف از این بخش، بررسی تغییرات کمیت‌هایی نظیر، عدد ناسلت متوسط، عدد ناسلت محلی، تابع جریان و توزیع دما با زمان تا رسیدن به شرایط پایدار یا شبه‌پایدار است.

شکل ۹ (الف) تغییرات عدد ناسلت محلی ($\mathrm{Nu}_i(\theta)$) روی دیواره حلقه داخلی در چهار نقطه با زوایای $\theta = 30°, 60°, 90°, 180°$ و شکل ۹ (ب) تغییرات تابع جریان در شعاع متوسط $r_m = \frac{1}{2}(r_i + r_o)$ در چهار نقطه با زوایای $\theta = 30°, 60°, 90°, 180°$ با زمان را نمایش می‌دهد. شرایط فیزیکی درنظرگرفته شده برای این مسأله عبارت است $\mathrm{Ra}_f = 10^5$، $\varphi = 0.03$، $\mathrm{Da} = 0.01$، $RR = 2.6$، $\sigma = 45°$، $\varepsilon = 0.4$ و $e = 0.65$. همچنین فرض شده است که در لحظه $t = 0$ سیال مابین فضای دو حلقه ساکن و در دمای اولیه $\Theta = 0$ قرار دارد. با عنایت به موقعیت قرار گرفتن حلقه داخلی، همانطور که در شکل ۹ مشاهده می‌گردد، با افزایش زاویه θ یعنی کم شدن فاصله دیواره حلقه داخلی و



شکل ۹- الف) تغییرات عدد ناسلت محلی روی دیواره حلقه داخلی و ب) تغییرات تابع جریان در موقعیت شعاع متوسط حلقه در چهار نقطه با زوایای $\theta = 30°, 60°, 90°, 180°$ با زمان تحت شرایط فیزیکی $\mathrm{Ra}_f = 10^5$، $\varphi = 0.03$، $\mathrm{Da} = 0.01$، $RR = 2.6$، $\sigma = 45°$، $\varepsilon = 0.4$ و $e = 0.65$



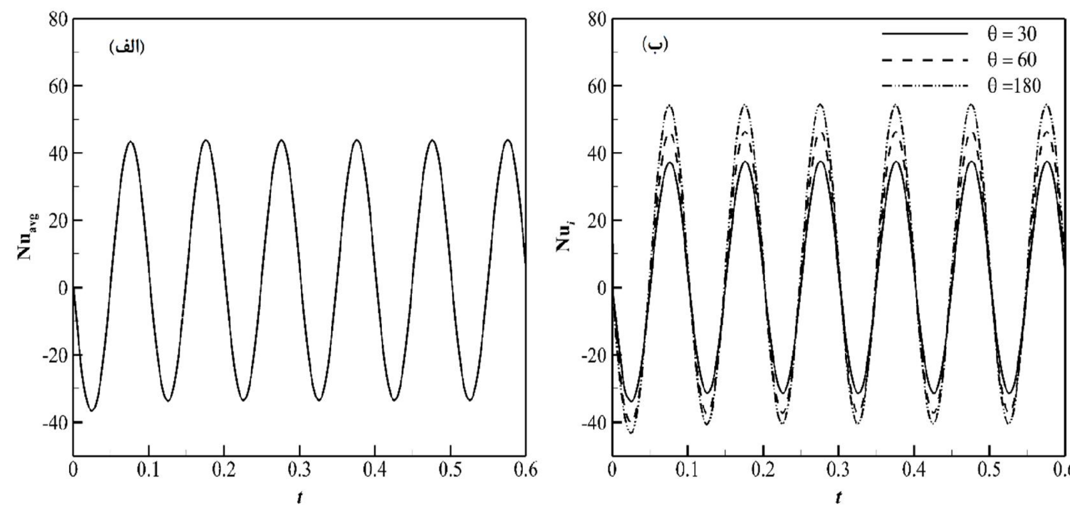
شکل ۱۰- تغییرات الگوی جریان جابجایی (چپ) و خطوط هم‌دما (راست) برای چهار زمان $t = 0.02, 0.04, 0.1, 0.6$ تحت شرایط فیزیکی $\mathrm{Ra}_f = 10^5$، $\varphi = 0.03$، $\mathrm{Da} = 0.01$، $RR = 2.6$، $\sigma = 45°$، $\varepsilon = 0.4$ و $e = 0.65$

خارجی به همدیگر و بالتبع آن افزایش گرادیان دما بین دو دیواره، میزان انتقال حرارت و درنتیجه عدد ناسلت محلی افزایش یافته و همچنین زمان رسیدن به شرایط پایداری نیز کاهش می‌یابد. جهت نمایش چگونگی حرکت نانوسیال و مشاهده تغییرات خطوط دما ثابت از لحظه سکون تا رسیدن به شرایط پایدار و دائمی، تغییرات الگوی جریان جابجایی و خطوط هم‌دما برای چهار زمان $t = 0.02, 0.04, 0.1, 0.6$ در شکل ۱۰ رسم شده است. در ادامه جهت بررسی دقیق‌تر اثر رفتاری انتقال حرارت جابجایی نانوسیال در فضای دو حلقه غیر هم‌مرکز با زمان، فرض شده است که دمای دیواره حلقه داخلی به شکل نوسانی و تحت رابطه (۲۶) تغییر می‌کند:

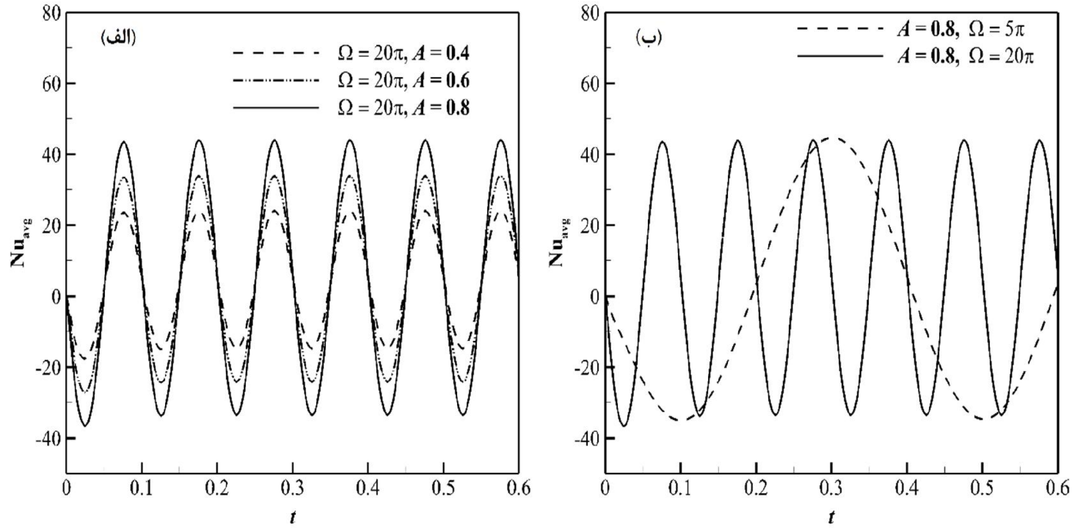
$$\Theta_h(t) = 1.0 + A\sin(\Omega t) \qquad (۲۴)$$

که در رابطه بالا A دامنه نوسان دمای بی‌بعد و Ω فرکانس تغییرات دمای بی‌بعد در حلقه داخلی است؛ همچنین فرض شده است که دمای دیواره حلقه خارجی کماکان ثابت و برابر $\Theta_c(t) = 0$ است و در لحظه $t = 0$ سیال مابین فضای دو حلقه کاملاً ساکن و در دمای اولیه $\theta = 0$ قرار دارد. سایر شرایط فیزیکی و هندسی درنظرگرفته شده برای این مسأله عبارت است: $A = 0.8$، $\Omega = 20\pi$، $\mathrm{Ra}_f = 10^5$، $\varphi = 0.03$، $\mathrm{Da} = 0.01$، $RR = 2.6$، $\sigma = 45°$، $\varepsilon = 0.4$ و $e = 0.35$.

شکل ۱۱ (الف) تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره حلقه داخلی و شکل ۱۱ (ب) تغییرات عدد ناسلت محلی روی دیواره حلقه داخلی در سه نقطه با زوایای $\theta = 30°, 60°, 180°$ برحسب زمان را نمایش می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، تمامی این کمیت‌ها حدوداً پس از گذشت $t = 0.15$ (زمان بی‌بعد) به حالت نوسانی شبه‌پایدار می‌رسند و همچنین با افزایش زاویه θ یعنی کم شدن فاصله دیواره حلقه داخلی و خارجی و بالتبع آن افزایش گرادیان دما بین دو دیواره، میزان دامنه انتقال حرارت و درنتیجه دامنه نوسانات عدد ناسلت محلی افزایش می‌یابد. تأثیر دامنه نوسان (A) و فرکانس نوسان (Ω) دمای دیواره داخلی بر عدد ناسلت متوسط نمونه دیگری از نتایج به‌دست آمده در این مطالعه است که در شکل ۱۲ نمایش داده شده است. همانطور که در شکل ۱۲ (الف) مشاهده می‌گردد، با افزایش دامنه نوسان دمایی، به دلیل افزایش گرادیان دمایی بین دو دیواره، دامنه تغییرات عدد ناسلت متوسط نیز افزایش می‌یابد و همچنین مطابق نتایج مندرج در شکل ۱۲ (ب) فرکانس تغییرات عدد ناسلت متوسط کاملاً منطبق بر



شکل ۱۱- الف) تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره حلقه داخلی با زمان و ب) تغییرات عدد ناسلت محلی روی دیواره حلقه داخلی در سه نقطه با زوایای $\theta = 30°, 60°, 180°$ با زمان. شرایط فیزیکی عبارتند از $A = 0.8$، $\Omega = 20\pi$، $\mathrm{Ra}_f = 10^5$، $\varphi = 0.03$، $\mathrm{Da} = 0.01$، $RR = 2.6$، $\sigma = 45°$، $\varepsilon = 0.4$ و $e = 0.35$



شکل ۱۲- الف) تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره حلقه داخلی با زمان به ازای سه دامنه نوسان دمایی دیواره داخلی و ب) تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره حلقه داخلی با زمان به ازای دو فرکانس نوسان دمایی دیواره داخلی. شرایط فیزیکی عبارتند از $Ra_f = 10^5$، $\varphi = 0.03$، $Da = 0.01$، $RR = 2.6$، $\sigma = 45°$، $\varepsilon = 0.4$ و $e = 0.35$

فرکانس تغییرات دمایی دیواره داخلی خواهد بود؛ لذا در شرایط نوسانی شبه‌پایدار، دامنه و فرکانس تغییرات عدد ناسلت متوسط رابطه‌ای مستقیم با دامنه و فرکانس تغییرات دمای دیواره حلقه داخلی خواهد داشت.

۹- نتیجه‌گیری

در این مطالعه به بررسی عددی پدیده جابجایی طبیعی پایا و ناپایای نانوسیال در فضای بین حلقه‌های هم‌مرکز و غیر هم‌مرکز پرشده از یک محیط متخلخل پرداخته شده است. معادلات حاکم بر جریان سیال شامل معادلات بقای جرم، ممنتوم و انرژی به کمک روش عددی تفاضل محدود گسسته شده و در حل معادلات حاکم گسسته‌شده از روش ضمنی با جهت متغیر (ADI) و روش فوق تخفیفی (SOR) استفاده شده است. در این پژوهش به اثرات کمیت‌های مختلف نظیر، عدد رایلی، کسر حجمی نانوسیال، عدد دارسی، ضریب تخلخل محیط متخلخل و نسبت خروج از مرکز حلقه‌ها بر عدد ناسلت متوسط، عدد ناسلت محلی، خطوط جریان و خطوط هم‌دما و تغییرات آنها با زمان پرداخته شده است. نحوه تغییرات عدد ناسلت متوسط برای شرایطی که دمای دیواره حلقه داخلی به شکل نوسانی تغییر می‌کند نیز، مورد ارزیابی قرار گرفته است. از مهم‌ترین نتایج و دستاوردهای این مطالعه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- با افزایش عدد رایلی، عدد ناسلت میانگین افزایش می‌یابد.
- نسبت خروج از مرکزیت، یک کمیت مؤثر برای کنترل انتقال حرارت برای هر دو حلقه پرشده با نانوسیال و سیال خالص خواهد بود.
- افزایش کسر حجمی نانوذرات باعث افزایش ضریب انتقال حرارت جابجایی و عدد ناسلت متوسط خواهد شد.
- بین عدد ناسلت میانگین و عدد دارسی تناسب مستقیمی وجود دارد، به‌طوری‌که با کاهش عدد دارسی عدد ناسلت میانگین به علت کاهش نفوذپذیری محیط متخلخل کاهش خواهد یافت و این عاملی خواهد بود که عملکرد حرارتی جریان جابجایی طبیعی کاهش می‌یابد.
- با افزایش دامنه تغییرات دمای دیواره داخلی به دلیل افزایش گرادیان دمایی بین دو دیواره، دامنه تغییرات عدد ناسلت متوسط نیز افزایش می‌یابد و همچنین فرکانس تغییرات عدد ناسلت متوسط

منطبق بر فرکانس تغییرات دمایی دیواره داخلی خواهد بود.

۹- فهرست علائم و اختصارات

A	دامنه نوسان دمای بی‌بعد
$\bar{c}$	ظرفیت ویژه حرارتی $[\mathrm{J\ Kg^{-1}\ K^{-1}}]$
Da	عدد دارسی
e	فاصله بدون بعد مراکز دو حلقه
$\bar{\mathrm{g}}$	شتاب جاذبه زمین $[\mathrm{m/s^2}]$
$\bar{k}$	ضریب هدایت حرارتی $[\mathrm{W\ m^{-1}\ K^{-1}}]$
K_p	نفوذپذیری محیط متخلخل
$\bar{l}$	اختلاف شعاع حلقه داخلی و خارجی [m]
Nu	عدد ناسلت
p	میدان فشار بدون بعد
Pr	عدد پرانتل
r	شعاع بی‌بعد و مختصات بی‌بعد شعاعی در دستگاه اصلی
R_i	فاصله بدون بعد مرکز حلقه داخلی تا دیواره حلقه خارجی
Ra	عدد رایلی
RR	نسبت شعاع دو حلقه
t	زمان بدون بعد
T	دمای سیال [°C]
(v_r, v_θ)	مؤلفه‌های بدون بعد سرعت سیال در راستای شعاعی و زاویه‌ای

علائم یونانی

$\bar{\alpha}_f$	ضریب نفوذ حرارتی $[\mathrm{m^2\ s^{-1}}]$
$\bar{\beta}$	ضریب انبساط حجمی سیال $[\mathrm{K^{-1}}]$
ε	ضریب تخلخل محیط متخلخل
η	راستای شعاعی در دستگاه تبدیل یافته محلی
$\bar{\mu}$	لزجت سیال [Pa s]
ξ	راستای چرخش در دستگاه تبدیل یافته محلی
θ	مختصات چرخشی در دستگاه اصلی
Θ	دمای بدون بعد
ρ	چگالی بدون بعد
σ	زاویه استقرار دو حلقه نسبت به یکدیگر
φ	کسر حجمی نانوذرات
ψ	تابع جریان بدون بعد
ω	تاوایی بدون بعد
Ω	فرکانس تغییرات دمای بی‌بعد

زیرنویس‌ها

avg	متوسط
r	راستای شعاعی
θ	راستای چرخشی
i	دیواره داخلی
o	دیواره خارجی
h	دمای داغ

c	دمای سرد
f	سیال پایه
nf	نانوسیال
p	نانوذره

بالانویس‌ها

$-$	کمیت بعددار

۱۰- مراجع

[1] Choi SUS (1995) Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. in: Developments and application of Non Newtonian Flows, ASME 66: 99-105.

[2] Heyda J (1959) A green function solution for the laminar incompressible flow between non concentric cylinders. J Franklin I 267: 25-34.

[3] Lundberg RE, McCuen PA, Reynolds WC (1963) Heat transfer in annular passages. Hydrodynamically developed laminar flow with arbitrarily prescribed wall temperatures or heat fluxes. Int J Heat Mass Tran 6(6): 483-529.

[4] Trombetta ML (1971) Laminar forced convection in eccentric annuli. Int J Heat Mass Tran 14(8): 1161-1173.

[5] Kuehn TH, Goldstein RJ (1976) An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders. J Heat Transf 74: 695-719.

[6] Kuehn TH, Goldstein RJ (1978) An experimental study of natural convection heat transfer in eccentric horizontal cylindrical annuli. J Heat Transf 100(4): 635-640.

[7] Aldoss TK, Alkam M, Shatarah M (2004) Natural convection from a horizontal annulus partially filled with porous medium. Int Commun Heat Mass 31(3): 441-452.

[8] Leong JC, Lai FC (2006) Natural convection in a concentric annulus with a porous sleeve. Int J Heat Mass Tran 49: 3016-3027.

[9] Khanafer K, Al-Amiri AA, Pop I (2008) Numerical analysis of natural convection heat transfer in a horizontal annulus partially filled with a fluid-saturated porous substrate. Int J Heat Mass Tran 51: 1613-1627.

[10] Abu-Nada E (2009) Effects of variable viscosity and thermal conductivity of Al_2O_3–water nanofluid on heat transfer enhancement in natural convection. Int J Heat Fluid Fl 30(4): 679-690.

[11] Yu ZT, Xu X, Hu YC, Fan LW, Cen KF (2012) A numerical investigation of transient natural convection heat transfer of aqueous nanofluids in a horizontal concentric annulus. Int J Heat Mass Tran 55(4): 1141-1148.

[12] Matin MH, Pop I (2013) Natural convection flow and heat transfer in an eccentric annulus filled by copper nanofluid. Int J Heat Mass Tran 61: 353-364.

[13] Seyyedi S, Dayyan M, Soleimani S, Ghasemi E (2015) Natural convection heat transfer under constant heat flux wall in a nanofluid filled annulus enclosure. Ain Shams Eng J 6(1): 267-280.

[14] Belabid J, Cheddadi A (2014) Comparative numerical simulation of natural convection in a porous horizontal cylindrical annulus. Appl Mech Mater (670-671): 613-616.

[15] Bahiraei M, Hosseinalipour SM, Hangi M (2014) Heat transfer and flow characteristics of nanofluid in a narrow annulus: Numerical study, modelling and optimisation. Can J Chem Eng 92(4): 747-757.

[16] Alawi OA, Sidik NAC, Dawood HK (2014) Natural convection heat transfer in horizontal concentric annulus between outer cylinder and inner flat tube using nanofluid. Int J Heat Mass Tran 57: 65-71.

[17] Zhang C, Zheng L, Jiang Y, Zhang X (2015) Unsteady natural convection heat transfer of nanofluid in an annulus with a sinusoidally heated source. Numer Heat Tr A-Appl 69(1): 97-108.

[18] El-Maghlany WM, Elazm MMA (2016) Influence of nanoparticles on mixed convection heat transfer in an eccentric horizontal annulus with rotating inner cylinder. J Taiwan Inst Chem E 63: 259-270.

[19] Hu Y, Li D, Shu S, Niu X (2017) Natural convection in a nanofluid filled eccentric annulus with constant heat flux wall : A lattice Boltzmann study with immersed boundary method. Adv Appl Math Mech 86: 262-273.

[20] Teimouri H, Sheikhzadeh GA, Afrand M, Fakhari MM (2017) Mixed convection in a rotating eccentric annulus containing nanofluid using bi-orthogonal grid types : A finite volume simulation. J Mol Liq 227:114-126.

[21] Wei Y, Wang Z, Qian Y, Guo W (2018) Study on bifurcation and dual solutions in natural convection in a horizontal annulus with rotating inner cylinder using thermal immersed boundary-lattice boltzmann method. Entropy 20(10): 733, 1-15.

[22] Xiufeng Y, Charng KS (2019) Numerical study of natural convection in a horizontal concentric annulus using smoothed particle hydrodynamics. Eng Anal Bound Elem 102: 11-20.

[23] Hämmerlin G, Hoffmann KH (1991) Numerical Mathematics. 1st edn. Springer-Verlag, New York.

[24] Cheddadi A, Caltagirone JP, Mojtabi A, Vafai K (1992) Free two-dimensional convective bifurcation in a-horizontal annulus. J Heat Transf 114: 99-114.

[25] Mizushima J, Hayashi S, Adachi T (2001) Transitions of natural convection in a horizontal annulus. Int J Heat Mass Tran 44: 1249-1257.