



اثر اندازه‌ی همسایگی و شکل پرتابه بر رشد ترک در تیر ترک‌دار به روش پری‌دینامیک

محمد جواد اکبری^۱ و سید روح الله کاظمی^{۲*}

^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۵/۰۱، تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۶/۰۴، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۰

چکیده

یکی از مشکلاتی که در تحلیل ترک با روش‌های مرسوم وجود دارد، وجود شرایط خاص حاکم بر نوک ترک است. در سال‌های اخیر روشی بر مبنای مکانیک غیرمحملی به نام تئوری پری‌دینامیک مطرح شده که روند تحلیل چنین سازه‌هایی را بهبود داده است. در این تئوری، نقاطی از جسم که جایجایی یا مشتقات جایجایی در آن‌ها ناپیوسته باشد، از سایر نقاط مادی متمایز نمی‌شود. در این مقاله به بررسی رشد ترک در یک تیر با ترک اولیه، تحت بار ضربه‌ای پرداخته شده است. مدل رشد ترک با استفاده از تئوری پری‌دینامیک مدل‌سازی شده، نتایج حاصل با دیگر مطالعات، اعتبارسنجی شده است؛ همچنین از دو مدل تعریف ترک و دو شکل کروی و تخت برای پرتابه استفاده شده و تاثیر برخی از پارامترهای پری‌دینامیک بر نتایج به دست آمده، مورد بررسی قرار گرفته شده است. نتایج حاصل نشان دهنده قابلیت تئوری پری‌دینامیک برای مدل‌سازی رشد ترک در مسایل مورد بررسی است.

کلمات کلیدی: پری‌دینامیک؛ ضربه؛ ترک؛ تیر.

The Effect of Horizon Size and Projectile Shape on the Crack Growth in the Cracked Beam Using Peridynamic Method

M. J. Akbari¹, S. R. Kazemi²

¹ M.Sc. Student, Mech. Eng., Guilan Univ., Guilan, Iran.

² Assis. Prof., Mech. Eng., Guilan Univ., Guilan, Iran.

Abstract

One of the main problems in the classical methods for analyzing crack is a discontinuity in materials and specific conditions at the crack tip. Peridynamic theory, which has been introduced in recent years, could be used to improve the analysis of cracked structures. In this theory, the points of a body whose displacement or displacement derivatives are discontinuous are not distinguished from other material points. In this paper, using the bond-based peridynamic theory, the crack growth in a beam with initial crack under the impact load has been investigated. The governing equation is developed and solved using Peridynamic theory and the results are validated using other investigations. Two models for the initial crack definition and two projectile shapes have been considered and in addition the effect of some peridynamic parameters on the results has been studied. The results demonstrate the ability of the peridynamic theory to model the crack growth in the studied problems.

Keywords: Peridynamic; Impact; Crack; Beam.

۱- مقدمه

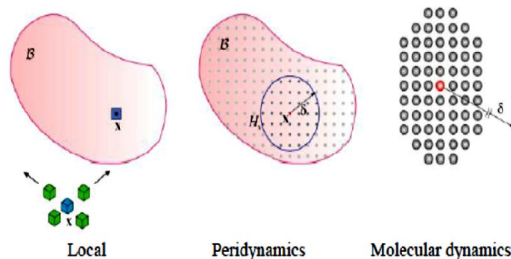
مساله شکست و رشد ترک در سازه‌ها تحت بارگذاری‌های مختلف از مسایل مهم در مهندسی مکانیک محسوب می‌شود. در این بارگذاری‌ها اجزای سازه دچار تغییر سختی می‌شوند که عاملی برای ایجاد ترک در آن‌ها است؛ محققین در مطالعات گوناگونی به بررسی رشد و انتشار ترک پرداخته‌اند.

به عنوان نمونه نینگ لیو [۱] به مطالعه رشد ترک در تیر ترک‌دار از جنس پلی‌متیل‌متاکریلات پرداخته است که ترک اولیه در فواصل مختلف از مرکز نمونه قرار دارد و اثر افزایش سرعت بارگذاری، مورد بررسی قرار گرفت. در مطالعه دیگر، یوژیا فنگ [۲] به صورت تجربی به بررسی رشد ترک در بارگذاری ضربه‌ای پرداخته، ترک اولیه در فواصل مختلفی از مرکز تیر قرار دارد که اثر افزایش فاصله تا مرکز تیر بر نحوه رشد ترک بررسی شده است؛ همچنین وو ژو [۳] به بررسی تجربی تاثیر افزایش سرعت بارگذاری در آزمایش پرداخته است، ترک اولیه در مرکز و لبه پایینی تیر قرار دارد که پرتابه با سه سرعت مختلف با آن برخورد می‌کند. در این آزمایش سرعت رشد ترک و افزایش طول ترک نسبت به زمان و نیروهای وارده به تیر با افزایش سرعت بارگذاری مورد مطالعه قرار گرفته است. لویا [۴] نیز روی تیری از جنس پلی‌متیل‌متاکریلات به صورت بارگذاری شبه استاتیکی خمش سه نقطه، تست ضربه انجام داده و از دوربین‌های سرعت بالا برای تصویر برداری رشد ترک استفاده کرده است، همچنین اثر تغییر سرعت بارگذاری بر سرعت رشد ترک بررسی شده است. سوکانتا چاکرابرتی [۵] با استفاده از روش عددی هیدرودینامیک ذرات هموار^۱ به مدل‌سازی، آزمایش کلاتوف وینکلر برای پیش بینی مسیر رشد ترک پرداخته است. در این مطالعه ارتباط هر نقطه مادی به صورت فنر در نظر گرفته می‌شود. زندر [۶] به بررسی آغاز و انتشار شکست دینامیکی در فولاد تحت بار ضربه‌ای پرداخته است و با استفاده از سیستم دوربین‌های سرعت بالا از نتایج حاصل تصویر برداری کرده و در چندین نمونه با طول ترک متفاوت این آزمایش انجام داده شد. وجود ترک در یک

جسم موجب ایجاد شرایط خاصی در نوک ترک می‌شود که می‌تواند منجر به مشکلاتی در تحلیل با روش‌های رایج شود. در سال ۲۰۰۰ سیلینگ [۷] روشی را مطرح نمود که قادر است، سازه‌های دارای ترک را تحلیل کند. این تئوری از جابجایی‌ها استفاده می‌کند و در صورت وجود ناپیوستگی در سازه، این جابجایی‌ها از دیگر نقاط مادی متمایز نمی‌شود و اصول آن بر معادلات انتگرالی استوار است که با وجود ناپیوستگی‌ها معادلات حاکم، همچنان صحیح و برقرار باقی خواهد ماند؛ در حالی که معادلات دیفرانسیلی مکانیک کلاسیک، با وجود ناپیوستگی دارای اعتبار نیستند. این روش جدید غیرمحملی را «تئوری پری-دینامیک» می‌نامند.

همانطور که اشاره شد، مطالعه رفتار ترک در سازه‌ها که در این مقاله نیز مورد توجه قرار دارد، از مباحث قابل توجهی است که با استفاده از تئوری پری‌دینامیک می‌تواند مورد بررسی قرار بگیرد. به عنوان نمونه آگواي [۸] نتایج تحلیل پری‌دینامیک را با روش المان محدود توسعه یافته و پیش بینی مدل‌های ناحیه چسبیده مقایسه کرده است که سرعت‌های محاسبه شده برای رشد ترک در تمام روش‌ها تقریباً برابر است. با این حال پیش‌بینی مسیرهای شکست برای شاخه‌ای شدن و شاخه‌های ریز در پری‌دینامیک نزدیکتر به مشاهدات تجربی است. کیلیک و مادنسی [۹] برای پیش بینی انتشار ترک در صفحه شیشه‌ای ترک‌دار تحت بارگذاری حرارتی از تئوری پری‌دینامیک مبتنی بر باند استفاده نمودند و از نتایج تجربی برای اعتبار سنجی نتایج به دست آمده استفاده شده است. زو [۱۰] نیز به تحلیل آسیب ماتریس در ورق کامپوزیتی تحت بارگذاری کششی پرداخته است و با توجه به نتایج بدست آمده در این مطالعه وابستگی رشد ترک به درصد نسبی فیبرها در جهت‌های مختلف نشان داده می‌شود؛ همچنین کاظمی و شکوری [۱۱]، به بررسی اثر سرعت اعمال بار بر رشد ترک مورب در ورق پرداخته‌اند، بارگذاری به صورت کشش لبه‌ها با سرعت‌های مختلف اعمال شده و انتشار رشد ترک، مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان برخی مطالعات دیگر از تئوری‌های غیرمحملی می‌توان به کار ارینگن و ادلن [۱۲] و ارینگن [۱۳ و ۱۴] اشاره کرد که اساس آن بر مبنای قوانین تعادل و روابط ترمودینامیکی است. معادلات

^۱ Smoothed Particle Hydrodynamics



شکل ۱- ارتباط بین تئوری محلی، غیرمحلّی و دینامیک مولکولی [۲۲]

در فرمول‌بندی تئوری پری‌دینامیک به جای مشتقات جایجایی، از خود جایجایی‌ها استفاده می‌شود. در واقع تئوری پری‌دینامیک یک بازنویسی از معادلات حرکت در مکانیک جامدات است که برای مدل‌سازی اجسام ناپیوسته، از قبیل ترک‌ها بسیار مناسب است، در حالی که در فرمول‌بندی کلاسیک از معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده شده که در ناپیوستگی‌ها تعریف نمی‌شوند. در تئوری پری‌دینامیک نقاط مادی با یکدیگر بر هم‌کنش مستقیم دارند که اندازه آن وابسته به خواص ساختاری ماده بوده و شامل پارامتری به نام شعاع همسایگی^۱ (δ) نیز است. محلی بودن برهم‌کنش‌ها به اندازه این همسایگی بستگی دارد و با کوچک‌تر شدن شعاع همسایگی، محلی‌تر می‌شوند؛ بنابراین نظریه کلاسیک را می‌توان یک حالت خاص از تئوری پری‌دینامیک در نظر گرفت که در آن شعاع همسایگی به صفر نزدیک می‌شود. از سوی دیگر هنگامی که اندازه شعاع همسایگی به اندازه فاصله درون اتمی نزدیک می‌شود، نیروهای واندروالس را می‌توان به عنوان بخشی از پاسخ در ساختارهایی با مقیاس نانو استفاده کرد [۲۰]؛ بنابراین تئوری پری‌دینامیک می‌تواند مقیاس‌های طول نانو را به ماکرو متصل کند. با تئوری پری‌دینامیک آسیب در ماده در مقایسه با روش‌های کلاسیک پیوسته واقعی‌تر شبیه‌سازی می‌شود. زمانی که برهم‌کنش‌ها بین نقاط مادی قطع شود، شکاف و ترک شروع به رشد می‌کند، اما

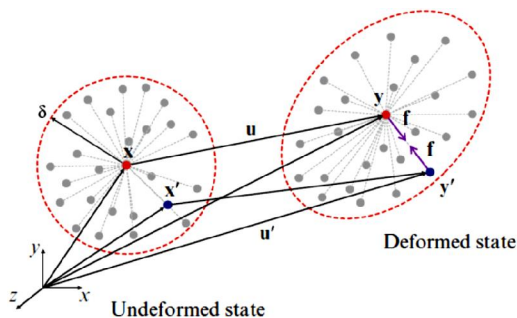
پیچیده حاصل در تحقیقات بعدی، با در نظر گرفتن خواص غیرمحلّی در روابط ساختاری و نگهداشتن روابط تعادل و انرژی جنبشی در حالت محلی، معادلات به شکل ساده‌تر ارایه شده است [۱۵]. ارینگن و کیم نیز با استفاده از تئوری‌های غیرمحلّی دیگر به بررسی رشد ترک پرداخته‌اند [۱۶ و ۱۷].

با توجه به اینکه تئوری غیرمحلّی پری‌دینامیک در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته، قابلیت این روش را در مساله ترک به خوبی نشان داده است. از مسایلی که تاکنون در استفاده از این روش کمتر مورد مطالعه قرار گرفت، بررسی اثر شکل پرتابه در شروع، رشد و گسترش ترک در نمونه است. این مساله از آنجا مهم است که شرایط برخورد پرتابه بر نحوه رشد ترک و مسیر آن اثر دارد و مسیر رشد متفاوتی از خود بروز می‌دهند؛ بنابراین نیاز است تا از قابلیت‌های این روش در بررسی تمام پارامترهای و عوامل موثر بر رشد ترک در سازه استفاده شود. در این مقاله پس از ارایه مقدمات، ابتدا اصول تئوری پری‌دینامیک توضیح داده شده است. در ادامه مساله مورد بررسی معرفی و سپس نتایج به دست آمده مطرح و در نهایت جمع‌بندی ارایه می‌شود.

۲- اصول تئوری پری‌دینامیک

تئوری پری‌دینامیک یک تئوری غیرمحلّی است که توسط سیلینگ و همکاران [۱۸] معرفی شده است. تئوری غیر محلی در محیط پیوسته در واقع رابطه‌ای را بین مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک و دینامیک مولکولی برقرار می‌کند. در مکانیک کلاسیک، حالت ماده تنها متاثر از نقاط مجاور آن است؛ در حالی که در تئوری غیر محلی، حالت یک نقطه از ماده تحت تاثیر نقاط مادی اطراف آن نقطه است که درون یک ناحیه‌ای از شعاع محدود واقع شده‌اند. زمانی که این شعاع به‌طور نامحدودی زیاد می‌شود، نظریه غیرمحلّی تبدیل به نوع پیوسته دینامیک مولکولی می‌شود [۱۹]. تفاوت بین تئوری‌های محلی، غیرمحلّی و دینامیک مولکولی در شکل ۱ نشان داده شده است.

¹ Horizon size



شکل ۳- تغییر شکل نقاط پری‌دینامیک x_j و x_k ، و جفت نیروی مخالف و مساوی [۲۲]

معادله‌ی حرکت پری‌دینامیک مبتنی بر باند هر نقطه مادی x به صورت زیر است و می‌توان با استفاده از رابطه (۱) شتاب را در هر لحظه t تعیین کرد [۲۲]:

$$\rho \ddot{u}(x, t) = \int_{H_x} f(u(x_j, t) - u(x_k, t), x_j - x_k) dV_{x_k} + b(x_k, t) \quad (1)$$

در رابطه بالا H_x یک همسایگی از x_k و u بردار میدان جابجایی، b میدان چگالی نیروی حجمی، ρ چگالی جرمی و f نیروی جفتی است که مقدار آن برداری نیرویی که ذره x_k بر ذره x_j اعمال می‌کند. معادله انتگرالی داده شده (۱)، نشان دهنده‌ی سیستمی است که از معادلات دیفرانسیل کلاسیک متمایز است. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، نقطه مادی x_k با نقاط مادی همسایگی خود (واقع در $H_{x(k)}$) اثر متقابل دارد و از تغییر شکل همه این نقاط مادی تأثیرپذیر است. به طور مشابه نقطه مادی x_j نیز، از تغییر شکل نقاط واقع در همسایگی خود یعنی $H_{x(j)}$ تأثیر می‌پذیرد. برهم‌کنش بین دو نقطه مادی x_k و x_j پیوند (باند) نامیده می‌شود. موقعیت نسبی این دو نقطه مادی با ξ_{kj} بردار جابجایی هر نقطه مادی با u_k و u_j و موقعیت نسبی پس از جابجایی با η_{kj} نمایش داده می‌شود.

$$\xi_{kj} = x_j - x_k \quad (2)$$

$$\eta_{kj} = u(x_j, t) - u(x_k, t) \quad (3)$$

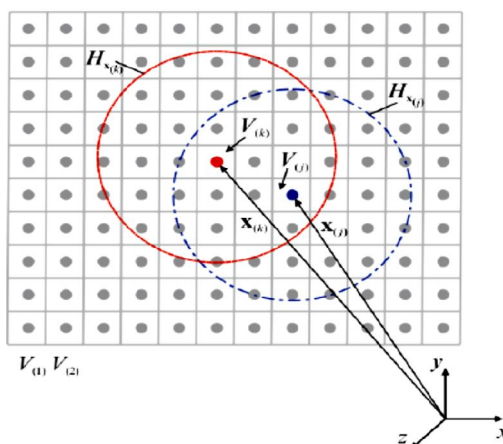
میزان تغییر طول اندازه بین دو نقطه مادی با پارامتری به نام کشیدگی معرفی می‌شود. اگر موقعیت

معادلات انتگرالی همچنان معتبر و صحیح باقی می‌ماند [۲۱ و ۲۲].

۳- پری‌دینامیک مبتنی بر باند

طبق تئوری پری‌دینامیک که توسط سیلینگ ارائه شده، حرکت یک جسم با توجه به برهم‌کنش هر نقطه مادی با نقاط دیگر تعیین می‌شود. اگرچه نقطه واقع در x_k در تعامل با تعداد نامحدودی نقاط x_j در تمام جسم است، اما فقط تعداد محدودی از این برهم‌کنش‌ها بین این نقطه و سایر نقاط مادی در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین فرض می‌شود، تأثیر نقاطی از ماده ناچیز است که با x_k می‌شود، تأثیر نقاطی از ماده بیرون از ناحیه همسایگی x_k (که با $H_{x(k)}$ نشان داده می‌شود) قرار دارند (شکل ۲). به همین صورت سایر نقاط همچون نقطه مادی x_j نیز با نقاط مادی واقع در مجموعه خود، یعنی $H_{x(j)}$ برهم‌کنش خواهند داشت.

با توجه به نیروهای دو به دویی بین نقاط مادی، حالت‌هایی برای تئوری پری‌دینامیک وجود دارد که بر اساس جهت و اندازه این نیروها است. اگر نیرویی که نقطه مادی x_k بر x_j وارد می‌کند، از نظر اندازه با هم برابر و در یک راستا نیز در نظر گرفته شوند، پری‌دینامیک مبتنی بر باند نامیده می‌شود، قابل ذکر است که در این مقاله فقط حالت اشاره شده استفاده گردیده است. (شکل ۳).



شکل ۲- نحوه قرارگیری نقاط مادی و شعاع همسایگی [۲۲]

ناپذیر اعمال می‌کند؛ در نتیجه بار در بین نقاط مادی جسم توزیع و منجر به رشد خود به خودی می‌شود.

برای ماده همسانگرد با شرایط تنش صفحه‌ای دو بعدی، مقدار کشیدگی بحرانی S_c با رابطه (۱۲) حاصل می‌شود [۲۲]:

$$S_c = \sqrt{\frac{G_c}{\left(\frac{6}{\pi}\mu + \frac{16}{9\pi^2}(\kappa - 2\mu)\right)\delta}} \quad (12)$$

در طول فرآیند حل، جابجایی هر نقطه مادی و کشیدگی $S_{(k)l}$ بین جفت نقاط مادی x_k بر x_j ، محاسبه و بررسی می‌شود. مقدار S_c را می‌توان بر حسب مقدار بحرانی نرخ آزاد سازی انرژی (G_c) بیان کرد؛ همچنین به منظور اعمال اثر جدایش بین دو نقطه هنگام محاسبه نیروی بین دو نقطه، تابع μ به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شود [۲۱ و ۲۲]:

$$\mu(x_j - x_k, t) = \begin{cases} 1 & S_{kj}(x_j - x_k, t) < S_c & 0 < t \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (13)$$

به این صورت که هنگامی کشیدگی $S_{(k)l}$ بین دو نقطه مادی k و j بیش‌تر از مقدار کشیدگی بحرانی (S_c) شود، آسیب بروز خواهد کرد و شکست رخ می‌دهد و تابع μ برابر صفر قرار گرفته و برهم‌کنش بین دو نقطه مادی از بین می‌رود. بر این اساس معیار آسیب موضعی به صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شود [۲۲]:

$$\varphi(x, t) = 1 - \frac{\int_H \mu(\dot{x} - x, t) d\dot{V}}{\int_H d\dot{V}} \quad (14)$$

مقدار φ می‌تواند از صفر تا یک تغییر کند که مقدار صفر به معنای سالم بودن همه باندها با نقطه مادی x و مقدار یک به معنای شکسته شدن همه پیوندها با این نقطه مادی است. می‌توان مقدار مناسبی را به عنوان معیار تشخیص بروز ترک در نقاط مختلف ماده در نظر گرفت و با محاسبه مقدار φ در هر گام از حل تعیین کرد که جدایش در کدام قسمت از ماده رخ داده است. در این مطالعه مقدار φ برای ۳ نقطه همسایگی هنگام شکست برابر با ۰/۳۸ در نظر گرفته شده است، یعنی برای رشد ترک نیاز به از بین رفتن ۳۸ درصد از پیوندهای هر نقطه مادی با نقاط همسایگی آن نقطه است تا جدایش و به دنبال آن رشد ترک در ماده رخ دهد. معیار آسیب موضعی در یک شعاع همسایگی بر اساس نسبت تعداد باندهای

بعد از تغییر شکل نقاط مادی با y_k و y_j نشان داده شود، کشیدگی بین این دو نقطه به صورت (۴) تعریف می‌شود [۲۲]:

$$S_{kj} = \frac{|y_j - y_k| - |x_j - x_k|}{|x_j - x_k|} \quad (4)$$

در این مقاله مساله به صورت دو بعدی تحلیل شده است که در ادامه روابط مربوط به تحلیل دوبعدی ارائه خواهد شد. در ساختارهای دوبعدی برای تحلیل با استفاده از بعضی روابط مکانیک کلاسیک در حالت دوبعدی برای به دست آوردن روابطی از پری‌دینامیک که وابسته به آن است، استفاده می‌شود. از جمله از این روابط برای مکانیک کلاسیک در نظر گرفتن تنش و کرنش در حالت دوبعدی است که به همراه آن ماتریس خواص با رابطه (۵) در نظر گرفته می‌شود [۲۲]:

$$\sigma_{(k)}^T = \{\sigma_{xx(k)} \sigma_{yy(k)} \sigma_{xy(k)}\} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{(k)}^T = \{\varepsilon_{xx(k)} \varepsilon_{yy(k)} \gamma_{xy(k)}\} \quad (6)$$

$$C = \begin{bmatrix} \kappa + \mu & \kappa - \mu & 0 \\ \kappa - \mu & \kappa + \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (7)$$

$\sigma_{(k)}$ و $\varepsilon_{(k)}$ به ترتیب بردار تنش و کرنش می‌باشند و κ (مدول بالک) و μ (مدول برشی) که در حالت دوبعدی برابر با 2μ است.

$$\kappa = \frac{E}{2(1-\nu)} \quad (8)$$

چگالی انرژی کرنشی مکانیک کلاسیک به صورت رابطه (۹) است: ($\gamma_{xy(k)} = \dot{\zeta}$)

$$W_{(k)} = \frac{1}{2} \mu \zeta^2 \quad (9)$$

و چگالی انرژی کرنشی پری‌دینامیک نیز عبارت است از:

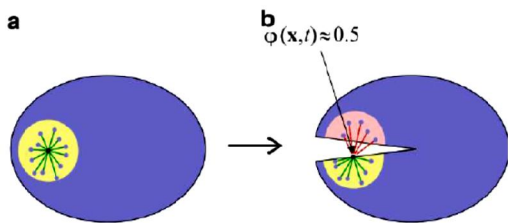
$$W_{(k)} = \frac{\pi h \delta^4 \zeta^2}{12} b \quad (10)$$

با استفاده از رابطه‌های ۹ و ۱۰ می‌توان پارامتر پری‌دینامیک b را بدست آورد.

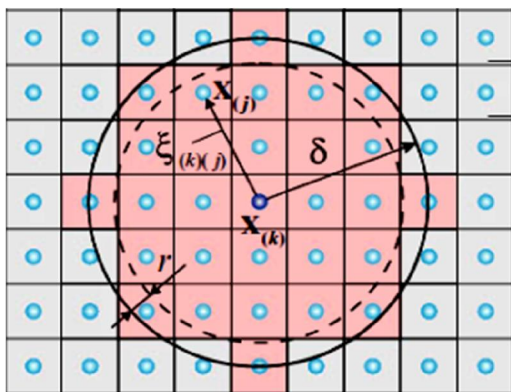
$$b = \frac{6\mu}{\pi h \delta^4} \quad (11)$$

۴- پیش‌بینی آسیب

آسیب ماده در پری‌دینامیک با از بین بردن برهم‌کنش‌ها میان نقاط مادی معرفی می‌شود که در معادلات حرکت با حذف بردارهای تراکم نیرو بین نقاط مادی به صورت برگشت



شکل ۴- (a) همه پیوندها سالم (عدم آسیب) و (b) نیمی از پیوندها قطع شده است (وقوع آسیب) [۲۲]



شکل ۵- اصلاح حجم برای نقاط داخل محدوده [۲۲]

که در آن v_j ضریب اصلاح حجم و t_{kj}^n نیز معرف نیروی برهم‌کنش اصلاح شده پری‌داینامیک در گام زمانی شماره n است.

پس از تعیین شتاب یک نقطه مادی در مرحله n ام از معادله (۱۶)، می‌توان سرعت و جابجایی را با استفاده از روش صریح تفاضل پیشرو و پسرو در دو مرحله به‌دست آورد. در مرحله‌ی اول محاسبه سرعت در گام زمانی $n+1$ با دانستن شتاب و سرعت در گام زمانی n رابطه به صورت (۱۷) نوشته می‌شود [۲۲]:

$$\dot{u}_{(k)}^{n+1} = \ddot{u}_{(k)}^n \Delta t + \dot{u}_{(k)}^n \quad (17)$$

مرحله دوم برای بدست آوردن جابجایی در گام زمانی $n+1$ با استفاده از سرعت در گام $n+1$ رابطه (۱۷) و با دانستن جابجایی در گام زمانی n از رابطه (۱۸) می‌توان استفاده کرد [۲۲]:

$$u_{(k)}^{n+1} = \dot{u}_{(k)}^n \Delta t + u_{(k)}^n \quad (18)$$

همین روش را می‌توان برای محاسبه سرعت و جابجایی دیگر نقاط استفاده کرد.

آسیب دیده به کل باندهای متصل به هر نقطه (یا به عبارتی ۱ منهای نسبت تعداد باندهای سالم به تعداد کل باندها) تعیین می‌شود که برای شعاع همسایگی سه نقطه‌ای این مقدار برابر 0.38 به دست می‌آید. در صورتی که شعاع همسایگی بی‌نهایت فرض شود، مقدار ϕ برابر 0.5 خواهد شد (شکل ۴) [۲۲].

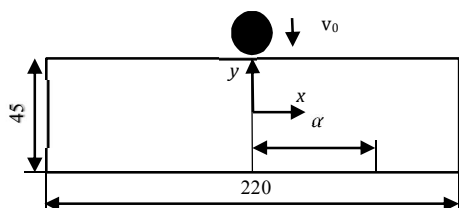
۵- تصحیح حجم

انتگرال‌گیری عددی برای یک نقطه مادی x_k در همسایگی‌اش، با در نظر گرفتن کل حجم هر نقطه مادی تقریب زده می‌شود. در شکل ۵ یک همسایگی با شعاع $\delta = 3dx$ نشان داده شده که فاصله بین دو نقطه مادی dx نشان داده می‌شود. مطابق این تقریب، کل حجم‌های ماده در محدوده $|x_k - x_j| < \delta$ در نظر گرفته می‌شود. این تقریب را می‌توان با در نظر گرفتن کل حجم نقاط ماده در محدوده $|x_k - x_j| < \delta - r$ بهبود داد که در آن $r = dx/2$ است. برای نقاطی که در محدوده $\delta - r < \xi_{kj} < \delta$ قرار دارند، ضریب اصلاح حجم که منجر به تغییر یک ضریب بین $1/2$ و 1 به صورت خطی (بسته به موقعیت عضوهای همسایگی نسبت به مرز آن) می‌شود، به صورت رابطه $v_{cj} = (\delta + r - \xi_{kj})/2r$ خواهد بود. بازنویسی معادله حرکت با در نظر گرفتن ضریب تصحیح حجم به صورت رابطه (۱۵) است [۲۲]:

$$\rho(x_{(k)}) \ddot{u}(x_{(k)}, t) = \sum_{j=1}^N [t(u(x_{(j)}), t) - u(x_{(k)}, t), x_{(j)} - x_{(k)} - t(u(x_{(k)}), t) - u(x_{(j)}, t), x_{(k)} - x_{(j)}] \times (v_{c(j)} V_{(j)}) + b(x_{(k)}, t) \quad (15)$$

از رابطه (۱۵) می‌توان به صورت صریح و با استفاده از روش تفاضل پسرو و پیشرو در گام n انتگرال گرفت. اگر حل این رابطه در گام زمانی Δt ($t = n\Delta t$) به صورت $u_{(k)}^n = u_{(k)}$ نمایش داده شود، معادله (۱۵) را می‌توان به شکل (۱۶) بازنویسی کرد [۲۲]:

$$\rho \ddot{u}_k^n = \sum_{j=1}^N (\bar{t}_{kj}^n - \bar{t}_{jk}^n) (v_j V_{(j)}) + b_k^n \quad (16)$$



شکل ۶- نمایی از یک تیر با ترک اولیه تحت ضربه (پرتابه کروی)

ادامه این مقاله هنگامی که از مدل نخست ترک استفاده شده باشد، از عبارت «شیار اولیه» استفاده شده و در مواردی که مدل‌سازی ترک به صورت دوم مد نظر باشد، عبارت «ترک اولیه» به کار رفته است. در مطالعه نینگ لیو و همکاران [۱]، شعاع همسایگی مورد استفاده در شبیه‌سازی به روش پری‌دینامیک برابر چهار نقطه انتخاب شده، ولی در این مطالعه این مقدار برابر دو، سه، چهار و پنج نقطه در همسایگی در نظر گرفته شده است. قابل ذکر است با توجه به تغییر شعاع همسایگی، دیگر پارامترهای پری‌دینامیک نیز تحت تاثیر قرار می‌گیرد. این موضوع برای دقت و سرعت تحلیل مهم است و با توجه به اهمیت موضوع این مساله بررسی شده است. به طور کلی تحلیل‌های عددی انجام شده با اعمال تغییرات لازم در کد فرترن موجود صورت گرفته است.

در این قسمت نتایج حاصل از تحلیل پری‌دینامیک صورت گرفته که برای شعاع همسایگی (δ) با اندازه‌های متفاوت ۲ تا ۵ نقطه و برای دو شکل مدل‌سازی ترک آورده شده است. شایان ذکر است که فاصله هر دو نقطه مجاور در هر دو راستای افقی و عمودی با هم برابر بوده و با dx معرفی شده است.

برای شعاع همسایگی برابر با ۲ نقطه ($\delta = 2dx$) و برای «شیار اولیه»، همان طور که در شکل ۷ ملاحظه می‌شود، به ازای همه موقعیت‌های شیار اولیه، نتایج عددی حاصل، از تطابق کافی با نتایج تجربی برخوردار نیست؛ همچنین روند رشد ترک نسبت به زمان یکنواخت نبوده و قبل از رسیدن به طرف دیگر تیر متوقف می‌شود.

برای همین اندازه شعاع همسایگی و برای «ترک اولیه» نیز رشد ترک ناقص بوده و در فاصله طولی ۲۰ و ۳۰ میلیمتر، علاوه بر اختلاف با نتیجه تجربی، نسبت به

۶- بارگذاری ضربه ای روی تیر دارای ترک

در ادامه به بررسی یک مساله ضربه روی تیر دارای ترک پرداخته شده است. جنس نمونه از پلی‌متیل متاکریلات^۱ بوده و ابعاد آن ۲۲۰×۴۵ میلیمتر است. طول اولیه ترک ۶ میلیمتر است که در لبه پایینی نمونه و در فاصله‌های طولی مختلف نسبت به مرکز تیر قرار گرفته است (شکل ۶). موقعیت طولی ترک (فاصله α از مرکز تیر)، برابر ۱۰ و ۲۰ و ۳۰ میلیمتر در نظر گرفته شده است؛ همچنین خواص مکانیکی ماده مورد استفاده در جدول ۱ نشان داده شده است. شایان ذکر است که در تئوری پری‌دینامیک مبتنی بر باند، نسبت پواسون برای مسایل دو بعدی به دلیل محدودیت این تئوری (حالت ممتنی بر باند) برابر $1/3$ در نظر گرفته می‌شود که با مقدار مذکور در جدول زیر تفاوت چندانی ندارد.

پرتابه‌ای به شکل کروی، با جرم ۵ کیلوگرم و با سرعت $2/3$ متر بر ثانیه که به صورت صلب مدل‌سازی شده است، به لبه بالایی تیر برخورد می‌کند. بررسی تجربی مساله فوق توسط یوزیافنگ [۲] و شبیه‌سازی پری‌دینامیک آن برای برخی حالت‌ها، توسط نینگ لیو و همکاران [۱] انجام شده است. در این مطالعه اثر تغییر شعاع همسایگی (δ) برای برخی موقعیت‌های مختلف ترک و دو روش متفاوت برای مدل کردن ترک اولیه، مورد بررسی قرار داده شده است.

برای مدل کردن ترک، در روش نخست هنگام تعریف گره‌های تیر، گره‌هایی که در محدوده ترک واقع شده‌اند، حذف و در حقیقت تیر به صورت شیاردار^۲ مدل می‌شود. در روش دوم، تعریف گره‌های تیر به صورت کامل (بدون حذف هیچ گره) تعریف شده و برای مدل کردن ترک اولیه فقط در محل ترک باندهای موجود بین گره‌ها از بین برده می‌شود. در

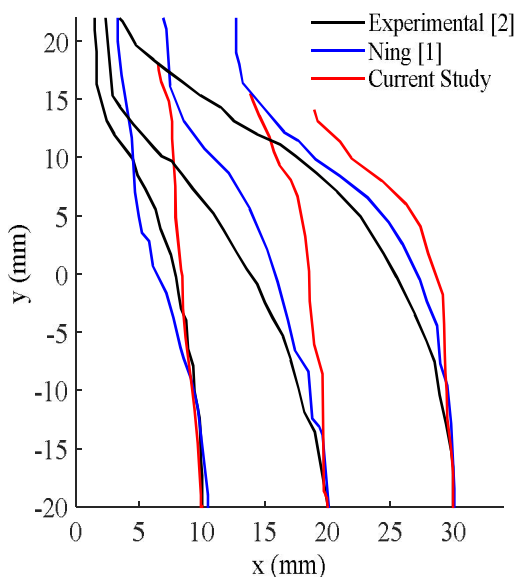
جدول ۱- خواص مکانیکی ماده پلی‌متیل متاکریلات [۱]

انرژی شکست (J/m^2)	ضریب پواسون	چگالی (kg/m^3)	مدول یانگ (GPa)
۱۶۰	۰٫۳۶	۱۲۰۰	۳٫۱

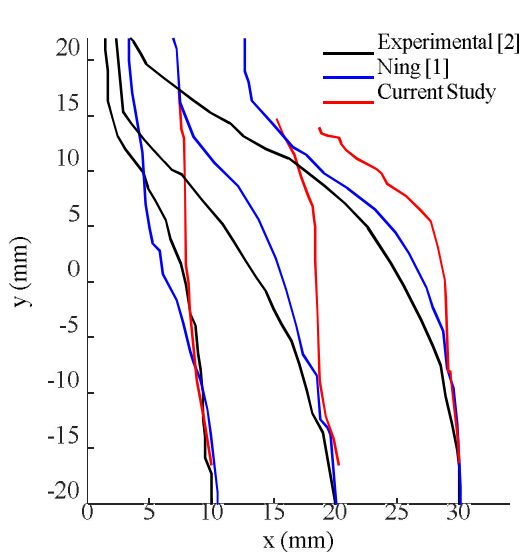
^۱ PMMA
^۲ Notch

ولی در موقعیت ۳۰ میلی‌متر رشد ترک در دو حالت تقریباً برابر است، اما مسیر رشد به دست آمده متفاوت خواهد بود (شکل ۸).

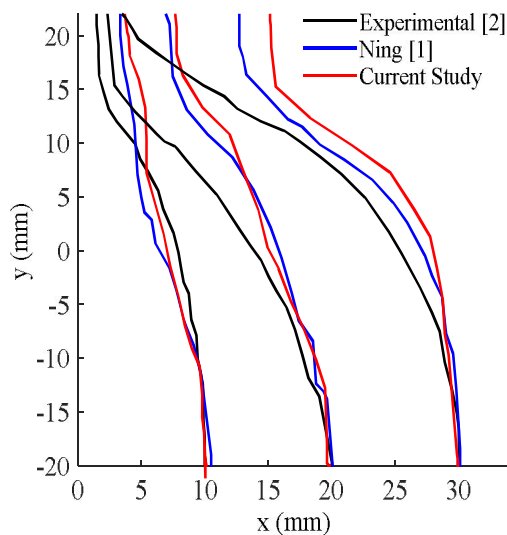
حالت ترک نوع اول نیز متفاوت است. با استفاده از مدل دوم برای ترک (ترک اولیه) به ازای موقعیت ۲۰ میلی‌متر، رشد ترک نسبت به مدل نوع اول (شیار اولیه) بیشتر است،



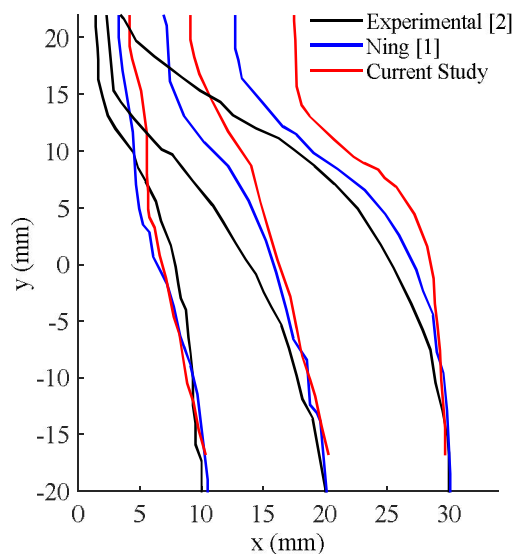
شکل ۸- مسیر ترک برای ترک اولیه و شعاع همسایگی برابر ۲ نقطه



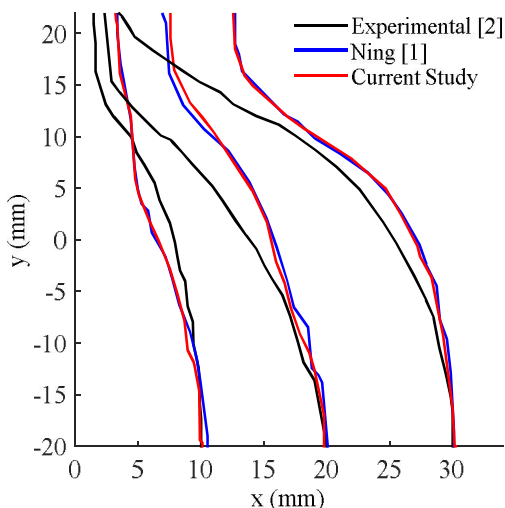
شکل ۷- مسیر ترک برای شیار اولیه و شعاع همسایگی برابر ۲ نقطه



شکل ۱۰- مسیر ترک برای ترک اولیه و شعاع همسایگی برابر ۳ نقطه



شکل ۹- مسیر ترک برای شیار اولیه و شعاع همسایگی برابر ۳ نقطه



شکل ۱۲- مسیر ترک برای ترک اولیه و شعاع همسایگی برابر ۴ نقطه

با در نظر گرفتن همسایگی پنج نقطه‌ای و شیار اولیه، مسیر رشد ترک در قسمت‌های میانی از عرض تیر، در موقعیت طولی ۱۰ میلی‌متر نسبت به موقعیت‌های طولی ۲۰ و ۳۰ میلی‌متر، به حالت تجربی نزدیک‌تر است (شکل ۱۳). برای ترک اولیه در هر سه موقعیت طولی نتایج به دست آمده در بخش قابل ملاحظه‌ای از عرض تیر، بسیار نزدیک به نتایج تجربی است. همان طور که در شکل ۱۴ نشان داده شده است، رشد ترک در تمام موقعیت‌ها تا قسمت میانی تیر منطبق بر نتایج تجربی است و در انتهای تیر نیز نتایج نسبت به نتایج نینگ [۱] حالت مطلوب‌تری دارد.

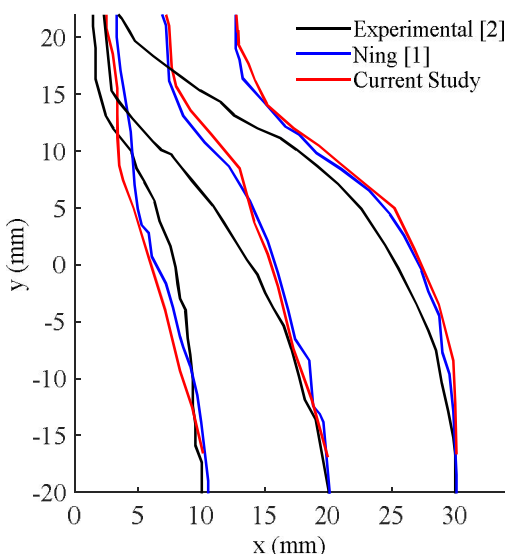
رشد ترک بر حسب زمان

در ادامه نمودارهای رشد ترک بر حسب زمان به ازای اندازه‌های مختلف برای شعاع همسایگی آورده شده است. در این نمودارها با توجه به نزدیک بودن نتایج حاصل از دو مدل ترک، فقط به ارایه نتایج مربوط به مدل کردن ترک اولیه به شکل شیار اکتفا شده است. با توجه به نمودارهای به دست آمده تاثیر اندازه همسایگی (δ) روی میزان رشد ترک بر حسب زمان مشاهده می‌شود. در همسایگی دو نقطه‌ای برای هر سه موقعیت طولی ترک منحنی همواری به دست نیامده و رشد ترک تا انتهای لبه بالایی تیر ادامه پیدا نمی‌کند. در حالت‌های همسایگی سه، چهار و پنج نقطه‌ای، نمودارها مشابه هم رشد داشته‌اند با این تفاوت که رشد ترک در حالت

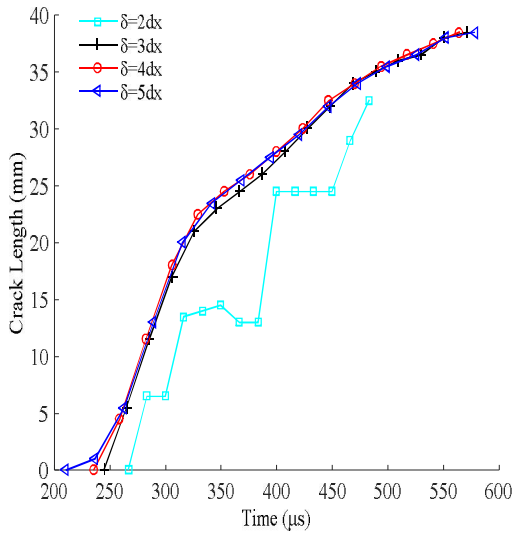
برای شعاع همسایگی برابر با ۳ نقطه و شیار اولیه جواب در موقعیت‌های ۱۰ و ۲۰ و ۳۰ میلی‌متر نزدیک به نتیجه نینگ [۱] است. طبق نتایج تجربی برای این سه موقعیت طولی، انتهای نوک ترک به سمت مرکز جسم حرکت می‌کند که با نتایج حاصل از شبیه‌سازی متفاوت است. در حالت ترک اولیه، نتایج حاصله در موقعیت طولی ۱۰ میلی‌متر همانند جواب به دست آمده از شیار اولیه است؛ اما در دو موقعیت طولی دیگر، حالت ترک اولیه نسبت به مورد شیار اولیه، نتایجی نزدیک‌تر به کار نینگ [۱] می‌دهد.

در حالت چهار نقطه همسایگی، همان‌گونه که در شکل ۱۱ ملاحظه می‌شود، هنگامی که از شیار اولیه استفاده شده است، در موقعیت‌های ۱۰ و ۲۰ و ۳۰ میلی‌متر جواب بسیار نزدیک به نتایج نینگ [۱] است. این نتایج نسبت به حالت همسایگی سه نقطه‌ای، به نتایج تجربی [۲] نزدیک‌تر است.

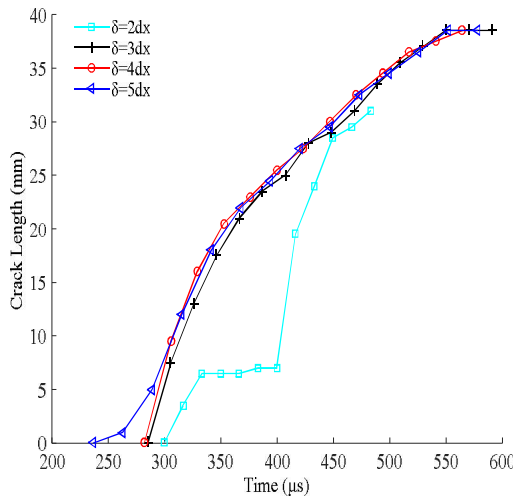
زمانی که از ترک اولیه استفاده شده است، باز هم در هر سه موقعیت طولی ۱۰ و ۲۰ و ۳۰ میلی‌متر، نتایج تقریباً منطبق با [۱] است (شکل ۱۲). همان طور که انتظار می‌رفت، نتایج برای هر دو نحوه مدل کردن ترک با در نظر گرفتن همسایگی چهار نقطه‌ای، مشابه نتایج نینگ [۱] است.



شکل ۱۱- مسیر ترک برای شیار اولیه و شعاع همسایگی برابر ۴ نقطه



شکل ۱۵- رشد ترک برای حالت $\alpha=10$ میلی‌متر

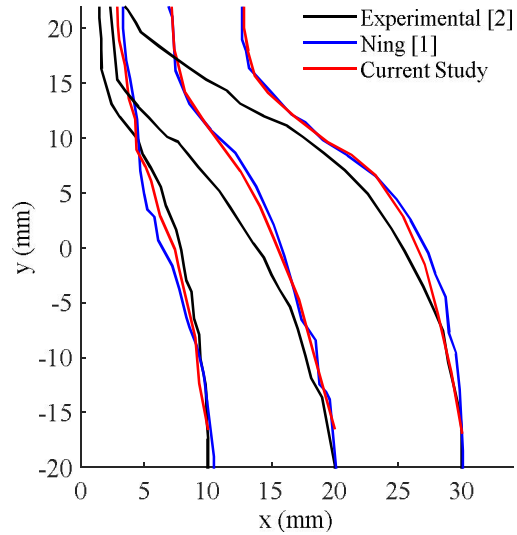


شکل ۱۶- رشد ترک برای حالت $\alpha=20$ میلی‌متر

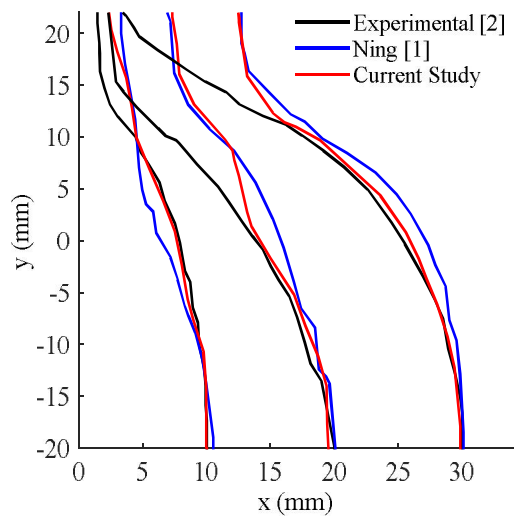
۷- رشد ترک ناشی از برخورد پرتابه سرتخت

در این قسمت مساله قبل، برای یک پرتابه سرتخت مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مکانیکی ماده مشابه قبل طبق جدول ۱ بوده و نمایی از تیر مورد بررسی در شکل ۱۸ آورده شده است. پرتابه سرتخت و صلب بوده و وزن و سرعت اولیه آن نیز مشابه مساله قبل است.

شکل ۱۹ مسیر رشد ترک به دست آمده با انتخاب همسایگی چهار نقطه‌ای و مقایسه این نتایج با نتایج مربوط

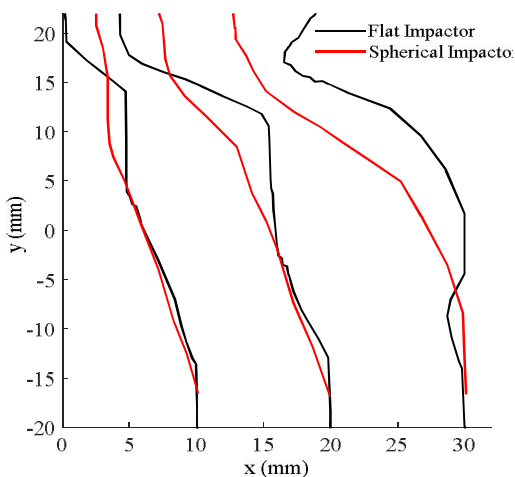


شکل ۱۳- مسیر ترک برای شیار اولیه و شعاع همسایگی برابر ۵ نقطه

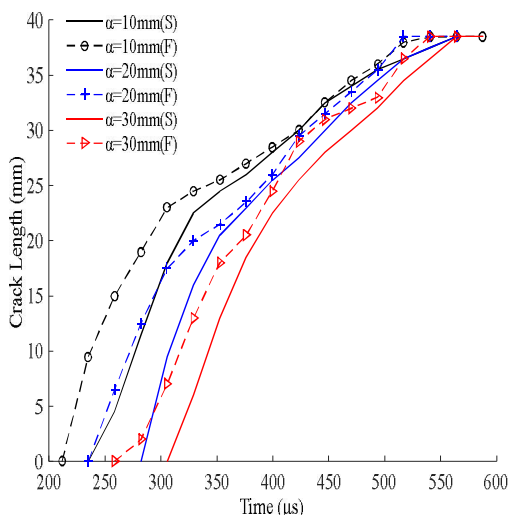


شکل ۱۴- مسیر ترک برای ترک اولیه و شعاع همسایگی برابر ۵ نقطه

چهار و پنج نقطه‌ای زودتر شروع شده است؛ همچنین از مقایسه شکل‌های ۱۵ تا ۱۷ مشاهده می‌شود که از سه موقعیت طولی شیار اولیه در وضعیتی که ترک اولیه در فاصله ۱۰ میلیمتری وسط تیر قرار دارد، رشد ترک زودتر آغاز می‌شود که این اتفاق با توجه به نزدیک‌تر بودن ترک در این حالت به مرکز تیر قابل انتظار است.



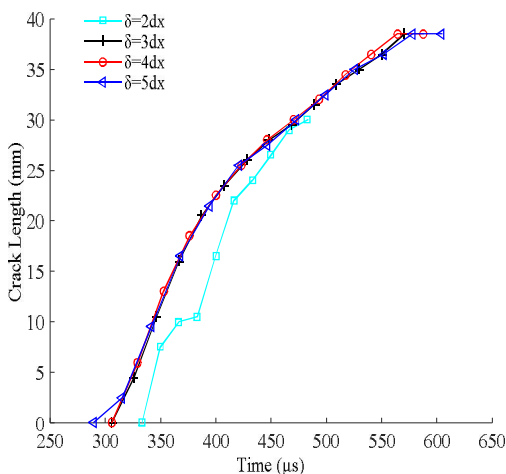
شکل ۱۹- مقایسه‌ی مسیر ترک بین پرتابه‌ی کروی و سرتخت



شکل ۲۰- مقایسه‌ی رشد ترک بین پرتابه‌ی کروی و سرتخت (خط ممتد پرتابه کروی، خط چین پرتابه سرتخت)

به مساله قبل (پرتابه کروی) را نشان می‌دهد. با توجه به شکل پرتابه‌ها، رشد ترک در موقعیت‌های طولی مختلف ترک اولیه متفاوت است. در پرتابه کروی برخورد به صورت نقطه‌ای رخ می‌دهد؛ اما در پرتابه سرتخت این برخورد به صورت صفحه‌ای است که این تفاوت در نحوه برخورد، می‌تواند منجر به تفاوت در نحوه رشد ترک بشود. قابل ذکر است که نتایج آورده شده بر اساس مدل نوع اول برای ترک اولیه (شیار) ارائه شده است.

شکل ۲۰ نیز تفاوت زمان شروع رشد ترک را نشان می‌دهد و همان‌طور که مشاهده می‌شود، در پرتابه سرتخت موج ضربه، به ازای هر سه موقعیت طولی شیار اولیه، در زمان کمتری باعث رشد ترک شده است که این مطلب برای موقعیت طولی ۱۰ میلی‌متر واضح‌تر است؛ همچنین برای دو موقعیت طولی ۱۰ و ۲۰ میلی‌متری شیار اولیه، در قسمت انتهایی زمان رشد ترک، نمودارهای مربوط به دو شکل پرتابه نزدیک به یکدیگر به دست آمده‌اند.

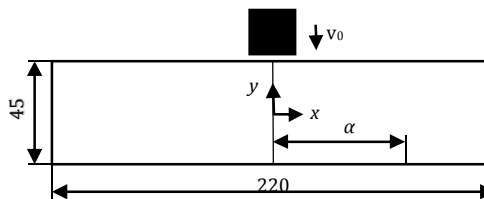


شکل ۱۷- رشد ترک برای حالت $\alpha=30$ میلی‌متر

۸- رشد ترک ناشی از ضربه در تیر دارای

ترک‌های اولیه متقارن

در این مطالعه به بررسی بارگذاری ضربه‌ای روی یک تیر با دو ترک اولیه به صورت متقارن پرداخته شده است (شکل ۲۱). جنس تیر و مشخصات پرتابه، مشابه مشخصات مساله اول در نظر گرفته شده است؛ همچنین با توجه به نتایج به دست



شکل ۱۸- نمایی از یک تیر با ترک اولیه تحت ضربه (پرتابه سرتخت)

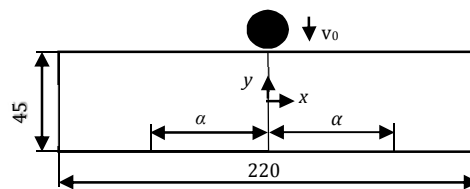
ترک، بر نتایج به دست آمده مورد بررسی قرار گرفت. مطابق نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که با بیشتر شدن تعداد نقاط همسایگی و در حقیقت با غیرمحملی‌تر شدن تحلیل، جواب به حالت تجربی نزدیک‌تر می‌شود، ولی این افزایش موجب افزایش هزینه محاسباتی نیز خواهد شد. با توجه به این مساله مقدار سه نقطه در همسایگی هزینه محاسباتی کمتری را به همراه داشته و همگرایی آن با نتایج تجربی نیز به صورت تقریبی مطلوب است؛ همچنین هر دو مدل برای ترک اولیه منجر به نتایجی نزدیک به یکدیگر گردید. در مساله دوم تاثیر شکل پرتابه مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که مسیر رشد ترک در حالت برخورد پرتابه سرتخت نسبت به مورد پرتابه کروی متفاوت است که این مطلب با توجه به تفاوت نحوه تماس این دو پرتابه با تیر هنگام برخورد، مورد انتظار بود. در مساله سوم ترک‌های اولیه به صورت دو ترک متقارن در نظر گرفته شد و تیر پرتابه کروی مورد هدف قرار گرفت و مشاهده گردید که رشد ترک نیز متقارن بوده و نحوه انتشار ترک، با مساله اول متفاوت است. در این مساله مسیرهای انتشار نزدیک به سطح بالایی تیر به شکل عمودی‌تر بوده و با تمایل کمتری به سمت مرکز تیر رشد می‌کنند. به طور کلی می‌توان گفت، تئوری پری-داینامیک قادر است با مدل‌سازی مطلوب انتشار ترک ناشی از بارگذاری ضربه‌ای در شرایط متفاوت پرتابه و ترک، به عنوان یک روش ارزشمند جهت تحلیل این دسته مهم از مسایل مکانیک جامدات به کار گرفته شود.

۱۰- مراجع

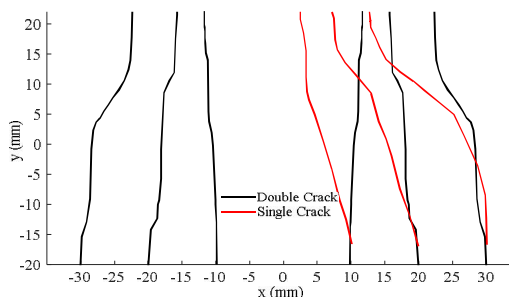
- [1] Liu N, Liu D, Zhou W (2016) Peridynamic modelling of impact damage in three-point bending beam with offset notch, Appl Math Mech-Engl Ed 12.
- [2] Xuefeng Y, Chunyang X, Jing F (1996) Study of dynamic fracture behavior on three-point-bend beam with off-center edge-crack. China Academic Journal Electronic Publishing House 28(6).
- [3] Zhou W, Liu D, XNguyen H, Huang W (2017) Dynamic fracture process during three-point-bending impact on polymethyl-methacrylate beams. Global Journal Eng: A Mechanical and Mechanics Engineering 17(1).
- [4] Loya JA, Villa EI, Fernandez-Saez J (2009) Crack-front propagation during three-point-bending tests of polymethyl-methacrylate beams. Polym Test 6(1): 113-11.

آمده از مساله اول، در تحلیل این مساله از مدل‌سازی ترک به شکل نخست (شیار) و همسایگی چهار نقطه‌ای استفاده شده است.

مطابق شکل ۲۲ مسیر به دست آمده برای رشد ترک به شکل متقارن است و با نتیجه حاصل شده از یک ترک اولیه (مساله اول) متفاوت است. این تفاوت به ازای هر سه موقعیت طولی ترک قابل توجه است. همان گونه که در شکل نیز قابل مشاهده است، در حالت ترک‌های اولیه متقارن، برخلاف یک ترک اولیه، مسیر رشد ترک در قسمت پایانی خود به سمت مرکز تیر تمایل پیدا نمی‌کند.



شکل ۲۱- نمایی از یک تیر با ترک‌های متقارن تحت ضربه



شکل ۲۲- مقایسه‌ی مسیر ترک بین دو حالت یک ترک اولیه و ترک‌های متقارن اولیه

۹- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تئوری پری‌داینامیک، آسیب ضربه روی تیر ترک‌دار مورد مطالعه قرار گرفته است. مسایلی مانند تاثیر شکل پرتابه، نحوه مدل کردن ترک، تعداد و نحوه قرار گرفتن ترک اولیه و نیز تاثیر شعاع همسایگی بررسی شده است. در مساله اول که در آن ترک اولیه با طول ثابت و در موقعیت‌های طولی مختلف نسبت به مرکز و در لبه پایینی تیر قرار داشت، پرتابه کروی به لبه بالایی تیر اصابت کرده و اثر تغییر در اندازه شعاع همسایگی و نیز نحوه مدل‌سازی

- [13] Eringen AC (1972) Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *Int J of Eng* 10(5): 425-435.
- [14] Eringen AC (1972) Nonlocal polar elastic continua. *Int J Eng Science* 10(1): 1-16.
- [15] Eringen AC, Speziale C, Kim B (1977) Crack-tip problem in non-local elasticity. *J Mech Phys Solids* 25(5): 339-355.
- [16] Eringen AC, Kim BS (1974) Stress concentration at the tip of crack. *Mech Res Commun* 1: 233-237.
- [17] Eringen AC, Kim B (1974) On the problem of crack tip in nonlocal elasticity. *Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics*, ed: Springer, pp. 107-113.
- [18] Silling S (2000) Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *J Mech Phys Solids* 48: 175-209.
- [19] Kunin L (1982) *Elastic media with microstructure I: one dimensional models*. Springer. Berlin, No. 26.
- [20] Silling S, Bobaru F (2005) Peridynamic modeling of membranes and fibers. *Int J Nonlinear Mech* 40: 395-409.
- [21] Silling S, Askari E (2005) A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics. *Comput Struct* 83(17-18): 1526-1535.
- [22] Madenci E, Oterkus E (2014) *Peridynamic theory and its applications*: Springer.
- [5] Chakraborty S, Shaw A (2013) A pseudo-spring based fracture model for SPH simulation of impact dynamics. *Int J Impact Eng* 12: 84-95.
- [6] Zehnder AT, Rosakis AJ (1990) Dynamic fracture initiation and propagation in 4340 steel under impact loading. *Int J Frac* 15: 271-285.
- [7] Silling SA (2000) Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. *J Mech Phys Solids* 48(1): 175-209.
- [8] Agwai A, Guven I, Madenci E (2011) Predicting crack propagation with peridynamics: a comparative study. *Int J Fract* 14(1): 65-78.
- [9] Kilic B, Madenci E (2009) Prediction of crack paths in a quenched glass plate by using peridynamic theory. *Int J Fract* 165-177.
- [10] Askari E, Xu J (2006) Peridynamic analysis of damage and failure in composites. 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Aerospace Sciences Meetings, Reno, Nevada.
- [۱۱] کاظمی س، شکوری م (۱۳۹۶) تحلیل اثر سرعت اعمال بار بر رشد ترک مورب در ورق با استفاده از تئوری پری‌دینامیک. ماهنامه علمی پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس ۱۷(۱): ۴۰۳-۴۱۲.
- [12] Eringen AC, Edelen D (1972) On nonlocal elasticity. *Int J Eng Sci* 10(3): 233-248.