



## تحلیل فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشارهای خارجی بر اساس تئوری مرتبه اول برشی

محمد رضا عیسوند زيبائی\*

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، واحد اندیمشک، دانشگاه آزاد اسلامی، اندیمشک، ایران  
مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۲۹، تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۱۱/۱۹، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۵/۲۹

### چکیده

در این مقاله به بررسی فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی پرداخته شده است. پیکربندی پوسته استوانه‌ای تقویتی تشکیل شده است، از سه لایه ایزوتروپیک که لایه‌های داخلی و خارجی از فولاد زنگ نزن و لایه میانی، متشکل از ماده آلومینیوم است. معادلات پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بدست آمده است. سپس، معادلاتحاکم بر حرکت به روش انرژی و بکار بردن تکنیک ریتز استخراج شده اند. تحلیل روی خصوصیات فرکانس‌های طبیعی با شرایط مرزی مختلف به وسیله تابع تیر محوری صورت پذیرفت. شرایط مرزی در لبه‌های دو انتهای پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه به صورت ساده- ساده، گیردار- گیردار و آزاد- آزاد در نظر گرفته شده است. تاثیر فشارهای خارجی، موقعیت رینگ‌های تقویتی و شرایط مرزی مختلف روی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. نتایج نشان داد که رینگ‌های تقویتی و فشار خارجی روی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه اثر می‌گذارند و منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌گردد. نتایج ارائه شده می‌تواند به عنوان یک معیار مهم برای محققان جهت اعتبار سنجی روش‌های تحلیلی استفاده شوند.

**کلمات کلیدی:** فرکانس طبیعی؛ پوسته استوانه‌ای؛ ایزوتروپیک؛ رینگ؛ فشار؛ تئوری مرتبه اول برشی.

## Analysis of Natural Frequency of Reinforced Multi-Layered Isotropic Cylindrical Shell with Three Rings under External Pressures Based on FSDT

M. R. Isvandzibaei\*

Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Andimeshk Branch, Islamic Azad University, Andimeshk, Iran.

### Abstract

This paper presents the study on natural frequency of reinforced multi-layered isotropic cylindrical shells with three rings under external pressures. The multi-layered cylindrical shell is formed by three layers of isotropic where the inner and outer layers are stainless steel and the middle layer is aluminum. The reinforced multi-layered shell equations with three rings and external pressures are established based on first order shear deformation theory (FSDT). The governing equations of motion were employed, using energy functional and by applying the Ritz method. The boundary conditions represented by end conditions of the multi-layered cylindrical shell are simply supported-simply supported (SS-SS), clamped-clamped (C-C) and free-free (F-F). This research was solved with computer programming using MAPLE package. The influence of external pressure, rings position and different boundary conditions on natural frequencies characteristics is studied. The results shows that reinforced rings and external pressures have effect on the natural frequency of multi-layered isotropic cylindrical shell and cause the natural frequency to increase. The results presented can be used as an important benchmark for researchers to validate their analytical methods.

**Keywords:** Natural Frequency; Cylindrical Shell; Isotropic; Ring; Pressure; First Order Theory.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۶۱-۴۲۶۴۰۸۲۱؛ فکس: ۰۶۱-۴۲۶۴۰۷۹۲

آدرس پست الکترونیک: [isvandzibaei@iauanimeshk.ac.ir](mailto:isvandzibaei@iauanimeshk.ac.ir), [esvandzibaei@yahoo.com](mailto:esvandzibaei@yahoo.com)

### ۱- مقدمه و تعریف تحقیق

سازه‌های پوسته استوانه‌ای کاربردهای زیادی در علم مهندسی دارند و به علت دارا بودن ویژگی‌های منحصر به فرد در رفتار مکانیکی، در زمینه‌های مختلف مانند، هوا فضا، عمران، مکانیک، سازه‌های دریایی و غیره کاربرد دارند [۱]. این سازه‌ها به طور گسترده در هواپیماها، کشتی‌ها، شاتل‌های فضایی، موشک‌ها، مخازن تحت فشار، مخازن نفت، زیردریایی‌ها به کار گرفته می‌شوند.

پوسته‌های استوانه‌ای طویل زمانی که در معرض تغییر شکل‌های بزرگ قرار می‌گیرند، به وسیله تقویت کننده‌ها استحکام آنها افزایش می‌یابد. نجفی و واربارتون [۲]، ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای با تقویت کننده‌ها را بررسی کردند. شارما و جونز [۳]، ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای دایره‌ای با تقویت کننده‌ها بر اساس شرایط مرزی گیردار-آزاد را بررسی نمودند. اشناپدیریا و زالتب [۴]، رفتار یک پوسته استوانه‌ای با سخت کننده‌ها تحت بار استاتیکی را مطالعه کردند. یان و همکاران [۵] خصوصیات ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای غوطه ور با تقویت کننده‌ها را بررسی کردند. وانگ و لین [۶] پوسته استوانه‌ای کروی با تقویت کننده‌ها را مورد مطالعه قرار دادند. با توجه به کاربردهای ویژه و مهم این سازه‌ها، مطالعه و بررسی فرکانس‌های طبیعی آنها بسیار حائز اهمیت است.

آرنولد و واربروتون [۷] معادلات حرکت را برای یک پوسته استوانه‌ای نازک ارائه کردند. بلوینس [۸] شکل مدهای فرکانسی یک پوسته استوانه‌ای شکل را مطالعه کرد، سودل [۹] یک فرمول فرکانسی برای پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای ارائه کرد و برای حالت‌های مختلف تغییر شکل‌های پوسته نتایج را استخراج کرد. چانگ [۱۰] تحلیل فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای یک پوسته استوانه‌ای شکل را بررسی کرد. تحقیقات در ارتباط با تغییرات ضخامت پوسته‌های استوانه‌ای را می‌توان به ردی [۱۱] و سودل [۱۲] نسبت داد. آنها فرکانس‌های طبیعی مختلف را با تغییر دادن نسبت ضخامت پوسته استخراج کردند و معادلات حاکم را بر اساس تئوری کلاسیک به دست آوردند.

لیو و همکاران [۱۳] تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه ای چرخشی با تقویت کننده‌ها تحت شرایط مرزی

دلخواه را مورد مطالعه قرار دادند. پوسته دارای یک لایه و شرایط تکیه گاهی دلخواه در طول پوسته در نظر گرفته شده بود. آنها اثرات سرعت چرخشی روی یک پوسته استوانه‌ای با تقویت کننده‌ها را تحت ارتعاشات آزاد، مورد بررسی قرار دادند.

رامامورتی و پاتابیرامان [۱۴] و شن و همکاران [۱۵]، ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک تحت بارهای دینامیکی را بررسی نمودند. ساراوانان و همکاران [۱۶]، یک تحلیل اجزای محدود برای پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. آنها از یک پوسته چند لایه پر شده از سیال استفاده کردند. استفاده از روش گالرکین برای بدست آوردن معادلات حرکت برای یک پوسته استوانه‌ای چند لایه چرخشی توسط هوآ [۱۷] مطالعه شد. ملک زاده و همکاران [۱۸] شبیه‌سازی روی پاسخ دینامیکی یک پوسته استوانه‌ای چند لایه را مورد مطالعه قرار دادند. شرایط مرزی انتخاب شده از نوع گیردار-آزاد و تئوری استفاده شده در تحقیق از نوع مرتبه سوم تغییر شکل برشی بود.

کیو و همکاران [۱۹] ارتعاشات یک پوسته استوانه‌ای و مخروطی همراه با تقویت کننده‌ها را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق دو نوع ارتعاشات آزاد و اجباری، مورد مطالعه قرار گرفت. بررسی پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم تقویت شده از جنس مواد مدرج تابعی توسط عیسوند زیبایی و همکاران، مورد مطالعه قرار گرفت [۲۰]. هول [۲۱] پاسخ پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت کننده‌ها رینگی را بررسی نمود. تئوری استفاده شده در این تحقیق، از نوع دائل بود. یوسف زاده و همکاران [۲۲]، کمناش پوسته‌های استوانه‌ای همراه با تقویت کننده‌ها را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق به مطالعه پوسته استوانه‌ای تحت بارهای محوری و جانبی پرداخته شده است.

مطالعه فرکانس‌های طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه با تقویت کننده و فشار، از جنبه‌های مهم کاربرد موفق پوسته‌های استوانه‌ای در صنعت است. آنها به عنوان پوسته‌های استوانه‌ای طویل استفاده می‌شوند مانند هواپیماها، زیردریایی‌ها و غیره. این پوسته‌های استوانه‌ای بدون تقویت کننده‌ها به علت کاهش استحکام دستخوش تغییر شکل و در نهایت منجر به شکست

## ۲- تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

شکل ۱ هندسه طرح کلی مسئله مورد بحث را نشان می‌دهد که در آن یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشارهای خارجی با ضخامت  $h$ ، شعاع  $R$ ، طول  $L$ ، موقعیت رینگ‌های تقویتی  $b$  و فشار خارجی  $P$  قرار دارد. یک سیستم مختصات متعامد در سطح میانی پوسته چند لایه در امتداد  $x, \theta, z$  انتخاب شده است. تغییر مکان‌های پوسته استوانه‌ای چند لایه  $u, v, w$  در سطح میانی پوسته در نظر گرفته می‌شود. ضخامت پوسته استوانه‌ای چند لایه بین سه لایه ایزوتروپیک تقسیم می‌شود که لایه‌های داخلی و خارجی از فولاد زنگ نزن لایه میانی، متشکل از ماده آلومینیوم است.

میدان جابجایی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی برای یک نقطه اختیاری در سیستم مختصات استوانه ای به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, z) &= u_0(x, \theta) + z\psi_x(x, \theta) \\ \vartheta(x, \theta, z) &= \vartheta_0(x, \theta) + z\psi_\theta(x, \theta) \\ \omega(x, \theta, z) &= \omega_0(x, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

در آن  $u(x, \theta, z)$ ،  $\vartheta(x, \theta, z)$  و  $\omega(x, \theta, z)$  اجزای جابه جایی در جهات  $x$ ،  $\theta$  و  $z$ ،  $u_0(x, \theta)$ ،  $\vartheta_0(x, \theta)$  و  $\omega_0(x, \theta)$  اجزای جابجایی در سطح میانی پوسته چند لایه و  $\psi_x(x, \theta)$ ،  $\psi_\theta(x, \theta)$  نرمال‌های چرخشی سطح میانی پوسته چند لایه می‌باشند.

## ۲-۱- روابط کرنش-جابجایی

روابط کرنش-جابجایی برای یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشارهای خارجی با روابط (۲-۷) در نظر گرفته می‌شود:

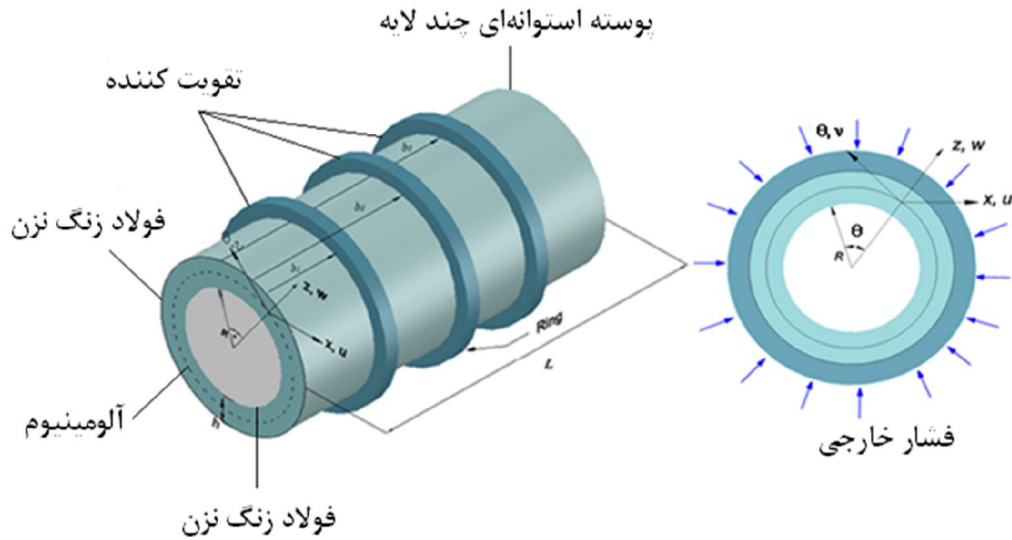
$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u(x, \theta, z)}{\partial x} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \vartheta(x, \theta, z) + \frac{\omega(x, \theta, z)}{R_1} \quad (2)$$

$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \vartheta(x, \theta, z)}{\partial \theta} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} u(x, \theta, z) + \frac{\omega(x, \theta, z)}{R_2} \quad (3)$$

می‌شوند. پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه اغلب موثرتر و مفیدتر از پوسته‌های استوانه‌ای تک لایه می‌باشند. علت این امر، بهبود در خواص مکانیکی لایه‌ها است. سازه‌های چند لایه به علت سختی بالاتر، مقاومت فشاری، حد خستگی، میرایی بهتر و خصوصیات جذب شوک قادر هستند، اثرات انرژی را در میان لایه‌ها توزیع کنند.

تا کنون در هیچکدام از کارهای انجام شده در زمینه ارتعاشات پوسته‌ها، اثر همزمان پارامترهای سه رینگ تقویتی و فشارهای خارجی روی پوسته‌های سه لایه ایزوتروپیک آن هم با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بررسی نشده است. در این تحقیق، محل رینگ‌ها ثابت در نظر گرفته نشده و نتایج ارائه شده، اثر تغییرات این پارامتر روی فرکانس‌های طبیعی نیز با جزئیات تفسیر شده است؛ همچنین اثر شرایط مرزی مختلف روی ارتعاشات، کمتر مورد توجه قرار گرفته است. فرضیات این تحقیق بر اساس تئوری مرتبه اول شامل، پوسته نازک، خیزهای پوسته کوچک، تنش‌های عمودی جانبی قابل صرفه نظر کردن و عمودهای واقع بر صفحه میانی پوسته بعد از تغییر شکل عمود باقی می‌مانند.

هدف از این تحقیق که مراحل آن بسیار دقیق انجام شده است، مطالعه یک روش تحلیلی برای ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی است. معادلات پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه با سه رینگ تقویتی و فشار خارجی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بدست آمده است. سپس، معادلات حاکم حرکت به روش انرژی و بکار بردن تکنیک ریتز استخراج شده‌اند. پیکربندی پوسته استوانه‌ای چند لایه تقویتی تشکیل شده است، از سه لایه ایزوتروپیک که لایه‌های داخلی و خارجی از فولاد زنگ نزن لایه میانی، متشکل از ماده آلومینیوم است. شرایط مرزی مختلف انتخاب شده در لبه‌های دو انتهای پوسته استوانه ای ایزوتروپیک چند لایه به صورت ساده-ساده، گیردار-گیردار و آزاد-آزاد در نظر گرفته شده است. تاثیر فشارهای خارجی، موقعیت رینگ‌های تقویتی و شرایط مرزی مختلف روی خصوصیات فرکانس‌های طبیعی، مورد ارزیابی و بررسی قرار گرفته شده است.



شکل ۱- هندسه یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشارهای خارجی

$$\bar{\epsilon}_{13} = \psi_x(x, \theta) + \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{\partial x} \quad (13)$$

$$\bar{\epsilon}_{23} = \psi_\theta(x, \theta) + \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{R \partial \theta} \quad (14)$$

روابط کرنش-جابجایی به فرم ماتریسی با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی با روابط (۱۵-۱۶) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \epsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} L_{11} \\ L_{22} \\ L_{12} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{13} \\ \bar{\epsilon}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

در این روابط مقادیر کرنش-جابجایی به صورت روابط (۱۷-۱۹) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \epsilon_{12}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{\omega_0(x, \theta)}{R} \\ \frac{\partial v_0(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, \theta)}{R \partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} L_{11} \\ L_{22} \\ L_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R \partial \theta} \\ \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\bar{\epsilon}_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\vartheta(x, \theta, z)}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u(x, \theta, z)}{A_1} \right) \quad (4)$$

$$\bar{\epsilon}_{13} = A_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u(x, \theta, z)}{A_1} \right) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega(x, \theta, z)}{\partial x} \quad (5)$$

$$\bar{\epsilon}_{23} = A_2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\vartheta(x, \theta, z)}{A_2} \right) + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega(x, \theta, z)}{\partial \theta} \quad (6)$$

$$\bar{\epsilon}_{33} = 0 \quad (7)$$

در این روابط  $A_1$  و  $A_2$  پارامترهای لایه می‌باشند و به صورت روابط (۸-۹) بیان می‌شوند [۱۲]:

$$A_1 = \frac{\partial r}{\partial x} \quad (8)$$

$$A_2 = \frac{\partial r}{\partial \theta} \quad (9)$$

جابجایی رابطه (۱) در روابط کرنش-جابجایی (۷-۹) و به کار بردن سیستم مختصات استوانه‌ای روابط (۱۰-۱۴) بدست می‌آیند:

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \quad (10)$$

$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{\partial v_0(x, \theta)}{R \partial \theta} + z \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{\omega_0(x, \theta)}{R} \quad (11)$$

$$\bar{\epsilon}_{12} = \frac{\partial v_0(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, \theta)}{R \partial \theta} z \left( \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{R \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial x} \right) \quad (12)$$

$$\bar{Q}_{66} = \frac{E}{2(1-\vartheta)} \quad (29)$$

$$\bar{Q}_{44} = \frac{E}{2(1-\vartheta)} \quad (30)$$

$$\bar{Q}_{55} = \frac{E}{2(1-\vartheta)} \quad (31)$$

منتجه‌ها به صورت روابط (۳۲-۳۳) تعريف می‌گردند:

$$\{N_x N_\theta N_{x\theta} H_x H_\theta\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{12} \bar{\sigma}_{13} \bar{\sigma}_{23}\} dz \quad (32)$$

$$\{M_x M_\theta M_{x\theta}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{12}\} z dz \quad (33)$$

پس از جایگزینی معادلات (۱۰) تا (۱۴) در معادله (۲۴) و سپس جایگزین کردن در معادلات (۳۲) و (۳۳)، فرم ترکیبی نتیجه‌ها به صورت (۳۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$\{N\} = [I]\{\bar{\varepsilon}\} \quad (34)$$

در این رابطه  $\{N\}$ ،  $[I]$  و  $\{\bar{\varepsilon}\}$  با رابطه (۳۵-۳۷) تعريف می‌شوند:

$$\{N\}^T = \{N_x N_\theta N_{x\theta} M_x M_\theta M_{x\theta} H_x H_\theta\} \quad (35)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} X_{11} X_{12} X_{16} Y_{11} Y_{12} Y_{16} & 0 & 0 \\ X_{12} X_{22} X_{26} Y_{12} Y_{22} Y_{26} & 0 & 0 \\ X_{16} X_{26} X_{66} Y_{16} Y_{26} Y_{66} & 0 & 0 \\ Y_{11} Y_{12} Y_{16} Z_{11} Z_{12} Z_{16} & 0 & 0 \\ Y_{12} Y_{22} Y_{26} Z_{12} Z_{22} Z_{26} & 0 & 0 \\ Y_{16} Y_{26} Y_{66} Z_{16} Z_{26} Z_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{44} & V_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{45} & V_{55} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\{\bar{\varepsilon}\}^T = \{\bar{\varepsilon}_{11} \bar{\varepsilon}_{22} \bar{\varepsilon}_{12} \bar{\varepsilon}_{13} \bar{\varepsilon}_{23}\} \quad (37)$$

در معادله (۳۶)  $X_{ij}$ ،  $Y_{ij}$  و  $Z_{ij}$  با روابط (۳۸-۳۹) تعريف می‌شوند:

$$(X_{ij} \ Y_{ij} \ Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1 \ Z \ Z^2) dz \quad (38)$$

$$V_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \quad (39)$$

برای یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک تقویت شده تشکیل شده از لایه‌های مختلف  $X_{ij}$ ،  $Y_{ij}$  و  $Z_{ij}$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^H Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1}) \quad (40)$$

$$Y_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^H Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1}^2) \quad (41)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_x(x, \theta) + \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{\partial x} \\ \psi_\theta(x, \theta) + \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{R \partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

در این روابط  $\varepsilon_{22}^0$ ،  $\varepsilon_{11}^0$  نرمال‌های کرنش در سطح میانی پوسته چند لایه،  $\varepsilon_{12}^0$ ،  $\gamma_{23}$ ،  $\gamma_{13}$  کرنش‌های برشی در سطح میانی پوسته چند لایه،  $L_{11}$ ،  $L_{22}$  تغییرات سطح میانی در منحنی و  $L_{12}$  پیچش سطح پوسته چند لایه ایزوتروپیک است.

### ۳- روابط تنش-کرنش

روابط تنش-کرنش برای یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشارهای خارجی با شرایط تنش صفحه‌ای با رابطه (۲۰) در نظر گرفته می‌شود:

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{Q}]\{\bar{\varepsilon}\} \quad (20)$$

در این رابطه  $\{\bar{\sigma}\}$  بردار تنش،  $\{\bar{\varepsilon}\}$  بردار کرنش و  $[\bar{Q}]$  ماتریس سختی می‌باشند و با روابط (۲۱-۲۳) در نظر گرفته می‌شوند:

$$\{\bar{\sigma}\}^T = \{\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{12} \bar{\sigma}_{13} \bar{\sigma}_{23}\} \quad (21)$$

$$\{\bar{\varepsilon}\}^T = \{\bar{\varepsilon}_{11} \bar{\varepsilon}_{22} \bar{\varepsilon}_{12} \bar{\varepsilon}_{13} \bar{\varepsilon}_{23}\} \quad (22)$$

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \quad (23)$$

سپس معادله (۲۰) به فرم رابطه (۲۴) تعريف می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \\ \bar{\sigma}_{13} \\ \bar{\sigma}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \\ \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{23} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

برای یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده اجزای ماتریس سختی  $\bar{Q}_{ij}$  با رابطه (۲۵-۳۱) تعريف می‌گردند:

$$\bar{Q}_{11} = \frac{E}{1-\vartheta^2} \quad (25)$$

$$\bar{Q}_{12} = \frac{\vartheta E}{(1-\vartheta^2)} \quad (26)$$

$$\bar{Q}_{21} = \frac{\vartheta E}{(1-\vartheta^2)} \quad (27)$$

$$\bar{Q}_{22} = \frac{E}{A(1-\vartheta^2)} \quad (28)$$

امین لایه می باشد.  $Q_{ij}^k$  سختی  $k$  امین لایه و  $H$  شماره لایه ها در یک پوسته استوانه ای چند لایه ایزوتروپیک می باشد.

با جایگزینی معادلات (۳۵)، (۳۶) و (۳۷) در معادله (۳۴) خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \\ H_x \\ H_{x\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}X_{12}X_{16}Y_{11}Y_{12}Y_{16} & 0 & 0 \\ X_{12}X_{22}X_{26}Y_{12}Y_{22}Y_{26} & 0 & 0 \\ X_{16}X_{26}X_{66}Y_{16}Y_{26}Y_{66} & 0 & 0 \\ Y_{11}Y_{12}Y_{16}Z_{11}Z_{12}Z_{16} & 0 & 0 \\ Y_{12}Y_{22}Y_{26}Z_{12}Z_{22}Z_{26} & 0 & 0 \\ Y_{16}Y_{26}Y_{66}Z_{16}Z_{26}Z_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{44} & V_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{45} & V_{55} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \vartheta_0(x, \theta)}{R\partial\theta} + z \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R\partial\theta} + \frac{w_0(x, \theta)}{R} \\ \frac{\partial \vartheta_0(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, \theta)}{R\partial\theta} + z \left( \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R\partial\theta} + \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \\ \frac{\partial \vartheta_0(x, \theta)}{R\partial\theta} + z \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R\partial\theta} + \frac{w_0(x, \theta)}{R} \\ \frac{\partial \vartheta_0(x, \theta)}{\partial x} + \frac{\partial u_0(x, \theta)}{R\partial\theta} + z \left( \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{R\partial\theta} + \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial x} \right) \\ \psi_x(x, \theta) + \frac{\partial w_0(x, \theta)}{\partial x} \\ \psi_\theta(x, \theta) + \frac{\partial w_0(x, \theta)}{R\partial\theta} \end{pmatrix} \quad (44)$$

#### ۴- معادلات انرژی

حال به بررسی انرژی پوسته استوانه ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده تحت فشار خارجی همانند شکل ۱ پرداخته می شود.

#### ۴-۱- انرژی کرنشی

انرژی کرنشی یک پوسته استوانه ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده تحت فشار خارجی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به شرح رابطه (۴۵) است:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{\bar{\epsilon}\}^T [I] \{\bar{\epsilon}\} R d\theta dx \quad (45)$$

با جایگزینی روابط  $\{N\}$ ،  $\{I\}$  و  $\{\bar{\epsilon}\}^T$  در معادله انرژی کرنشی (۴۵) خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \{ \bar{\epsilon}_{11}^2 X_{11} + \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{22} X_{12} + \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{12} X_{16} + \bar{\epsilon}_{12}^2 Y_{11} + \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{22} Y_{12} + \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{12} Y_{16} \}$$

$$\begin{aligned} & + \bar{\epsilon}_{22} \bar{\epsilon}_{11} X_{12} + \bar{\epsilon}_{22}^2 X_{22} + \bar{\epsilon}_{22} \bar{\epsilon}_{12} X_{26} \\ & + \bar{\epsilon}_{22} \bar{\epsilon}_{11} Y_{12} + \bar{\epsilon}_{22}^2 Y_{22} + \bar{\epsilon}_{22} \bar{\epsilon}_{12} Y_{26} \\ & + \bar{\epsilon}_{12} \bar{\epsilon}_{11} X_{16} + \bar{\epsilon}_{12} \bar{\epsilon}_{22} X_{26} + \bar{\epsilon}_{12}^2 X_{66} \\ & + \bar{\epsilon}_{12} \bar{\epsilon}_{11} Y_{16} + \bar{\epsilon}_{12} \bar{\epsilon}_{22} Y_{26} + \bar{\epsilon}_{12}^2 Y_{66} \\ & + \bar{\epsilon}_{11}^2 Y_{11} + \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{22} Y_{12} + \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{12} Y_{16} \\ & + \bar{\epsilon}_{11}^2 Z_{11} + \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{22} Z_{12} + \bar{\epsilon}_{11} \bar{\epsilon}_{12} Z_{16} \\ & + \bar{\epsilon}_{22} \bar{\epsilon}_{11} Y_{12} + \bar{\epsilon}_{22}^2 Y_{22} + \bar{\epsilon}_{22} \bar{\epsilon}_{12} Y_{26} \\ & + \bar{\epsilon}_{22} \bar{\epsilon}_{11} Z_{12} + \bar{\epsilon}_{22}^2 Z_{22} + \bar{\epsilon}_{22} \bar{\epsilon}_{12} Z_{26} \\ & + \bar{\epsilon}_{12} \bar{\epsilon}_{11} Y_{16} + \bar{\epsilon}_{12} \bar{\epsilon}_{22} Y_{26} + \bar{\epsilon}_{12}^2 Y_{66} \\ & + \bar{\epsilon}_{12} \bar{\epsilon}_{11} Z_{16} + \bar{\epsilon}_{12} \bar{\epsilon}_{22} Z_{26} + \bar{\epsilon}_{12}^2 Z_{66} \\ & + \bar{\epsilon}_{13}^2 V_{44} + \bar{\epsilon}_{13} \bar{\epsilon}_{23} V_{45} + \bar{\epsilon}_{23} \bar{\epsilon}_{13} V_{45} \\ & + \bar{\epsilon}_{23}^2 V_{55} \} R d\theta dx \quad (46) \end{aligned}$$

۲-۴- انرژی جنبشی

انرژی جنبشی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده تحت فشار خارجی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به فرم رابطه (۴۷) تعریف می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho_T \left\{ \left( \frac{\partial u_0(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_x(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_\theta(x, \theta)}{\partial t} \right)^2 \right\} R d\theta dx \quad (47)$$

در معادله (۴۷) چگالی  $\rho_T$  با رابطه (۴۸) تعریف می‌شود:

$$\rho_T = \sum_{k=1}^H \rho_k (h_k - h_{k-1}) \quad (48)$$

۳-۴- انرژی پتانسیل فشار خارجی

انرژی پتانسیل فشار خارجی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت رابطه (۴۹) بدست می‌آید:

$$E_{External} = \frac{P_{External}}{4} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \omega_0(x, \theta)}{\partial x} \right)^2 R^2 d\theta dx \quad (49)$$

در نهایت تابع انرژی برای پاسخ فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت رابطه (۵۰) است:

$$F = U - T + E_{External} \quad (50)$$

۵- میدان جابجایی

میدان جابجایی برای فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ و فشار بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به صورت رابطه (۵۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u_0(x, \theta) &= \bar{E}_1 \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x} \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ v_0(x, \theta) &= \bar{E}_2 \Omega(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \\ \omega_0(x, \theta) &= \bar{E}_3 \Omega(x) \prod_{i=1}^H (x - b_i)^{\mu_i} \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \psi_x(x, \theta) &= \bar{E}_4 \frac{\partial \Omega(x)}{\partial x} \cos(n\theta) \cos(\omega t) \\ \psi_\theta(x, \theta) &= \bar{E}_5 \Omega(x) \sin(n\theta) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (51)$$

در آن  $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{E}_4, \bar{E}_5$  و ثابت‌های دامنه ارتعاشی می‌باشند.  $\Omega(x)$  تابع محوری است که شرایط مرزی را ارضا می‌کند.  $b_i$  موقعیت تقویت کننده،  $H$  تعداد رینگ،  $\mu_i$  پارامتری است که با توجه به وجود سه رینگ مقدارش سه است.

تابع محوری  $\Omega(x)$  به عنوان یک تابع تیر و به صورت رابطه (۵۲) انتخاب می‌شود [۲۳]:

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= \Psi_1 \cosh\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) + \Psi_2 \cos\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) \\ &\quad - \mu_m \left( \Psi_3 \sinh\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) + \Psi_4 \sin\left(\frac{\Phi_m x}{L}\right) \right) \end{aligned} \quad (52)$$

جدول ۱- مقادیر  $\Phi_m$  و  $\mu_m$  برای شرایط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و آزاد-آزاد

$\mu_m$	$\Psi_i (i = 1, 2, 3, 4)$	$\Phi_m$	شرایط مرزی
۱	$\Psi_1 = 0, \Psi_2 = 0$ $\Psi_3 = 0, \Psi_4 = -1$	$m\pi$	ساده
$\frac{\cosh \Phi_m - \cos \Phi_m}{\sinh \Phi_m - \sin \Phi_m}$	$\Psi_1 = 1, \Psi_2 = -1$ $\Psi_3 = 1, \Psi_4 = -1$	$\frac{(2m+1)\pi}{2}$	گیردار
$\frac{\cosh \Phi_m - \cos \Phi_m}{\sinh \Phi_m - \sin \Phi_m}$	$\Psi_1 = 1, \Psi_2 = 1$ $\Psi_3 = 1, \Psi_4 = 1$	$\frac{(2m+1)\pi}{2}$	آزاد

طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی هستند که کوچکترین آنها جواب مورد قبول این تحقیق است. علت انتخاب کوچکترین فرکانس، برجسته بودن اثر فرکانس‌های طبیعی روی اعداد موج محیطی پایین است. خواص مواد سه لایه استفاده شده در پوسته استوانه‌ای در جدول ۲ نشان داده شده است [۲۴].

جدول ۲- خواص مواد سه لایه

موقعیت	نوع مواد	$E (N/m^2)$	$\theta$	$\rho (\frac{kg}{m^3})$
لایه خارجی	فولاد زنگ نزن	$2.1 \times 10^{11}$	0.28	$7.8 \times 10^3$
لایه میانی	آلومینیوم	$7.0 \times 10^{10}$	0.35	$2.7 \times 10^3$
لایه داخلی	فولاد زنگ نزن	$2.1 \times 10^{11}$	0.28	$7.8 \times 10^3$

#### ۷- همگرایی و مقایسه پژوهش

به منظور درک بهتر فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و بررسی صحت روابط تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل با نتایج منتشر شده در مقدمه مقایسه شده است. در جدول ۳ مقایسه فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای بدون تقویت کننده و فشار خارجی در نظر گرفته و نتایج پارامتر فرکانسی  $\Gamma = \omega R \sqrt{(1-\theta^2)\rho/E}$  با نتایج بدست آمده از تئوری کلاسیک مرجع [۱۰] مقایسه گردیده است.

در دومین مقایسه، فرکانس طبیعی (Hz) برای پوسته استوانه‌ای بدون تقویت کننده و فشار خارجی با استفاده از تئوری کلاسیک تحت شرایط تکیه گاهی ساده حاصل شده از تحقیق حاضر و مرجع [۲۵]، در جدول ۴ نشان داده شده است.

تطابق بین نتایج ارائه شده در جداول ۳ و ۴ در تمامی مقایسه‌های صورت گرفته شده نشان از دقت و صحت روش ارائه شده دارد. با این حال تفاوت بسیار جزئی نتایج به علت استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی در تحقیق حاضر در مقایسه با تئوری کلاسیک استفاده شده در مراجع است.

در معادله (۵۲) مقادیر  $\mu_m$  و  $\Phi_m$ ،  $\Psi_i (i = 1, 2, 3, 4)$  برای شرایط مرزی ساده-ساده، گیردار-گیردار و آزاد-آزاد مطابق جدول شماره ۱ داده شده است.

#### ۶- روش ریتز

در این تحقیق، از روش تحلیلی ریتز برای پاسخ فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی استفاده شده است و تابع انرژی به صورت رابطه (۵۳) تعریف می‌شود:

$$F = U_{max} - T_{max} + E_{External} \quad (53)$$

با جایگزینی معادله (۵۱) در معادلات (۴۶)، (۴۷) و (۴۹) و به کار بردن روش ریتز با به حداقل رساندن تابع انرژی  $F$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_1} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_2} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_3} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_4} &= 0 \\ \frac{\partial(U_{max} - T_{max} + E_{External})}{\partial \bar{E}_5} &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

در رابطه (۵۴) پنج معادله حرکت وجود دارد، بنابراین معادله مقدار مشخصه  $C$  به شکل ماتریسی به صورت رابطه (۵۵) بدست می‌آید:

$$[C_{ij}] \begin{Bmatrix} \bar{E}_1 \\ \bar{E}_2 \\ \bar{E}_3 \\ \bar{E}_4 \\ \bar{E}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

برای داشتن جواب غیر صفر باید درمیان ضرایب به صورت رابطه (۵۶) صفر شود:

$$|C_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (56)$$

در نهایت با حل معادله معادله (۵۶) خواهیم داشت:

$$\delta_0 \omega^{10} + \delta_1 \omega^8 + \delta_2 \omega^6 + \delta_3 \omega^4 + \delta_4 \omega^2 + \delta_5 = 0 \quad (57)$$

معادله مشخصه درجه ۱۰ بالا دارای پنج جواب مثبت و پنج جواب منفی است. جواب‌های مثبت فرکانس‌های



جدول ۳- مقایسه پارامتر فرکانسی  $\Gamma = \omega R \sqrt{(1-\theta^2)\rho}/E$  برای یک پوسته استوانه ای بدون رینگ و فشار خارجی

شرایط مرزی	$n$	$m$	$L/R$	$h/R$	چانگ [۱۰]	تحقیق حاضر
ساده-ساده	4	1	10	0.002	0.0150	0.0234
گیردار-گیردار	3	1	2	0.05	0.3118	0.3889
آزاد-آزاد	2	5	8.6	0.002	0.4472	0.4036

جدول ۴- مقایسه فرکانس طبیعی (Hz) برای یک پوسته استوانه ای بدون تقویت کننده و فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی ساده ( $L/R = 20, h/R = 0.002$ )

$n$	$m$	ارشد و همکاران [۲۵]	تحقیق حاضر
1	1	13.645	13.497
2	1	4.625	4.367
3	1	4.331	4.277
4	1	7.366	7.598
5	1	11.775	11.821

جدول ۵- مقایسه فرکانس طبیعی برای یک پوسته استوانه ای تقویتی با نرم افزار ABAQUS ( $L/R = 20, h/R = 0.002, m=1$ )

$n$	پاسخ های حاصل از تحلیل	پاسخ های حاصل از نرم افزار
1	13.49	13.11
2	4.36	4.25
3	4.27	4.32
4	7.59	7.40
5	11.82	11.69

#### ۷-۱- مقایسه نتایج با نرم افزار ABAQUS

در این قسمت به بررسی نتایج بدست آمده از روابط تحلیلی و فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشار خارجی با استفاده از نرم افزار ABAQUS پرداخته می شود. مدل کردن این پوسته تابعی در نرم افزار به صورت سه لایه در نظر گرفته می شود و خواص برای هر لایه در نظر گرفته می شود. المان استفاده شده از نوع پوسته ای مربعی می باشد. در جدول ۵ مقایسه نتایج نرم افزار و نتایج بدست آمده از روابط تحلیلی مقایسه گردیده است. همانگونه که مشاهده می شود، تطابق خوبی در تمامی مقایسه های صورت گرفته شده وجود دارد.

#### ۸- بحث بر روی نتایج

##### ۸-۱- پوسته استوانه ای چند لایه بدون تقویت کننده و فشار

در این بخش، پاسخ فرکانسی یک پوسته استوانه ای ایزوتروپیک چند لایه بدون تقویت کننده و فشار خارجی برای اعداد موج محیطی مختلف و شرایط مرزی مختلف،

مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد. شکل ۲ تاثیر فرکانس های طبیعی روی یک پوسته استوانه ای ایزوتروپیک چند لایه را بدون تقویت کننده و فشار خارجی نشان می دهد. با توجه به شکل مشخص می شود که برای هر سه شرایط مرزی مختلف فرکانس های طبیعی در ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابند؛ همچنین، نتایج نشان می دهد که فرکانس های طبیعی با شرایط مرزی آزاد-آزاد، بالاتر از دو نوع دیگر است و به همین ترتیب شرایط مرزی ساده - ساده، از دو نوع دیگر پایین تر است. در حالت پوسته استوانه ای ایزوتروپیک چند لایه بدون تقویت کننده و فشار خارجی، کمترین فرکانس های طبیعی در اعداد موج محیطی ۲ و ۳ اتفاق می افتد.

##### ۸-۲- پوسته استوانه ای چند لایه بدون تقویت کننده با فشار

در این قسمت، پاسخ فرکانسی یک پوسته استوانه ای ایزوتروپیک چند لایه بدون تقویت کننده با فشار خارجی برای اعداد موج محیطی مختلف و شرایط مرزی مختلف، مورد تجزیه و تحلیل قرار می گیرد. جداول ۶ تا ۸ پاسخ

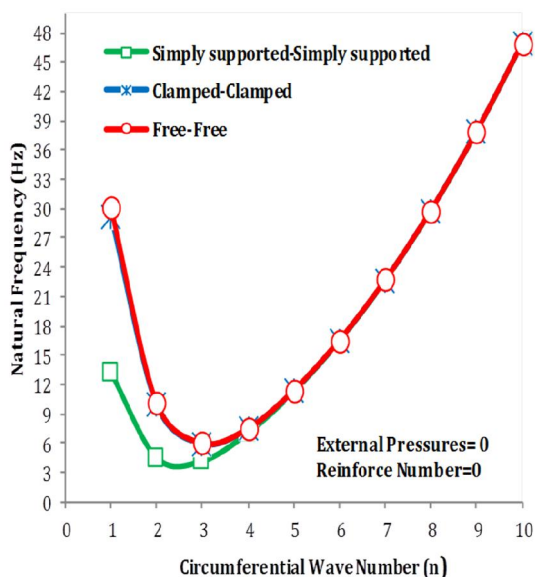
### ۸-۳- پوسته استوانه‌ای چند لایه با فشار و یک تقویت کننده

شکل ۳ تغییرات فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه با یک تقویت کننده و فشار خارجی را نشان می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که روند مشابهی برای همه موقعیت‌های تقویت کننده در طول پوسته وجود دارد. برای شکل ۳ موقعیت رینگ در حالت  $b=0.3L$  ارائه گردید. در این حالت تاثیر وجود تقویت کننده را می‌توان در شکل مشاهده کرد. وجود همزمان تقویت کننده و فشار، سبب افزایش فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که افزایش در فرکانس‌های طبیعی مهم است، وقتی که عدد موج محیطی از ۱ به ۲ افزایش می‌یابد. برای عدد موج محیطی بزرگتر از ۲ فرکانس‌های طبیعی به تدریج افزایش می‌یابند؛ همچنین، نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که پاسخ فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه با یک تقویت کننده و فشار خارجی برای شرایط مرزی مختلف متفاوت است.

### جدول ۶- پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه-ای چند لایه بدون تقویت کننده با و بدون فشار خارجی

تحت شرایط تکیه گاهی ساده-ساده  
( $m=1, h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1$ )

$n$	بدون فشار $P=0$	با فشار $P=400 \text{ kPa}$	با فشار $P=600 \text{ kPa}$
1	13.209	21.075	21.075
2	4.476	38.311	46.658
3	4.156	65.528	80.179
4	7.044	91.816	112.335
5	11.254	117.583	143.786
6	16.475	143.135	174.914
7	22.664	168.641	205.917
8	29.811	194.203	236.911
9	37.912	219.892	267.972
10	46.967	245.761	299.155



شکل ۲- تغییرات پاسخ فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه بدون فشار خارجی و تقویت کننده با سه شرط مرزی مختلف ( $h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1$ )

فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه بدون تقویت کننده با فشار خارجی را نشان می‌دهند. تحلیل با فرض فشارهای خارجی برابر با ۴۰۰ و ۶۰۰ کیلو پاسکال انجام شده است. برای تمام سه شرایط مرزی زمانی که فشار خارجی صفر است، فرکانس طبیعی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابند. وقتی که پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه بدون تقویت کننده در معرض فشار خارجی قرار می‌گیرد، برای همه سه شرایط مرزی پاسخ فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهد که فشارهای خارجی روی فرکانس طبیعی پوسته استوانه ایزوتروپیک چند لایه تاثیر می‌گذارد و موجب افزایش فرکانس طبیعی سازه می‌شود. وقتی مقدار فشارهای خارجی بزرگتر است، فرکانس‌های طبیعی نیز بالاتر است؛ همچنین، نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که پاسخ فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه بدون تقویت کننده با فشار خارجی برای شرایط مرزی مختلف متفاوت است.

جدول ۷- پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه-

ای چند لایه بدون تقویت کننده با و بدون فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی گیردار-گیردار

$$(m=1, h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$$

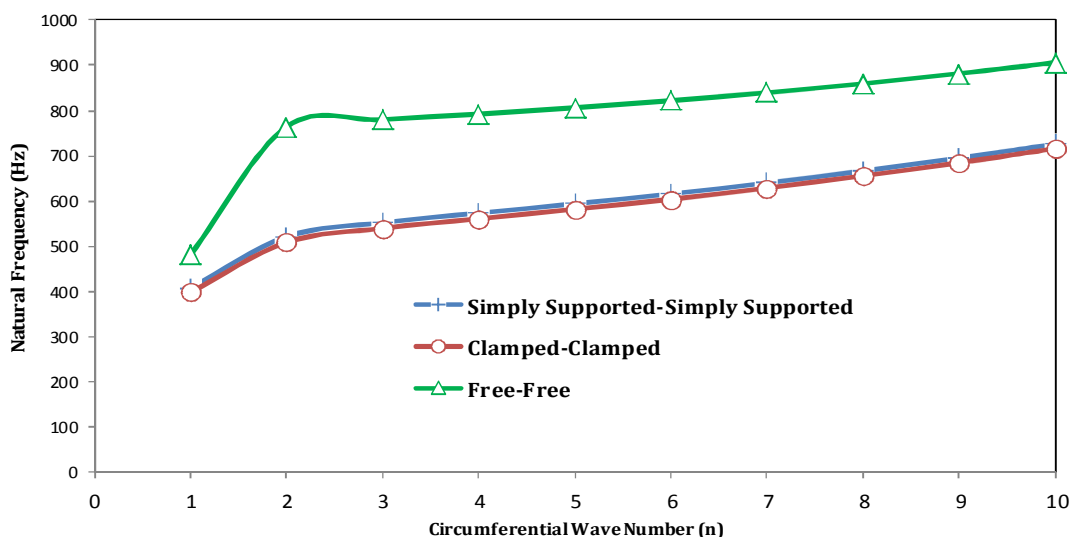
بدون فشار P=0	با فشار P=400 kPa	با فشار P= 600 kPa	n
29.22	29.22	29.22	1
9.88	38.94	47.185	2
5.91	65.61	80.25	3
7.46	91.83	112.35	4
11.37	117.587	143.79	5
16.52	143.137	174.915	6
22.69	168.642	205.918	7
29.846	194.205	236.912	8
37.945	219.894	267.974	9
46.999	245.764	299.157	10

جدول ۸- پاسخ فرکانس های طبیعی یک پوسته استوانه-

ای چند لایه بدون تقویت کننده با و بدون فشار خارجی تحت شرایط تکیه گاهی آزاد-آزاد

$$(m=1, h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$$

بدون فشار P=0	با فشار P=400 kPa	با فشار P= 600kPa	n
30.09	30.09	30.09	1
10.045	38.939	47.157	2
5.97	65.6	80.231	3
7.485	91.83	112.343	4
11.393	117.587	143.788	5
16.541	143.137	174.915	6
22.708	168.642	205.918	7
29.846	194.205	236.912	8
37.945	219.894	267.974	9
46.999	245.764	299.157	10



شکل ۳- تغییرات پاسخ فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با یک رینگ تحت فشار خارجی با سه شرایط مرزی مختلف ( $P = 1400 \text{ KPa}, h/R = 0.002, L/R = 20, b = 0.3L, R = 1$ )

۴-۸- پوسته استوانه‌ای چند لایه با فشار و سه تقویت کننده

در این بخش، تاثیر تعداد تقویت کننده روی فرکانس طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه با فشار

خارجی برای سه شرایط مرزی مختلف، مورد بررسی قرار گرفت. جداول ۹ تا ۱۱ پاسخ فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه با سه تقویت کننده و فشار خارجی تحت سه شرایط مرزی مختلف را نشان می‌دهند. تقویت کننده‌ها با فواصل مساوی در طول پوسته

استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه قرار می‌گیرند. تحلیل با فرض فشار خارجی ۶۰۰ کیلو پاسکال انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که تعداد تقویت کننده روی فرکانس‌های طبیعی تاثیر می‌گذارد و سبب افزایش فرکانس‌های طبیعی سازه می‌شود؛ همچنین، نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که پاسخ فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه با سه تقویت کننده و فشار خارجی برای شرایط مرزی مختلف متفاوت است.

### ۹- نتیجه گیری

در این مطالعه، تحلیل فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه تقویت شده با سه رینگ تحت فشارهای خارجی، مورد بررسی قرار گرفت. پیکربندی پوسته استوانه‌ای تقویتی تشکیل شده است، از سه لایه ایزوتروپیک که لایه‌های داخلی و خارجی از فولاد زنگ نزن و لایه میانی، متشکل از ماده آلومینیوم است. معادلات پوسته استوانه‌ای بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بدست آمده است. سپس، معادلات حاکم حرکت به روش انرژی و بکار بردن تکنیک ریتز استخراج شده‌اند. شرایط مرزی در لبه‌های دو انتهای پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه به صورت ساده- ساده، گیردار- گیردار و آزاد- آزاد در نظر گرفته شده است. تاثیر فشارهای خارجی، موقعیت و تعداد رینگ‌های تقویتی و شرایط مرزی مختلف روی خصوصیات فرکانس‌های طبیعی، مورد بحث قرار گرفت. همانطور که ملاحظه می‌شود، در حالت پوسته استوانه‌ای چند لایه بدون تقویت کننده و فشار برای هر سه شرایط مرزی مختلف فرکانس‌های طبیعی در ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابند. لازم به ذکر است که در حالت پوسته استوانه‌ای چند لایه بدون تقویت کننده که در معرض فشار خارجی قرار می‌گیرد، برای همه سه شرایط مرزی مختلف پاسخ فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد.

نتایج نشان داد که رینگ‌های تقویتی و فشارهای خارجی روی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه اثر می‌گذارند و منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود و وجود همزمان تقویت کننده و فشار، سبب افزایش

جدول ۹- پاسخ فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه‌ای چند لایه با سه تقویت کننده و فشار خارجی تحت شرایط

تکیه گاهی ساده- ساده

$$(h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$$

سه رینگ تقویت کننده

$b_1/L=1/4, b_2/L=2/4, b_3/L=3/4, P=600\text{kPa}$	$m$	$n$
	1	1
	1	2
	1	3
	1	4
	1	5

جدول ۱۰- پاسخ فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه- ای چند لایه با سه تقویت کننده و فشار خارجی تحت

شرایط تکیه گاهی گیردار- گیردار

$$(h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$$

سه رینگ تقویت کننده

$b_1/L=1/4, b_2/L=2/4, b_3/L=3/4, P=600\text{kPa}$	$m$	$n$
	1	1
	1	2
	1	3
	1	4
	1	5

جدول ۱۱- پاسخ فرکانس‌های طبیعی یک پوسته استوانه- ای چند لایه با سه تقویت کننده و فشار خارجی تحت

شرایط تکیه گاهی آزاد- آزاد

$$(h/R = 0.002, L/R = 20, R = 1)$$

سه رینگ تقویت کننده

$b_1/L=1/4, b_2/L=2/4, b_3/L=3/4, P=600\text{kPa}$	$m$	$n$
	1	1
	1	2
	1	3
	1	4
	1	5

- [10] Chung H (1981) Free vibration analysis of circular cylindrical shells. *J Sound Vib* 74(3): 331-350.
- [11] Reddy JN (2004) *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*. 2nd edn. CRC Press, New York.
- [12] Soedel W (2004) *Vibration of Shells and Plates*. 3rd edn, Marcel Dekker Inc, New York.
- [13] Liu L, Cao D, Sun S (2013) Vibration analysis for rotating ring-stiffened cylindrical shells with arbitrary boundary conditions. *J Vib Acoust* 135 (6): 1-12.
- [14] Ramamurti V, Pattabiraman J (1977) Dynamic behaviour of a cylindrical shell with a cutout. *J Sound Vib* 52(2): 193-200.
- [15] Shen S, Xing J, Fan F (2003) Dynamic behavior of single-layer latticed cylindrical shells subjected to seismic loading. *Earthq Eng Eng Vib* 2(2): 2693-279.
- [16] Saravanan C, Ganesan N, Ramamurti V (2000) Vibration and damping analysis of multilayered fluid filled cylindrical shells with constrained viscoelastic damping using modal strain energy method. *Comput Struct* 75(4): 395-417.
- [17] Hua L (2000) Influence of boundary conditions on the free Vibrations of rotating truncated circular multi-layered conical shells. *Compos Part B Eng* 31(4): 265-275.
- [18] Malekzadeh K, Khalili MR, Davar A, Mahajan P (2010) Transient dynamic response of clamped-free hybrid composite circular cylindrical shells. *App Compos Mater* 17(2): 243-257.
- [19] Qu Y, Chen Y, Long X, Hua H, Meng G (2013) A modified variational approach for vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical shell combinations. *Eur J Mech A* 37(1): 200-215.
- [20] Isvandzibaei MR, Jamaluddin H, Raja Hamzah RI (2016) Vibration analysis of supported thick-walled cylindrical shell made of functionally graded material under pressure loading. *J Vib Control* 22(4): 1023-1036.
- [21] Hull AJ (2014) Response of a cylindrical shell with finite length ring stiffeners. *J Acoust Soc Am* 135(4): 2350-2361.
- [۲۲] يوسف زاده ش ، عيسوند زيبائی م ر، قيصري م (۱۳۹۶) کماتش پوسته استوانه ای تقویتی جدار ضخيم تابعی با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی تحت بارهای محوری و جانبی یکنواخت. *مجله مهندسی مکانیک مدرس* ۱۷(۷): ۳۷۳-۳۸۵.
- [23] Moon FC, Shaw SW (1983) Chaotic vibrations of a beam with non-linear boundary conditions. *Int J Nonlin Mech* 18(6): 465-477.

فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه می‌شود. این افزایش در فرکانس‌های طبیعی مهم است؛ همچنین، نتایج نشان داد که وقتی فشارهای خارجی افزایش می‌یابد، فرکانس‌های طبیعی نیز بالاتر می‌روند. نتایج بدست آمده نشان داد که تعداد تقویت کننده‌ها تاثیر مستقیم بر فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک چند لایه می‌گذارد و سبب افزایش فرکانس‌های طبیعی سازه می‌گردد و هر چه تعداد تقویت کننده در طول پوسته بیشتر شود فرکانس‌های طبیعی نیز افزایش می‌یابند. در پایان، نویسنده بر این باور است که نتایج این تحقیق می‌تواند در کاربردهای مهندسی مفید باشد.

#### ۱۰- مراجع

- [1] Qatu MS (2002) Recent research advances in the dynamic behavior of shells. *Appl Mech Rev* 55(5): 415-434.
- [2] Al-Najafi AMJ, Warburton GB (1970) Free vibration of ring-stiffened cylindrical shells. *J Sound Vib* 13(1): 9-25.
- [3] Sharma CB, Johns DJ (1971) Vibration characteristics of a clamped-free and clamped-ring-stiffened circular cylindrical shell. *J Sound Vib* 14(4): 459-474.
- [4] Schneidera W, Zahltenb W (2004) Load-bearing behaviour and structural analysis of slender ring-stiffened cylindrical shells under quasi-static wind load. *J Constr Steel Res* 60 (1): 125-146.
- [5] Yan J, Li TY, Liu TG, Liu JX (2006) Characteristics of the vibrational power flow propagation in a submerged periodic ring-stiffened cylindrical shell. *Appl Acoust* 67(6): 550-569.
- [6] Wang RT, Lin ZX (2006) Vibration analysis of ring-stiffened cross-ply laminated cylindrical shells. *J Sound Vib* 295 (4): 964-987.
- [7] Arnold RN, Warburton GB (1953) The rexural vibrations of thin cylinders. Pt. C *J Mechan* 167(1): 62-80.
- [8] Blevins RD (1979) *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- [9] Soedel W (1980) A new frequency formula for closed circular cylindrical shells for a large variety of boundary conditions. *J Sound Vib* 70(3): 309-317.

[25] Arshad SH, Naeem MN, Sultana N, Shah A, Iqbal Z (2011) Vibration analysis of bi-layered FGM cylindrical shells. Arch Appl Mech 81(3): 319-343.

[24] Loy CT, Lam KY, Reddy JN (1999) Vibration of functionally graded cylindrical shells. Int J Mech Sci 41(3): 309-324.