



## طراحی کنترل کننده مُد لغزشی فازی تطبیقی برای کنترل موقعیت و زوایای یک بالگرد چهارملخه

سیما افشین‌فر<sup>۱</sup>، محمدرضا سلطانیپور<sup>۲\*</sup> و هادی رزمی<sup>۳</sup><sup>۱</sup> کارشناسی ارشد، گروه مهندسی برق، واحد گرمسار، دانشگاه آزاد اسلامی، گرمسار، ایران<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران<sup>۳</sup> استادیار، گروه مهندسی برق، واحد تهران شرق، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۲/۱۶، تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۵/۱۶، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۴

## چکیده

در این مقاله، یک کنترل کننده مُد لغزشی فازی تطبیقی برای کنترل موقعیت و زوایای یک بالگرد چهارملخه پیشنهاد شده است. ابتدا، مدل دینامیکی بالگرد چهارملخه به دو زیرسیستم تحریک کامل و فروتحریک تقسیم شده است. در زیرسیستم تحریک کامل از ترکیب خطای ردیابی موقعیت و سرعت یکی از متغیرهای حالت در تعریف سطح لغزش استفاده شده است و در نتیجه سطح لغزش زیرسیستم تحریک کامل دارای دو ضریب مجهول می‌باشد. در صورتی که سطح لغزش در زیرسیستم فروتحریک از ترکیب خطای خطای ردیابی موقعیت و سرعت دو متغیر حالت تشکیل شده و در نتیجه، دارای چهار ضریب مجهول می‌باشد. در این مقاله، به منظور به دست آوردن ضرایب غیرخطی سطح سوئیچینگ از روش پایداری هارویتز استفاده شده است. اثبات ریاضی نشان می‌دهد که سیستم حلقه بسته در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری، دارای پایداری مجانبی سراسری است. در ادامه، برای عدم ایجاد پدیده نامطلوب زیگزاگ در ورودی‌های کنترلی، از یک تقریب گر فازی تطبیقی استفاده شده است. برای بررسی عملکرد کنترل پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی در دو مرحله بر روی یک بالگرد چهارملخه انجام شده است. نتایج این شبیه‌سازی‌ها، کارایی روش کنترلی پیشنهاد شده را نشان می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** بالگرد چهار ملخه؛ کنترل مُد لغزشی فازی تطبیقی؛ عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری؛ پدیده زیگزاگ.

## Adaptive Fuzzy Sliding Mode Position and Attitude Control for a Quadrotor UAV

S. Afshinfar<sup>1</sup>, MR. Soltanpour<sup>2,\*</sup>, H. Razmi<sup>3</sup><sup>1</sup> Ph.D. Student, Department of Electrical Engineering, Garmsar Branch, Islamic Azad University, Garmsar, Iran.<sup>2</sup> Associate Professor, Department of Electrical Engineering, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology, Tehran, Iran.<sup>3</sup> Assistance Professor, Department of Electrical Engineering, East Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

## Abstract

In this study, a new methodology based on the adaptive fuzzy sliding mode control method is introduced to track the position and attitude of a quadrotor UAV. Firstly, the dynamic model of the quadrotor is divided into an underactuated and a fully actuated subsystems. By combining the position and velocity tracking errors of one state variable, a sliding surface of fully actuated subsystem with two coefficients is defined. However, a sliding surface of underactuated subsystem is constructed via a linear combination of position and velocity tracking errors of two state variables with four coefficients. This methodology considers the Hurwitz stability theorem for obtaining the nonlinear coefficients of the sliding surface of underactuated subsystem. In addition, the flight controllers are derived by using mathematical theories, which guarantees that the closed-loop system is the global asymptotic stable in the presence of structured and un-structured uncertainties. Furthermore, in order to eliminate the control chattering phenomenon, the adaptive fuzzy approximator is used. The effectiveness of the proposed control method in the position and attitude tracking of a quadrotor is demonstrated through two set of simulation results, which shows its superior performance.

**Keywords:** Quadrotor UAV; Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control; Structural and Non-Structural Uncertainties; Chattering Phenomenon.

## ۱- مقدمه

امروزه پرنده‌های بدون سرنشین بخش مهمی از مطالعات علمی در زمینه‌های نظامی و غیر نظامی را تشکیل می‌دهند. این پرنده‌ها در مقایسه با پرنده‌هایی که توسط خلبان هدایت می‌شوند، می‌توانند محافظت بالایی را از جان انسان در محیط‌های خطرناک داشته باشند. بالگرد چهارملخه، یک پرنده بدون سرنشین عمود پرواز با ۶ درجه آزادی و دارای چهار ملخ در ساختار ضربدری است. این پرنده از چهار موتور واقع در جلو، عقب، چپ و راست تشکیل شده است که با تغییر سرعت چرخش هر موتور می‌تواند مانورها و حرکات مختلفی را انجام دهد. نداشتن محدودیت اندازه و هزینه، قدرت مانورپذیری بالا و صدای کم حین حرکت سبب شده است تا این بالگرد در مرکز توجه و فعالیت محققین و پژوهش‌گران بسیاری در سراسر دنیا قرار بگیرد. از کاربردهای این وسیله می‌توان به بازرسی و کنترل مرزها، مأموریت‌های شناسایی، عکس‌برداری و عملیات جستجو در محیط‌های خطرناک و غیرقابل دسترس اشاره نمود.

با توجه به مزایای متعدد کنترل‌کننده مُد لغزشی، تاکنون با روش‌های مختلفی از این کنترل‌کننده، برای کنترل پرنده‌های چهارملخه و سایر سیستم‌های غیرخطی استفاده شده است [۱-۱۲]. در مراجع [۱ و ۷ و ۲۳]، یک کنترل‌کننده مُد لغزشی مرتبه دوم مقاوم برای پایداری موقعت بالگرد چهارملخه پیشنهاد شده است. در مراجع [۲ و ۸ و ۲۴]، نمونه دیگری از کنترل‌کننده مُد لغزشی برای پایداری کلاسی از سیستم‌های فروتحریک پیشنهاد شده است. برای مطالعه کارایی کنترل‌کننده پیشنهادی در این مقالات، از مدل دینامیکی بالگرد چهارملخه به عنوان یک سیستم نمونه فروتحریک، استفاده شده است. جبران‌سازی اغتشاشات خارجی، یکی از مزایای مهم کنترل‌کننده مُد لغزشی است که این مزیت در مقالات بسیاری مورد توجه قرار گرفته است. در مراجع [۳، ۴، ۶ و ۱۳]، از وزش باد، به عنوان یک اغتشاش خارجی، برای نشان دادن مقاومت کنترل‌کننده مُد لغزشی طراحی شده برای کنترل پرواز بالگرد چهارملخه، استفاده شده است. در مراجع [۲۷ و ۲۸]، نیز برای کنترل موقعیت و ارتفاع بالگرد از روش‌های کنترل مُد لغزشی PD-فازی و همچنین تطبیقی استفاده شده است.

در مراجع [۵ و ۱۴ و ۲۶]، یک کنترل‌کننده مُد لغزشی مرتبه دوم برای بهبود عملیات کنترل سیستم‌های مرتبه دوم نامعین ارائه شده است. نتایج شبیه‌سازی‌های ارائه شده در این مقالات، عملکرد مطلوب کنترل‌کننده‌های پیشنهادی را نشان می‌دهد. در تمامی مقالات فوق، اگرچه راهکارهای پیشنهادی دارای مزایای متعددی می‌باشند، اما اشکالاتی هم وجود دارد که به قرار زیر هستند:

- در این مقالات، اگرچه برای کنترل بالگرد چهار ملخه از کنترل مُد لغزشی مرتبه دوم استفاده شده است؛ اما از این کنترل‌کننده، تنها برای کنترل پایداری ارتفاع استفاده شده است و برای کنترل متغیرهای حالت باقیمانده، از روش‌های کنترلی دیگری استفاده شده است. بنابراین، کنترل‌کننده‌های پیشنهادی تنها در کنترل نقطه تنظیم موفق می‌باشند و نمی‌توانند مسیر مطلوب متغیر با زمان را ردگیری نمایند.
- در این راهکارها، برای ردگیری موقعیت بالگرد چهارملخه، وظیفه بعضی از کنترل‌کننده‌ها، محاسبه زوایای مطلوب بوده و کنترل‌کننده‌های دیگر را طوری طراحی می‌نمایند تا زوایای مطلوب بدون هیچ‌گونه خطایی، ردگیری شوند. مشکلی که در این کنترل‌کننده‌ها بروز می‌نماید، بزرگ بودن دامنه‌های ورودی کنترل‌کننده‌ها است. به همین دلیل در پیاده‌سازی عملی این کنترل‌کننده‌ها، باید از محرکه‌های توان بالا استفاده نمود. بنابراین هزینه اقتصادی پیاده‌سازی این کنترل‌کننده‌ها بسیار بالا است.
- در این کنترل‌کننده‌ها، برای غلبه بر پدیده نامطلوب زیگزاگ، در ورودی کنترل به جای تابع علامت، از تابع اشباع استفاده نموده‌اند. در این صورت بروز خطای ردگیری امری اجتناب‌ناپذیر بوده و از طرف دیگر، اثبات پایداری سیستم حلقه بسته با استفاده از این کنترل‌کننده‌ها تضعیف می‌گردد.

با توجه به مشکلات فوق، محققین در مراجع [۶ و ۱۵ و ۲۵]، با ترکیب کنترل مُد لغزشی و کنترل تطبیقی، یک کنترل‌کننده مُد لغزشی مرتبه دوم تطبیقی با سطح لغزش

مشکل است. بنابراین، در این مقالات، به منظور ساده‌سازی طراحی سطح لغزش، ابتدا معادله سطح لغزش غیرخطی در اطراف نقاط تعادل مطلوب سیستم، خطی‌سازی شده و سپس به کمک روش پایداری هارویتز، ضرایب غیرخطی سطح لغزش، به صورت تحلیلی محاسبه شده است. سطح لغزش خطی‌سازی شده معادل یک سیستم خطی تحریک کامل تحت کنترل فیدبک حالت عمل خواهد نمود [۸ و ۱۷]. اما مشکلات این کنترل‌کننده‌ها به قرار زیر است:

- از آنجاکه سطح لغزش غیرخطی، خطی‌سازی می‌گردد. این امر بروز پدیده نامطلوب زیگزاگ در ورودی کنترل را شدیدتر می‌نماید. بنابراین این مسأله ممکن است باعث تحریک شدن دینامیک‌های غیرخطی و سرانجام بروز پدیده تشدید گردد. از طرف دیگر بروز پدیده زیگزاگ در ورودی کنترل، عمر محرک‌های الکتریکی استفاده شده در بالگردهای چهارملخه را کاهش می‌دهد.
- خطی‌سازی سطح لغزش غیرخطی، باعث کاهش مقاوم بودن کنترل‌کننده پیشنهادی در برابر عدم‌قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در معادلات دینامیکی بالگرد چهارملخه می‌شود.
- این روش‌ها را تنها برای کنترل کلاس خاصی از سیستم‌های فرو تحریک که دارای دینامیک کندی هستند، می‌توان استفاده نمود و معلوم نیست که بتوان از این کنترل‌کننده‌ها، برای کنترل بالگرد چهارملخه استفاده کرد.

برای برطرف نمودن مشکلات فوق، در این مقاله، کنترل‌کننده مُد لغزشی فازی تطبیقی همراه با تعریف سطح لغزشی مناسب برای زیرسیستم فروتحریک، برای کنترل هم‌زمان موقعیت و زوایای بالگرد چهارملخه ارائه می‌گردد. در راهکار پیشنهادی برای عدم بروز پدیده زیگزاگ در ورودی کنترل و افزایش مقاومت کنترل‌کننده پیشنهادی در برابر عدم‌قطعیت‌های موجود، از یک تقریب‌گر فازی تطبیقی یک ورودی، یک خروجی استفاده می‌شود که نه تنها از حجم محاسبات بسیار پایینی برخوردار است، بلکه قابلیت تقریب زدن عدم‌قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود در معادلات دینامیکی بالگرد چهارملخه را دارد.

غیرخطی، برای کنترل سیستم‌های مرتبه دوم نامعین پیشنهاد نمودند. اگرچه روش‌های پیشنهادی تا حدودی مشکلات بیان شده را مرتفع نمودند، اما معایب روش‌های پیشنهادی به صورت زیر است:

- در روش‌های پیشنهادی، تعیین ضرایب سطوح لغزش غیرخطی به صورت سعی و خطا انجام می‌پذیرد. بنابراین تعیین این ضرایب، به گونه‌ای که خطاهای ردگیری به سمت صفر همگرا شوند، بسیار مشکل و مسأله‌ای زمانبر است.
- در کنترل‌کننده‌های پیشنهادی، از قوانین تطبیقی متعددی استفاده شده است. این امر باعث می‌شود تا حجم محاسبات ورودی کنترل افزایش یابد. بنابراین در صورت بروز تأخیر در محاسبه ورودی کنترل، تضمین پایداری سیستم حلقه بسته امری امکان‌ناپذیر است.

با توجه به مشکلات فوق، محققین بر اساس ویژگی‌های کنترل‌کننده مُد لغزشی مرتبه دوم، به منظور دستیابی به عملکرد مطلوب کنترل ردیابی مسیر بالگرد چهارملخه، مدل دینامیکی این پرنده را به دو زیرسیستم تحریک کامل و فروتحریک تجزیه نمودند. در زیرسیستم تحریک کامل تعریف سطوح لغزش خطی، همگرایی حالت‌های سیستم به سمت نقطه تعادل را تضمین می‌کند. در صورتی که در سیستم فروتحریک، با توجه به این که تعداد ورودی‌های کنترلی، کم‌تر از تعداد حالاتی است که باید کنترل شود، تعریف سطوح لغزش خطی به تنهایی کارآمد نخواهد بود. در این حالت، یا باید سطوح لغزش غیرخطی تعریف شوند، یا ضروری است، با انتخاب مناسب ضرایب سطوح لغزش خطی، پایداری حالت‌های سیستم را تضمین نمود. در مراجع [۷، ۸ و ۱۶]، از روش کنترل مُد لغزشی همراه با تعریف سطح لغزش غیرخطی برای کنترل یک سیستم نمونه فروتحریک استفاده شده است. سطح لغزش ارائه شده در این مقالات، ترکیبی از خطاهای موقعیت و سرعت دو متغیر حالت زیرسیستم فروتحریک است. بنابراین، این سطح لغزش دارای چهار ضریب ثابت می‌باشد. با استفاده از تئوری لیاپانوف، پایداری این زیرسیستم تضمین شده است. اما با توجه به غیرخطی بودن معادله سطح لغزش، یافتن این چهار ضریب برای داشتن عملکرد مطلوب لغزشی، بسیار

نحوه ارتباط ماتریس  $R$  با زوایای  $\phi$ ،  $\theta$  و  $\psi$ ، در معادلات (۱) تا (۴) بیان شده‌اند. در بیان این معادلات، از نماد  $c$  به جای  $\cos$  و از نماد  $s$  به جای  $\sin$  استفاده شده است. مثلاً،  $c_\psi$  نمایانگر  $\cos(\psi)$  می‌باشد:

$$R = R(z, \psi)R(y, \theta)R(x, \phi) \quad (۱)$$

$$R(z, \psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad (۴)$$

معادلات سینماتیک حرکات انتقالی و دورانی با استفاده از ماتریس‌های دوران به دست می‌آیند. معادله (۵)، معادله سینماتیک حرکت انتقالی بالگرد چهارملخه را بیان می‌کند:

$$\mathbf{v}_e = R\mathbf{v}_B \quad (۵)$$

که در آن،  $\mathbf{v}_e = [u, v, w]^T$  و  $\mathbf{v}_B = [u_b, v_b, w_b]^T$ ، به ترتیب، بردار سرعت‌های خطی در دستگاه‌های مختصات متصل به زمین و متصل به بدنه می‌باشند. ماتریس دوران  $T$  نیز به زوایای  $\phi$ ،  $\theta$  و  $\psi$ ، وابسته بوده و نحوه این ارتباط با معادله (۶) بیان می‌گردد:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi s_\theta & c_\phi s_\theta \\ 0 & c_\theta & c_\phi \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \\ 0 & c_\theta & c_\phi \end{bmatrix} \quad (۶)$$

در ادامه معادله سینماتیک حرکت دورانی بالگرد چهارملخه، با معادله (۷) بیان می‌شود [۶، ۱۰ و ۱۱]:

$$\dot{\Phi} = T\omega_B \quad (۷)$$

که در آن،  $\Phi = [\phi, \theta, \psi]^T$  بوده و  $\omega_B = [p, q, r]^T$  بردار سرعت‌های زاویه‌ای در دستگاه مختصات متصل به بدنه است. معادلات حرکت انتقالی سیستم‌های دینامیکی، از جمله بالگرد چهارملخه، توسط معادله (۸) به دست می‌آیند [۱۱]:

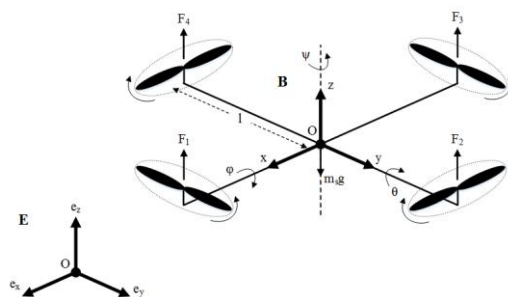
$$m_s \dot{P} + m_s R_{j,3} = f \quad (۸)$$

که در آن،  $P = [x, y, z]^T$  بوده و  $f = R_{j,3} \cdot u_1 + a$  نیروی انتقالی اعمال شده به بالگرد چهارملخه در جهت محور  $z$ ها، توسط ورودی کنترلی اصلی  $u_1$  می‌باشد.  $a = [k_1 \cdot \dot{x}, k_2 \cdot \dot{y}, k_3 \cdot \dot{z}]^T$  بردار مقاومت هوا بوده و عناصر آن، به ترتیب، در راستای محورهای  $e_x$ ،  $e_y$  و  $e_z$  می‌باشند.  $R_{j,3}$  نیز نشان‌دهنده ستون سوم ماتریس دوران  $R$  است. با

سازماندهی این مقاله به گونه‌ای است که در بخش دوم، مدل‌سازی دینامیکی بالگرد چهارملخه ارائه می‌شود. طراحی کنترل کننده مد لغزشی، به تفصیل، در بخش سوم آمده است. بخش چهارم، به طراحی کنترل کننده مد لغزشی فازی تطبیقی اختصاص دارد و در بخش پنجم، مزایای کنترل کننده پیشنهادی بیان می‌شود. نهایتاً، در بخش ششم مقاله، نتایج شبیه‌سازی‌ها و بررسی عملکرد کنترل کننده پیشنهادی بیان می‌شود.

## ۲- مدل‌سازی دینامیکی بالگرد چهارملخه

شکل ۱، جزئیات یک بالگرد چهارملخه را به تصویر کشیده است [۱ و ۹]. به منظور به دست آوردن معادلات حاکم بر بالگرد چهارملخه، دو دستگاه مختصات متصل به زمین  $e(Oxyz)$  و متصل به بدنه  $B(Oxyz)$  نیاز است. دستگاه مختصات متصل به زمین، برای تعریف موقعیت‌های خطی و زاویه‌ای به کار می‌رود و سرعت‌های خطی و زاویه‌ای، نیروها و گشتاورها، در دستگاه مختصات متصل به بدنه تعریف می‌شوند. در شکل ۱،  $m_s$  نشان‌دهنده جرم کل،  $g$  شتاب گرانش و  $l$  فاصله بین مرکز هر ملخ تا مرکز بالگرد چهارملخه می‌باشد.



شکل ۱- بالگرد چهارملخه

از ماتریس‌های دوران  $R$  و  $T$ ، برای نگاشت متغیرها از دستگاه مختصات متصل به زمین، به دستگاه مختصات متصل به بدنه و بالعکس استفاده می‌شود. ماتریس دوران  $R$  به زوایای  $\phi$ ،  $\theta$  و  $\psi$ ، که به ترتیب، با نام‌های زوایای رول، پیچ و انحراف خوانده می‌شوند، وابسته است. زوایای نام برده، دارای محدودیت‌های  $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ ،  $(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2})$  و  $(-\pi < \psi < \pi)$  هستند.

عقریه‌های ساعت و دوتای دیگر، در خلاف جهت عقربه‌ها می‌چرخند، وقتی جمع جبری سرعت ملخ‌ها صفر نباشد، یک عدم تعادل سراسری به وجود می‌آید. اگر علاوه بر آن نرخ رول یا پیچ هم مخالف صفر باشند، بالگرد چهارملخه یک گشتاور ژيروسکوپی مطابق معادله (۱۶) را تجربه می‌کند. واضح است که اثرات ژيروسکوپی تولید شده توسط چرخش ملخ‌ها فقط با معادلات زاویه‌ای ارتباط داشته و مستقل از معادلات خطی هستند.

$$M_g = \sum_{i=1}^4 \{\omega_B \times H_i\} \quad (16)$$

که در آن،  $H_i = [0, 0, J_r \Omega_i]^T$  بردار ممنتوم دورانی در راستای محور  $z$  است که در اثر سرعت زاویه‌ای تولید شده در زمان چرخش موتورها ظاهر می‌شود.  $J_r$  نشان‌دهنده اینرسی محور  $z$  است. در نتیجه گشتاور کل با معادله (۱۷) بیان می‌شود:

$$M = M_g + \begin{bmatrix} M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} \quad (17)$$

سپس ورودی‌های کنترلی توسط معادله زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ M_\phi \\ M_\theta \\ M_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ lb & 0 & -lb & 0 \\ 0 & -lb & 0 & lb \\ -k & k & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

که در آن،  $u_1$  نشان‌دهنده نیروی کل بالابرنده بدنه در راستای محور  $z$ ؛  $u_2$ ،  $u_3$  و  $u_4$ ، به ترتیب گشتاورهای زوایای رول، پیچ و انحراف را نشان می‌دهند. با توجه به معادلات (۱۰)، (۱۷) و (۱۸) و با جای‌گذاری  $[\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]^T = [\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T$ ، همچنین، با در نظر گرفتن مقاومت هوا، فرم معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم بالگرد چهار ملخه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = qr \frac{I_y - I_z}{I_x} + \frac{J_r}{I_x} q \Omega_r + \frac{l}{I_x} u_2 - \frac{k_4 l}{I_x} p \\ \ddot{\theta} = pr \frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{J_r}{I_y} p \Omega_r + \frac{l}{I_y} u_3 - \frac{k_5 l}{I_y} q \\ \ddot{\psi} = pq \frac{I_x - I_y}{I_z} + \frac{C}{I_z} u_4 - \frac{k_6}{I_z} r \end{cases} \quad (19)$$

که در آن،  $\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4$ ، سرعت زاویه‌ای باقیمانده موتورها است. بنابراین مجموعه معادلات (۹) و (۱۹)، مدل دینامیکی بالگرد چهارملخه را تشکیل می‌دهند. در این روابط، ضرایب ثابت و مثبت  $k_1$  تا  $k_6$ ، ضرایب مقاومت نامیده می‌شوند.

جای‌گذاری بردار حالت  $P$  در معادله (۸)، معادله (۹) به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m_s} (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi) u_1 - \frac{k_1 \dot{x}}{m_s} \\ \ddot{y} = \frac{1}{m_s} (s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi) u_1 - \frac{k_2 \dot{y}}{m_s} \\ \ddot{z} = \frac{1}{m_s} (c_\phi c_\theta) u_1 - g - \frac{k_3 \dot{z}}{m_s} \end{cases} \quad (9)$$

با توجه به این که ساختار بالگرد چهارملخه و ملخ‌های آن صلب و متقارن می‌باشند، معادلات حرکت دورانی این سیستم دینامیکی، با معادله (۱۰) به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dt} (J \Omega) = M \quad (10)$$

که در آن،  $J = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$ ، نشان‌دهنده ماتریس اینرسی بالگرد چهارملخه بوده و عناصر  $I_x$ ،  $I_y$  و  $I_z$ ، به ترتیب، اینرسی‌های بالگرد چهارملخه در راستای محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشند.  $\Omega = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4]^T$  بردار سرعت ملخ‌ها بوده و  $M$  گشتاور کل می‌باشد و از نیروی تولید شده توسط چهارملخ ایجاد می‌شود [۱۳]. نیروی بالابرنده تولید شده توسط موتور  $\Omega_i$ ، یعنی  $F_i$ ، متناسب با مربع سرعت ملخ  $\Omega_i$ ، یعنی  $\Omega_i^2$  بوده و با معادله (۱۱) نمایش داده شده است:

$$F_i = b \Omega_i^2 \quad (11)$$

هم‌چنین، گشتاور واکنشی ایجاد شده توسط نیروی مقاوم موتور  $\Omega_i$ ، یعنی  $M_i$ ، نیز متناسب با مربع سرعت ملخ  $\Omega_i$  بوده و با معادله زیر بیان می‌شود:

$$M_i = -k \Omega_i^2 \quad (12)$$

در معادلات (۱۱) و (۱۲)، که اثرات آیرودینامیکی وارد شونده بر بالگرد چهارملخه را نشان می‌دهند،  $k > 0$  و  $b > 0$ ، ضرایب ثابت و مثبتی هستند که مقادیر آن‌ها به مقاومت هوا، شعاع پروانه‌ها، تعداد تیغه‌ها و ضرایب بالابرنده و کششی بستگی دارد [۱۳ و ۱۴]. نیروهای بالابرنده تولید شده توسط چهار موتور، گشتاورهای زیر را تولید می‌کنند:

$$\text{گشتاور زاویه رول:} \quad M_\phi = l(-F_2 + F_4) \quad (13)$$

$$\text{گشتاور زاویه پیچ:} \quad M_\theta = l(F_1 - F_3) \quad (14)$$

$$\text{گشتاور زاویه انحراف:} \quad M_\psi = C(F_1 - F_2 + F_3 - F_4) \quad (15)$$

که در آن،  $C$  ضریب تناسبی می‌باشد. اثرات ژيروسکوپی در اثر چرخش ملخ تولید می‌شوند. چون دو ملخ در جهت

$$\ddot{z} = [-g] + \left[ \frac{1}{m_s} (c_\phi c_\theta) \right] u_1 + \left[ -\frac{k_3 \dot{z}}{m_s} \right] \quad (20)$$

$$\ddot{\psi} = [0] + \left[ \frac{C}{I_z} \right] u_4 + \left[ -\frac{k_6 r}{I_z} \right] \quad (21)$$

برای طراحی کنترل کننده، در ابتدا معادلات دینامیکی (۲۰) و (۲۱) به صورت زیر به حوزه معادلات حالت انتقال داده می شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} = f(x) + g(x)u_j + d(x) \end{cases} \quad (22)$$

در معادله (۲۲)،  $x = [x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n]^T$  بردار متغیرهای حالت سیستم،  $u_j$  زامین ورودی کنترلی سیستم،  $f(x)$  و  $g(x)$ ، توابعی غیرخطی، حقیقی و معلوم و هم چنین  $d(x) \in R$ ، اغتشاش خارجی می باشد [۱۹-۱۸].

با تعریف  $e_i = x_i - x_{id}$  به عنوان  $i$ امین سیگنال خطا، که در آن مسیر دلخواه برای متغیر حالت  $x_i$  است، سطح لغزش  $s_{x_i}$  به صورت زیر بیان می شود:

$$s_{x_i} = \alpha_{x_i} e_i + \dot{e}_i \quad (23)$$

برای صفر شدن سطح لغزش، خطا و مشتق خطا در حالت ماندگار، ضریب  $\alpha_{x_i}$  در معادله (۲۳) باید عدد ثابت حقیقی و مثبت انتخاب شود.

در ادامه با در نظر گرفتن  $\dot{s}_{x_i} = -\varepsilon_{x_i} \text{sign}(s_{x_i}) - \eta_{x_i} s_{x_i}$  و قرار دادن آن در معادله  $\dot{s}_{x_i} = \alpha_{x_i} \dot{e}_i + \ddot{e}_i$ ، معادله (۲۴) به دست می آید. در اثبات پایداری سیستم حلقه بسته که در بخش بعدی مقاله ارائه می شود، نتیجه می شود که ضرایب  $\varepsilon_{x_i}$  و  $\eta_{x_i}$  باید ثابت هایی حقیقی و مثبت انتخاب شوند:

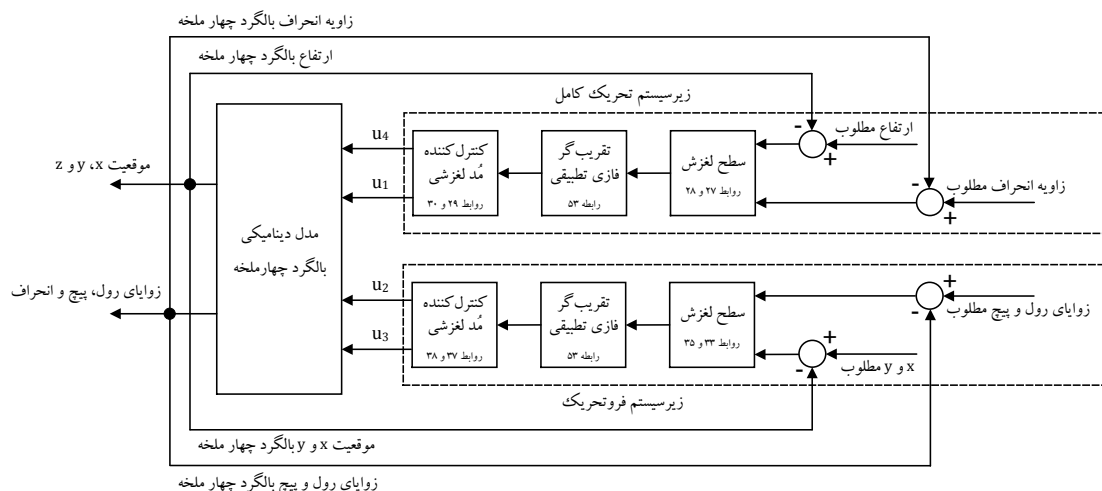
### ۳- طراحی کنترل کننده مُد لغزشی

در این بخش از مقاله، از کنترل کننده مُد لغزشی برای کنترل موقعیت و زوایای یک بالگرد چهارملخه استفاده شده است. شمای کلی این کنترل کننده، در شکل ۲ نشان داده شده است. برای این کار در ابتدا، مدل دینامیکی بالگرد چهارملخه به دو زیرسیستم تحریک کامل و فروتحریک تقسیم می شود. در زیرسیستم تحریک کامل، مؤلفه های  $z$  و  $\psi$  کنترل شده؛ در صورتی که، در زیرسیستم فروتحریک، مؤلفه های  $x$  و  $\theta$  به همراه  $\phi$  و  $\gamma$  به صورت هم زمان کنترل می شوند.

در این زیرسیستم ها، سطوح لغزش از ترکیب خطی خطاهای ردیابی موقعیت و سرعت، متشکل از یک یا دو متغیر حالت، ساخته می شوند. سطح لغزش  $s$  باید طوری طراحی شود که عملکرد مطلوب سیستم را تضمین کرده و اهداف کنترلی مورد نظر را برآورده نماید.

### ۳-۱- طراحی کنترل کننده برای زیرسیستم تحریک کامل

در زیرسیستم تحریک کامل، کنترل کننده باید طوری طراحی شود که متغیرهای حالت  $z$  و  $\psi$  بتوانند مسیرهای مطلوب  $z_d$  و  $\psi_d$  را تعقیب کنند. با توجه به این که ساختار بالگرد چهارملخه و ملخ های آن صلب و متقارن در نظر گرفته شده اند، در نتیجه،  $I_x = I_y$  می باشد. برای طراحی کنترل کننده در این زیرسیستم، معادلات دینامیکی (۲۰) و (۲۱) مورد نیاز هستند:



شکل ۲- بلوک دیاگرام کنترل موقعیت و زوایای بالگرد چهارملخه

$$\ddot{\theta} = [0] + \left[ \frac{l}{I_y} \right] u_3 + \left[ pr \frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{k_5 l}{I_y} q \right] \quad (31)$$

$$\ddot{\phi} = [0] + \left[ \frac{l}{I_x} \right] u_2 + \left[ qr \frac{I_y - I_z}{I_x} - \frac{k_4 l}{I_x} p \right] \quad (32)$$

با توجه به معادلات (۲۲)، (۳۱) و (۳۲) تعاریف زیر برقرارند:  
از معادله (۳۱) نتیجه می‌شود که:

$$g(x) = \frac{l}{I_y}, f(x) = 0, \alpha_8 = \dot{\theta}, \alpha_7 = \theta, j = 3, i = 7$$

$$d(x) = pr \frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{k_5 l}{I_y} q$$

از معادله (۳۲) نتیجه می‌شود که:

$$f(x) = 0, \alpha_{12} = \dot{\phi}, \alpha_{11} = \phi, j = 2, i = 11$$

$$d(x) = qr \frac{I_y - I_z}{I_x} - \frac{k_4 l}{I_x} p, g(x) = \frac{l}{I_x}$$

با توجه به این که در زیرسیستم فروتحریک، مؤلفه‌های  $x$  و  $\theta$  یا  $\gamma$  و  $\phi$  به صورت هم‌زمان کنترل می‌شوند، چهار متغیر حالت باقیمانده به صورت  $x_{10} = \dot{y}$ ،  $x_9 = y$ ،  $x_6 = \dot{x}$ ،  $x_5 = x$  در این زیرسیستم هر سطح لغزش ترکیب خطی از خطای چهار متغیر حالت است. در معادلات (۳۳) تا (۳۶) سطوح لغزش  $s_\theta$  و  $s_\phi$  به همراه مشتقات مرتبه اولشان معرفی شده‌اند:

$$s_\theta = \alpha_1(\dot{x} - \dot{x}_d) + \alpha_2(x - x_d) + \alpha_3(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) + \alpha_4(\theta - \theta_d) \quad (33)$$

$$\dot{s}_\theta = \alpha_1(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + \alpha_2(\dot{x} - \dot{x}_d) + \alpha_3(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}_d) + \alpha_4(\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) \quad (34)$$

$$s_\phi = \alpha_5(\dot{y} - \dot{y}_d) + \alpha_6(y - y_d) + \alpha_7(\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) + \alpha_8(\phi - \phi_d) \quad (35)$$

$$\dot{s}_\phi = \alpha_5(\ddot{y} - \ddot{y}_d) + \alpha_6(\dot{y} - \dot{y}_d) + \alpha_7(\ddot{\phi} - \ddot{\phi}_d) + \alpha_8(\dot{\phi} - \dot{\phi}_d) \quad (36)$$

در بخش ۳-۴، نحوه تعیین ضرایب  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) در معادلات (۳۳) تا (۳۶)، به تفصیل توضیح داده خواهد شد. با در نظر گرفتن  $\dot{s}_{x_i} = -\varepsilon_{x_i} \text{sign}(s_{x_i}) - \eta_{x_i} s_{x_i}$  ( $i = 7, 11$ )، مشابه با بخش قبل، ورودی‌های کنترلی  $u_2$  و  $u_3$  به صورت معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$u_3 = \frac{l_y}{l} \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\ddot{x}_d - \ddot{x}) + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} (\dot{x}_d - \dot{x}) + \ddot{\theta}_d + \frac{\alpha_4}{\alpha_3} (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) - \frac{\varepsilon_\theta}{\alpha_3} \text{sign}(s_\theta) - \frac{\eta_\theta}{\alpha_3} s_\theta \right] \quad (37)$$

$$u_2 = \frac{l_x}{l} \left[ \frac{\alpha_5}{\alpha_7} (\ddot{y}_d - \ddot{y}) + \frac{\alpha_6}{\alpha_7} (\dot{y}_d - \dot{y}) + \ddot{\phi}_d + \frac{\alpha_8}{\alpha_7} (\dot{\phi}_d - \dot{\phi}) - \frac{\varepsilon_\phi}{\alpha_7} \text{sign}(s_\phi) - \frac{\eta_\phi}{\alpha_7} s_\phi \right] \quad (38)$$

$$\alpha_{x_i} \dot{e}_i + \dot{e}_i + \varepsilon_{x_i} \text{sign}(s_{x_i}) + \eta_{x_i} s_{x_i} = 0 \quad (24)$$

با جایگذاری معادلات  $\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{id}$  و  $e_i = x_i - x_{id}$  در معادله (۲۴)، معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$\alpha_{x_i}(\dot{x}_i - \dot{x}_{id}) + \dot{x}_i - \dot{x}_{id} + \varepsilon_{x_i} \text{sign}(s_{x_i}) + \eta_{x_i} s_{x_i} = 0 \quad (25)$$

و در نتیجه، با استفاده از معادلات (۲۲) و (۲۵)، ورودی کنترلی  $u_j$  به صورت معادله (۲۶) به دست خواهد آمد:

$$u_j = \frac{1}{g(x)} [\alpha_{x_i}(\dot{x}_{id} - \dot{x}_i) + \dot{x}_{id} - f(x) - d(x) - \varepsilon_{x_i} \text{sign}(s_{x_i}) - \eta_{x_i} s_{x_i}] \quad (26)$$

لازم به ذکر است که در معادله (۲۶)،  $d(x)$  متشکل از اغتشاشات خارجی و دینامیک‌های مدل نشده است که اطلاع دقیقی از آن‌ها در دسترس نیست. با توجه به معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۲)، تعاریف زیر نتیجه می‌شوند:

$$\text{در معادله (۲۰): } x_2 = \dot{z}, x_1 = z, j = 1, i = 1$$

$$d(x) = -\frac{k_3 \dot{z}}{m_s} \text{ و } g(x) = \frac{1}{m_s} (c_\theta c_\theta), f(x) = -g$$

$$\text{در معادله (۲۱): } x_4 = \dot{\psi}, x_3 = \psi, j = 4, i = 3$$

$$d(x) = -\frac{k_6}{I_z} r \text{ و } g(x) = \frac{c}{I_z}, 0$$

با توجه به معادله (۲۳)، در این زیرسیستم، سطوح لغزش  $s_z$  و  $s_\psi$  با معادلات (۲۷) و (۲۸) تعریف می‌شوند:

$$s_z = \alpha_z(z - z_d) + (\dot{z} - \dot{z}_d) \quad (27)$$

$$s_\psi = \alpha_\psi(\psi - \psi_d) + (\dot{\psi} - \dot{\psi}_d) \quad (28)$$

از معادله (۲۶) نتیجه می‌شود که ورودی‌های کنترلی  $u_1$  و  $u_4$  را می‌توان به ترتیب با معادلات زیر بیان نمود:

$$u_1 = m_s \left[ \frac{\alpha_z(\dot{z}_d - \dot{z}) + \dot{z}_d + g - \varepsilon_z \text{sign}(s_z) - \eta_z s_z}{c_\phi c_\theta} \right] \quad (29)$$

$$u_4 = \frac{I_z}{c} [\alpha_\psi(\dot{\psi}_d - \dot{\psi}) + \dot{\psi}_d - \varepsilon_\psi \text{sign}(s_\psi) - \eta_\psi s_\psi] \quad (30)$$

نکته ۱: از آن‌جا که اطلاعات دقیقی از اغتشاش خارجی و دینامیک‌های مدل نشده در دسترس نیست، بنابراین در طراحی ورودی‌های کنترلی  $u_1$  و  $u_4$  از بیان  $d(x)$  صرف‌نظر شده است. به عبارت دیگر مطابق معادلات (۲۰) و (۲۱)، در طراحی این ورودی‌های کنترل از دینامیک‌های  $\frac{k_3 \dot{z}}{m_s}$  و  $\frac{k_6}{I_z} r$  صرف‌نظر شده است.

### ۳-۲- طراحی کنترل‌کننده برای زیرسیستم فروتحریک

در زیرسیستم تحریک کامل، کنترل‌کننده باید طوری طراحی شود که متغیرهای حالت  $[x, \theta]$  و  $[y, \phi]$  بتوانند مسیرهای مطلوب  $[x_d, \theta_d]$  و  $[y_d, \phi_d]$  را تعقیب نمایند. در طراحی کنترل‌کننده برای این زیرسیستم، معادلات دینامیکی (۳۱) و (۳۲) مورد نیاز است:

با در نظر گرفتن  $\theta = y_1 + \theta_d$  و جایگذاری  $\ddot{x}$  از معادله (۹) در معادله (۴۳)،  $\dot{y}_2$  به صورت معادله (۴۴) بازنویسی می‌شود:

$$\dot{y}_2 = -\frac{\alpha_1 u_1}{\alpha_3 m_s} (c_\phi s_{(y_1 + \theta_d)} c_\psi + s_\phi s_\psi) + \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \ddot{x}_d + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 \alpha_3} y_3 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3}\right) y_2 + \frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_3} y_1 \quad (44)$$

مجموعه معادلات خطی (۴۵)، با خطی‌سازی به روش بسط

$$\text{تیلور حول نقطه تعادل} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_d \\ \dot{\theta}_d \\ x_d \end{bmatrix} \text{ یا } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ به } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ دست می‌آیند:}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (45)$$

که در آن،

$$A_{21} = -\frac{\alpha_1 u_1}{\alpha_3 m_s} c_\phi c_{\theta_d} c_\psi + \frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_3}; A_{22} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3}; A_{23} = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 \alpha_3}; A_{31} = -\frac{\alpha_4}{\alpha_1}; A_{32} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}; A_{33} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (46)$$

طبق قضیه پایداری هارویتز، در صورتی معادله (۴۵) پایدار است، اگر و فقط اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس A دارای قسمت حقیقی منفی باشند. با یافتن معادله مشخصه ماتریس A با استفاده از رابطه  $|sI - A|$  و برابر قرار دادن آن با یک معادله مشخصه مطلوب پایدار، نظیر  $(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$ ، ضرایب سطح سوئیچینگ  $s_\theta$  به دست خواهند آمد. با انجام این کار و با فرض  $\alpha_3 = 1$ ، سایر ضرایب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha_4 = 6; \quad \alpha_1 = \frac{11m_s}{u_1 c_\phi c_{\theta_d} c_\psi}; \quad \alpha_2 = \frac{6m_s}{u_1 c_\phi c_{\theta_d} c_\psi} \quad (47)$$

با انجام عملیات مشابه و با فرض  $\alpha_7 = 1$ ، سایر ضرایب سطح سوئیچینگ  $s_\phi$  به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\alpha_8 = 6; \quad \alpha_5 = \frac{-11m_s}{u_1 s_{\phi_d} s_\theta s_\psi + u_1 c_{\phi_d} c_\psi}; \quad \alpha_6 = \frac{-6m_s}{u_1 s_{\phi_d} s_\theta s_\psi + u_1 c_{\phi_d} c_\psi} \quad (48)$$

اگرچه سیستم حلقه بسته در حضور کنترل کننده پیشنهادی و عدم قطعیت‌های موجود، دارای پایداری مجانبی سراسری است؛ اما به دلیل استفاده از تابع علامت در ورودی‌های کنترلی، بروز پدیده نامطلوب زیگزاگ امری اجتناب‌ناپذیر است. به همین دلیل در بخش بعدی مقاله تقریب‌گر فازی تطبیقی یک ورودی- یک خروجی طراحی

نکته ۲: در طراحی کنترل کننده‌های  $u_3$  و  $u_4$  نیز مطابق معادلات (۳۱) و (۳۲)، از بخش‌های  $qr \frac{l_z - l_x}{l_x}$  و  $pr \frac{l_z - l_x}{l_y}$  عنوان اغتشاشات خارجی و دینامیک‌های مدل نشده صرف‌نظر شده است.

### ۳-۳- اثبات پایداری سیستم

برای اثبات پایداری سیستم حلقه بسته، تابع کاندیدای لیانوف زیر معرفی می‌شود:

$$V_{x_i} = \frac{1}{2} s_{x_i}^2; \quad i = 1, 3, 7, 11 \quad (39)$$

از معادله فوق نسبت به زمان مشتق گرفته و با جایگذاری معادله  $\dot{s}_{x_i} = -\varepsilon_{x_i} \text{sign}(s_{x_i}) - \eta_{x_i} s_{x_i}$  در آن، معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$\dot{V}_{x_i} = \dot{s}_{x_i} s_{x_i} = -\varepsilon_{x_i} |s_{x_i}| - \eta_{x_i} s_{x_i}^2 \quad (40)$$

از معادله فوق نتیجه می‌شود که با انتخاب مناسب ضرایب  $\varepsilon_{x_i}$  و  $\eta_{x_i}$  (ثابت‌هایی حقیقی و مثبت)، همواره  $\dot{V}_{x_i}$  منفی معین بوده و بنابراین، طبق قضیه لیانوف سیستم حلقه بسته دارای پایدار مجانبی سراسری خواهد بود.

این بدان معنی است که، اعمال سیگنال‌های کنترلی  $u_1$  تا  $u_4$  می‌توانند خطای ردگیری سیستم را در یک مدت زمان محدود به سمت صفر همگرا نمایند.

### ۳-۴- تعیین ضرایب سطوح لغزش زیرسیستم فروتحریک

برای به دست آوردن ضرایب سطح سوئیچینگ  $s_\theta$  و  $s_\phi$  در زیرسیستم فروتحریک، ابتدا لازم است  $s_\theta$  و  $\theta_d$  در معادلات (۳۳) و (۳۴) برابر با صفر قرار داده شوند. با انجام این کار، معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\dot{x} - \dot{x}_d = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} (x - x_d) - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} (\theta - \theta_d) \quad (41)$$

$$\dot{\theta} - \dot{\theta}_d = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\dot{x} - \dot{x}_d) - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} (x - x_d) - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} (\theta - \theta_d) \quad (42)$$

با اعمال تغییر متغیرهای  $y_1 = (\theta - \theta_d)$  و  $y_2 = (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d)$  و  $y_3 = (x - x_d)$  معادلات فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\dot{x} - \dot{x}_d) + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1 \alpha_3} y_3 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3}\right) y_2 + \frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_3} y_1 \\ \dot{y}_3 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} y_2 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} y_1 \end{cases} \quad (43)$$



نکته ۳: برای این که طراحی تقریب‌گر فازی تطبیقی، پایداری مجانبی سراسری سیستم حلقه بسته را تضعیف ننماید، می‌توان با انتخاب مناسب ضریب  $\eta_{x_i}$ ، یک حاشیه اطمینان مناسب به وجود آورد. در این صورت پایداری مجانبی سراسری سیستم حلقه بسته کماکان برقرار می‌ماند. تقریب‌گر فازی تطبیقی، مقدار ضریب  $\varepsilon_{x_i}$  را با تغییرات سطح لغزش  $s_{x_i}$  تغییر می‌دهد. تغییر این ضریب به گونه‌ای انجام می‌شود که کنترل‌کننده توانایی غلبه بر عدم قطعیت‌های موجود را داشته باشد.

این تقریب‌گر فازی تطبیقی، یک سیستم یک ورودی-یک خروجی است که ورودی آن سطح لغزش  $s_{x_i}$  و خروجی آن  $\varepsilon_{x_i}$  می‌باشد. پایگاه قواعد این سیستم فازی به صورت زیر است:

$$\text{if } s_{x_i} \text{ is } A_i^m \text{ then } \varepsilon_{x_i} \text{ is } B_i^m \quad (50)$$

که در آن،  $A_i^m$  و  $B_i^m$  توابع عضویت پایگاه قواعد سیستم فازی هستند. در این مقاله از متغیرهای زبانی یکسان  $NB, NM, NS, ZE, PS, PM, PB$  برای ورودی  $s_{x_i}$  و خروجی  $\varepsilon_{x_i}$  استفاده می‌شود که  $N$  نماد منفی،  $P$  نماد مثبت،  $M$  نماد متوسط،  $S$  نماد کوچک،  $B$  نماد بزرگ و  $ZE$  نماد صفر هستند. تمامی توابع عضویت، گوسی و با معادله زیر انتخاب شده‌اند:

$$\mu_A(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - \alpha}{\sigma}\right)^2\right] \quad (51)$$

که در آن،  $A$  نماد تابع عضویت،  $\alpha$  مرکز تابع عضویت و  $\sigma$  ضریب گستردگی تابع عضویت هستند. بر اساس مطالب فوق، قواعد فازی موتور استنتاج این سیستم فازی، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{if } s_{x_i} \text{ is } NB \text{ then } \varepsilon_{x_i} \text{ is } NB \\ \text{if } s_{x_i} \text{ is } NM \text{ then } \varepsilon_{x_i} \text{ is } NM \\ \text{if } s_{x_i} \text{ is } NS \text{ then } \varepsilon_{x_i} \text{ is } NS \\ \text{if } s_{x_i} \text{ is } ZE \text{ then } \varepsilon_{x_i} \text{ is } ZE \\ \text{if } s_{x_i} \text{ is } PS \text{ then } \varepsilon_{x_i} \text{ is } PS \\ \text{if } s_{x_i} \text{ is } PM \text{ then } \varepsilon_{x_i} \text{ is } PM \\ \text{if } s_{x_i} \text{ is } PB \text{ then } \varepsilon_{x_i} \text{ is } PB \end{aligned} \quad (52)$$

از آنجا که در این سیستم فازی از فازی‌ساز تکین، غیرفازی‌ساز میانگین مراکز و موتور استنتاج ضرب ممدانی

می‌شود که نه تنها می‌تواند کران عدم قطعیت‌های موجود را تقریب بزند، بلکه قادر به از بین بردن پدیده نامطلوب زیگزاگ در ورودی کنترلی نیز می‌باشد.

#### ۴- طراحی تقریب‌گر فازی تطبیقی

از معادلات (۲۹)، (۳۰)، (۳۷) و (۳۸) نتیجه می‌شود که یکی از دلایل بروز زیگزاگ در ورودی‌های کنترل، وجود تابع علامت و ضرایبی است که در این تابع ضرب می‌شوند. در این بخش از مقاله برای عدم ظهور پدیده زیگزاگ در ورودی‌های کنترل، به جای استفاده از عبارت  $\varepsilon_{x_i} \text{sign}(s_{x_i})$ ، سیستم فازی طراحی می‌شود تا ضریب  $\varepsilon_{x_i}$  را تقریب بزند. با این روش می‌توان از بروز این پدیده نامطلوب در ورودی‌های کنترل جلوگیری نمود. در طراحی این سیستم فازی، از فازی‌ساز تکین، غیرفازی‌ساز میانگین مراکز و موتور استنتاج ضرب ممدانی استفاده می‌شود. بنابراین خروجی این سیستم فازی را با معادله زیر می‌توان نشان داد:

$$y = \frac{\sum_{m=1}^M \theta^m \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(x_i^*)}{\sum_{m=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(x_i^*)} = \theta^T \Psi(x) \quad (49)$$

که در آن،  $\theta = [\theta^1, \dots, \theta^m, \dots, \theta^M]^T$  بردار مراکز توابع عضویت  $y$ ،  $\Psi(x) = [\Psi(x)^1, \dots, \Psi(x)^m, \dots, \Psi(x)^M]^T$  بردار ارتفاع توابع عضویت  $y$  و  $M$  تعداد قواعد فازی می‌باشد. مقدار  $\Psi(x)^m = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(x_i^*) / \sum_{m=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(x_i^*)$  نیز برابر است با:  $\Psi(x)^m$  اساس طراحی این تقریب‌گر فازی تطبیقی بر معادله (۴۰) استوار است. بر اساس این معادله، با انتخاب یک ضریب  $\eta_{x_i}$  مناسب و مثبت، در صورتی مشتق تابع لیاپانوف کوچک‌تر از صفر می‌شود که علامت ضریب  $\varepsilon_{x_i}$  و سطح لغزش  $s_{x_i}$  یکسان باشد. از طرف دیگر در صورتیکه  $|s_{x_i}|$  بزرگ باشد، با انتخاب ضریب  $|\varepsilon_{x_i}|$  بزرگ، مشتق تابع لیاپانوف خیلی کوچک‌تر از صفر می‌شود و در نتیجه تضمین پایداری سیستم حلقه بسته قوی‌تر گردیده و سرعت کاهش تابع انرژی لیاپانوف، افزایش می‌یابد. از سوی دیگر، با کاهش  $|s_{x_i}|$ ، می‌توان ضریب  $|\varepsilon_{x_i}|$  را کاهش دهیم تا تاثیر این ضریب در مشتق تابع لیاپانوف کم اثر شود. در ادامه در صورتی که  $s_{x_i} = 0$ ، می‌توان مقدار  $\varepsilon_{x_i} = 0$  قرار داد. طراحی و پیاده‌سازی این تقریب‌گر فازی تطبیقی باعث می‌شود که تغییرات ضریب  $\varepsilon_{x_i}$  به نرمی اتفاق بیافتد؛ در این صورت بروز پدیده نامطلوب زیگزاگ منتفی می‌شود.

تطبیقی یک ورودی- یک خروجی استفاده گردیده است. از آنجا که پایگاه قواعد این تقریب گر فازی تطبیقی دارای ۸ قاعده است، بنابراین حجم محاسبات ورودی کنترل بسیار پایین بوده و این ملاحظات، پیاده سازی عملی کنترل کننده پیشنهادی را مقرون به صرفه و امکان پذیر می نماید [۲۱-۲۳].

- برخلاف بسیاری از روش های مرسوم، استراتژی کنترلی پیشنهادی، بالگرد چهارملخه را قادر می سازد تا مسیرهای متغیر با زمان را به راحتی ردگیری نماید.

### ۶- نتایج شبیه سازی

در این بخش، کارایی کنترل کننده مد لغزشی پیشنهادی در ردیابی مسیر بالگرد چهارملخه، توسط نتایج شبیه سازی مورد ارزیابی قرار گرفته است. از روابط (۹) و (۱۹) برای مدل سازی بالگرد چهارملخه استفاده شده است. در طراحی کنترل کننده پیشنهادی، عدم قطعیت پارامتری با در نظر گرفتن ۱۵ درصد خطا در مقادیر پارامترهای  $I_z, I_y, I_x, l, l_x, l_y$  و  $C$  لحاظ شده است. علاوه بر این، برای در نظر گرفتن عدم قطعیت غیر پارامتری نیز، از یک اغتشاش متغیر با زمان  $d(t) = 0.1 \sin(0.1t)$  استفاده شده است. به عبارت دیگر بخش  $d(t)$  به تمامی معادلات (۲۰)، (۲۱)، (۳۱) و (۳۲) اضافه شده است. محدوده ورودی های کنترلی نیز به ترتیب، برابر با  $9 \leq u_1 \leq 13$ ،  $-8 \leq u_2 \leq 8$  و  $-4 \leq u_3 \leq 4$  فرض شده اند.

به این ترتیب، عملکرد کنترل کننده پیشنهادی در حضور این عدم قطعیت های پارامتری و غیر پارامتری و محدودیت های ورودی کنترلی، در تمام نتایج این بخش مورد بررسی قرار گرفته است. تمام شبیه سازی های این بخش، در محیط نرم افزار MATLAB/Simulink انجام شده اند. در جدول ۱، مقادیر پارامترهای مدل بالگرد چهارملخه، نشان داده شده اند.

هم چنین، مقادیر پارامترهای کنترل کننده پیشنهادی، در جدول ۲ آورده شده اند [۱۸].

استفاده شده است، بنابراین خروجی این سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\varepsilon_{x_i} = \frac{\sum_{m=1}^M \theta^m \mu_{A_i^m}(s_{x_i})}{\sum_{m=1}^M \mu_{A_i^m}(s_{x_i})} = \theta^T \Psi(s_{x_i}) \quad (53)$$

که در آن،  $\theta = [\theta^1, \dots, \theta^m, \dots, \theta^M]^T$  بردار مراکز توابع عضویت خروجی می باشد.

بردار  $\Psi(s_{x_i}) = [\Psi(s_{x_i})^1, \dots, \Psi(s_{x_i})^m, \dots, \Psi(s_{x_i})^M]^T$

نیز دارای مقادیر  $\Psi(s_{x_i})^m = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(s_{x_i}) / \sum_{m=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^m}(s_{x_i})$  هستند.

در یک جمع بندی کلی می توان نتیجه گرفت که چهار کنترل پیشنهادی مطابق معادلات (۲۹)، (۳۰)، (۳۷) و (۳۸) هستند که ضرایب  $\varepsilon_{x_i}$  در آن ها با استفاده از معادله (۵۳) تنظیم می گردند.

### ۵- مزایای کنترل پیشنهادی

در طراحی کنترل پیشنهادی، خلاقیت هایی نهفته است که به روشنی در زیر به آن ها اشاره می شود:

- از آنجا که طراحی و پیاده سازی عملی کنترل مد لغزشی بسیار ساده است، در کنترل بالگرد چهارملخه تلاش گردید که تمامی کنترل کننده ها از نوع کنترل مد لغزشی باشند.
- برخلاف روش های مرسوم و متداول، در طراحی کنترل بالگرد چهارملخه، از آنجا که کنترل کننده های طراحی شده مجزا از یکدیگر هستند، بنابراین تأثیر متقابل این کنترل کننده ها بر یکدیگر بسیار ناچیز بوده و این امر باعث کاهش دامنه ورودی های کنترل می شود [۲۰].
- در کنترل پیشنهادی، تنها برای انتخاب ضرایب سطوح لغزش سیستم تحریک کامل، از روش سعی و خطا استفاده می شود. از آنجا که تعداد ضرایب این سطوح لغزش دو تاست، بنابراین یافتن این ضرایب کار آسانی است. در حالی که تعداد ضرایب سطوح لغزش سیستم فروتحریک ۸ عدد است و برای تنظیم آن ها به راحتی از روش هارویتر استفاده می شود و دیگر نیازی به استفاده از روش سعی و خطا نیست.
- در طراحی کنترل پیشنهادی، از تقریب گر فازی

جدول ۳- موقعیت‌ها و زوایای مطلوب در مسیر مستطیلی

$[x_d, y_d, z_d]^m$	$[\theta_d, \phi_d, \psi_d]^{rad}$	زمان $t$ بر حسب $s$
[2,2,0.6]		۰
[2,2,0.6]		۱۰
[1.3,2,0.6]	[0.0,0.0,0.5]	۲۰
[1.3,1.6,0.6]		۳۰
[2,1.6,0.6]		۴۰
[2,2,0.6]		۵۰
[2,2,0.6]	[0.0,0.0,0]	۶۰

در تمام شبیه‌سازی‌های این بخش، مقادیر حالات اولیه همگی صفر فرض شده‌اند. پس از اجرای شبیه‌سازی‌های این بخش، از شکل ۳ نتیجه می‌شود که کنترل‌کننده پیشنهادی، در حضور عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری موجود به خوبی عمل نموده و متغیرهای حالت  $x$ ،  $y$  و  $z$  مسیر مطلوب را در کمتر از ۵ ثانیه دنبال کرده است.

مطابق شکل ۴، ملاحظه می‌شود که متغیرهای حالت  $\phi$ ،  $\theta$  و  $\psi$ ، نیز با دقت قابل قبول و در زمانی برابر با ۳ ثانیه، مسیرهای مطلوب را ردگیری نموده‌اند. لازم به ذکر است که پرش‌های موجود در کنترل متغیرهای  $\theta$  و  $\phi$ ، به دلیل ویژگی فروتحریک بودن بالگرد چهارملخه است. به این ترتیب که این متغیرها، هم‌زمان با متغیرهای  $x$  و  $y$  کنترل شده و در نتیجه، در زمان تغییر متغیرهای  $x$  و  $y$ ، پرش‌هایی در متغیرهای  $\theta$  و  $\phi$  مشاهده می‌شود.

در شکل ۵، به ترتیب، ورودی‌های کنترلی  $u_1$  تا  $u_4$  نشان داده شده است. از این شکل نتیجه می‌شود که دامنه ورودی‌ها برای غلبه بر عدم قطعیت‌های ساختاری و غیرساختاری متغیر با زمان، تغییرات محسوسی ندارند و در آن‌ها اثری از پدیده زیگزاگ دیده نمی‌شود.

خروجی تقریب‌گرهای فازی تطبیقی در شکل ۶ نمایش داده شده است. از شکل ۶ نتیجه می‌شود که تقریب‌گرهای فازی تطبیقی به خوبی عمل نموده و برای غلبه بر عدم قطعیت‌های موجود، ضرایب  $\varepsilon_z$  را در محدوده ۳۵- تا ۵،  $\varepsilon_\phi$  را در محدوده ۷- تا ۳،  $\varepsilon_\theta$  را در محدوده ۶۰- تا ۶۰ و  $\varepsilon_\psi$  را در محدوده ۳۰- تا ۱۲۰ تغییر می‌دهند. با این تغییرات، نه تنها از بروز پدیده زیگزاگ در ورودی کنترل جلوگیری می‌شود، بلکه پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته نیز تضمین می‌شود.

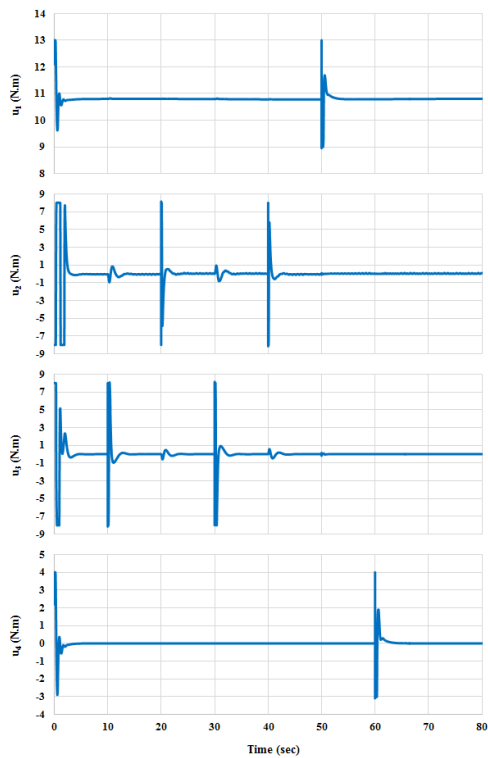
بدیهی است که در صورت در نظر گرفتن پارامترهای دیگری برای مدل بالگرد چهارملخه و کنترل‌کننده، نتایج تغییر خواهند کرد. ردیابی مسیر مستطیلی ارائه شده در جدول ۳، برای آزمایش کنترل‌کننده پیشنهادی در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- مقادیر پارامترهای مدل بالگرد چهارملخه

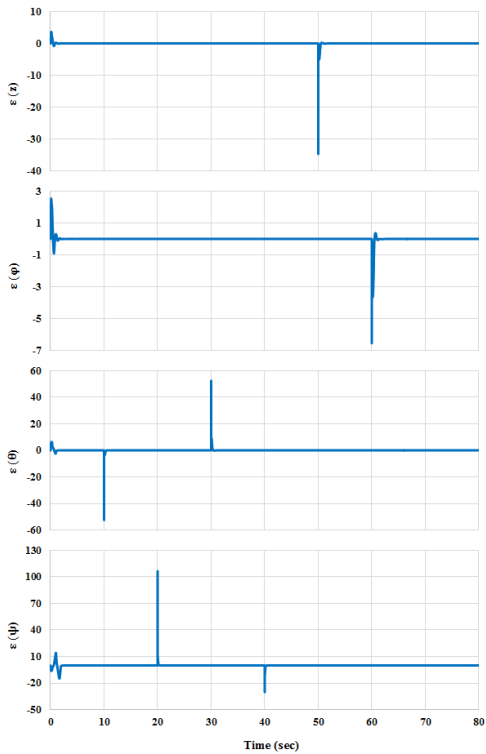
نام پارامتر	مقدار پارامتر
$m_s$	1 kg
$l$	0.21 m
$I_x$	1.22 $Ns^2/rad$
$I_y$	1.22 $Ns^2/rad$
$I_z$	2.2 $Ns^2/rad$
$J_r$	0.2 $Ns^2/rad$
$k_i (i = 1, 2, 3)$	0.1 $Ns/m$
$k_i (i = 4, 5, 6)$	0.12 $Ns/m$
$g$	9.81 $m/s^2$
$b$	5 $Ns^2$
$k$	2 $N/(ms^2)$
$C$	1

جدول ۲- مقادیر پارامترهای کنترل‌کننده

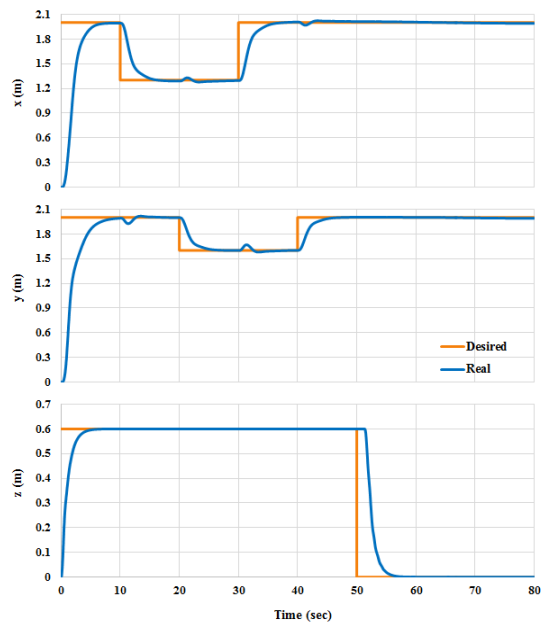
نام پارامتر	مقدار پارامتر
$\alpha_z$	1
$\varepsilon_z$	0.8
$\eta_z$	2
$\alpha_1$	11 $m_s/(u_1 c_\phi c_{\theta_d} c_\psi)$
$\alpha_2$	6 $m_s/(u_1 c_\phi c_{\theta_d} c_\psi)$
$\alpha_3$	1
$\alpha_4$	6
$\varepsilon_\theta$	0.5
$\eta_\theta$	5
$\alpha_\psi$	1
$\varepsilon_\psi$	0.8
$\eta_\psi$	2
$\alpha_5$	-11 $m_s/(u_1 s_{\phi_d} s_\theta s_\psi + u_1 c_{\phi_d} c_\psi)$
$\alpha_6$	-6 $m_s/(u_1 s_{\phi_d} s_\theta s_\psi + u_1 c_{\phi_d} c_\psi)$
$\alpha_7$	1
$\alpha_8$	6
$\varepsilon_\phi$	0.5
$\eta_\phi$	5



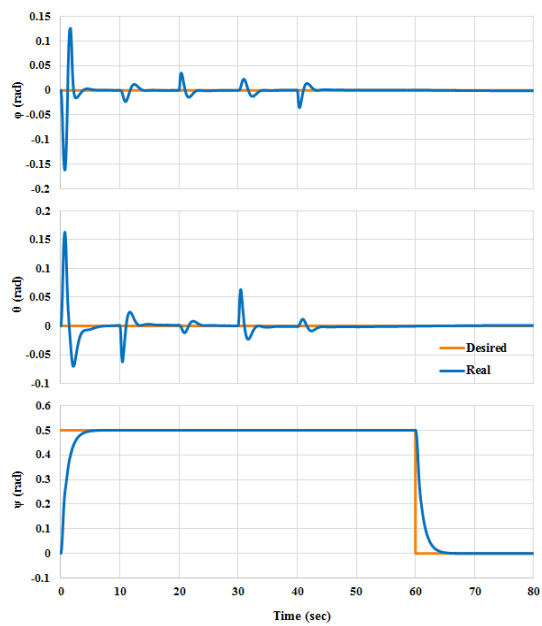
شکل ۵- ورودی‌های کنترلی  $u_1$  تا  $u_4$



شکل ۶- خروجی تقریب‌گرهای فازی تطبیقی

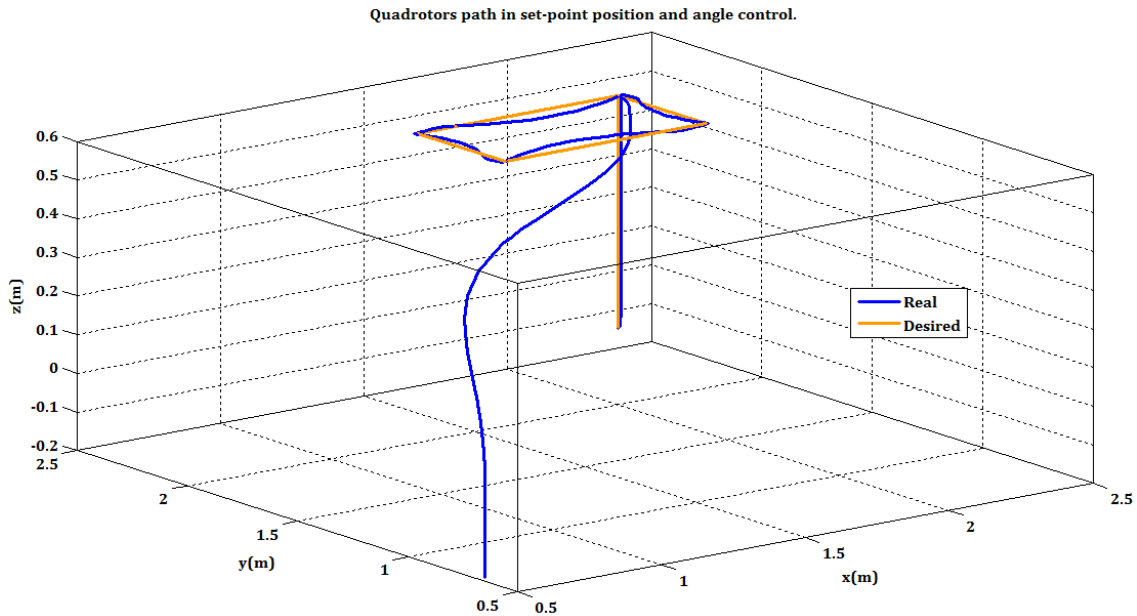


شکل ۳- ردگیری موقعیت بالگرد چهارملخه



شکل ۴- ردگیری زوایای بالگرد چهارملخه

از شکل ۷، مشاهده می‌شود که مسیر مطلوب به گونه‌ای انتخاب شده است تا موقعیت و زوایای بالگرد چهارملخه دائماً در حال تغییر باشد. با این وجود کنترل پیشنهادی به خوبی عمل نموده و با دقت مناسبی مسیر مطلوب را ردگیری می‌نماید.



شکل ۷- ردگیری مسیر مستطیلی مطلوب

از تئوری لیاپانوف برای اثبات پایداری سیستم حلقه بسته در حضور کنترل‌کننده پیشنهادی استفاده و نشان داده شد که تمامی حالات سیستم به سطح لغزش رسیده و در آن باقی می‌مانند. در ادامه برای غلبه بر پدیده نامطلوب زیگزاگ در ورودی کنترل و نیز برای کاهش دامنه ورودی کنترل، تقریب‌گر فازی تطبیقی یک ورودی- یک خروجی ارائه گردید. سرانجام برای نمایش عملکرد کنترل‌کننده مد لغزشی فازی تطبیقی، شبیه‌سازی‌هایی در دو مرحله ارائه شد. نحوه ارائه این شبیه‌سازی‌ها به گونه‌ای بود که مرحله به مرحله کنترل پیشنهادی را با چالشی جدیدتر مواجه نماید. نتایج شبیه‌سازی‌ها عملکرد مطلوب کنترل پیشنهادی را نشان می‌دهند

#### ۸- مراجع

- [1] Bouchoucha M, Seghour S, Tadjine M (2011) Classical and second order sliding mode control solution to an attitude stabilization of a four rotors helicopter: from theory to experiment. Istanbul, Turkey.
- [2] R. Xu, Özgüner Ü (2008) Sliding mode control of a class of under actuated systems. Automatica 44: 233-241.
- [3] Besnard L, Shtessel YB, Landrum B (2012) Quadrotor vehicle control via sliding mode

#### ۷- نتیجه‌گیری

بالگردهای چهارمخ به خاطر قابلیت مانورپذیری، کاربردهای بسیاری در حوزه‌های نظامی و غیر نظامی دارند.

طراحی کنترل‌کننده موقعیت برای این ربات‌های متحرک به دلایل غیرخطی بودن معادلات دینامیکی، وجود عدم قطعیت‌های پارامتری و غیرپارامتری، سبک بودن، ناپایداری ذاتی و وزش بادهای ناگهانی از مسائل چالش برانگیز روز به حساب می‌آید.

در این مقاله، پس از بیان معادلات دینامیکی و نحوه مدل‌سازی بالگرد چهارمخ، از کنترل‌کننده مد لغزشی برای کنترل ردیابی مسیر این بالگرد استفاده شد. برای دستیابی به عملکرد مطلوب کنترل ردیابی مسیر، مدل دینامیکی این پرنده به دو زیرسیستم تحریک کامل و فروتحریک تجزیه شد. در زیرسیستم تحریک کامل، تعریف سطوح لغزش خطی، همگرایی حالت‌های سیستم به سمت نقطه تعادل را تضمین کرد.

در صورتی که در سیستم فروتحریک، با توجه به این که تعداد ورودی‌های کنترلی کم‌تر از تعداد حالاتی است که باید کنترل شود، با انتخاب مناسب ضرایب سطوح لغزش خطی، با استفاده از تئوری پایداری هارویتز، پایداری حالت‌های سیستم تضمین شد.

- [18] Soltanpour MR, Zolfaghari B, Soltani M, Khooban MH (2013) Fuzzy sliding mode control design for a class of nonlinear systems with structured and unstructured uncertainties. *Int J Innov Comput Info Control* 9(7): 2713-2726.
- [19] Niknam T, Khooban MH, Soltanpour MR (2014) An optimal type II fuzzy sliding mode control design for a class of nonlinear systems. *Nonlinear Dyn* 75(1-2): 73-83.
- [20] Soltanpour MR, Khooban MH, Khalghani MR (2014) An optimal and intelligent control strategy for a class of nonlinear systems: Adaptive fuzzy sliding mode. *J Vib Control* 22(1): 159-175.
- [21] Soltanpour MR, Otadolajam P, Khooban MH (2014) A new and robust control strategy for electrically driven robot manipulators: Adaptive fuzzy sliding mode. *IET Sci Meas Technol* 9(3): 322-334.
- [22] Veysi M, Soltanpour MR (2017) Voltage-base control of robot manipulator using adaptive fuzzy sliding mode control. *Int J Fuzzy Sys* 19(5): 1430-1443.
- [23] Veysi M, Soltanpour MR, Khooban MH (2015) A novel self-adaptive modified bat fuzzy sliding mode control of robot manipulator in presence of uncertainties in task space. *Robotica* 33(10): 2045-2064.
- [23] Muñoz F, González-Hernández I, Salazar S, Espinoza ES, Lozano R (2017) Second order sliding mode controllers for altitude control of a quadrotor UAS: Real-time implementation in outdoor environments. *Neurocomputing* (233): 61-71.
- [24] Khan Q, Akmeliawati R, IqbalBhatti A, AshrafKhan M (2017) Robust stabilization of underactuated nonlinear systems: A fast terminal sliding mode approach. *ISA Trans* (66) 241-248.
- [25] Bambang S, Naoki U, Shigenori S (2017) Generalized super-twisting sliding mode control with a nonlinear sliding surface for robust and energy-efficient controller of a quad-rotor helicopter. *Mech Eng Sci* 231(11): 2042-2053.
- [26] Farid G, Hongwei M, Ali SM, Liwei Q (2017) A review on linear and nonlinear control Techniques for position and attitude control of a quadrotor. *Control Intell Syst* 45(1).
- [27] Han JH, Feng YM, Peng F, Dong W, Sheng XJ (2017) Attitude and position control of quadrotor UAV using PD-fuzzy sliding mode control. in *Springer* 563-575.
- [28] Zou Y (2016) Nonlinear robust adaptive hierarchical sliding mode control approach for quadrotors. *Int J Robust Nonlinear Control*.  
controller driven by sliding mode disturbance observer. *J Franklin Inst* 349(2): 658-684.
- [4] Coza C, Nicol C, Macnab CJB, Ramirez-Serrano A (2011) Adaptive fuzzy control for a quadrotor helicopter robust to wind buffeting. *J Intell Fuzzy Sys* 2(5-6): 267-283.
- [5] Eker İ (2010) Second-order sliding mode control with experimental application. *ISA Trans* 49(3): 394-405.
- [6] Mondal S, Mahanta C (2012) A fast converging robust controller using adaptive second order sliding mode. *ISA Trans* 51(6): 713-721.
- [7] Guo Z, Xu J, Lee TH (2014) Design and implementation of a new sliding mode controller on an underactuated wheeled inverted pendulum. *J Franklin Inst* 351(4): 2261-2282.
- [8] Ashrafioun H, Erwin RS (2008) Slidingmode control of under actuated multi body systems and its application to shape change control. *Int J Control* 81(12): 1849-1858.
- [9] Xiong JJ, Zheng EH (2014) Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV. *ISA Trans* 53(3): 725-731.
- [10] Raffo GV, Ortega MG, Rubio FR (2010) An integral predictive/nonlinear  $H_\infty$  control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica* 46(1): 29-39.
- [11] Olfati-Saber R (2001) Nonlinear control of under actuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles. Ph.D. Thesis Mass Inst.
- [12] Raffo GV, Ortega MG, Rubio FR (2008) Back stepping/nonlinear  $H_\infty$  control for path tracking of a quadrotor unmanned aerial vehicle. in *Control Conference, American*.
- [۱۳] داودی ا، رضایی م (۱۳۹۳) مدل سازی دینامیکی، شبیه سازی و کنترل یک کوادروتور با استفاده از داده های آزمایشگاهی سنسورهای MEMS. *مجله مهندسی مکانیک مدرس* ۱۸۴-۱۷۶ (۳): ۱۴۳.
- [14] Prouty RW (2001) Helicopter performance stability and control. Krieger Publishing Company.
- [15] Daewon L, JKH (2009) Feedback Linearization vs. Adaptive Sliding Mode Control for a Quadrotor Helicopter. *Int J Control Autom Sys* 7(3): 419-428.
- [16] Rong UOXU (2008) Sliding mode control of a class of underactuated systems. *Automatica* 44: 233-241.
- [17] Zheng EH, Xiong JJ, Luo JL (2014) Second order slidingmode control for a quadrotor UAV. *ISA Trans* 53(4): 1350-1356.