



## کمانش صفحات ویسکو الاستیک ضخیم با استفاده از روش نوار محدود و تئوری برشی مرتبه سوم

حسین عموشاهی

استادیار، دانشکده مهندسی عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۶/۱۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۷/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۱/۱۲

### چکیده

در این مقاله نحوه تغییرات بار بحرانی ورق های ویسکو الاستیک به روش نوار محدود بررسی می شود. خاصیت ویسکو الاستیسیته باعث تغییر پارامترهایی مثل مدول الاستیسیته مواد در طول زمان بارگذاری می شود. در مقاله پیش رو خاصیت ویسکو الاستیسیته به کمک سری پرونی مدل شده و روش نوار محدود بر آن بازنویسی گردیده است. پس از آن به کمک روش جداسازی زمانی رابطه کار مجازی در بازه های زمانی کوچک تقریب زده شده و مسأله به صورت یک مسأله مقادیر اولیه آنالیز می گردد. پس از آن رابطه کار مجازی برای نیروهای درون صفحه بازنویسی شده و به کمک آن مسأله کمانش ورق ها بررسی شده است. بار کمانشی ورق ها به کمک یک روند غیر خطی در زمان های مختلف برآورد شده و نتایج آن در زمان اولیه با پاسخ های ماده الاستیک مقایسه شده است. در ادامه اثرات تغییر ضخامت، ابعاد ورق و بارگذاری دو محوره نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** صفحات ویسکو الاستیک؛ کمانش؛ صفحات ضخیم؛ تئوری برشی مرتبه سوم؛ روش نوار محدود.

## Buckling of Viscoelastic Thick Plates by Finite Strip Method and Third Order Shear Deformation Theory

H. Amoushahi

Assistant Professor, Faculty of Engineering, University of Isfahan.

### Abstract

Time depended deformation and critical buckling load of viscoelastic thick plates were studied using finite strip method with the trigonometric functions in longitudinal direction and the polynomial functions in transverse direction. The plates were considered to be thick and the third order shear deformation theory was used to consider the effect of shear stresses in thickness. The mechanical properties of the material were considered to be linear viscoelastic by expressing the relaxation modulus in terms of Prony series. Time history of maximum deflection of viscoelastic plates subjected to transverse loading and unloading on plates was calculated using a fully discretized formulation. In addition, the critical in-plane load of plates was calculated by a nonlinear procedure in different times of loading. Moreover, the effect of thickness and the interaction of biaxial in-plane loading on critical load of plate were studied.

**Keywords:** Viscoelastic Plates; Buckling; Thick Plates; Third Order Shear Deformation Theory; Finite Strip Method

## ۱- مقدمه و تعریف تحقیق

در این تحقیق به طور خاص به بررسی خاصیت ویسکو الاستیسیته مواد پرداخته می‌شود. ویسکو الاستیسیته خاصیتی از مواد است که تحت اثر تغییرشکل‌های به وجود آمده هر دو خاصیت الاستیک بودن و ویسکوز بودن را به صورت هم‌زمان از خود نمایش می‌دهد.

در این مقاله ابتدا خاصیت ویسکو الاستیسیته مواد معرفی شده و سپس روابط تنش- کرنش آن‌ها برای استفاده در حل مسأله ورق استخراج می‌شود. در ادامه روش نوار محدود برای حل مسائل ویسکو الاستیک غیرخطی توسعه داده می‌شود که به کمک آن هم بتوان محدوده وسیع‌تری از مسائل را پوشش داد و هم از طریق سرعت بالای حل روش نوار محدود تعداد حالات متنوعی از ورق‌های ویسکو الاستیک را مورد بررسی قرار داد. بررسی تاریخچه تحقیقات انجام گرفته توسط محققان پیشین نشان دهنده این موضوع است که تغییر خواص مواد در طول زمان بارگذاری سازه‌ها همواره مشکلاتی را برای روش‌های عددی ایجاد کرده است به گونه‌ای که در بسیاری از موارد محققان از تبدیلاتی مثل تبدیل لاپلاس برای از بین بردن وابستگی روش حل به زمان بهره برده‌اند. به همین دلیل در تحقیق پیش رو سعی شده است تا از یک سو حتی‌الامکان به کمک روش جداسازی زمانی پیچیدگی انتگرال‌های موجود در زمان ساده سازی شود و از سوی دیگر مسأله بدون وابستگی به روش‌های تبدیل به صورت مستقیم در حوزه زمان تحلیل گردد تا همواره بتوان تاریخچه تغییر شکل‌های به وجود آمده در ورق را ارزیابی کرد. همچنین به کمک روش مذکور گستره زیادی از مواد ویسکو الاستیک که دارای تابع تغییرات متنوعی در زمان می‌باشند نیز قابل حل می‌باشد.

کریستیانسن [۱] از اولین محققانی بود که مبانی تئوریک و پایه ویسکو الاستیسیته را در تالیفات خود ارائه داد. اصل تطابق توسط وی برای تبدیل مسائل الاستیسیته خطی به مسائل ویسکو الاستیسیته به کمک تبدیل انتگرال انجام شد. هر چند روش‌های تحلیلی انجام گرفته به روش تبدیل لاپلاس و اصل تطابق به طور معمول محدود به مسائل دارای هندسه‌های ساده، شرایط مرزی ساده و مدل ماده‌ای غیر پیچیده می‌شود ولی نباید از ارزش فعالیت‌های این محققان در چهار دهه قبل به سادگی گذشت. اگر چه روابط روش

اجزاء محدود سه بعدی برای بررسی مسائل محیط‌های پیوسته در حالت کلی کاربرد دارد، ولی در برخی از موارد می‌توان این روابط را برای حل مسائل سازه‌ای خاص مثل تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها نیز به کار گرفت. بسیاری از این مقالات تیرها را با فرضیات اولر- برنولی و یا فرضیات تیموشنکو به صورت مجزا تحلیل کرده‌اند. تلاش اصلی در این مقالات غلبه بر پیچیدگی روابط بنیادی ویسکو الاستیک در حل روش اجزاء محدود صورت گرفته است. آکوز و کادیوگلو [۲] دو تیر تیموشنکو را به روش اجزاء محدود به کمک روش لاپلاس- کارسون و رابطه‌سازی مختلط تحلیل کردند. تحقیقات ایشان نیز شامل تبدیل‌های لاپلاس- کارسون به حوزه زمان و بالعکس بود. بعضی از محققان از تبدیل فوریه در حل مسائل اجزاء محدود ویسکو الاستیک بهره گرفته‌اند. چن و چان [۳] روش اجزاء محدود را برای تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها به کمک تبدیل فوریه برای حل مسائل در حوزه فرکانس به جای حوزه زمان در حل یک مسأله مقادیر ویژه به کار گرفتند. پالفالوی [۴] نیز روابط تغییرشکل غیر الاستیک را در آنالیز یک تیر برنولی به کار گرفت. یکی از روش‌های دیگر برای حل مشکل پیچیدگی انتگرال‌های ویسکو الاستیک روشی است که به نام روش GHM معروف است جانسون و همکاران [۵] این روش را برای حل مسائل تیرهای ویسکو الاستیک غیر خطی تحت تأثیر تغییرشکل‌های برشی و جانبی به کار بردند. رانزی و زونا [۶] یک تیر فولادی- بتنی کامپوزیت را به روش اجزاء محدود و با فرضیات الاستیک برای فولاد و معادلات بنیادی ویسکو الاستیک برای بتن تحلیل کردند. همچنین فولاد را با فرضیات تیموشنکو و بتن را با فرضیات اولر- برنولی در نظر گرفتند. در کنار حل مسائل تیرهای ویسکو الاستیک، در سال‌های اخیر تحقیقاتی هم در زمینه بررسی و حل مسائل ورق‌های ویسکو الاستیک انجام گرفته است. شنگ و چنگ [۷] رفتار دینامیکی ورق‌های ویسکو الاستیک غیر خطی را بررسی کردند. ایشان به کمک فرضیات تیموشنکو برای ورق و جمع آثار بولتزمان برای ماده ویسکو الاستیک خطی، روابط غیر خطی را برای ارزیابی رفتار دینامیکی ورق ضخیم تیموشنکو استخراج کردند. حاتمی و همکاران [۸] ارتعاش آزاد ورق‌های ویسکو الاستیک متحرک محوری را بررسی کردند. ایشان از روش نوار محدود ماتریس‌های سختی را در

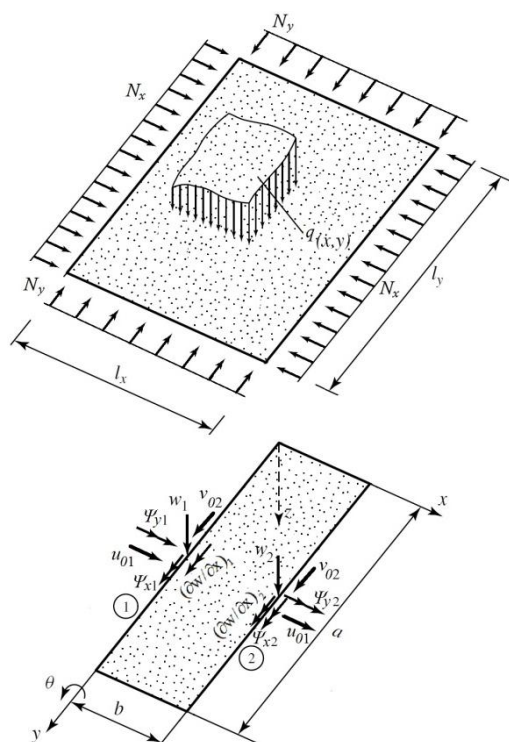
و از سوی دیگر نیاز به تبدیلات لاپلاس و معکوس آن لازم است. محاسبه بار بحرانی به روش ارائه شده توسط ایشان است. عموشاهی و ازهری [۱۶ تا ۱۸] به آنالیز الاستاتیکی و پایداری ورق‌های ویسکو الاستیک نازک و نسبتاً ضخیم پرداختند. ایشان از روش سری پرونی برای مدل سازی خاصیت ویسکو الاستیسیته و از روش نوار محدود برای جهت آنالیز ورق استفاده کردند. ایشان ورق‌های نازک را به کمک تئوری کلاسیک ورق و روش‌های نوار محدود معمولی و حبابی و ورق نسبتاً ضخیم را بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و روش نوار محدود معمولی تحلیل کردند که نتایج آن قابل استناد برای ورق‌های ضخیم نیست. همان گونه که نتایج بخش ۳ نیز نشان خواهد داد نتایج آن‌ها صرفاً برای ورق‌های نازک قابل استناد می‌باشند.

## ۲- استخراج روابط

اگرچه نتایج حاصل از تئوری کلاسیک ورق برای ورق‌های نازک نتایج مناسبی را ارائه می‌کند ولی دقت نتایج آن با افزایش ضخامت ورق همواره کاهش می‌یابد. حل دقیق مسائل ورق به کمک تحلیل سه بعدی الاستیسیته آن نشان می‌دهد که خطای به وجود آمده بر اساس استفاده از تئوری کلاسیک ورق‌ها در حدود توان دوم ضخامت ورق است [۱۹]. وجود چنین محدودیتی در کاربرد تئوری کلاسیک ورق‌ها برای ورق‌های ضخیم، بر لزوم به کارگیری روشی اصلاح شده در محاسبات مربوط به این گونه ورق‌ها تأکید می‌نماید. نتایج بدست آمده از آزمایش‌های تجربی بیانگر این موضوع است که تئوری کلاسیک ورق بر پایه فرضیات کیرشهف، برای ورق‌های نسبتاً ضخیم جابجایی‌ها و تغییر شکل ورق‌ها را کمتر از مقادیر واقعی و فرکانس طبیعی و بار بحرانی ورق را بیشتر از مقادیر حقیقی آن نتیجه می‌دهد. وجود چنین اختلافی در نتایج بدلیل فرض صفحه و عمود ماندن مقطع ورق بر میان صفحه تغییر شکل یافته آن است که بر مبنای صرف نظر از اثرات کرنش‌های برشی حاصل شده است. بر همین اساس می‌توان میدان جابجایی را برای ورق به صورت زیر در نظر گرفت.

$$u = u_0 + z \left[ \psi_x - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \left( \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (1)$$

حوزه فرکانس استخراج کردند که شامل توابع ضمنی مقادیر ویژه ارتعاش آزاد نیروهای داخل صفحه، پارامترهای ویسکو الاستیسیته، سرعت محوری و هندسه ورق می‌شد. بدین ترتیب ایشان اثر سرعت محوری و پارامترهای ویسکو الاستیک را بر ارتعاش آزاد ورق متحرک محوری ارزیابی کردند. جین و همکارانش [۹] مجموعه روابطی ارائه کردند که بر اساس آن‌ها به آنالیز تیرهای ویسکو الاستیک بر اساس تئوری برشی مرتبه بالاتر ردی [۱۰ و ۱۱] پرداختند. با توجه به این که در این تحقیق از روش نوارهای محدود استفاده خواهد شد باید به تحقیقاتی که در این زمینه انجام شده است نیز اشاره‌ای داشت. برادفورد و ازهری [۱۲] روش‌های نوار محدود را کامل کردند و شاید بتوان گفت که کامل‌ترین روش نوار محدود را تا آن زمان ارائه کردند. آن‌ها توابع شکل مناسبی را در جهت طولی بر مبنای شرایط مرزی لبه‌های بارگذاری ارائه کردند. عموشاهی و ازهری [۱۳] روش نوار محدود مختلط را برای محاسبه بار کمانش ورق‌های ساخته شده از کامپوزیت‌های FRP توسعه دادند. ایشان اثرات کمانش موضعی، برشی، پیچشی- جانبی و پیچشی را تحت بارگذاری‌های درون صفحه یکنواخت، خمشی و برشی ارزیابی کردند. روش ساده حل ایشان منجر به ارائه منحنی‌های طراحی برای ورق‌های FRP شد. کمانش موضعی ورق‌های نازک و همچنین ورق‌های نسبتاً ضخیم مستطیلی ویسکو الاستیک توسط جعفری و همکارانش [۱۴ و ۱۵] بررسی شد. در روش ایشان ماتریس‌های سختی و پایداری در حوزه زمان ارزیابی شده و به کمک حل یک مسئله مقادیر ویژه بار بحرانی محاسبه شده است. در روش به کار گرفته شده توسط ایشان مشخصات ماده ویسکو الاستیک در هر لحظه از زمان توسط روابط مشخصی معادل سازی شده و مسئله به صورت الاستاتیکی تحلیل شده است. در واقع در هر زمان از بارگذاری، مشخصات مکانیکی ماده در اثر تغییرات زمان اصلاح شده و پس از آن یک مسئله الاستاتیکی مد نظر قرار می‌گیرد. از این رو در طی روند بررسی کمانش ورق‌ها در روش مذکور، چون اثر زمان از بین رفته است مسئله کمانش به یک مسئله مقادیر ویژه تبدیل می‌گردد در حالی که در روش ارائه شده در مقاله حاضر کمیت زمان به صورت مستقیم وارد محاسبات شده و روند تغییرات رفتار ورق به سادگی در طول زمان ارزیابی می‌شود. به عبارتی از یک سو محاسبات ریاضی نسبتاً پیچیده



شکل ۱- یک المان نوار محدود برای ورق ضخیم

در روابط فوق  $u_{01,m}$  و  $u_{02}$ ، جابجایی گره‌ها در راستای محور  $x$ ،  $v_{01,1}$  و  $v_{02}$ ، جابجایی گره‌ها در راستای محور  $y$ ،  $w_{1,m}$  و  $w_{2,1}$ ، جابجایی گره‌ها در راستای محور  $z$ ،  $\psi_{x1,1}$  و  $\psi_{x2}$ ، چرخش لبه‌های المان حول محور  $y$  و  $\psi_{y1,m}$  و  $\psi_{y2,m}$ ، چرخش لبه‌های المان حول محور  $x$  هستند. در واقع روابط فوق به تعداد  $r$  و برای مقادیر مختلف  $m=1 \sim r$  نوشته می‌شود. در روابط (۳) تا (۷)، بردارهای  $f^u$ ،  $f^v$ ،  $f^w$ ،  $f^{\psi_x}$  و  $f^{\psi_y}$  توابع درونی‌یابی در جهت عرضی هستند و همان گونه که پیش‌تر نیز اشاره شد برای سادگی از توابع خطی و هرمیتی برای بیان آن‌ها استفاده می‌شود. این توابع به کمک روابط زیر بیان می‌شوند.

$$f^u = f^v = f^{\psi_x} = f^{\psi_y}$$

$$= \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \langle 1 - \xi \quad \xi \rangle$$

$$f^w = \langle H_{11} \quad H_{12} \quad H_{21} \quad H_{22} \rangle$$

$$= \langle 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad b(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad b(-\xi^2 + \xi^3) \rangle \quad (13)$$

$$v = v_0 + z \left[ \psi_y - \frac{4z^2}{3h^2} \left( \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \quad (2)$$

که در آن‌ها  $h$  ضخامت ورق و  $z$  محور عمود بر صفحه است و سایر کمیت‌ها در روابط (۲) تا (۷) تعریف می‌شوند. همچنین با صرف نظر از تغییرات ضخامت ورق، فرض می‌شود  $w(x,y,z) = w(x,y)$ . ضخیم بر اساس شکل ۱ یک المان نوار محدود با درجات آزادی نشان داده شد مد نظر قرار می‌گیرد.

به این ترتیب توابع جابجایی جانبی میان صفحه و چرخش‌های لبه‌های المان را در روش نوار محدود می‌توان به صورت روابط زیر نوشت.

$$u_0 = \sum_{m=1}^r f^u u_{0m} Y_{1m} \quad (3)$$

$$v_0 = \sum_{m=1}^r f^v v_{0m} Y_{2m} \quad (4)$$

$$w = \sum_{m=1}^r f^w w_m Y_{3m} \quad (5)$$

$$\psi_x = \sum_{m=1}^r f^{\psi_x} \psi_{x,m} Y_{4m} \quad (6)$$

$$\psi_y = \sum_{m=1}^r f^{\psi_y} \psi_{y,m} Y_{5m} \quad (7)$$

در این روابط  $r$  تعداد مودهای در نظر گرفته شده از توابع مثلثاتی جهت طولی هستند که از شماره‌دهنده  $m$  برای آن استفاده شده است. همچنین  $u_{0m}$ ،  $v_{0m}$ ،  $w_m$ ،  $\psi_{x,m}$  و  $\psi_{y,m}$  به ترتیب بردارهای درجات آزادی داخل صفحه در راستای  $x$  و  $y$ ، درجات آزادی خارج صفحه، چرخش لبه‌های حول محور  $y$  و  $x$  برای المان مورد نظر در مود  $m$  هستند که هر یک به کمک بردارهای زیر نشان داده می‌شوند.

$$u_{0m} = \langle u_{01,m} \quad u_{02,m} \rangle^T \quad (8)$$

$$v_{0m} = \langle v_{01,m} \quad v_{02,m} \rangle^T \quad (9)$$

$$w_m = \langle w_{1,m} \quad (\partial w / \partial x)_{1,m} \quad w_{2,m} \quad (\partial w / \partial x)_{2,m} \rangle^T \quad (10)$$

$$\psi_{x,m} = \langle \psi_{x1,m} \quad \psi_{x2,m} \rangle^T \quad (11)$$

$$\psi_{y,m} = \langle \psi_{y1,m} \quad \psi_{y2,m} \rangle^T \quad (12)$$

رابطه (۱۷) انجام می‌گیرد. بدین ترتیب بردار کرنش به صورت روابط زیر بازنویسی می‌شود.

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^r \mathbf{B}_m \Delta_m = \mathbf{B} \Delta \quad (18)$$

که در آن  $\Delta_m$  بردار ۱۲ درجه آزادی شامل جابجایی و چرخش‌های لبه‌ای المان در مود  $m$  ام است که عبارتست از،

$$\Delta_m = \left\langle u_{01,m} \quad v_{01,m} \quad w_{1,m} \quad (\partial w / \partial x)_{1,m} \right. \\ \left. \psi_{x1,m} \quad \psi_{y1,m} \quad u_{02,m} \quad v_{02,m} \right. \\ \left. w_{2,m} \quad (\partial w / \partial x)_{2,m} \quad \psi_{x2,m} \quad \psi_{y2,m} \right\rangle^T \quad (19)$$

همچنین بردار  $\Delta$  بردار کل درجات آزادی  $(12r \times 1)$  برای هر نوار بوده که از زیر هم قرارگیری بردارهای بدست می‌آید.

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_{m=1} \\ \Delta_{m=2} \\ \vdots \\ \Delta_{m=r} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

همچنین  $\mathbf{B}_m$  یک ماتریس  $12 \times 5$  و  $\mathbf{B}$  یک ماتریس  $r$   $12 \times 5$  است که به کمک روابط زیر بیان می‌شوند.

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}_{1m} z + \mathbf{B}_{2m} z^3 + \mathbf{B}_{3m} + \mathbf{B}_{4m} z^2 \quad (21)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{m=1} \quad \mathbf{B}_{m=2} \quad \dots \quad \mathbf{B}_{m=r}] \quad (22)$$

که در آن،

$$\mathbf{B}_{1m} = [\mathbf{B}_{1m}^1 \quad \mathbf{B}_{1m}^2] ; \mathbf{B}_{2m} = [\mathbf{B}_{2m}^1 \quad \mathbf{B}_{2m}^2] \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_{3m} = [\mathbf{B}_{3m}^1 \quad \mathbf{B}_{3m}^2] ; \mathbf{B}_{4m} = [\mathbf{B}_{4m}^1 \quad \mathbf{B}_{4m}^2]$$

$$\mathbf{B}_{1m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i' Y_{4m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i Y_{5m}' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i Y_{4m}' & N_i' Y_{5m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; i=1,2 \quad (24)$$

$$\mathbf{B}_{2m}^i = -\frac{4}{3h^2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i1}'' Y_{3m} & H_{i2}'' Y_{3m} & N_i' Y_{4m} & 0 \\ 0 & 0 & H_{i1} Y_{3m}'' & H_{i2} Y_{3m}'' & 0 & N_i Y_{5m}' \\ 0 & 0 & 2H_{i1}' Y_{3m}' & 2H_{i2}' Y_{3m}' & N_i Y_{4m}' & N_i' Y_{5m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{B}_{3m}^i = \begin{bmatrix} N_i' Y_{1m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i Y_{2m}' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i Y_{1m}' & N_i' Y_{2m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{i1}' Y_{3m} & H_{i2}' Y_{3m} & N_i Y_{4m} & 0 \\ 0 & 0 & H_{i1} Y_{3m}' & H_{i2} Y_{3m}' & 0 & N_i Y_{5m} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$i=1,2$

که در این رابطه  $\xi$  پارامتر بدون بعدی است که از رابطه زیر حاصل می‌شود و در آن  $b$  عرض نوار است.

$$\xi = \frac{x}{b} \quad (14)$$

همچنین در روابط (۳) تا (۷)،  $Y_{1m}$  تا  $Y_{5m}$  توابع شکل درونیایی تغییر شکل‌ها در جهت طولی هستند. این توابع را باید بر اساس ارضای شرایط مرزی لبه‌های عرضی ورق انتخاب کرد. بر همین اساس توابع درونیایی در جهت طولی ورق فقط برای ارضای شرایط مفصلی انتخاب می‌شوند که به صورت روابط زیر بیان می‌گردد.

$$Y_{1m} = Y_{3m} = Y_{4m} = \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (15)$$

$$Y_{2m} = Y_{5m} = \cos \frac{m\pi y}{a} \quad (16)$$

شایان ذکر است که علت تفاوت توابع فوق منظور نمودن اثر تعامد آن‌هاست که به وسیله توابع سینوس و کسینوس که دارای اختلاف فاز نود درجه‌ای هستند ایجاد شده است. در تحقیق پیش رو بردار کرنش‌های در نظر گرفته شده برای استفاده در روابط ورق ضخیم بر اساس تئوری تغییر شکل‌های کوچک و با صرف نظر از کرنش‌های مرتبه بالاتر گرین به کمک رابطه زیر بیان می‌شود که در آن  $h$  ضخامت ورق است.

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{4z^2}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{4z^2}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) - \frac{4z^2}{3h^2} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right) \\ \gamma_{xz} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) - \frac{4z^2}{h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) \\ \gamma_{yz} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) - \frac{4z^2}{h^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \end{cases} \quad (17)$$

برای حل مسأله به روش عددی نیاز به گسسته‌سازی توابع تغییر شکل است که با جاگذاری روابط (۳) تا (۷) در

همچنین  $W_{ext}$  در رابطه (۳۲) بیان گر کار ناشی از نیروهای خارجی است که عبارتست از:

$$W_{ext} = \int_A w q dA + \int_V \frac{N_x}{h} \varepsilon_{xx}^{NL} dV + \int_V \frac{N_y}{h} \varepsilon_{yy}^{NL} dV \quad (34)$$

که در آن  $q$ ،  $N_x$  و  $N_y$  به ترتیب بار گسترده وارد بر سطح ورق و بارهای داخل صفحه در راستای محورهای  $x$  و  $y$  هستند (شکل ۱). همچنین مقادیر کرنش‌های غیرخطی در رابطه (۳۴) عبارتند از:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{NL} &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \varepsilon_{yy}^{NL} &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \end{aligned} \right. \quad (35)$$

بر این اساس تغییرات کار خارجی به کمک رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_A \delta w q dA \\ &+ \int_V \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{N_x}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV + \int_V \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{N_x}{h} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV \\ &+ \int_V \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{N_x}{h} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dV + \int_V \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{N_y}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV \\ &+ \int_V \delta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{N_y}{h} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV + \int_V \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{N_y}{h} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) dV \end{aligned} \quad (36)$$

تابع  $w$  در رابطه (۳۶) را می‌توان این گونه بر حسب درجات آزادی نوشت:

$$w = \sum_{m=1}^r \mathbf{H}_m \Delta_m = \mathbf{H} \Delta; \quad \mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m^1 & \mathbf{H}_m^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

که در آن  $\mathbf{H}$  یک ماتریس  $1 \times 12r$  می‌باشد و ماتریس‌های  $\mathbf{H}_m^1$  و  $\mathbf{H}_m^2$  هر کدام یک ماتریس  $1 \times 6$  بوده و برای مقادیر  $i=1,2$  بدین صورت نوشته می‌شود:

$$\mathbf{H}_m^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i1} Y_{3m} & H_{i2} Y_{3m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$i=1,2$

همچنین مشتقات توابع جابجایی در رابطه (۳۶) به کمک روابط زیر بر حسب بردارهای درجات آزادی نوشته خواهند شد.

$$\mathbf{B}_{4m}^i = -\frac{4}{h^2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{i1} Y_{3m} & H_{i2} Y_{3m} & N_i Y_{4m} & 0 \\ 0 & 0 & H_{i1} Y_{3m}' & H_{i2} Y_{3m}' & 0 & N_i Y_{5m} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$i=1,2$

در روابط فوق علامت پریم نشان گر مشتق تابع مورد نظر نسبت به مختصه  $x$  و یا  $y$  است (برای توابع  $N$  و  $H$  مشتق نسبت به محور  $x$  و برای توابع  $Y_{lm}$  تا  $Y_{5m}$  مشتق نسبت به محور  $y$ ).

گام بعدی تعیین رابطه تنش و کرنش برای ماده مورد نظر است. به همین منظور رابطه تنش و کرنش با فرض ثابت ماندن نسبت پواسون برای یک ماده ایزوتروپیک ویسکو الاستیک خطی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) = \mathbf{Q}(t=0) \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) + \int_0^t \dot{\mathbf{Q}}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, s) ds \quad (28)$$

که در آن،

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{bmatrix}^T \quad (30)$$

$$\mathbf{Q}(t) = \frac{E(t)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

در گام بعدی رابطه کار مجازی برای ورق ضخیم نوشته می‌شود:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (32)$$

در رابطه (۳۲)،  $\delta W_{int}$  تغییرات کار نیروهای داخلی در ورق را نشان می‌دهد که می‌توان آن را بدین صورت نوشت:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \delta \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ &= \delta \Delta^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{Q}(0) \mathbf{B} dV \right) \Delta(t) \\ &+ \delta \Delta^T \int_0^t \left( \int_V \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{Q}}(t-s) \mathbf{B} dV \right) \Delta(s) ds \end{aligned} \quad (33)$$

$$\mathbf{S}_{6m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i1}'Y_{3m}' & H_{i2}'Y_{3m}' & 0 & N_i'Y_{5m}' \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{S}_{7m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i1}'Y_{3m} & H_{i2}'Y_{3m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{S}_{8m}^i = \begin{bmatrix} N_i'Y_{1m}' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$\mathbf{S}_{9m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i'Y_{4m}' & 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\mathbf{S}_{10m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i1}'Y_{3m}' & H_{i2}'Y_{3m}' & N_i'Y_{4m}' & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\mathbf{S}_{11m}^i = \begin{bmatrix} 0 & N_i'Y_{2m}' & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{S}_{12m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i'Y_{5m}' \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\mathbf{S}_{13m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i1}''Y_{3m}'' & H_{i2}''Y_{3m}'' & 0 & N_i'Y_{5m}' \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\mathbf{S}_{14m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i1}Y_{3m}' & H_{i2}Y_{3m}' & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

بدین ترتیب تغییرات کار خارجی در رابطه (۳۲) بدین صورت بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} = & \delta \Delta^T \int \mathbf{H}^T q dA \\ & + \delta \Delta^T \int \frac{N_x}{h} \left\{ (\mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_4^T \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_7^T \mathbf{S}_7) \right. \\ & + z (\mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_4^T \mathbf{S}_5 + \mathbf{S}_5^T \mathbf{S}_4) \\ & + z^2 (\mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_5^T \mathbf{S}_5) \\ & - \frac{4}{3h^2} z^3 (\mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3^T \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_4^T \mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_6^T \mathbf{S}_4) \\ & - \frac{4}{3h^2} z^4 (\mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3^T \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_5^T \mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_6^T \mathbf{S}_5) \\ & \left. + \frac{16}{9h^4} z^6 (\mathbf{S}_3^T \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_6^T \mathbf{S}_6) \right\} dVA(t) \\ & + \delta \Delta^T \int \frac{N_y}{h} \left\{ (\mathbf{S}_8^T \mathbf{S}_8 + \mathbf{S}_{11}^T \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{14}^T \mathbf{S}_{14}) \right. \\ & + z (\mathbf{S}_8^T \mathbf{S}_9 + \mathbf{S}_9^T \mathbf{S}_8 + \mathbf{S}_{11}^T \mathbf{S}_{12} + \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{S}_{11}) \\ & + z^2 (\mathbf{S}_9^T \mathbf{S}_9 + \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{S}_{12}) \\ & - \frac{4}{3h^2} z^3 (\mathbf{S}_8^T \mathbf{S}_{10} + \mathbf{S}_{10}^T \mathbf{S}_8 + \mathbf{S}_{11}^T \mathbf{S}_{13} + \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{S}_{11}) \\ & - \frac{4}{3h^2} z^4 (\mathbf{S}_9^T \mathbf{S}_{10} + \mathbf{S}_{10}^T \mathbf{S}_9 + \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{S}_{13} + \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{S}_{12}) \\ & \left. + \frac{16}{9h^4} z^6 (\mathbf{S}_{10}^T \mathbf{S}_{10} + \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{S}_{13}) \right\} dVA(t) \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \sum_{m=1}^r \left( \mathbf{S}_{1m} + z \mathbf{S}_{2m} - \frac{4}{3h^2} z^3 \mathbf{S}_{3m} \right) \Delta_m \\ = & \left( \mathbf{S}_1 + z \mathbf{S}_2 - \frac{4}{3h^2} z^3 \mathbf{S}_3 \right) \Delta \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} = & \sum_{m=1}^r \left( \mathbf{S}_{4m} + z \mathbf{S}_{5m} - \frac{4}{3h^2} z^3 \mathbf{S}_{6m} \right) \Delta_m \\ = & \left( \mathbf{S}_4 + z \mathbf{S}_5 - \frac{4}{3h^2} z^3 \mathbf{S}_6 \right) \Delta \end{aligned} \quad (40)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=1}^r (\mathbf{S}_{7m}) \Delta_m = (\mathbf{S}_7) \Delta \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} = & \sum_{m=1}^r \left( \mathbf{S}_{8m} + z \mathbf{S}_{9m} - \frac{4}{3h^2} z^3 \mathbf{S}_{10m} \right) \Delta_m \\ = & \left( \mathbf{S}_8 + z \mathbf{S}_9 - \frac{4}{3h^2} z^3 \mathbf{S}_{10} \right) \Delta \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} = & \sum_{m=1}^r \left( \mathbf{S}_{11m} + z \mathbf{S}_{12m} - \frac{4}{3h^2} z^3 \mathbf{S}_{13m} \right) \Delta_m \\ = & \left( \mathbf{S}_{11} + z \mathbf{S}_{12} - \frac{4}{3h^2} z^3 \mathbf{S}_{13} \right) \Delta \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{m=1}^r (\mathbf{S}_{14m}) \Delta_m = (\mathbf{S}_{14}) \Delta \quad (44)$$

که در آن‌ها  $\mathbf{S}_j$  به ازای مقادیر  $j=1 \sim 14$  همگی ماتریس‌هایی  $1 \times 12r$  هستند و  $\mathbf{S}_{jm}$  به ازای مقادیر  $j=1 \sim 14$  همگی ماتریس‌هایی  $1 \times 12$  بوده که هر کدام را می‌توان به کمک دو ماتریس  $1 \times 6$  به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{S}_{jm} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{jm}^1 & \mathbf{S}_{jm}^2 \end{bmatrix} ; j=1 \sim 14 \quad (45)$$

با در نظر گرفتن هم‌زمان روابط (۳) تا (۱۶) و (۳۹) تا (۴۵) می‌توان نوشت:

$$\mathbf{S}_{1m}^i = \begin{bmatrix} N_i'Y_{1m}' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{S}_{2m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i'Y_{4m}' & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{S}_{3m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i1}''Y_{3m}'' & H_{i2}''Y_{3m}'' & N_i'Y_{4m}' & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{S}_{4m}^i = \begin{bmatrix} 0 & N_i'Y_{2m}' & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{S}_{5m}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i'Y_{5m}' \end{bmatrix} \quad (50)$$

در روابط (۶۲) و (۶۳) ماتریس‌های  $\mathbf{D}_j(0)$  و  $\dot{\mathbf{D}}_j(t)$  برای مقادیر  $j=1 \sim 4$  عبارتند از:

$$\{\mathbf{D}_1(0), \mathbf{D}_2(0), \mathbf{D}_3(0), \mathbf{D}_4(0)\} = \left\{ \frac{h}{1}, \frac{h^3}{12}, \frac{h^5}{80}, \frac{h^7}{448} \right\} \mathbf{Q}(0) \quad (67)$$

$$\{\dot{\mathbf{D}}_1(t), \dot{\mathbf{D}}_2(t), \dot{\mathbf{D}}_3(t), \dot{\mathbf{D}}_4(t)\} = \left\{ \frac{h}{1}, \frac{h^3}{12}, \frac{h^5}{80}, \frac{h^7}{448} \right\} \dot{\mathbf{Q}}(t) \quad (68)$$

### ۳- روش جداسازی زمانی

جهت انجام جداسازی ابتدا انتگرال موجود در رابطه (۶۱) در بازه زمانی مورد نظر به صورت مجموع انتگرال‌های مذکور روی بازه‌های زمانی کوچکتر نوشته خواهد شد که در هر بازه زمانی کوچک، مقدار جابجایی  $\Delta(t_k)$  ثابت فرض می‌شود.

$$\int_0^t \dot{\mathbf{K}}(t-s)\Delta(s)ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\mathbf{K}}(t_n-s)\Delta(s)ds \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\mathbf{K}}(t_n-s)ds \quad (69)$$

بر این اساس رابطه نوار محدود ویسکو الاستیک (۶۱) در هر گام زمانی به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود و در هر گام زمانی به کمک آن مقدار  $\Delta(t_n)$  محاسبه خواهد شد.

$$\Delta(t_n) = (\mathbf{K}(0) - N_x \mathbf{K}_{gx} - N_y \mathbf{K}_{gy})^{-1} \times \left( \mathbf{F} - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\mathbf{K}}(t_n-s)ds \right) \quad (70)$$

حاصل مجموع انتگرال به کار رفته در عبارت فوق در اولین گام زمانی صفر است و چنانچه باری هم بر سطح ورق اعمال نشود مقدار  $\Delta(t_n)$  به صورت دقیق و مشخص حاصل نمی‌شود. به همین دلیل جهت استفاده از رابطه فوق برای مواد ویسکو الاستیک نیازمند وجود یک بارگذاری اولیه یا یک نقص عضو اولیه بوده که محاسبه بار کمانشی ورق را منتهی به یک روند غیر خطی می‌کند. از طرف دیگر می‌توان به کمک پاسخ‌های حاصل از زمان اولیه بارگذاری برای صحت سنجی پاسخ‌ها بهره جست. به همین منظور کافی است بار وارد بر سطح ورق را حذف کرده و بار کمانشی ورق را به کمک حل یک مسأله مقادیر ویژه بدست آورد. در واقع رابطه

در نهایت رابطه کار مجازی (۶۰) بدین صورت بازنویسی خواهد شد:

$$(\mathbf{K}(0) - N_x \mathbf{K}_{gx} - N_y \mathbf{K}_{gy}) \Delta(t) + \int_0^t \dot{\mathbf{K}}(t-s)\Delta(s)ds = \mathbf{F} \quad (61)$$

که در آن  $\mathbf{K}(0)$ ،  $\dot{\mathbf{K}}(t-s)$ ،  $\mathbf{K}_{gx}$ ،  $\mathbf{K}_{gy}$  و  $\mathbf{F}$  به ترتیب ماتریس‌های سختی ثابت، سختی وابسته به زمان، سختی هندسی برای بار درون صفحه در راستای محورهای  $x$  و  $y$  و بردار نیرویی هستند که با فرض عدم تغییرات مشخصات مصالح در راستای ضخامت آن به کمک روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{K}(0) = \int_A \left\{ \mathbf{B}_3^T \mathbf{D}_1(0) \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_2(0) \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3^T \mathbf{D}_2(0) \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4^T \mathbf{D}_2(0) \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_3(0) \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_3(0) \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_4^T \mathbf{D}_3(0) \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_4(0) \mathbf{B}_2 \right\} dA \quad (62)$$

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = \int_A \left\{ \mathbf{B}_3^T \dot{\mathbf{D}}_1(t) \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1^T \dot{\mathbf{D}}_2(t) \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_3^T \dot{\mathbf{D}}_2(t) \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_4^T \dot{\mathbf{D}}_2(t) \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1^T \dot{\mathbf{D}}_3(t) \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T \dot{\mathbf{D}}_3(t) \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_4^T \dot{\mathbf{D}}_3(t) \mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_2^T \dot{\mathbf{D}}_4(t) \mathbf{B}_2 \right\} dA \quad (63)$$

$$\mathbf{K}_{gx} = \int_A \left\{ (\mathbf{S}_1^T \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_4^T \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_7^T \mathbf{S}_7) + \frac{h^2}{12} (\mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_5^T \mathbf{S}_5) - \frac{h^2}{60} (\mathbf{S}_2^T \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3^T \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_5^T \mathbf{S}_6 + \mathbf{S}_6^T \mathbf{S}_5) + \frac{h^2}{252} (\mathbf{S}_3^T \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_6^T \mathbf{S}_6) \right\} dA \quad (64)$$

$$\mathbf{K}_{gy} = \int_A \left\{ (\mathbf{S}_8^T \mathbf{S}_8 + \mathbf{S}_{11}^T \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{14}^T \mathbf{S}_{14}) + \frac{h^2}{12} (\mathbf{S}_9^T \mathbf{S}_9 + \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{S}_{12}) - \frac{h^2}{60} (\mathbf{S}_9^T \mathbf{S}_{10} + \mathbf{S}_{10}^T \mathbf{S}_9 + \mathbf{S}_{12}^T \mathbf{S}_{13} + \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{S}_{12}) + \frac{h^2}{252} (\mathbf{S}_{10}^T \mathbf{S}_{10} + \mathbf{S}_{13}^T \mathbf{S}_{13}) \right\} dA \quad (65)$$

$$\mathbf{F} = \int_A \mathbf{H}^T q dA \quad (66)$$



ماده ویسکو الاستیک به نام PMMA استفاده می‌شود. مطابق آزمایش‌های کشش خزشی انجام گرفته توسط لای و بیکر [۲۰] در سال ۱۹۹۶ در محدوده زمانی صفر تا ۱۸۰۰ ثانیه ضرایب سری پرونی برای ماده مذکور حاصل شده است. این آزمایش‌های در دمای ۲۰ درجه سانتی‌گراد و در سطح تنش‌های ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵ و ۴۰ مگاپاسکال انجام شده است. نتایج بدست آمده برای ضرایب به کار رفته در رابطه (۷۱) در جدول ۱ نشان داده شده است. همچنین نتایج آزمایش‌های لای و بیکر برای ماده مذکور مقدار ضریب پواسون را در طول زمان ثابت و برابر ۰/۴ گزارش می‌کند.

جدول ۱- ثابت‌های سری پرونی برای یک ماده ویسکو الاستیک نمونه به نام PMMA [۲۰]

1	$E_i$ (MPa)	$\tau_i^E$ (s)
0	1419.4360	-----
1	297.6970	$9.1955 \times 10^{-1}$
2	63.6324	$9.8120 \times 10^0$
3	158.2664	$9.5268 \times 10^1$
4	181.0887	$9.4318 \times 10^2$
5	238.7641	$9.2066 \times 10^3$
6	278.0111	$8.9974 \times 10^4$
7	327.6906	$8.6852 \times 10^5$
8	322.7491	$8.5143 \times 10^6$
9	404.6843	$7.7396 \times 10^7$

برای محاسبه بار کمانشی ورق، ابتدا بار داخل صفحه در جهت عرضی  $N_x$  برابر صفر قرار می‌گیرد. برای یافتن بار محوری  $N_y$  که ایجاد ناپایداری در ورق ویسکو الاستیک منظور شده کند، راه حل پیشنهادی این است که گام به گام بار مذکور در ورق افزایش یابد و جابجایی حداکثر ورق محاسبه شود. به همین منظور جدول ۲ مقادیر جابجایی حداکثر ورقی با مشخصات زیر را در زمان‌های مختلف و تحت تأثیر بارهای محوری گوناگون نشان می‌دهد.

$$l_y = l_x = 500 \text{ mm}, h = 50 \text{ mm}, q_z = 0.981 \text{ kPa}, r = 3.$$

نتایج بدست آمده در جدول ۲ نشان دهنده این مطلب است که مطابق با رفتار مورد انتظار از یک ماده ویسکو

(۷۰) در اولین گام زمانی بارگذاری و بدون اعمال بار گسترده وارد بر سطح ورق به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$\det[\mathbf{K}(0) - N_x \mathbf{K}_{gx} - N_y \mathbf{K}_{gy}] = 0 \quad (71)$$

برای استفاده از رابطه (۷۰) لازم است تا بر طبق یک مدل مناسب و منطبق بر رفتار ماده تابع تغییرات مدول آسودگی در طول زمان حدس زده شود. در تحقیق حاضر تغییرات مدول آسودگی بر اساس سری پرونی به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰].

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^{Nmat} E_i e^{-\frac{t}{\tau_i^E}} \quad (72)$$

در رابطه فوق  $E_i$  و  $\tau_i^E$  ثوابت سری پرونی هستند که برای هر ماده‌ای به کمک آزمایش بدست می‌آید و همچنین  $Nmat$  مرتبه سری پرونی است.

با استخراج روابط مورد نیاز حل ورق‌های ویسکو الاستیک یک برنامه کامپیوتری جهت حل عددی نوشته شده و به کمک آن به حل مثال پرداخته می‌شود. در واقع رابطه اصلی و حاکم بر انجام محاسبات در فصل حاضر رابطه نوار محدود ویسکو الاستیک (۷۰) است که به کمک رابطه کار مجازی استخراج شد. پس از آن به کمک فرضیات روش جداسازی زمانی انتگرال کانولوشن موجود در آن به صورت مناسب تقریب زده شد تا جهت حل عددی مسأله آماده شود. بر این اساس یک برنامه کامپیوتری آماده شده و کلیه مراحل اعم از انتگرال‌گیری‌های ماتریس‌های سختی و نیرویی به طور مجزا در آن انجام گرفته است. سپس برنامه اصلی به طور گام به گام و در طول زمان، محاسبات را بر مبنای روابط استخراج شده در بخش‌های قبلی انجام می‌دهد.

#### ۴- بررسی عددی نتایج

در ادامه مقاله پیش رو به تحلیل عددی چند مثال بر اساس روش ارائه شده پرداخته می‌شود. بدین منظور ابتدا صورت مسأله به طور کامل تعریف شده و پس از آن جواب‌های حاصل صحت سنجی می‌شوند. پس از آن کمیت‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته و اثر آن‌ها بر رفتار ورق ارزیابی می‌گردد.

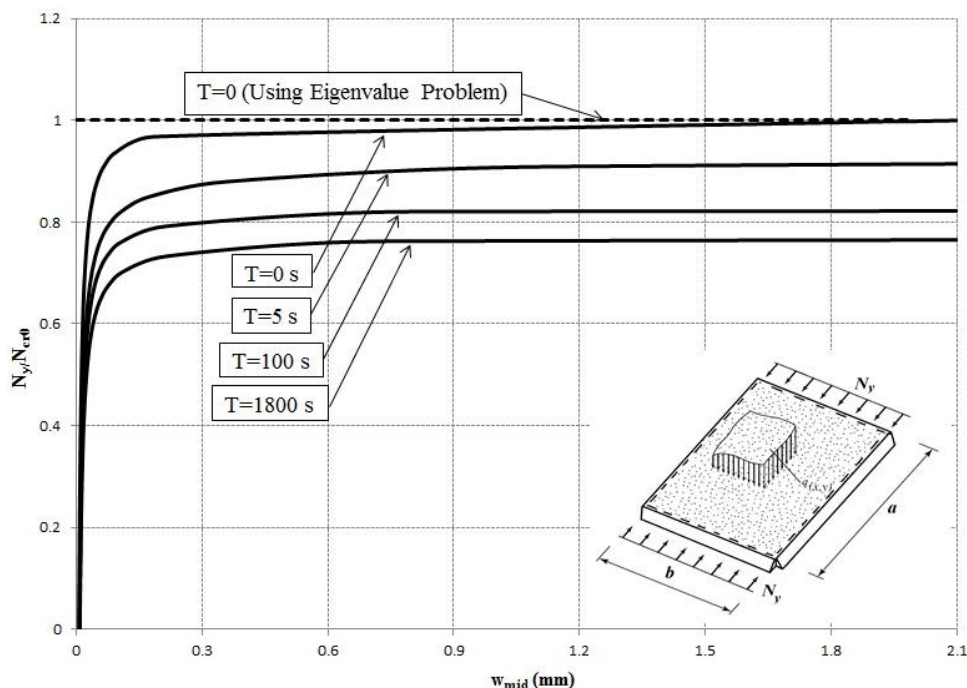
در ابتدای کار لازم است تا مشخصات یک ماده ویسکو الاستیک بر اساس ضرایب ثابت سری پرونی به کمک آزمایش تعیین گردد. بدین منظور در تحقیق حاضر از مشخصات یک

دچار افزایش ناگهانی خواهند شد که می‌توان مقادیر مشخص مذکور را بار کماتشی ورق نامید. برای نمایش بهتر رفتار ورق تحت تأثیر افزایش بارهای محوری در طول زمان، شکل ۲ جابجایی‌های حداکثر ورق ویسکو الاستیک را در طول عمر بارگذاری ورق برای بارهای محوری مختلف نشان می‌دهد.

الاستیک، با گذشت زمان و افزایش طول عمر سازه جابجایی‌های ورق افزایش می‌یابد. از طرف دیگر افزایش فشار محوری (بارگذاری داخل صفحه) باعث افزایش جابجایی‌های حداکثر ورق می‌گردد. برخلاف روند افزایش جابجایی‌ها در طول زمان، نرخ افزایش تغییر شکل‌های ورق با اضافه شدن بارهای محوری افزایش می‌یابد به گونه‌ای که با گذر از مقادیر مشخصی از بار محوری، تغییر شکل‌ها به یک باره

جدول ۲- جابجایی حداکثر ورق ویسکو الاستیک مربعی تحت بارگذاری محوری درون صفحه در جهت طولی ورق بر حسب میلی‌متر در زمان‌های مختلف

$N_y$ (N/mm)	زمان (s)					
	0	5	100	300	900	1800
0	0.005826	0.006814	0.007139	0.007404	0.007628	0.007808
600	0.006396	0.007604	0.008080	0.008348	0.008633	0.008865
1200	0.007087	0.008598	0.009214	0.009563	0.009938	0.010245
1800	0.007944	0.009885	0.010711	0.011186	0.011700	0.012127
2400	0.009033	0.011617	0.012782	0.013460	0.014210	0.014839
3000	0.010465	0.014069	0.015830	0.016878	0.018066	0.019086
3600	0.012431	0.017799	0.020756	0.022580	0.024738	0.026655
4200	0.015296	0.024126	0.03345	0.033955	0.03898	0.043776
4800	0.019864	0.036997	0.053818	0.067099	0.088406	0.113575
5400	0.028289	0.074466	0.0212180	0.488672	2.711845	----
6000	0.049031	0.360802	----	----	----	----
6600	0.182470	----	----	----	----	----
6688	2.114777	----	----	----	----	----



شکل ۲- جابجایی حداکثر یک ورق ویسکو الاستیک چهار طرف مفصل تحت بارگذاری محوری درون صفحه در جهت طولی ورق در زمان‌های مختلف از شروع بارگذاری ورق

بر همین اساس برای ورق مذکور بار بحرانی در طول عمر بارگذاری آن محاسبه شده است و نتایج آن در جدول ۳ نشان داده شده است. شایان ذکر است که در جدول ۳ علاوه بر بار بحرانی، ضریب کماتش ورق نشان داده شده که مقدار آن به کمک رابطه (۷۳) تعیین شده است.

$$N_y = N_{cr} = K \frac{\pi^2 E_{(t=0)} h^3}{12(1-\nu^2) I_x^2} \quad (73)$$

همان گونه که از مقادیر جدول ۳ نیز مشخص است با گذشت زمان از شروع بارگذاری ورق، بدلیل رفتار ویسکوز ماده سختی آن به مرور کاهش می‌یابد و به همین دلیل بار کماتش و ضریب کماتش نیز کاهش می‌یابند. روند کاهش مقدار بار بحرانی نیز همانند جابجایی‌های ورق در طول زمان دارای نرخ متغیر است به گونه‌ای که نرخ کاهش بار بحرانی در لحظات اولیه بارگذاری بسیار بیشتر و شدیدتر است و به مرور زمان هرچه عمر بارگذاری ورق بیشتر می‌شود نرخ کاهش بار بحرانی نیز کاهش می‌یابد. برای بررسی صحت محاسبات انجام شده به روش نوار محدود در تحقیق حاضر می‌توان نتایج حاصل از روش حاضر را در زمان اولیه بارگذاری یعنی  $T=0$  با نتایج دقیق حاصل از آنالیز پایداری ورق الاستیک مقایسه کرد.

**جدول ۳- مقادیر بار بحرانی و ضریب کماتش ورق ویسکو الاستیک مربعی به ضخامت ۵۰ میلی‌متر در زمان‌های مختلف**

عمر بارگذاری ورق	ضریب کماتش (K)	$N_{cr}$ (N/mm)	زمان (s)
	3.7013	6688.54	0
	3.3780	6104.24	5
	3.2657	5901.25	10
	3.0405	5494.30	100
	2.9504	5331.52	300
	2.9303	5295.24	600
	2.9026	5245.23	900
	2.8543	5157.96	1200
	2.8348	5122.65	1500
	2.8272	5108.93	1800

نمودار شکل ۲ نشان می‌دهد که برای ایجاد یک جابجایی حداکثر مشخص در ورق ویسکو الاستیک با افزایش عمر بارگذاری سازه به نیروی محوری کمتری نیاز است. در حقیقت افزایش بار محوری جابجایی‌های نقاط مختلف ورق را بیشتر می‌کند و مقدار آن با گذشت زمان نیز افزایش می‌یابد. همچنین در این شکل افزایش ناگهانی جابجایی‌های ورق در اثر افزایش بار محوری و رسیدن آن به بار بحرانی ورق ویسکو الاستیک در زمان‌های مختلف نیز به وضوح نمایان است. از سوی دیگر بر اساس شکل ۲ افزایش جابجایی‌های ورق با افزایش بار محوری فشاری، در نواحی قبل از بار بحرانی رخ می‌دهد. به همین منظور جهت تعیین مقدار دقیق بار بحرانی ورق، باید یک روند استاندارد در نظر گرفته شود تا بر اساس آن بتوان بار کماتشی ورق را در تمام حالات بر مبنای یک روند دقیق و مشخص تعیین نمود.

در تحقیق حاضر جهت استاندارد کردن نحوه تعیین بار بحرانی از مقدار بار بحرانی ورق در لحظه اولیه بارگذاری استفاده می‌شود. بدین ترتیب که در لحظه شروع بارگذاری یعنی زمان  $T=0$  که هنوز انتگرال مربوط به رفتار ویسکوز ماده در محاسبات وارد نشده است، بار بحرانی ورق به کمک حل یک مسأله مقادیر ویژه تعیین گردد. در واقع برای تعیین بار بحرانی ورق در لحظه شروع بارگذاری به جای استفاده از رابطه (۶۹) که مبنای اصلی برنامه کامپیوتری نوشته شده در تحقیق پیش روست، از رابطه (۷۰) استفاده می‌شود. برای مثال در مورد ورقی با مشخصات مشابه ورقی که نتایج جابجایی‌های آن در جدول ۲ و به نمایش در آمده است، بار بحرانی از حل مسأله مقادیر ویژه برابر  $N_{cr0} = 6688.54 \text{ N/mm}$  بدست آمده است که محل مربوط به مقدار بار بحرانی مذکور در شکل ۲، با خط چین نشان داده شده است. همان گونه که در جدول ۲ نیز نشان داده شده است مقدار جابجایی حداکثر ورق در زمان  $T=0$  به ازای اعمال بار فشاری محوری  $N_y = 6688.54 \text{ N/mm}$ ، برابر با  $W_{mid} = 2.11 \text{ mm}$  بدست آمده است. بنابر این برای سایر زمان‌های بارگذاری می‌توان گفت بار بحرانی مقداری نیروی فشاری محوری است که در ورق در زمان مورد نظر، جابجایی حداکثر برابر با  $W_{mid} = 2.11 \text{ mm}$  ایجاد می‌کند.

شده است. نتایج جدول ۵ نیز صحت نتایج حاصله را در لحظه شروع بارگذاری تایید می‌کند.

با حصول اطمینان از صحت پاسخ‌های بدست آمده می‌توان تغییرات بار بحرانی ورق را در طول عمر بارگذاری ورق ویسکوالاستیک به روش نوار محدود ارزیابی نمود. به همین منظور تغییرات بار بحرانی ورق برای ورق‌هایی با ضخامت‌های مختلف در طول زمان در شکل ۳ به نمایش در آمده است.

از طرف دیگر برای تعیین نحوه تغییرات ضریب کمانش ورق ویسکوالاستیک در طول زمان بارگذاری سازه، جدول ۶ تغییرات ضریب کمانش ورق را برای ورق‌های دارای طول و عرض یکسان ولی ضخامت‌های مختلف نشان می‌دهد.

نمودار شکل ۳ و جدول ۶ به خوبی بیان‌گر رفتار ویسکوالاستیک ورق در زمان کمانش هستند. از سوی دیگر مقایسه همزمان آن‌ها نشان دهنده کاهش مقادیر بار بحرانی با کاهش ضخامت ورق بوده که بر خلاف روند مشاهده شده برای ضریب کمانش ورق می‌باشد.

به همین منظور ضریب کمانش برای ورق مربعی ارزیابی شده است و نتایج آن در جدول ۴ به نمایش در آمده است. در جدول مذکور نتایج حاصل از روش نوار محدود با نتایج ارائه شده در مراجع [۲۱] و [۱۱] مقایسه شده است. شایان ذکر است که برای مقایسه مناسب با تحقیقات مذکور، مشابه روابط ارائه شده در آن‌ها فقط از جمله آخر در رابطه (۳۶) استفاده شده و مقدار نسبت پواسون برابر با  $\nu = 0.3$  فرض شده است.

جدول ۴ به خوبی نشان می‌دهد که روش نوار محدود با قدرت مناسبی می‌تواند پاسخ‌های نزدیک‌تر به پاسخ دقیق ارائه دهد به نحوی که با بکارگیری ۱۵ نوار به پاسخ‌هایی با اختلاف کمتر از ۰/۱ درصد با پاسخ سایر روش‌ها دست خواهد یافت.

جهت مقایسه بهتر نتایج حاصله، مقادیر ضریب کمانشی ورق برای حالاتی که ورق علاوه بر بار درون صفحه در جهت طولی تحت بارگذاری عرضی نیز باشد هم با نتایج حاصل از مرجع [۲۱] مقایسه شده است که در جدول ۵ نشان داده

جدول ۴- مقایسه ضریب کمانش ورق ویسکوالاستیک در لحظه شروع بارگذاری با مراجع [۲۱] و [۱۱]

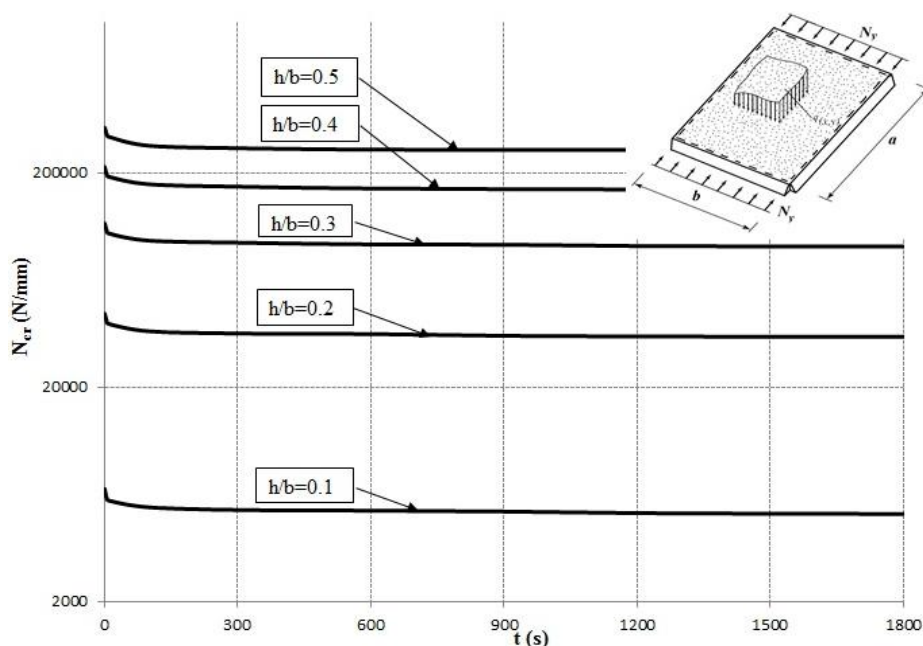
ضخامت ورق (mm)	نسبت عرض به ضخامت	ضریب کمانش ورق (K)			اختلاف (%)
		روش نوار محدود <sup>۱</sup>	مرجع [۲۱]	مرجع [۱۱]	
250	2	1.676087	1.6760	1.6759766	0.0066
125	4	2.961471	2.9607	2.9607415	0.0246
100	5	3.266344	3.2653	3.2653415	0.0307
50	10	3.788578	3.7866	3.7865883	0.0525
25	20	3.947737	3.9444	3.9443956	0.0847
10	50	3.996682	3.9910	3.9909969	0.1424

<sup>۱</sup> نتایج نوار محدود به کمک ۱۵ نوار و فقط استفاده از جمله آخر در رابطه (۳۶) بدست آمده است.

جدول ۵- مقادیر ضریب کمانش ورق ویسکوالاستیک در لحظه شروع بارگذاری

ضخامت ورق (mm)	نسبت عرض به ضخامت	$N_x = 0.5N_y$		$N_x = N_y$	
		روش نوار محدود <sup>۱</sup>	مرجع [۲۱]	روش نوار محدود <sup>۱</sup>	مرجع [۲۱]
250	2	1.117391	1.1173	0.838043	0.8380
125	4	1.974307	1.9738	1.480727	1.4804
100	5	2.177553	2.1769	1.633161	1.6327
50	10	2.525710	2.5244	1.894279	1.8933
25	20	2.631824	2.6296	1.973867	1.9722
10	50	2.664454	2.6607	1.998340	1.9955

<sup>۱</sup> نتایج نوار محدود به کمک ۱۵ نوار و فقط استفاده از جمله آخر در رابطه (۳۶) بدست آمده است.



شکل ۳- تغییرات بار بحرانی ورق ویسکو الاستیک تحت بارگذاری محوری درون صفحه در جهت طولی ورق در زمان‌های مختلف

جدول ۶- مقادیر ضریب کمانش ورق ویسکو الاستیک مربعی در زمان‌های مختلف عمر بارگذاری ورق

زمان (s)	$h/b = 0.1$	$h/b = 0.2$	$h/b = 0.3$	$h/b = 0.4$	$h/b = 0.5$
0	3.70136	3.04248	2.37469	1.83618	1.43341
5	3.37801	2.82518	2.21129	1.70894	1.34585
10	3.26568	2.72391	2.13290	1.65532	1.30182
100	3.04048	2.51838	1.97445	1.52730	1.18304
300	2.95040	2.45699	1.93090	1.48642	1.15042
600	2.93032	2.44200	1.89510	1.45838	1.13349
900	2.90264	2.39520	1.88929	1.44715	1.12897
1200	2.85435	2.37878	1.86308	1.44226	1.12872
1500	2.83481	2.37505	1.85324	1.44152	1.12870
1800	2.82722	2.37417	1.85002	1.44142	1.12541

پس از بررسی اثر تغییرات ضخامت ورق بر میزان بار بحرانی و تغییرات آن در طول زمان، در ادامه به بررسی اثر تنش‌های جهت عرضی ورق بر ظرفیت کمانشی آن پرداخته می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۱ نشان داده شده بود روش نوار محدود به کار گرفته شده در تحقیق حاضر توانایی منظور نمودن اثر بارگذاری عرضی محوری درون صفحه را نیز دارا می‌باشد. در واقع کافی است تنها در رابطه نوار محدود (۶۹) یا رابطه مقادیر ویژه (۷۰) مقدار بار  $N_x$  نیز در نظر گرفته شود.

از سوی دیگر برای مقایسه نتایج حاصل از تئوری‌های مختلف برشی برای ورقی مربعی نتایج حاصل از روش تحقیق حاضر با نتایج ارائه در مراجع [۱۶] و [۱۷] مقایسه شده است. مراجع مذکور به کمک روش نوار محدود به محاسبه بار بحرانی ورق در زمان‌های مختلف پرداخته‌اند که مرجع [۱۶] بر اساس تئوری کلاسیک ورق و مرجع [۱۷] بر اساس تئوری برشی مرتبه اول بار بحرانی ورق را تعیین کرده است. نتایج مقایسه مذکور برای ورقی با نسبت عرض به ضخامت برابر ۱۰ در جدول ۷ نشان داده شده است. مسلماً با کاهش ضخامت اختلاف نتایج حاصله کمتر خواهد شد.

جدول ۷- مقادیر ضریب کمانش ورق ویسکو الاستیک مربعی در زمان‌های مختلف عمر بارگذاری برای ورقی با نسبت عرض به ضخامت  $b/h = 10$  بر اساس تئوری‌های مختلف برشی ورق

زمان (s)	CPT [16]	FSDT [17]	TSDT (Present Study)
0	4.00000	3.76344	3.70136
5	3.50591	3.42522	3.37801
10	3.39597	3.30638	3.26568
100	3.20615	3.08823	3.04048
300	3.14005	2.95311	2.95040
600	3.06381	2.93412	2.93032
900	3.04379	2.93086	2.90264
1200	3.02431	3.91838	2.85435
1500	2.99186	2.91838	2.83481
1800	2.97086	2.88202	2.82722

ویسکو الاستیک کاملاً قابل مشاهده است به گونه‌ای که بار کمانشی ورق با گذشت زمان از لحظه شروع بارگذاری کاهش می‌یابد. همچنین نرخ کاهش بار بحرانی در لحظات اولیه بارگذاری بسیار شدیدتر بوده و با گذشت زمان کاهش می‌یابد به گونه‌ای که در زمان‌های بالاتر تغییرات چندانی در بار بحرانی ورق با گذشت زمان دیده نمی‌شود.

مشابه روندی که در جدول ۸ به کار گرفته شد، می‌توان با محاسبه بار بحرانی ورق تحت اثر سایر مقادیر بار  $N_x$ ، نمودار اندرکنش اثرات بارگذاری دو محوره را برای یک ورق ویسکو الاستیک ترسیم کرد. به این ترتیب نمودار شکل ۵ حاصل خواهد شد که بیان‌گر اثر اندرکنش بارگذاری محوری برای یک ورق چهار طرف مفصل ویسکو الاستیک می‌باشد.

با مشاهده نمودار شکل ۵ می‌توان دریافت که از یک سو افزایش زمان بارگذاری مانند هر رفتار دیگر یک ماده ویسکو الاستیک باعث کاهش مقاومت عضو و کاهش بار بحرانی آن می‌گردد. از سوی دیگر افزایش بار محوری هر راستا باعث کاهش بار بحرانی راستای دیگر می‌شود و با توجه به این که ورق انتخاب شده مربعی است، رفتار آن در هر راستا عیناً مشابه روند کاهش بار بحرانی راستای دیگر است.

همچنین با مشاهده دقیق‌تر نمودار شکل ۵ مشخص می‌شود که اندرکنش بارگذاری دو محوره در ورق مورد نظر دارای یک رفتار تقریباً خطی است و در واقع به ازای افزایش بار درون صفحه‌ی هر راستا بار بحرانی راستای دیگر تقریباً به همان اندازه کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر برای ورق مربعی چهار طرف مفصل ویسکو الاستیک می‌توان گفت که حاصل

برای محاسبه بار بحرانی ورق مذکور ابتدا باید بار عرضی  $N_x$  به صورت گام به گام از مقدار صفر به ورق اضافه می‌شود و به ازای هر مقدار آن بار کمانشی ورق در جهت طولی در زمان‌های مختلف از عمر بارگذاری سازه محاسبه می‌گردد. واضح است که در هر گام اعمال بار  $N_x$ ، ابتدا یک مسأله مقادیر ویژه بر اساس رابطه (۷۰) حل شده و بار کمانشی این ورق در لحظه  $T=0$  تعیین می‌شود. سپس جابجایی حداکثر ورق متناظر با آن تعیین شده و در سایر زمان‌ها بار محوری که ایجاد چنین جابجایی را می‌کند به عنوان بار بحرانی ورق در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال جدول ۸ مقادیر بار بحرانی، ضریب کمانش و جابجایی حداکثر ورق متناسب با آن را در لحظه اولیه بارگذاری نشان می‌دهد که به کمک حل رابطه مقادیر ویژه (۷۰) بدست آمده است. مقادیر بدست آمده در جدول ۸ نشان می‌دهد که مطابق انتظار افزایش بارگذاری جهت عرضی ورق باعث کمتر شدن مقاومت کمانشی راستای طولی ورق شده و در نتیجه بار بحرانی آن کاهش می‌یابد.

به کمک جابجایی‌های حداکثر محاسبه شده در جدول ۸ تحت اثر هر کدام از مقادیر نسبت‌های  $N_x/N_y$ ، بار کمانشی ورق در زمان‌های دیگر تعیین می‌گردد. برای نمونه در شکل ۴ تغییرات مقادیر ضریب کمانش ورق برای نسبت‌های مختلف  $N_x/N_y$  در طول زمان نشان داده شده است.

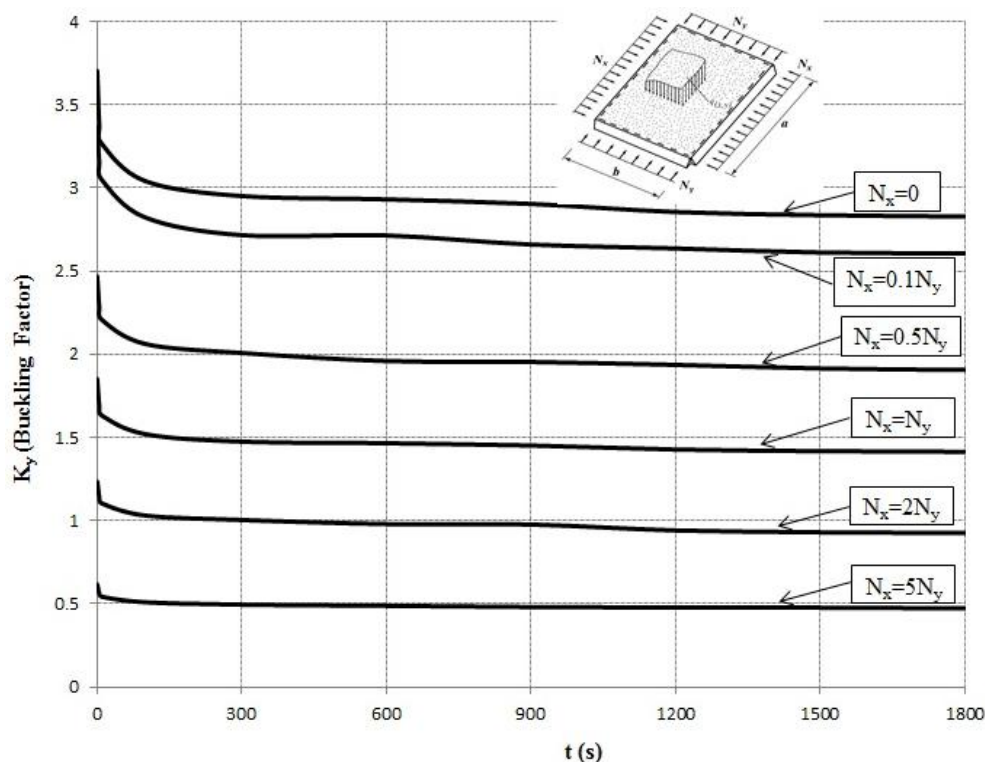
شکل ۴ نشان می‌دهد که در تمامی زمان‌های بارگذاری ورق، افزایش میزان بار محوری ورق در جهت عرضی باعث کم شدن بار کمانشی راستای طولی آن می‌شود. از طرف دیگر به ازای اعمال هر یک از مقادیر بار  $N_x$ ، رفتار ورق

از آنجا که محاسبه بار بحرانی ورق‌های ضخیم مد نظر تحقیق پیش روست، مشابه روند فوق برای ورق‌های با ضخامت بیشتر نیز انجام گرفته که در شکل‌های ۶ تا ۱۳ به نمایش در آمده است. شکل‌های ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ تغییرات ضریبی کمانش ورق بر حسب زمان را برای نسبت‌های مختلف  $N_x/N_y$  به ترتیب برای ضخامت‌های ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۰۰ و ۲۵۰ میلی‌متر نشان می‌دهد. همچنین شکل‌های ۷، ۹، ۱۱ و ۱۳ نمودار اندرکنش بارهای محوری درون صفحه را برای زمان‌های مختلف به ترتیب برای ضخامت‌های ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۰۰ و ۲۵۰ میلی‌متر نشان می‌دهد. روند مشاهده شده در شکل‌های ۶ تا ۱۳ مشابه شکل‌های ۴ و ۵ می‌باشد و فقط بدلیل تغییر ضخامت ورق مقادیر ضریب کمانش در آن‌ها مشابه با نمودار شکل ۳ و جدول ۶ با افزایش ضخامت کاهش می‌یابد.

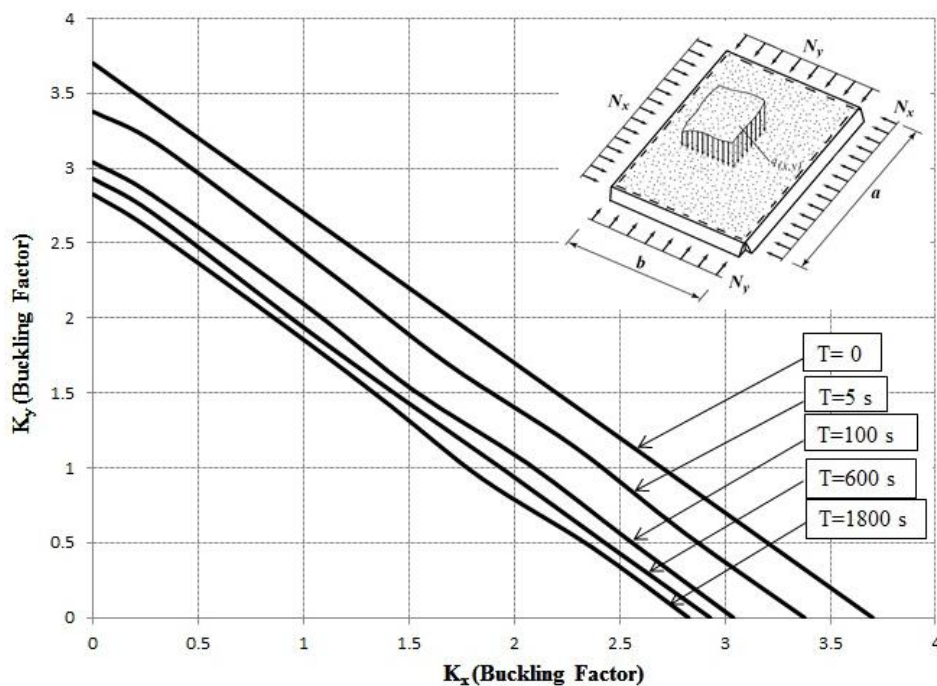
مجموع بارهای درون صفحه راستاهای طولی و عرضی که در هر زمان به ورق اعمال می‌شود در لحظه کمانش مقدار ثابتی دارد.

جدول ۸- مقادیر بار بحرانی، ضریب کمانش و جابجایی حداکثر ورق متناظر با بار بحرانی مذکور برای برای ورقی با نسبت عرض به ضخامت  $b/h=10$  تحت اثر بارگذاری دو

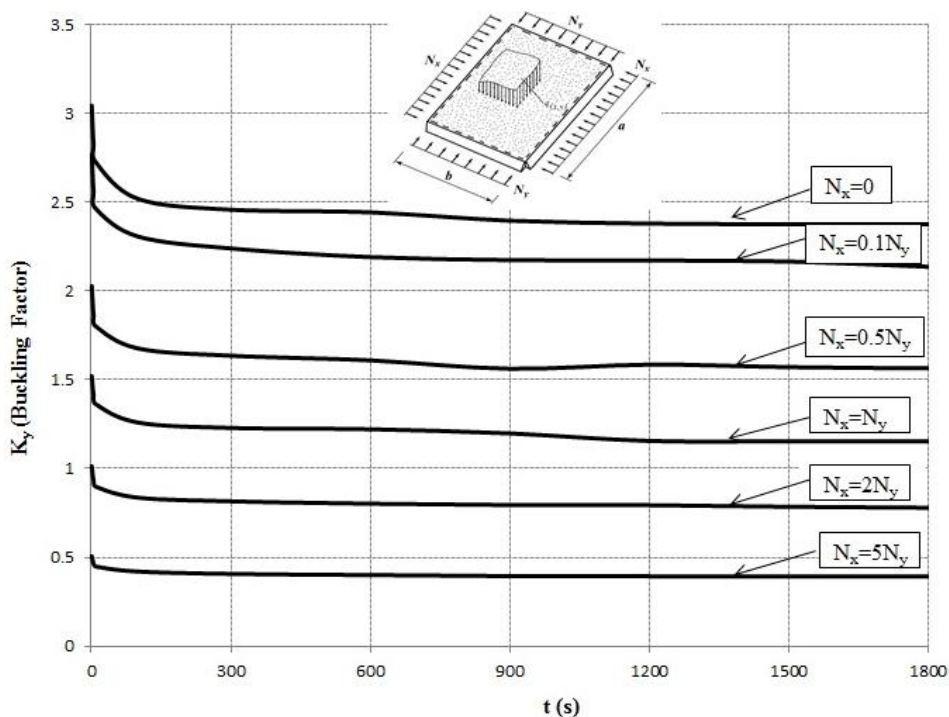
محوره درون صفحه			
نسبت $N_x/N_y$	بار بحرانی $(N_y)$ (N/mm)	ضریب کمانش (K)	جابجایی حداکثر ورق (mm)
0.0	6688.54	3.70136	2.11
0.1	6080.48	3.36486	4.78
0.5	4458.98	2.46754	4.30
1.0	3344.22	1.85065	2.13
2.0	2229.47	1.23376	4.33
5.0	1114.73	0.61688	1.39



شکل ۴- تغییرات ضریب کمانش ورق ویسکو الاستیک با نسبت عرض به ضخامت  $b/h=10$  تحت بارگذاری محوری دو محوره ورق در زمان‌های مختلف

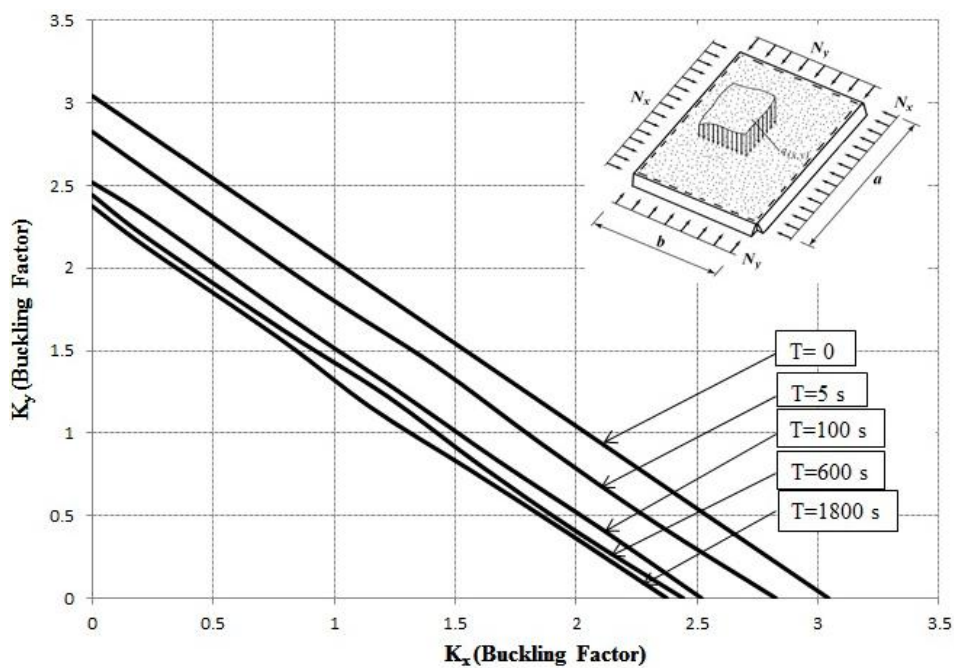


شکل ۵- نمودار اندرکنش بارگذاری دو محوره درون صفحه یک ورق ویسکو الاستیک مربعی با نسبت عرض به ضخامت  $b/h = 10$  در زمان‌های مختلف از شروع بارگذاری

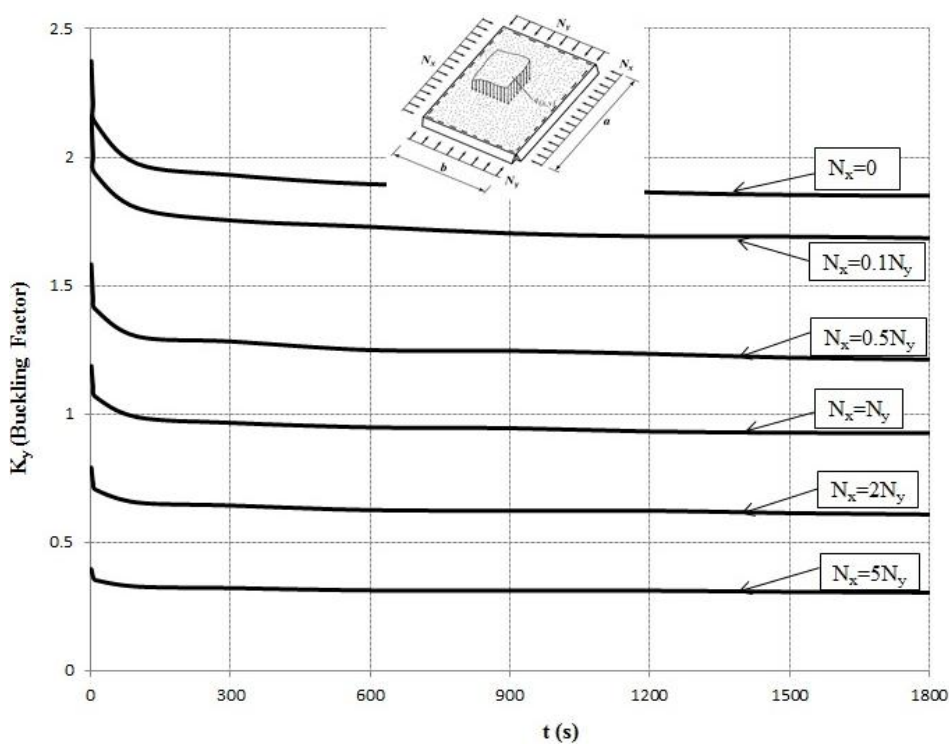


شکل ۶- تغییرات ضریب کماتش ورق ویسکو الاستیک با نسبت ضخامت به عرض  $h/b = 0.2$  تحت بارگذاری محوری دو محوره ورق در زمان‌های مختلف

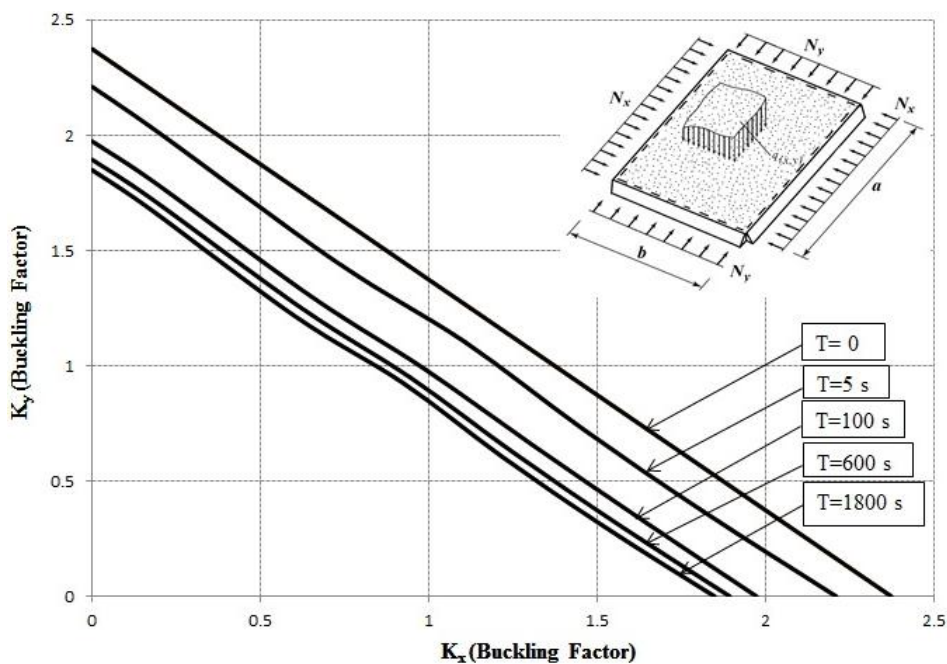




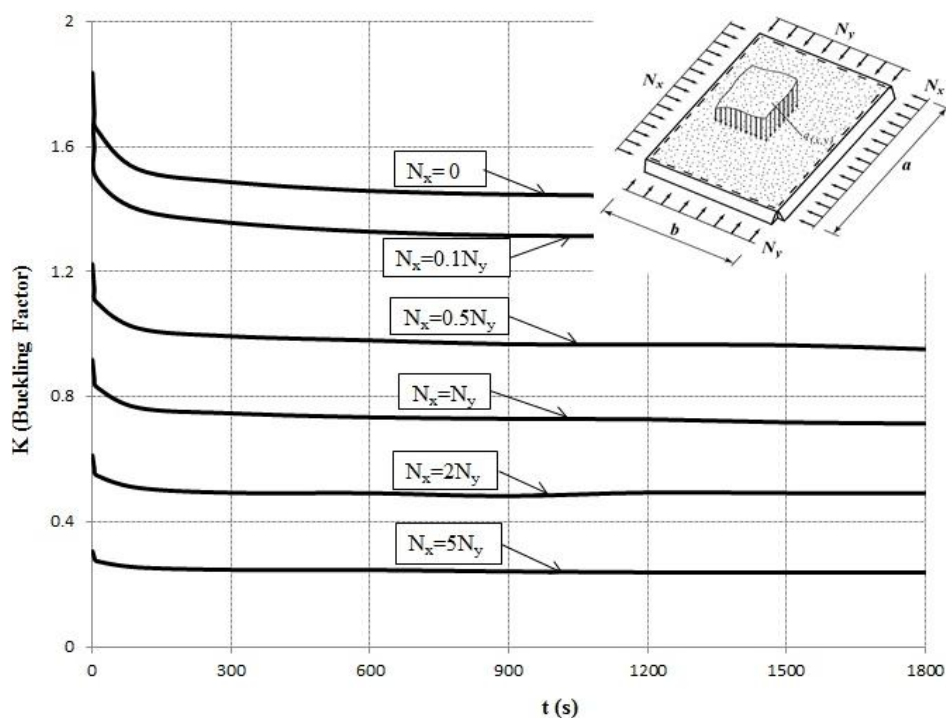
شکل ۷- نمودار اندرکنش بارگذاری دو محوره درون صفحه یک ورق ویسکو الاستیک مربعی با نسبت ضخامت به عرض  $h/b=0.2$  در زمان‌های مختلف از شروع بارگذاری



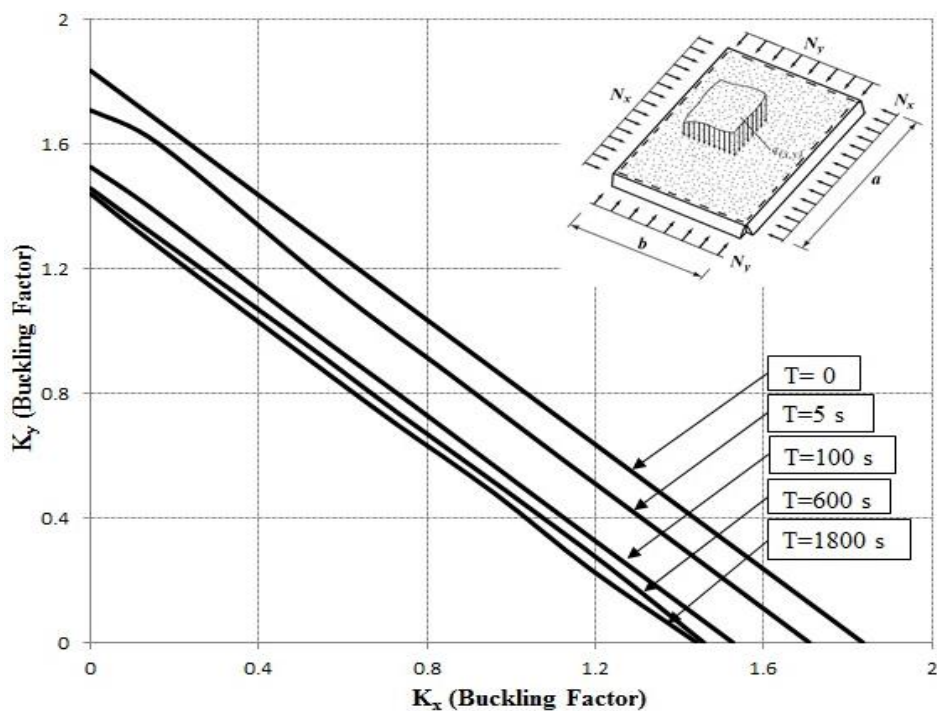
شکل ۸- تغییرات ضریب کماتش ورق ویسکو الاستیک با نسبت ضخامت به عرض  $h/b=0.3$  تحت بارگذاری محوری دو محوره ورق در زمان‌های مختلف



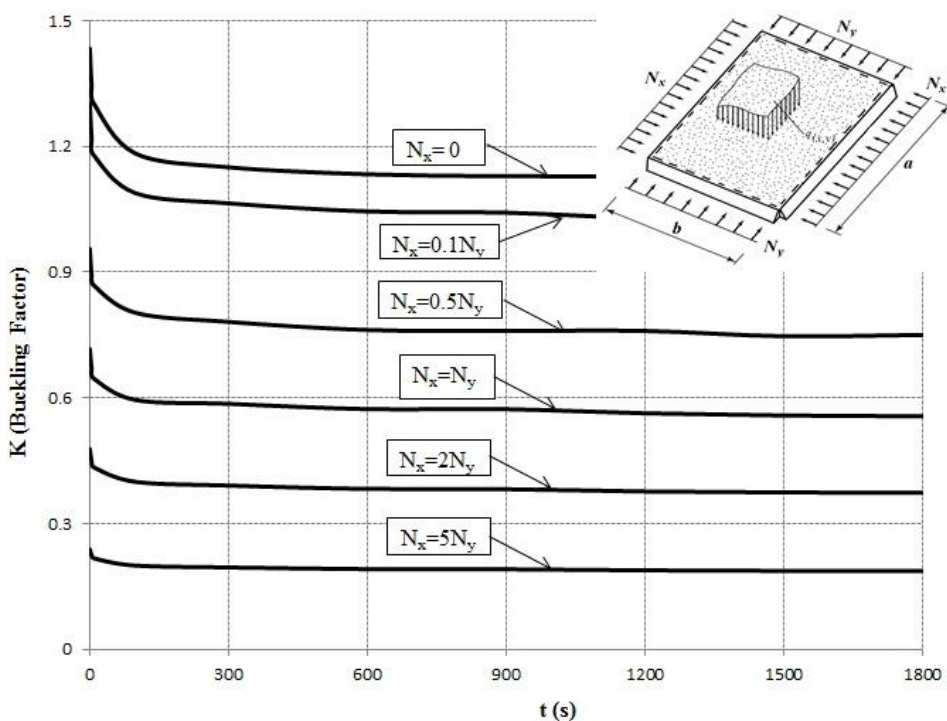
شکل ۹- نمودار اندرکنش بارگذاری دو محوره درون صفحه یک ورق ویسکو الاستیک مربعی با نسبت ضخامت به عرض  $h/b=0.3$  در زمان‌های مختلف از شروع بارگذاری



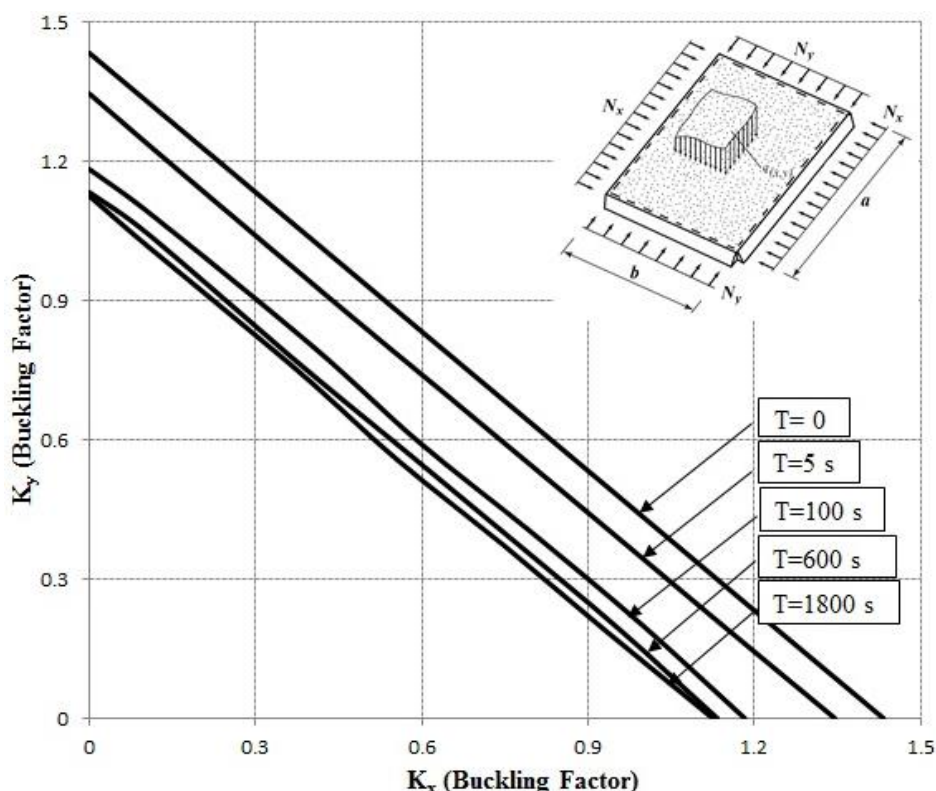
شکل ۱۰- تغییرات ضریب کماتش ورق ویسکو الاستیک با نسبت ضخامت به عرض  $h/b=0.4$  تحت بارگذاری محوری دو محوره ورق در زمان‌های مختلف



شکل ۱۱- نمودار اندرکنش بارگذاری دو محوره درون صفحه یک ورق ویسکو الاستیک مربعی با نسبت ضخامت به عرض  $h/b=0.4$  در زمان‌های مختلف از شروع بارگذاری



شکل ۱۲- تغییرات ضریب کماتش ورق ویسکو الاستیک با نسبت ضخامت به عرض  $h/b=0.5$  تحت بارگذاری محوری دو محوره ورق در زمان‌های مختلف



شکل ۱۳- نمودار اندرکنش بارگذاری دو محوره درون صفحه یک ورق ویسکو الاستیک مربعی با نسبت ضخامت به عرض  $h/b = 0.5$  در زمان‌های مختلف از شروع بارگذاری

##### ۵- نتیجه گیری

در مقاله حاضر به بررسی خاصیت ویسکو الاستیسیته ورق‌های ضخیم پرداخته شده است. جهت استخراج ماتریس‌های سختی و بردارهای نیرویی از رابطه کار مجازی استفاده گردیده است. به این ترتیب پس از درونیابی تغییرشکل‌ها، رابطه کار مجازی برای هر المان نوشته شده و ماتریس‌های سختی استاندارد، سختی هندسی و بردارهای نیرویی بر اساس آن استخراج شده است. از آنجایی مشخصات ماده در طول زمان تغییر می‌کند، لازم است تا بازه زمانی مورد نظر در مسأله به تعدادی بازه زمانی کوچکتر تقسیم شود. بدین ترتیب مسأله به کمک حل یک مسأله مقادیر اولیه بررسی خواهد شد. در واقع انتگرال‌های به کار رفته در بیان رفتار ویسکو الاستیک ماده به صورت حاصل جمع انتگرال‌های مجزا در بازه‌های زمانی کوچک‌تر تقریب زده می‌شوند. بدین ترتیب حل مسأله در هر زمان به تاریخچه تغییرشکل‌های آن وابسته خواهد بود.

در ادامه تحقیق پدیده کمانش ورق‌ها مورد بررسی قرار گرفت. کمانش ورق‌ها پدیده‌ای است که در اثر اعمال فشارهای داخلی باعث به صفر رسیدن سختی سازه شده و در آن تغییر شکل‌های بزرگ و بعضاً غیر قابل برگشت ایجاد می‌کند. به منظور بررسی صحت پاسخ‌های بدست آمده از نتایج حاصله در زمان اولیه بارگذاری استفاده شده است. به همین منظور بار وارد بر سطح ورق حذف شده و بار کمانشی ورق به کمک حل یک مسأله مقادیر ویژه بدست آمده است. قابل ذکر است که بر خلاف روند محاسبه بار کمانش سازه‌ها با فرض رفتار الاستیک و فرضیات تغییر شکل‌های کوچک، که منجر به حل یک مسأله مقادیر ویژه می‌شود و در آن مقدار تغییر شکل نقاط مختلف سازه در لحظه کمانش اهمیتی ندارد، در تحقیق حاضر، علی‌رغم این که تغییر شکل‌ها کوچک بوده ولی به دلیل وجود رفتار ویسکوز ورق، روند محاسبه بار کمانش به یک روند غیر خطی منتهی می‌شود که در آن جابجایی نقاط مختلف ورق مستقیماً

وضعیت ماده گردیده و تغییرات ایجاد شده در بار بحرانی را در اثر گذر زمان به شدت کاهش می‌دهد.

محاسبات انجام شده نشان می‌دهد که همانند ورق‌های الاستیک افزایش ضخامت ورق باعث افزایش بار بحرانی ورق ولی ضریب کماتش کاهش می‌یابد. همچنین قابل ذکر است که رفتار بیان شده، در تمامی زمان‌های عمر بارگذاری ورق قابل مشاهده است. زمانی که یک ورق ویسکو الاستیک تحت تأثیر بارگذاری درون صفحه دو محوره قرار می‌گیرد، افزایش بارگذاری جهت عرضی ورق سختی ورق کاهش می‌یابد و باعث کمتر شدن مقاومت کماتشی ورق در راستای طولی شده و در نتیجه بار بحرانی آن کاهش می‌یابد. منحنی اندرکنش بارگذاری دو محوره در ورق دارای یک رفتار تقریباً خطی است و در واقع به ازای افزایش بار درون صفحه هر راستا بار بحرانی راستای دیگر تقریباً به همان اندازه کاهش می‌یابد.

#### ۶- مراجع

- [1] Christensen RM (1982) Theory of viscoelasticity (2nd edn). Academic Press, New York.
- [2] Akoz Y, Kadioglu F (1999) The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams. Int J Numer Meth Eng 44: 1909-1923.
- [3] Chen Q, Chan YW (2000) Integral finite element method for dynamical analysis of elastic-viscoelastic composite structures. Comput Struct 74: 51-64.
- [4] Palfalvi A (2008) A comparison of finite element formulations for dynamics of viscoelastic beams. Finite Elem Anal Des 44: 814-818.
- [5] Johnson AR, Tessler A, Dambach M (1997) Dynamics of thick viscoelastic beams. J Eng Mater-T ASME 119: 273-278.
- [6] Ranzi G, Zona A (2007) A steel-concrete composite beam model with partial interaction including the shear deformability of the steel component. Eng Struct 29: 3026-3014.
- [7] Sheng DF, Cheng CJ (2004) Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic thick plates with damage. Int J Solids Struct 41: 7287-7308.
- [8] Hatami S, Ronagh HR, Azhari M (2008) Exact free vibration analysis of axially moving viscoelastic plates. Comput Struct 86: 1738-1746.
- [9] Jin G, Yang C, Liu Z (2016) Vibration and damping analysis of sandwich viscoelastic-core beam using Reddy's higher-order theory. Compos Struct 140: 390-409.

ارزیابی می‌گردد. با این حال همانند مسائل مقادیر ویژه، مقدار دقیق جابجایی‌ها در لحظه کماتش اهمیتی نداشته و از آن صرفاً برای تعیین باری که ایجاد چنین جابجایی بزرگی کرده استفاده می‌شود که در واقع همان بار بحرانی ورق مورد نظر است.

نتایج بدست آمده برای ورق‌هایی که علاوه بر بار جانبی تحت بارگذاری محوری نیز قرار دارند نشان دهنده این مطلب است که مطابق با رفتار مورد انتظار از یک ماده ویسکو الاستیک، با گذشت زمان و افزایش طول عمر سازه جابجایی‌های ورق افزایش می‌یابند به صورتی که نرخ افزایش تغییر شکل‌ها در ابتدای زمان بارگذاری بسیار بیشتر است و با افزایش عمر بارگذاری سازه، نرخ افزایش جابجایی‌ها کاهش می‌یابد. از طرف دیگر افزایش فشار محوری (بارگذاری داخل صفحه) باعث افزایش جابجایی‌های حداکثر ورق می‌گردد. برخلاف روند افزایش جابجایی‌ها در طول زمان، نرخ افزایش تغییر شکل‌های ورق با اضافه شدن بارهای محوری افزایش می‌یابد به گونه‌ای که با گذر از مقادیر مشخصی از بار محوری، تغییر شکل‌ها به یک باره دچار افزایش ناگهانی خواهند شد که می‌توان مقادیر مشخص مذکور را بار کماتشی ورق نامید.

با گذشت زمان از شروع بارگذاری ورق، بدلیل رفتار ویسکوز ماده سختی آن به مرور کاهش می‌یابد و به همین دلیل بار کماتش و ضریب کماتش نیز کاهش می‌یابند. روند کاهش مقدار بار بحرانی نیز همانند جابجایی‌های ورق در طول زمان دارای نرخ متغیر است به گونه‌ای که نرخ کاهش بار بحرانی در لحظات اولیه بارگذاری بسیار بیشتر و شدیدتر است و به مرور زمان هرچه عمر بارگذاری ورق بیشتر می‌شود نرخ کاهش بار بحرانی نیز کاهش می‌یابد. بر این اساس می‌توان گفت که کاهش نرخ تغییرات بار بحرانی با اضافه شدن عمر بارگذاری سازه، یکی از خواص مواد ویسکو الاستیک است. در واقع در لحظه شروع بارگذاری که هنوز رفتار ویسکوز ماده مؤثر نیست بار بحرانی بر مبنای خاصیت الاستیک ماده تعیین می‌شود ولی پس از آن، خاصیت ویسکوزیته ماده کم کم وارد عمل شده و باعث کاهش مقاومت عضو و در نتیجه کاهش بار بحرانی ورق می‌گردد. اما با گذشت زمان مقاومت ویسکوزیته ماده باعث پایدار شدن

- discretized nonlinear finite strip method using bubble functions. *Compos Struct* 100: 205-217.
- [17] Amoushahi H, Azhari M (2014) Static and instability analysis of moderately thick viscoelastic plates using a fully discretized nonlinear finite strip formulation. *Compos Part B-Eng* 56: 222-231.
- [18] Amoushahi H, Azhari M, Heidarpour A (2015) A fully discretised nonlinear finite strip formulation for prebuckling and buckling analyses of viscoelastic plates subjected to time-dependent loading. *Mech Adv Mater Struc* 22(8): 655-669.
- [19] Szilard R (2004) Theories and applications of plate analysis. John Wiley & Sons.
- [20] Lai J, Bakker A (1996) 3-D Schapery representation for non-linear viscoelasticity and finite element implementation. *Comput Mech* 18: 182-191.
- [21] Zenkour AM (2004) Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories. *J Eng Math* 50: 75-93.
- [10] Ready JN (1985) A simple higher order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech-T ASME* 51: 745-752.
- [11] Reddy JN, Phan ND (1985) Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher order shear deformation theory. *J Sound Vib* 98(2): 157-170.
- [12] Bradford MA, Azhari M (1995) Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method. *Comput Struct* 56: 75-83.
- [13] Amoushahi H, Azhari M (2009) Buckling of composite FRP structural plates using the complex finite strip method. *Compos Struct* 90: 92-99.
- [14] Jafari N, Azhari M, Heidarpour A (2011) Local buckling of thin and moderately thick variable thickness viscoelastic composite plates. *Struct Eng Mech* 40(6): 783-800.
- [15] Jafari N, Azhari M, Heidarpour A (2012) Local buckling rectangular viscoelastic composite plates. Accepted in *Mech Adv Mater Struc*.
- [16] Amoushahi H, Azhari M (2013) Static analysis and buckling of viscoelastic plates by a fully