



## تحلیل اجزای محدود پاسخ غیرخطی ضربه کم‌سرعت ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک، به کمک تئوری لایه‌ای

محمد حسن پاچناری<sup>۱</sup>، علی مظفری<sup>۲</sup> و محمد شرعیات<sup>۳\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوا و فضا، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی هوا و فضا، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

<sup>۳</sup> استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۱/۲۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۲/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۴/۱۲

### چکیده

در مقاله کنونی، رفتار دینامیکی ورق کامپوزیتی چندلایه با میرایی سازه‌ای ویسکوالاستیک در برابر ضربه کم‌سرعت ناشی از برخورد یک جسم کروی، مورد بررسی قرار گرفته است. قانون تماس هرتز، ابتدا جهت در نظر گرفتن اثر سختی لایه‌های زیرین بر سختی ناحیه تماس، تصحیح و سپس به فرم غیرخطی بکار گرفته شده است. مدل انتگرال سلسله مراتبی ولترا برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک مواد به کار رفته و برای مدل‌سازی دقیق‌تر رفتار ورق، از تئوری لایه‌ای و روابط کرنش جابجایی غیرخطی استفاده شده است. برای یافتن پاسخ معادلات دیفرانسیلی-انتگرالی حاکم، از ترکیب روش‌های اجزای محدود، انتگرال‌گیری دوزنقه‌ای برای انتگرال‌های ولترا و شیوه انتگرال-گیری عددی زمانی نیومارک بهره گرفته شده است. در بخش نتایج، اثر پارامترهای گوناگون رفتار ویسکوالاستیک مواد و نیز سرعت ضربه-زن بر تاریخچه‌های زمانی نیروی ضربه، میزان فروروی و خیز ورق، مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که به دلیل ماهیت میراسازی ساختاری مواد ویسکوالاستیک، سختی ورق و در نتیجه، نیروی ضربه، افزایش یافته، ولی خیز دینامیکی بیشینه پدید آمده در ورق و میزان فروروی، کاهش می‌یابد؛ همچنین، در حالت کلی، افزایش نیروی تماس، بیانگر افزایش میزان فروروی نمی‌باشد.

**کلمات کلیدی:** ضربه کم‌سرعت؛ ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک؛ قانون تماس هرتز؛ اجزای محدود؛ تئوری لایه‌ای.

## Non-Linear Finite Element Low-Velocity Impact Response Analysis of a Viscoelastic Composite Plate, Employing a Layerwise Theory

M.H. Pachenari<sup>1</sup>, A. Mozaffari<sup>2</sup>, M. Shariyat<sup>3,\*</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. candidate, Faculty of Aerospace Eng., K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Assistant Professor, Faculty of Aerospace Eng., K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Professor, Faculty of Mechanical Eng., K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

### Abstract

In the present paper, dynamic behavior of a multilayer composite plate with viscoelastic structural damping is investigated against a low-velocity impact by a spherical indenter. Hertz contact law is refined to include effect of the lower layers on the stiffness of the contact region and used in a non-linear form. Voltra hierarchical integral is employed for modeling the viscoelastic material and the layerwise theory and non-linear strain-displacement relations are used to model the plate more accurately. To solve the governing integro-differential equations, a combination of the finite element method, trapezoidal integration method for the Volterra integrals, and the Newmark numerical time integration method is used. In the results section, effects of the various viscoelasticity parameters and the indenter velocity on the time histories of the contact force, indentation, and lateral deflection of the plate are investigated. Results show that due to the damping nature of the viscoelastic materials, the plate rigidity and contact force increase whereas the maximum lateral deflection and the indentation decrease. Furthermore, higher contact forces do not necessarily indicate higher indentations.

**Keywords:** Low-velocity impact; Viscoelastic; Hertz contact law; Finite element; Layerwise theory.

## ۱- مقدمه

سازه‌های کامپوزیتی چندلایه، به طورگسترده‌ای در صنایع مختلف مورد استفاده قرار گرفته‌اند. با وجود برتری‌هایی مانند نسبت استحکام به وزن بالا، برخی از نارسایی‌های این گونه از سازه‌ها، مانند آسیب‌پذیری در برابر بارهای ضربه‌ای پیش‌بینی نشده، از جمله بارهای ناشی از سقوط اجسام یا پرت شدن ابزار بر این سازه‌ها، همواره عامل نگران‌کننده‌ای بوده‌اند؛ زیرا آسیب‌های پدید آمده می‌توانند مقاومت سازه را به طور چشم‌گیری کاهش دهند. به دلیل استفاده از مواد پلیمری در ماتریس مواد کامپوزیتی و به طور کلی، وجود میرایی سازه‌ای قابل توجه در الیاف و ماتریس که با واژه ویسکوالاستیسیته شناخته می‌شود، پیش‌بینی دقیق پاسخ سازه‌های یاد شده در برابر ضربه، نیازمند استفاده از مدل‌های ساختاری دربرگیرنده ماهیت ویسکوالاستیک مواد است. با وجود آنکه تاکنون مقالات زیادی درباره پاسخ ورق‌های کامپوزیتی در برابر ضربه کم‌سرعت منتشر شده است، اکثر این آثار در ارتباط با جنبه مقاومت در برابر آسیب، بدون در نظر گرفتن ماهیت ویسکوالاستیک رفتار مواد بوده است. ویژگی‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک، متغیر با زمان و مکان (به دلیل تغییرات مکانی و زمانی میدان کرنش) بوده، به علت هم‌گیری رفتارهای الاستیک و میراسازی در مواد ویسکوالاستیک، موجب افزایش سختی و تغییر فرکانس‌های طبیعی ورق می‌گردد؛ در نتیجه، با توجه به اینکه پاسخ دینامیکی ورق، ترکیبی از پاسخ‌های ناشی از مدهای ارتعاشی مختلف است، این ویژگی‌های مواد، پاسخ ضربه را به طور چشم‌گیری تحت تاثیر قرار می‌دهند؛ لذا، رفتار ورق کامپوزیتی، ویسکوالاستیک تحت بارهای ضربه‌ای را به طور کلی بهبود می‌بخشد. با این وجود، به دلیل آنکه ویژگی‌های یاد شده فرایند انتقال نیرو از جسم ضربه‌زن به ورق و میزان فروروی ضربه‌زن را تحت تاثیر قرار می‌دهند، اظهار نظر کلی در ارتباط با پاسخ ورق در برابر ضربه، بدون ارائه یک تحلیل دقیق، امکان‌پذیر نمی‌باشد.

اغلب مدل‌های ضربه‌ارایه شده برای ورق‌های کامپوزیتی عادی، مبتنی بر گسسته‌سازی از طریق استفاده از المان‌های جرم و فنر می‌باشند [۱]. بدیهی است که این مدل‌ها، توانایی آشکارسازی آثار مدهای ارتعاشی بالاتر از مدخمش اول تغییر فرم و ارتعاش ورق را ندارند که گاهی چشم‌گیرند.

ابریت [۲]، مروری جامع در خصوص مدل‌های ارایه شده در زمینه ضربه کم‌سرعت ورق کامپوزیتی ارایه کرده است. صدریام<sup>۲</sup> و ابودی<sup>۳</sup> [۳]، پاسخ ورق‌های کامپوزیتی ویسکوالاستیک را تحت بار دینامیکی با تغییرات زمانی پله‌ای، مورد بررسی قرار دادند. آنها از روابط بولتزمن<sup>۴</sup> و سری فوریه برای یافتن پاسخ فرکانسی استفاده کردند. پاسخ دینامیکی شبه دینامیکی تیرهای ویسکوالاستیک با استفاده از نظریه تبدیل لاپلاس و با روش اجزاء محدود، توسط چن<sup>۵</sup> [۴] بررسی شد. الیاسوف<sup>۶</sup> و آکوز<sup>۷</sup> [۵]، پایداری ورق‌های ویسکوالاستیک تحت بار عرضی با تغییرات زمانی مثلثی را مورد بررسی قرار داده، معادلات ساختاری ویسکوالاستیک را به فرم بولتزمن-ولترا ارائه و معادلات حاصله را به شیوه تبدیل لاپلاس حل کردند.

برخی از پژوهش‌گران، نکات مرتبط با نحوه استفاده از تناظر الاستیک-ویسکوالاستیک در ورق‌های ویسکوالاستیک هدفمند تحت بار گسترده و نیروهای برشی درون صفحه‌ای را مورد کاوش قرار داده، ثابت نمودند که اصل تناظر مواد ویسکوالاستیک، ضمن آنکه تنها برای تغییرات سینوسی بار قابل استفاده است، برای نوع خاصی از مواد هدفمند برقرار است که تابع واهلش<sup>۸</sup> آنها جدایش‌پذیر است [۷ و ۶]. ابدون<sup>۹</sup> و ازرار<sup>۱۰</sup> [۸]، پاسخ ورق ویسکوالاستیک تحت بارگذاری هارمونیک را به شیوه المان محدود بررسی کردند. برای توصیف ویژگی‌های ویسکوالاستیک مواد، از ماتریس واهلش پیچیده‌ای استفاده شد که تابعی از فرکانس واهلش بود. پاسخ ضربه ورق ویسکوالاستیک بدون اصطکاک، توسط آسی<sup>۱۱</sup> و همکاران [۹]، به شیوه المان محدود به دست آمد. فرم معادلات حرکت به صورت انتگرالی حاصل گردید. در این زمینه، مدل ساده واهلش مواد غیر همگن استفاده شده و از مدل جامد ویسکوالاستیک خطی برای توصیف رفتار

<sup>1</sup> Abrate<sup>2</sup> Cederbaum<sup>3</sup> Aboudi<sup>4</sup> Boltzman<sup>5</sup> Chen<sup>6</sup> Ilyasov<sup>7</sup> Aköz<sup>8</sup> Relaxation<sup>9</sup> Abdoun<sup>10</sup> Azrar<sup>11</sup> Assie

محدود تجاری یا با خطی نمودن قانون تماس هرتز صورت گرفته است. در پژوهش کنونی، پاسخ ورق به ضربه کم-سرعت، با در نظر گرفتن اثرات لایه‌های زیرین بر سختی تماس محل ضربه و تاثیر پارامترهای ویسکو الاستیک بررسی شده است؛ همچنین، برای افزایش دقت نتایج و نتیجه‌گیری-های حاصله، ضمن اصلاح رابطه تماس هرتز، از تئوری ورق لایه‌ای و روابط کرنش-جابجایی غیرخطی استفاده شده است.

## ۲- استخراج روابط حاکم بر تنش و کرنش ورق

### کامپوزیت ویسکو الاستیک

دستگاه مختصات ورق دارای تکیه‌گاه‌های ساده مورد بررسی، به همراه پارامترهای هندسی ورق کامپوزیت ویسکو الاستیک، در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. طول، عرض و ضخامت ورق، به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $h$  نشان داده شده، شعاع و سرعت ضربه‌زن به ترتیب با  $R$  و  $V$  مشخص شده‌اند.

ویژگی‌های مخلوط مواد الیاف و ماتریس، عموماً توسط قوانین میکرو مکانیکی، با مشخصات هم‌ارز آنها جایگزین می‌شوند. در مقاله کنونی، از مدل جامد ویسکو الاستیک استاندارد نشان داده شده در شکل ۲ که پاسخ‌های آن هم در واهلش و هم در خزش<sup>۷</sup> با رفتارهای مواد مهندسی سازگار است [۲۰]، برای مدل‌سازی رفتار ویسکو الاستیک مخلوط استفاده شده است.

فرم تابع واهلش این مدل ویسکو الاستیک، به فرم معادله (۱) است [۲۰]:

$$E(t) = E_1 + E_2 e^{-\alpha t} \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $\alpha$  عکس زمان واهلش  $t_r$  است:

$$\alpha = \frac{1}{t_r} = \frac{E_2}{\eta} \quad (2)$$

که در آن،  $\eta$  میزان میرایی (طبق شکل ۲) است. در مواد ویسکو الاستیک، ضریب پواسون نزدیک به مواد تراکم ناپذیر بوده، مستقل از زمان پنداشته می‌شود؛ لذا طبق رابطه (۱)، رابطه زیر میان ضرایب الاستیک و ویسکو الاستیک برقرار خواهد بود:

$$C_{ij}(t) = C_{ij(1)} + C_{ij(2)} e^{-\alpha t} \quad (3)$$

ویسکو الاستیک بهره گرفته شد؛ همچنین، رفتار گذرای ورق-های کامپوزیتی ویسکو الاستیک تحت بارگذاری دینامیکی با تغییرات زمانی مثلثی، توسط آسی و همکاران [۱۰] بررسی شد. آنها از مدل ریچارد برای توصیف خاصیت ویسکو الاستیک و از تئوری برشی مرتبه اول و روش اجزاء محدود، برای یافتن معادلات حاکم استفاده کردند. حل زمانی با استفاده از روش نیومارک انجام پذیرفت [۱۱]. التنباخ<sup>۱</sup> و ارمیو<sup>۲</sup> [۱۲]، رفتار خمشی ورق هدفمند ساخته شده از فوم-های فلزی یا فوم‌های پلیمری ناهمگن ویسکو الاستیک را مورد بررسی قرار دادند. اخیراً، تحلیل ارتعاش غیرخطی ورق همسانگرد ویسکو الاستیک مستطیلی، توسط امابیلی<sup>۳</sup> [۱۳] انجام شده است.

در خصوص استفاده از مدل‌های پیوسته در تحلیل ضربه کم سرعت، نشیر و همکارانش [۱۴]، به بررسی تنش‌ها و جابجایی‌های کلی پدید آمده در ورق پرداختند. در این تحلیل، میزان فروروی ضربه‌زن مورد توجه قرار نگرفته است. کریستوفورو<sup>۴</sup> و همکارانش نیز، به مدل‌سازی هندسی ناحیه تماس برای ورق فاقد امکان خیز پرداختند [۱۶ و ۱۵].

ترنر<sup>۵</sup> [۱۷]، به اصلاح روابط مربوط به تماس ورق ارتوتروپیک از طریق جای‌گزینی مدول کش‌سان مواد همسانگرد در رابطه هرتز با مدول کش‌سانی عرضی پرداخت. سپس سوانسون<sup>۶</sup> [۱۸]، با استفاده از مطالعات تجربی خود، رابطه هرتز که اساساً برای "نیم فضا" بدست آمده را برای ضربه "ورق" اصلاح کرد. شریعات و فرزانه نسب [۱۹]، ضربه کم‌سرعت ورق همسان‌گرد هدفمند ویسکو الاستیک را با استفاده از یک تئوری ورق تک‌لایه هم‌ارز با جدا نمودن آثار خمشی و برشی بررسی کردند.

تاکنون تحقیق جامعی در خصوص تحلیل پاسخ‌های ضربه کم‌سرعت ورق کامپوزیتی ویسکو الاستیک ارائه نشده است؛ همچنین، در مقالات ارائه شده توسط مولفین دیگر، اثر سفتی لایه‌های زیرین بر سختی ناحیه تماس در نظر گرفته نشده، عموماً تحلیل‌ها یا در محیط نرم‌افزارهای تحلیل اجزای

<sup>1</sup> Altenbach

<sup>2</sup> Eremeyev

<sup>3</sup> Amabili

<sup>4</sup> Christoforou

<sup>5</sup> Turner

<sup>6</sup> Swanson

<sup>7</sup> Creep

با توجه به تعریف انتگرال کانولوشن، می‌توان رابطه (۸) را به فرم کوتاه زیر نشان داد:

$$\sigma(t) = [C(0) - \mathcal{R}^*] \varepsilon(t) \quad (10)$$

یا به فرم کوتاه‌تر:

$$\sigma(t) = \bar{C}^*(t) \varepsilon(t) \quad (11)$$

که در آن، ماتریس عملگر  $\mathcal{R}^*$  بر پایه رابطه (۱۲) تعریف می‌گردد:

$$\mathcal{R}^* \varepsilon = \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (12)$$

با توجه به رابطه (۱۱)، می‌توان انتگرال‌های مختلف ماتریس عملگر  $\bar{C}^*$  را در ضخامت ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک یافت:

$$\begin{aligned} A_{ij}^I &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij}^*(t) z' dz = \int_{-h/2}^{h/2} [C_{ij}(0) - \mathcal{R}_{ij}^*] z' dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[ C_{ij}^{(k)}(0) - \int_0^t \alpha C_{ij(2)}^{(k)} e^{\alpha(\tau-t)} d\tau \right] z' dz \\ &= (A_{ij}^I)^E - (A_{ij}^I)^{VE} \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن، اندیس‌های  $E$  و  $VE$  به ترتیب، بیانگر بخش‌های الاستیک و ویسکوالاستیک می‌باشند.

### ۳- قانون تماس هرتز و سختی تماس در محل

#### ضربه

در این تحقیق، از قانون تماس هرتز به منظور یافتن ارتباط میان نیروی تماس و میزان فروروی ضربه‌زن استفاده شده است. طبق این قانون، ناحیه تماس، بدون اصطکاک فرض می‌شود.

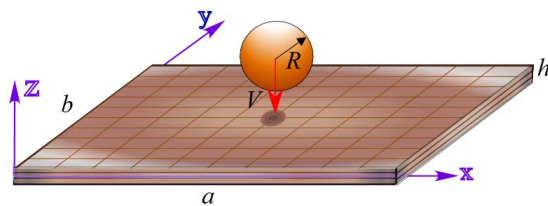
قانون هرتز، نیروی تماس بین دو جسم را به فرم رابطه (۱۴) در اختیار قرار می‌دهد:

$$F = K \beta^{3/2} \quad (14)$$

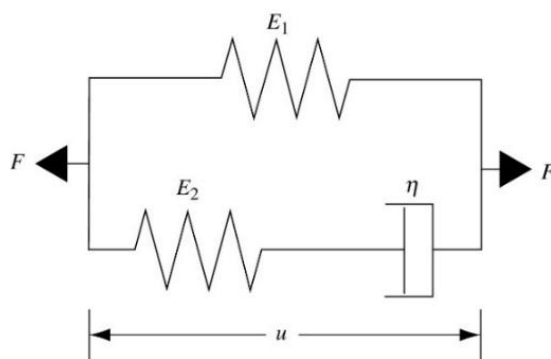
که در آن،  $K$  سختی ناحیه تماس و  $\beta$  میزان فروروی است.

$$K = \frac{4}{3} \sqrt{RE^*} \quad (15)$$

$E^*$  مدول الاستیسیته موثر سطح تماس است. محققان نشان داده‌اند که چنانچه مدول ماده همسانگرد در رابطه هرتز با ترکیبی از ویژگی‌های مکانیکی ماده همسانگرد عرضی (مانند ورق‌های کامپوزیت) جایگزین شود، میزان نفوذ را می‌توان از رابطه هرتز مشابه با رابطه تماس مواد همسانگرد محاسبه نمود. رابطه مرتب شده ترنر [۱۷] که توسط



شکل ۱- پارامترهای هندسی و جهت محورهای دستگاه مختصات مورد استفاده



شکل ۲- مدل جامد ویسکوالاستیک استاندارد

در نتیجه:

$$C_{ij}(0) = C_{ij(1)} + C_{ij(2)} \quad (4)$$

$$C_{ij}(\infty) = C_{ij(1)} \quad (5)$$

برای مواد ویسکوالاستیک، رابطه تنش- کرنش بر اساس معادله بولتزن-ولترا از رابطه (۶) برقرار می‌شود:

$$\sigma = \int_0^t C(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (6)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء از رابطه (۶) داریم:

$$\sigma(t) = C(0)\varepsilon(t) - \int_0^t \frac{dC(t-\tau)}{d\tau} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (7)$$

یا:

$$\sigma(t) = C(0)\varepsilon(t) - \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (8)$$

که در آن  $\mathbf{R}$ ، عملگری انتگرالی با هسته واهلش<sup>۱</sup> تعریف شده در رابطه (۹) است:

$$\mathbf{R} t = \frac{dC(t)}{d\tau} \quad (9)$$

<sup>۱</sup> Relaxation kernel

#### ۴- معادله حاکم بر حرکت ورق کامپوزیتی ویسکو الاستیک

بر پایه تئوری لایه‌ای، جابجایی یک نقطه درون ورق چندلایه را می‌توان به صورت رابطه (۲۳) بیان کرد [۲۱]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} U_{n(k-1)+l}(x, y) \varphi_l(z) \\ v(x, y, z) &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} V_{n(k-1)+l}(x, y) \varphi_l(z) \\ w(x, y, z) &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m+1} W_{m(k-1)+l}(x, y) \psi_l(z) \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن،  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب، مولفه‌های جابجایی ورق در امتداد محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشند.  $k$  شمارنده لایه ( $k=1$ ) متناظر با لایه زیرین است) و  $l$  شمارنده زیر لایه محلی هر لایه است. در رابطه (۲۲)،  $N$  تعداد لایه‌های ورق و  $n$  و  $m$  مرتبه چند جمله‌ای تغییرات (به ترتیب، برای مولفه‌های درون صفحه‌ای و عرضی) درون لایه‌ای است.  $U_l$ ،  $V_l$  و  $W_l$ ، مقدار مولفه‌های یاد شده در هر زیر لایه است. به بیان دیگر، مولفه‌های جابجایی بر حسب توابع تقریبی بر حسب تمامی مقادیر زیر لایه‌ها در هر  $x$  و  $y$  مشخص، نوشته شده است. بدیهی است که برای مشاهده تغییرات چند جمله‌ای یاد شده، باید در هر لایه،  $n+1$  یا  $m+1$  زیر لایه تعریف شوند. در هر لایه، لازم است تغییرات درون همان لایه (اثر زیر لایه‌های متناظر با آن لایه دیده) شود؛ لذا می‌توان توابع تغییرات عرضی را به صورت رابطه (۲۴) تعریف نمود:

$$\begin{aligned} \varphi_l(z) &= [H(z - z_{k-1}) - H(z - z_k)] Z_l^n(z) \\ \psi_l(z) &= [H(z - z_{k-1}) - H(z - z_k)] Z_l^m(z) \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن،  $H$  تابع هیوی ساید<sup>۳</sup> و برای مثال،  $Z_l^n(z)$  تابع تقریب (تابع شکل)  $l$ -ام مرتبه  $n$  است. برای نمونه، برای تغییرات خطی درون هر لایه رابطه (۲۵) را داریم:

$$Z_1^1(z) = 1 - \frac{z - z_k}{h_k}, \quad Z_2^1(z) = \frac{z - z_k}{h_k} \quad (25)$$

بر اساس فرضیات فن کارمن، روابط غیرخطی کرنش-جابجایی به صورت رابطه (۲۶) تعریف می‌شوند:

سوانسون [۱۸] ارائه شده، مدول الاستیسیته موثر سطح تماس ماده کامپوزیتی را به گونه زیر تعریف می‌کند:

$$E^* = \frac{2}{\lambda_1 \lambda_3} \quad (16)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{E_x / E_y - \nu_{xz}^2}{1 - \nu_{xy}^2}} \quad (17)$$

$$\lambda_2 = \frac{(E_x / 2G_{xz}) - \nu_{xz}(1 + \nu_{xy})}{1 - \nu_{xy}^2} \quad (18)$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - \nu_{xy}}{G_{xy}} \sqrt{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} \quad (19)$$

بنابراین

$$\beta = \left( \frac{3F}{4\sqrt{RE^*}} \right)^{2/3} \quad (20)$$

در این رابطه، تنها اثر لایه تحت ضربه در نظر گرفته شده است. میزان نرمی یا سفتی لایه‌های زیرین، سختی ناحیه تماس ورق (به ویژه، ورق نازک) را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد. برای در نظر گرفتن اثر سختی لایه‌های زیرین، می‌توان از میانگین وزنی زیر (با توجه به اینکه سفتی تغییر ضخامت هر لایه به نسبت  $h/E$  آن لایه وابسته است و سفتی لایه‌ها سری هستند)، استفاده کرد:

$$E^* = h \sum_{k=1}^N (E_k / h_k) \quad (21)$$

$h_k$  ضخامت لایه  $k$ -ام است.

برای مرحله باربرداری، قانون تماس هرگز بهبود یافته توسط یانگ<sup>۱</sup> و سان<sup>۲</sup> [۲۲] ارائه شده، بر اساس آن نیروی نفوذ توسط رابطه (۲۲) محاسبه می‌شود:

$$F = F_{max} \left( \frac{\beta - \beta_0}{\beta_{max} - \beta_0} \right)^{5/2} \quad (22)$$

که در آن  $F_{max}$  نیروی تماس بیشینه،  $\beta_{max}$  نفوذ بیشینه ناشی از نیروی تماس بیشینه و  $\beta_0$ ، میزان نفوذ دائمی در صورت وجود است.

<sup>3</sup> Heaviside

<sup>1</sup> Yang

<sup>2</sup> Sun

$$\begin{aligned} U_i(x, y) &= \mathcal{N}(x, y) \bar{U}_i \\ V_i(x, y) &= \mathcal{N}(x, y) \bar{V}_i \\ W_i(x, y) &= \mathcal{N}(x, y) \bar{W}_i \end{aligned} \quad (28)$$

که در آن،  $i$  شمارنده زیر لایه است و برای مثال،  $\bar{U}_i$  بردار مقادیر جابجایی  $U_i$  در نقاط گره هر المان درون صفحه‌ای و  $\mathcal{N}$  بردار توابع شکل است. در پژوهش کنونی، از المان مستطیلی با نه نقطه گره استفاده شده است. لذا، بر پایه روابط (۲۳) و (۲۸):

$$\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(x, y, z) \bar{\delta}(t) \quad (29)$$

که در آن:

$$\bar{\delta}^T = \langle \bar{\mathbf{U}} \quad \bar{\mathbf{V}} \quad \bar{\mathbf{W}} \rangle \quad (30)$$

در نتیجه، بر پایه روابط (۲۶) و (۲۹):

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} w_{,x} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} w_{,y} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & w_{,x} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (31)$$

و به فرم کوتاه:

$$\varepsilon = \mathbf{\Gamma}(\bar{\delta}) \bar{\delta} \quad (32)$$

برای یافتن معادلات حاکم بر ورق کامپوزیتی تحت ضربه کم‌سرعت، از اصل کار مجازی استفاده می‌کنیم:

$$\delta \Pi = \delta U^* - \delta W^* = 0 \quad (33)$$

که در آن،  $\Pi$ ،  $U^*$  و  $W^*$  به ترتیب، انرژی پتانسیل کل، انرژی کرنشی و کار بارهای خارجی (از جمله نیروهای اینرسی یا دالامبر) است. فرم باز شده رابطه (۳۳) برای مسئله کنونی، برای مجموعه ورق و ضربه‌زن، طبق رابطه (۳۴) است:

$$\int_A \int_{-h/2}^{h/2} [(\delta \varepsilon)^T \boldsymbol{\sigma} + \rho(\delta \delta)^T \ddot{\delta}] dz dA + \bar{m}(\delta \bar{w}) \ddot{\bar{w}} + F \delta(\bar{w} - w) = 0 \quad (34)$$

که در آن،  $\bar{w}$  و  $\bar{m}$  به ترتیب، میزان جابجایی و جرم ضربه‌زن است. در حقیقت،  $F$  نیروی داخلی است. بر پایه رابطه (۱۴):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (26)$$

حال اگر روابط جابجایی (۲۳) را در معادلات کرنش (۲۶) قرار دهیم، رابطه (۲۷) را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial U_{n(k-1)+l}}{\partial x} \varphi_l \\ &+ \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(k-1)+l}}{\partial x} \psi_l \right) \\ &\left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(i-1)+j}}{\partial x} \psi_j \right) \\ \varepsilon_y &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial V_{n(k-1)+l}}{\partial y} \varphi_l \\ &+ \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(k-1)+l}}{\partial y} \psi_l \right) \\ &\left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(i-1)+j}}{\partial y} \psi_j \right) \\ \gamma_{xy} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial U_{n(k-1)+l}}{\partial y} \varphi_l \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\partial V_{n(k-1)+l}}{\partial x} \varphi_l \\ &+ \left( \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(k-1)+l}}{\partial x} \psi_l \right) \\ &\left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(i-1)+j}}{\partial y} \psi_j \right) \\ \gamma_{yz} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} V_{n(k-1)+l} \frac{d\varphi_l}{dz} \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(k-1)+l}}{\partial y} \psi_l \\ \gamma_{xz} &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{n+1} U_{n(k-1)+l} \frac{d\varphi_l}{dz} \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m+1} \frac{\partial W_{m(k-1)+l}}{\partial x} \psi_l \end{aligned} \quad (27)$$

تغییرات درون صفحه‌ای پارامترهای جابجایی  $U$ ،  $V$  و  $W$  را می‌توان بر پایه یک المان‌بندی درون صفحه‌ای، مانند آنچه در شکل ۱ نمایش داده شده، بیان کرد:

$$+K(\mathbf{Y}-\bar{\mathbf{G}})^T[(\mathbf{Y}-\bar{\mathbf{G}})^{3/2}\Sigma^{1/2}]\Sigma - \left[ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\Omega^T \mathcal{R}^* \bar{\Gamma}] dz dA \right] \Sigma = \mathbf{0} \quad (41)$$

که معادله حاکم بر ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک و جرم ضربه‌زن است. عبارت آخر رابطه (۴۱)، مشخصاً شامل اثرات هسته و اهلهش ویسکوالاستیک است.

### ۵- حل معادلات حرکت ورق و ضربه‌زن

معادله حرکت بدست آمده برای ورق کامپوزیتی ویسکو-الاستیک، به دلیل غیر خطی بودن معادله ساختاری ویسکو الاستیسیته و نیز استفاده از روابط غیرخطی کرنش-جابجایی و رابطه غیر خطی تماس، دارای مرتبه بالایی از غیرخطی بودن است. لذا، حل نهایتاً باید به صورت نموی انجام شود. برای حل رابطه (۴۱)، باید از روش‌های انتگرال‌گیری زمانی عددی، مانند روش نیومارک استفاده شود؛ لذا محدوده حل باید ابتدا به گام‌هایی زمانی تجزیه شود که اندازه آنها بسیار کوچک‌تر از زمان پاسخ (مشخصاً از یک دهم پریود متناظر با فرکانس طبیعی اول ورق) کوچکتر است. در پژوهش کنونی، گام زمانی یاد شده برابر با  $5 \times 10^{-5}$  ثانیه در نظر گرفته شده است. برای ورق با تکیه‌گاه ساده، جابجایی‌های لایه میانی (پارامترهای جابجایی متناظر) باید برابر با صفر قرار داده شوند. شرایط اولیه ورق نیز شامل، جابجایی و سرعت صفر می‌باشند. پیش از استفاده از روش انتگرال‌گیری زمانی نیومارک، لازم است در دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل (۴۱)، انتگرال زمانی گسسته‌سازی شود:

$$\mathcal{R}^* \bar{\Gamma} \Sigma = \int_0^t \alpha C_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\Gamma} \Sigma d\tau = \sum_{s=1}^r \mathcal{W}_{s-1} [\alpha C_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\Gamma} \Sigma]_{t=(s-1)\Delta t} \Delta t + \mathcal{W}_r [\alpha C_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\Gamma} \Sigma]_{t=r} \Delta t \quad (42)$$

در رابطه (۴۲)،  $r$  تعداد گام‌های زمانی، تا لحظه مورد بررسی است و  $\mathcal{W}$  ضریب وزنی است (در روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای، اولین و آخرین ضریب،  $0.5$  و ضرایب میانی، برابر با  $1$  می‌باشند). لذا حد بالای عبارت جمع (سیگما) با زمان متغیر است. این عبارت دارای جملات معلوم (از گام‌های زمانی قبل) بوده، تنها عبارت آخر رابطه (۴۲) در گام زمانی مورد بررسی مجهول است. لذا فرم رابطه (۴۱)، پیش از اعمال

$$F = K\beta^{3/2} = K \left( \tilde{w} - w \Big|_{y=b/2}^{x=a/2} \right)^{3/2} \quad (35)$$

و بر پایه روابط (۲۳) و (۲۸) می‌توان نوشت:

$$w \Big|_{y=b/2}^{x=a/2} = W_{nV+1} \Big|_{y=b/2}^{x=a/2} = \mathcal{G} \hat{\delta} \quad (36)$$

از سوی دیگر، بردار گسترش یافته مجهولات را می‌توان به فرم رابطه (۳۷) نوشت:

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} \hat{\delta} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

بنابراین، می‌توان برای نمونه رابطه (۳۸) را نوشت:

$$\delta = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Sigma = \bar{\mathbf{H}} \Sigma \quad (38)$$

و به طور مشابه، از روابط (۱۰) و (۳۲):

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \Gamma(\hat{\delta}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Sigma = \bar{\Gamma} \Sigma$$

$$\sigma(t) = [\mathbf{C}(0)\bar{\Gamma} - \mathcal{R}^*] \Sigma(t) \quad \delta \varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & w_{,x} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & w_{,y} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & w_{,x} \frac{\partial}{\partial y} + w_{,y} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \delta \delta = \Omega \delta \Sigma \quad (39)$$

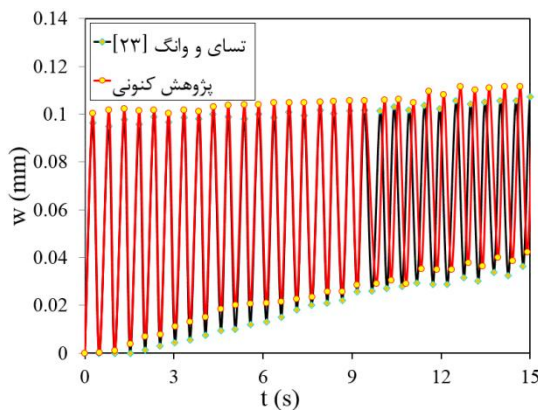
رابطه (۳۴) را می‌توان بر پایه روابط (۳۵) تا (۳۹)، به فرم رابطه (۴۰) بازنویسی کرد:

$$(\delta \Sigma)^T \triangleleft \left[ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \Omega^T [\mathbf{C}(0) - \mathcal{R}^*] \bar{\Gamma} \Sigma + \rho \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\Sigma} \right] dz dA + \tilde{m} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \bar{\Sigma} + K(\mathbf{Y}-\bar{\mathbf{G}})^T[(\mathbf{Y}-\bar{\mathbf{G}})^{3/2}\Sigma^{1/2}]\Sigma \triangleright = 0 \quad (40)$$

با توجه به اینکه  $(\delta \Sigma)^T$  اختیاری است، از رابطه (۴۰)، رابطه (۴۱) نتیجه می‌شود:

$$\left[ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\rho \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}}] dz dA + \tilde{m} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \right] \bar{\Sigma} + \left[ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\Omega^T \mathbf{C}(0) \bar{\Gamma}] dz dA \right] \Sigma = 0$$

می‌شوند؛ ولی چون ورودی بار اجباری است، بخش به جای مانده از انرژی بار که همچنان به ورق انتقال می‌یابد، صرف ایجاد خیز استاتیکی می‌شود (مقدار میانگین خیز با زمان افزایش یافته است) تا سرانجام، پس از میرا شدن ارتعاش، خیز کاملاً استاتیکی حاصل شود. بدیهی است که در لحظه ابتدایی، به دلیل صلب شدن میراساز در مدل جامد سه پارامتری، خیز ورق کاهش یافته و پس از سپری شدن زمان، این صلیبت کاهش یافته است. به همین دلیل، خیز ورق مرتباً با زمان افزایش می‌یابد.



شکل ۳- مقایسه تاریخچه‌های زمانی خیز ورق ویسکوالاستیک پیش‌بینی شده توسط فرمول‌بندی کنونی و مرجع [۲۳]

#### ۶-۲- مشخصات پایه ورق مورد بررسی

از این بخش، نتایج حل عددی فرمول‌بندی المان محدود ارائه شده، برای یافتن پاسخ ضربه کم‌سرعت ورق کامپوزیت گرافیت/اپوکسی ویسکوالاستیک ۱۰ لایه با آرایش  $[0/90/0/90/0]_s$  با خصوصیات پایه زیر بررسی خواهند شد:  $a = b = 0.1m$ ,  $h = 5mm$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $E_1 / E_2 = 0.4$ ,  $E_1 = 120.7N / m^2$ ,  $\rho = 2200kg / m^3$ ,  $\nu = 0.35$ ,  $\eta = 2.744 \times 10^8 Ns / m^2$  در تحلیل‌های پارامتری، ممکن است مقدار برخی از این ویژگی‌ها، برای تحلیل حساسیت به پارامتر، تغییر داده شود. در بخش‌های بعد، ابتدا به مقایسه تاریخچه‌های زمانی نیروی تماس و خیز عرضی و نفوذ دو ورق کامپوزیتی و کامپوزیت ویسکوالاستیک پرداخته و سپس به بررسی تأثیر مواردی از

روش نیومارک برای حل عددی معادله دیفرانسیلی بر حسب زمان، به فرم رابطه (۴۳) خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \left( \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\rho \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}}] dz dA + \bar{m} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \right) \ddot{\boldsymbol{\Sigma}} \\ & + \left\{ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\Omega}^T [\mathbf{C}(0) \bar{\mathbf{F}} \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{W}_r \alpha \mathbf{C}_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\mathbf{F}}_{t=\tau} \Delta t] dz dA \right. \\ & \left. + (\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Q}})^T K [(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{Q}})^{3/2} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}] \boldsymbol{\Sigma} \right. \\ & \left. = - \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \boldsymbol{\Omega}^T \sum_{s=1}^r \mathcal{W}_{s-1} \right. \right. \\ & \left. \left. [\alpha \mathbf{C}_{(2)} e^{\alpha(\tau-t)} \bar{\mathbf{F}} \boldsymbol{\Sigma}]_{t=(s-1)\Delta t} \Delta t \right\} dz dA \right. \end{aligned} \quad (43)$$

و به فرم نمادین رابطه (۴۴) است:

$$\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\Sigma}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\Sigma}, t) \boldsymbol{\Sigma} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\Sigma}, t) \quad (44)$$

#### ۶- نتایج و بحث نتایج

##### ۶-۱- صحنه‌گذاری نتایج

صحنه‌گذاری نتایج تحلیل دینامیکی بر پایه مقایسه با نتایج تسای<sup>۱</sup> و وانگ<sup>۲</sup> [۲۳] انجام پذیرفته است. در این زمینه، یک ورق مستطیلی ویسکوالاستیک همسانگرد با ابعاد  $(1.0 \times 1.0) \text{m}$  و ضخامت  $1 \text{m}$  دارای تکیه‌گاه‌های ساده با مشخصات زیر، تحت بار یکنواخت ناگهانی با تغییرات زمانی پله به شدت  $p = 1.0 \text{N/m}^2$  قرار داده شده است:

$$E_1 = 9.8 \times 10^7 \text{N} / \text{m}^2, \quad E_2 = 2.45 \times 10^7 \text{N} / \text{m}^2,$$

$$\rho = 2200 \text{kg} / \text{m}^3, \quad \nu = 0.35,$$

$$\eta = 2.744 \times 10^8 \text{Ns} / \text{m}^2$$

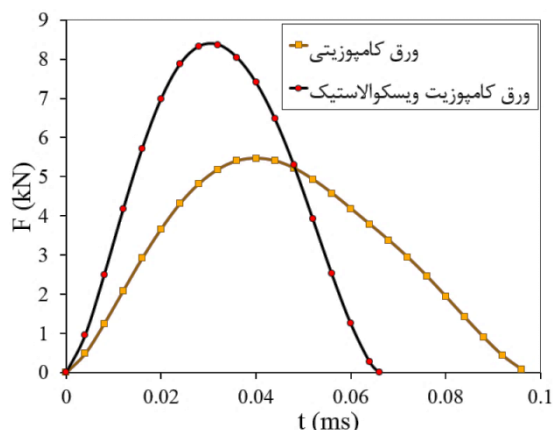
تاریخچه‌های زمانی خیز مرکز ورق، برای ورق ویسکوالاستیک در شکل ۳ مقایسه شده‌اند. در پژوهش کنونی،  $n=m=1$  در نظر گرفته شده است.

مقایسه نتایج کنونی با نتایج مرجع [۲۳] در شکل ۳، بیانگر سازگاری نتایج فرمول‌بندی و روش حل عددی کنونی با نتایج مرجع [۲۳] است. با وجود این که بار دینامیکی وارده دارای تغییرات پله‌ای با زمان است، پاسخ گذارای پدید آمده، دارای نوسانات سینوسی است. در ورق ویسکوالاستیک، به دلیل میرایی ساختاری حاصله، نوسانات به تدریج با زمان میرا

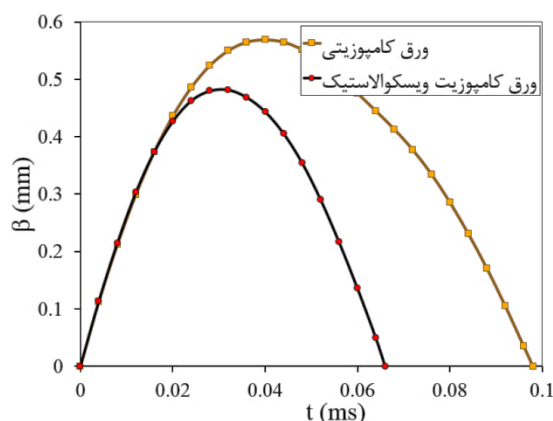
<sup>1</sup> Tsai

<sup>2</sup> Wang

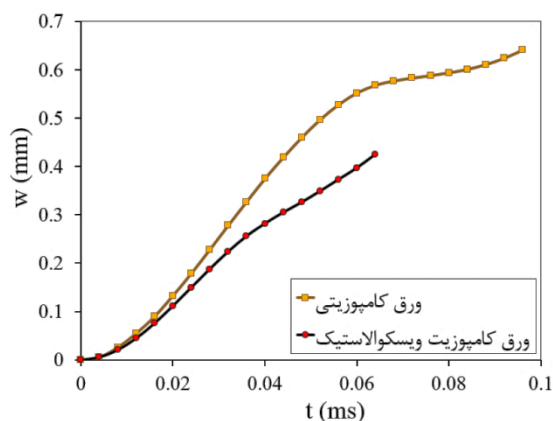




شکل ۴- بررسی اثر رفتار ویسکوالاستیک مواد بر تاریخچه نیروی ضربه ورق کامپوزیتی



شکل ۵- بررسی اثر رفتار ویسکوالاستیک مواد بر تاریخچه میزان نفوذ ضربه‌زن در ورق کامپوزیتی



شکل ۶- بررسی اثر رفتار ویسکوالاستیک مواد بر تاریخچه خیز ورق کامپوزیتی در محل ضربه

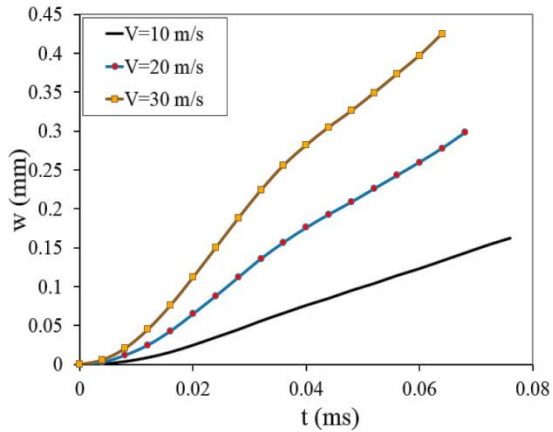
قبیل، سرعت ضربه‌زن، ضریب میرایی و اثرات نسبت سفتی بر پاسخ دینامیکی ورق تحت ضربه پرداخته شده است.

### ۳-۶- بررسی اثر ویسکوالاستیسیتته بر پاسخ ضربه

در این بخش، پاسخ دینامیکی ورق کامپوزیتی چندلایه گرافیت/اپوکسی ویسکو الاستیک با خصوصیات آورده شده در بخش ۲-۶ در اثر برخورد ضربه‌زنی کروی از جنس فولاد ( $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ) و شعاع ۶ میلی‌متر با سرعت اولیه ۳۰ متر بر ثانیه، مورد بررسی قرار گرفته است. لایه چینی ورق کامپوزیت، مشابه ورق ویسکو الاستیک است که متقارن و متعامد بوده، بصورت  $[0/90/0/90/0]$  است. در این حالت، انرژی جنبشی ضربه‌زن،  $3/2$  ژول است. تاریخچه زمانی نیروی تماسی، میزان نفوذ و خیز ورق در نقطه وارد آمدن ضربه از ورق به ترتیب، در شکل‌های ۴ تا ۶ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، نیروی تماس و خیز در نقطه ضربه کاملاً غیر هم‌فاز بوده و این ضربه، ضربه-ای موج-کنترل شده (ضربه جرم کوچک) است. ضمناً به علت کم بودن جرم ضربه‌زن، خیز ورق پس از پایان یافتن زمان ضربه و به صفر رسیدن نیروی تماسی همچنان ادامه داشته، مقدار بیشینه آن پس از زمان ضربه حاصل می‌شود. مقایسه نتایج ارائه شده در شکل‌های ۴ تا ۶ نشان می‌دهد که به علت بزرگتر بودن سختی کلی و موضعی ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک نسبت به ورق کامپوزیتی، به دلیل موازی بودن المان‌های الاستیک و ویسکوالاستیک در مدل نشان داده شده در شکل ۲، مقادیر بیشینه نفوذ و خیز عرضی ورق کامپوزیت ویسکوالاستیک نسبت به ورق کامپوزیتی کاهش و پیرو آن، نیروی تماس بیشینه ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک، نسبت به ورق کامپوزیتی افزایش یافته است.

### ۴-۶- اثر سرعت اولیه ضربه‌زن

برای بررسی اثر سرعت ضربه‌زن بر پاسخ‌های ورق، سه سرعت اولیه متفاوت برای ضربه‌زن در نظر گرفته شده‌اند:  $V=10, 20, 30 \text{ m/s}$ . نتایج حاصله برای تاریخچه نیروی تماس، مقدار نفوذ و خیز ورق کامپوزیت ویسکو الاستیک به ترتیب، در شکل‌های ۷ تا ۹ نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت اولیه ضربه‌زن، مقادیر بیشینه نیروی تماسی،

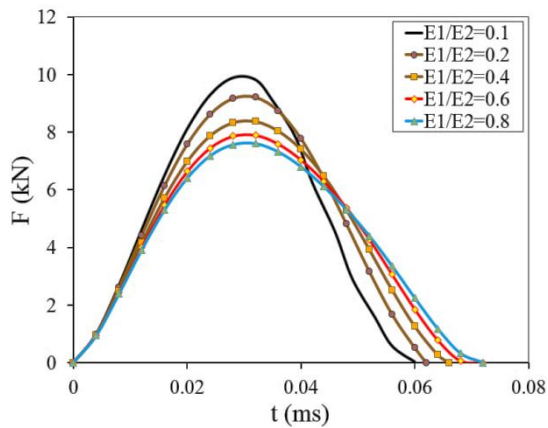


شکل ۹- اثرات سرعت اولیه ضربه زن بر تاریخچه خیز محل ورود ضربه ورق کامپوزیت ویسکو الاستیک

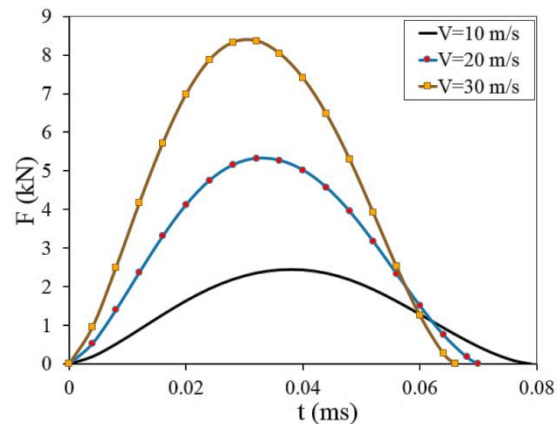
میزان نفوذ و خیز افزایش می‌یابند؛ ولی این افزایش سرعت اولیه، سبب کاهش مدت زمان ضربه می‌شود. در حقیقت، افزایش سرعت ضربه زن موجب می‌شود که ورق زودتر به خیز بیشینه برسد و لذا برگشت ورق و جدایش ضربه زن از ورق، در مدت زمانی کوتاه‌تر و در سرعتی بالاتر صورت می‌پذیرد.

۶-۵- اثر نسبت ضرایب سفتی مدل ویسکو الاستیک

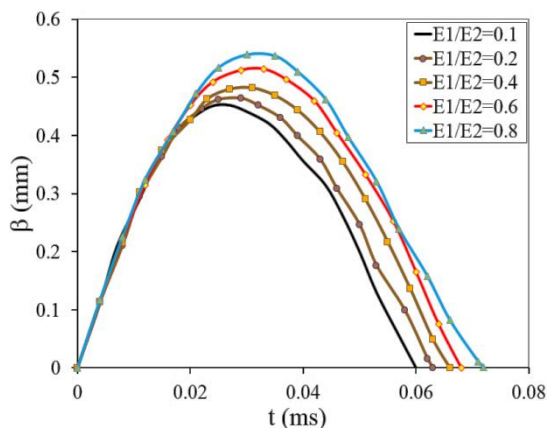
اثرات نسبت مدول‌های مدل ویسکو الاستیک نشان داده شده در شکل ۲ (اثر  $E_1 / E_2$ )، بر پاسخ‌های ضربه ورق کامپوزیت ویسکو الاستیک، در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲، برای پنج نسبت ویسکو الاستیک، مشخص گردیده است.  $E_1 / E_2 = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$



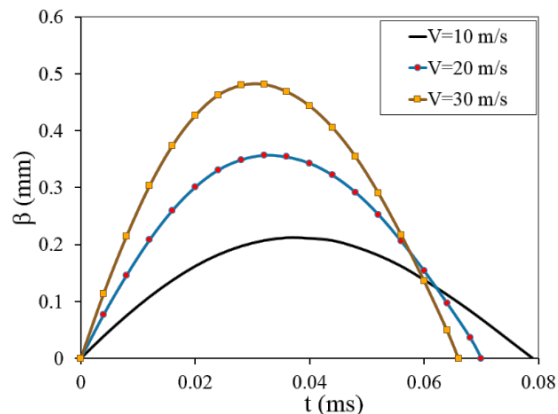
شکل ۱۰- اثر نسبت مدول‌ها بر تاریخچه نیروی تماسی ورق کامپوزیتی ویسکو الاستیک



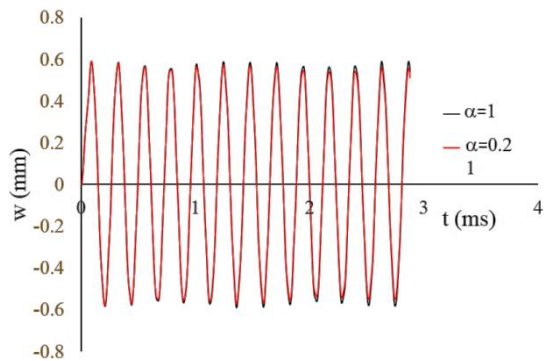
شکل ۷- اثرات سرعت اولیه ضربه زن بر تاریخچه نیروی تماسی ورق کامپوزیت ویسکو الاستیک



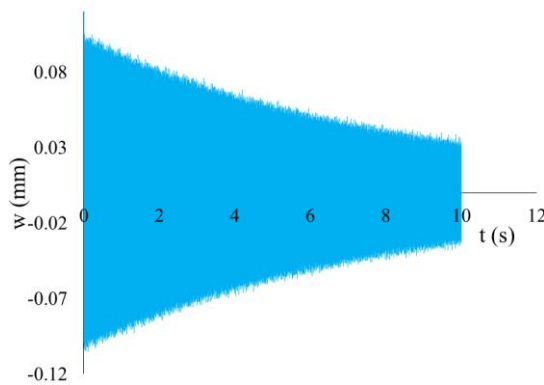
شکل ۱۱- اثر نسبت مدول‌ها بر تاریخچه میزان نفوذ در ورق کامپوزیتی ویسکو الاستیک



شکل ۸- اثرات سرعت اولیه ضربه زن بر تاریخچه میزان نفوذ در ورق کامپوزیت ویسکو الاستیک



شکل ۱۳- مقایسه اثر ضریب  $\alpha$  بر تغییرات خیز ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک در زمان کوتاهی پس از ضربه



شکل ۱۴- اثر ضریب میرایی بر تاریخچه خیز ورق، تا ۱۰ ثانیه پس از ضربه ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک

بر پایه نتایج شکل‌های ۱۳ و ۱۴ می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش ضریب میرایی (افزایش  $\alpha$ )، زمان واهلش افزایش یافته و ورق دیرتر پایدار می‌شود؛ در حالیکه با افزایش میزان میرایی (کاهش  $\alpha$ )، ورق سخت‌تر شده، زودتر به حالت پایا می‌رسد.

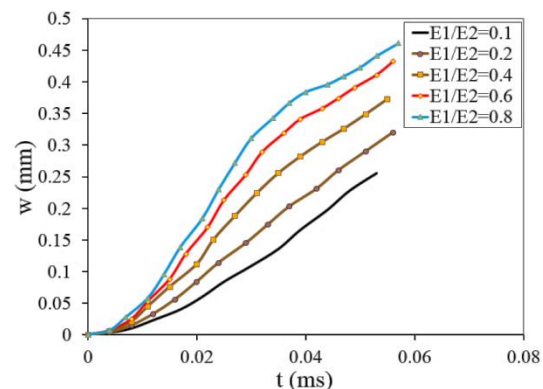
#### ۷- نتیجه گیری

در پژوهش کنونی، اثر پارامترهای ساختاری و سینماتیکی بر پاسخ‌های ضربه و رفتار دینامیکی گذرای ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک تحت بار ضربه‌ای با استفاده از مدل ویسکوالاستیک سلسله مراتبی و تئوری ورق لایه‌ای، مورد بررسی قرار گرفت. در مسیر پژوهش، علاوه بر تصحیح تئوری هرتز برای در نظر گرفتن اثر سفتی لایه‌های زیرین بر سختی سطح تماس، الگوریتمی عددی برای حل دستگاه معادلات

برای مدول الاستیک مشخص  $E_1$ ، افزایش نسبت  $E_1/E_2$  بدان مفهوم است که اثرات میرایی ویسکوالاستیک بر پاسخ‌ها (و تنش پدید آمده) کاهش یافته و رفتار ورق ویسکو-الاستیک، در حد به ورق الاستیک نزدیک می‌شود؛ زیرا افزایش این نسبت در مقدار ثابت  $E_1$ ، به منزله کاهش  $E_2$  و حمل عمده بار توسط شاخه سخت‌تر الاستیک است؛ لذا اگر نسبت  $E_1/E_2$  به سمت بی‌نهایت میل کند، اثرات میرایی به طور ضعیف درگیر شده و در حد، ورق ویسکوالاستیک به ورق الاستیک تبدیل می‌شود. به همین دلیل در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲، با افزایش نسبت  $E_1/E_2$ ، مقادیر بیشینه نیروی تماس کاهش یافته، ولی مقدار نفوذ، زمان ضربه و مقدار بیشینه خیز افزایش یافته است.

#### ۶-۶- بررسی اثر ضریب میرایی بر پاسخ گذرا

ارتعاش ورق، پس از ضربه خاتمه نیافته و ادامه خواهد داشت. برای بررسی میزان تاثیر ضریب میرایی ( $\eta$ )، نتایج دو مقدار متناظر با پارامتر متناسب با عکس این ضریب ( $\alpha=0.2, 1$ )، بر ارتعاش ورق در زمان‌های پس از ضربه، در شکل‌های ۱۳ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نتایج شکل ۱۳ آشکار می‌سازند که اختلاف نتایج ضرایب میرایی مختلف، در زمان‌های بسیار کوتاه، چشم‌گیر نبوده، ولی قابل تمییز است. در شکل ۱۴، تغییرات خیز عرضی ورق ویسکوالاستیک تا ۱۰ ثانیه پس از ضربه، برای  $\alpha=1$  نشان داده شده است. با توجه به نسبت بزرگی زمان یاد شده نسبت به زمان یک نوسان (زمان ضربه، متناظر با نیم سیکل اول نوسان است)، اثر ضریب میرایی بسیار مشهود است.



شکل ۱۲- اثر نسبت مدول‌ها بر تاریخچه خیز ورق کامپوزیتی ویسکوالاستیک

- [7] Paulino G, Jin Z (2001) Viscoelastic functionally graded materials subjected to anti plane shear fracture. *J Appl Mech* 68(2): 284-293.
- [8] Abdoun F, Azrar L (2009) Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *J Comput Struct* 87(1): 91-100.
- [9] Assie A, Eltaher M (2011) Behavior of a viscoelastic composite plates under transient load. *J Mech Sci Tech* 25(5): 1129-1140.
- [10] Assie A, Eltaher M (2010) The response of viscoelastic-frictionless bodies under normal impact. *Int J Mech Sci* 52(3): 446-454.
- [11] Assie A, Eltaher M, Mahmoud F (2010) Modeling of viscoelastic contact-impact problems. *Appl Math Model* 34: 2336-2352.
- [12] Altenbach H, Ermejev V (2008) Analysis of the viscoelastic behavior of plates made of functionally graded materials. *ZAMM J Appl Math Mech* 88(5): 332- 341.
- [13] Amabili M (2016) Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates. *J Sound Vibr* 362(3): 142-156.
- [14] Nosier A, Kapania R, Reddy J (1994) Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory. *Comput Mech* 13: 360-379.
- [15] Christoforou AP, Elsharkawy AA, Guedouar LH (2001) An Inverse solution for low-velocity impact in composite plates. *J Comput Struct* 79: 2607-2619.
- [16] Christoforu PA, Yigit AS (1998) Characterization of impact in composite plates. *J Compos Struct* 43: 15-24.
- [17] Turner J (1980) Contact on a transversely isotropic half-space, or between two transversely isotropic bodies. *Int J Solids Struct* 16: 409-419.
- [18] Swanson S (2005) Contact deformation and stress in orthotropic plates. *Compos Struct* 36: 1421-1429.
- [19] Shariyat M, Farzan Nasab F (2014) Low-velocity impact analysis of the hierarchical viscoelastic FGM plates, using an explicit shear-bending decomposition theory and the new DQ method. *Compos Struct* 113: 63-73.
- [20] Lakes R (2009) *Viscoelastic materials*. Cambridge University Press.
- [21] Yang S, Su C (1982) Indentation law for composite laminates. *ASTM paer No. STP787*: 425-449.
- [22] Shariyat M (2007) Thermal buckling analysis of rectangular composite plates with temperature-dependent properties based on a layerwise theory. *Thin-Wall Struct* 45(4): 439-452.
- [23] Wang Y, Tsai T (1988) Static and dynamic analysis of a viscoelastic plate by the finite element method. *J Appl Acoust* 25(2): 77-94.
- اجزای محدود غیرخطی پدید آمده، ارائه شده است. برخی از نتایج کاربردی بدست آمده، عبارتند از:
- ۱- صلبیت ورق ویسکوالاستیک، در زمان‌های اولیه ضربه بزرگتر است.
- ۲- با وجود آنکه نیروی تماس در ورق ویسکوالاستیک بزرگتر است، بر خلاف تصور، مقادیر فروروی و زمان ضربه در این ورق کوچک‌ترند.
- ۳- در برخی حالت‌ها، روند تغییرات (کاهش یا افزایش) نیروی تماس و فروروی مشابه است (مانند، روند مشاهده شده در اثر افزایش سرعت اولیه ضربه‌زن) و در برخی حالت‌ها، متفاوت است (برای مثال، در برابر اثر ویسکو الاستیسته و نسبت مدول‌ها در مدل ویسکوالاستیسته).
- ۴- برخلاف نتایج پیش‌بینی‌های مدل‌های گسسته، زمان‌های متناظر با خیز بیشینه و نیروی تماس یا فروروی بیشینه، در حالت کلی متفاوتند.
- ۵- با کاهش ضریب میرایی، زمان واهلش افزایش یافته و ورق دیرتر پایدار می‌شود؛ در حالیکه با افزایش میزان میرایی، ورق سخت‌تر شده زودتر به حالت پایا می‌رسد.
- ۶- برای داده‌های کنونی، با افزایش نسبت ضرایب سفتی، اثرات میرایی کاهش یافته و در حد، ورق ویسکوالاستیک به ورق الاستیک تبدیل می‌شود.

#### ۸- مراجع

- [1] Gong S, Lam K (2000) Effect of structure and stiffness on impact response of layered structure. *AIAA J* 138(9): 1730-1735.
- [2] Abrate S (2011) *Impact engineering of composite structures*. Springer, Wien.
- [3] Cederbaum G, Aboudi J (1989) Dynamic response of viscoelastic laminated plates. *J Sound Vibr* 133(2): 225-238.
- [4] Chen T (1995) The hybrid Laplace transform finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams. *Int J Numer Meth Eng* 38(3): 509-522.
- [5] Iiyasov M, Aköz A (2000) The vibration and dynamic stability of viscoelastic plates. *Int J Eng Sci* 38(6): 695-714.
- [6] Paulino G, Jin Z (2001) Correspondence principle in viscoelastic functionally graded materials. *ASME J Appl Mech* 68: 129-132.