



## مطالعه شکست دینامیکی مواد تابعی تحت شوک‌های حرارتی-مکانیکی

محمود شریعتی<sup>۱</sup> و مسعود مهدی‌زاده رخی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup>استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

<sup>۲</sup>دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

### چکیده

در این مقاله رفتار شکست مواد تابعی تحت شوک‌های حرارتی-مکانیکی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. برای این منظور از معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک کوپله استفاده شده است. این معادلات با کمک روش المان محدود توسعه یافته گسسته سازی شده و سپس با استفاده از روش نیومارک در قلمرو زمان حل شده‌اند. شبیه سازی مواد تابعی توسط مدل‌های میکرومکانیکی متداول برای مواد مرکب انجام شده است. در این مقاله، کلی‌ترین شکل انتگرال برهمکنش برای ترک‌های مستقیم الخط متحرک تحت بارهای حرارتی و مکانیکی در مواد تابعی، استخراج و برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی بکار گرفته شده است. کلیه مراحل حل مسئله از مش‌بندی تا حل معادلات مربوطه و استخراج نتایج در محیط برنامه نویسی نرم افزار MATLAB صورت گرفته است. چندین مثال حل شده و نتایج حاصل با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مقالات دیگر مورد مقایسه قرار گرفته است. مطابقت خوب این نتایج، دقت و صحت روش حل ارائه شده و کد نوشته شده را تایید می‌کند. در نهایت چگونگی تغییر ضرایب شدت تنش با تغییر پروفیل ماده تابعی و نیز سرعت و مسیر رشد ترک در یک تیر از جنس شیشه-اپوکسی تحت شوک‌های حرارتی-مکانیکی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** شکست؛ رشد ترک؛ مواد تابعی؛ ترموالاستیسیته کوپله؛ شوک حرارتی-مکانیکی.

### ۱- مقدمه

می‌توان به ابزارهای برش، کوره‌ها، پوشش‌های ضد حرارت پره‌های توربین و غیره اشاره کرد [۱]. سرامیک‌ها به خاطر تحمل حرارت‌های بالا به طور گسترده در ساختار مواد تابعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. نقطه ضعف سرامیک‌ها شکننده بودن آنها تحت شوک‌های حرارتی و مکانیکی می‌باشد [۲]. بنابراین مطالعه رفتار شکست مواد تابعی تحت شوک‌های حرارتی و مکانیکی یک ضرورت در طراحی این مواد است.

مواد تابعی (FGMs) گونه جدیدی از مواد مرکب هستند که مشخصه آنها تغییر تدریجی میکرو ساختار و خواص ماده است. این مواد نخستین بار به عنوان عایق‌های حرارتی برای سازه‌های هوافضا و رآکتورهای هسته‌ای طراحی شدند و معمولاً برای تحمل تغییرات دمایی شدید مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان نمونه‌هایی دیگر از موارد کاربرد این مواد

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۵۴۴۸۲۸۱۳؛ فکس: ۰۲۷۳۳۳۹۱۴۶۰  
آدرس پست الکترونیک: [masoud\\_mahdizadeh@yahoo.com](mailto:masoud_mahdizadeh@yahoo.com)

مسائل شکست دینامیکی و گرمایی بررسی کردند. دافلوت<sup>۱۰</sup> [۱۹] شکست ترموالاستیک را در حالت استاتیکی با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته مورد مطالعه قرار داد. او مسائل دو بعدی و سه بعدی با شرایط مرزی حرارتی مختلف بر روی سطح ترک را مطالعه کرد. کی سی<sup>۱۱</sup> و کیم<sup>۱۲</sup> [۲۰] با استفاده از روش المان محدود تنش T و ضرایب شدت تنش در حالت مد ترکیبی در مواد تابعی تحت بارهای حرارتی پایا را محاسبه کردند. زمانی و اسلامی [۲۱] نیز با استفاده از روش المان محدود، ضریب شدت تنش مد I را برای یک ورق ترکدار از ماده تابعی محاسبه نمودند. آنها از معادلات ترموالاستیک کلاسیک جفت شده استفاده کردند. همچنین آنها با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته اثرات شوک‌های حرارتی و مکانیکی را بر روی یک جسم ترکدار مطالعه کردند [۲۲]. در این تحقیق ترک ایستا فرض شده بود. فنگ<sup>۱۳</sup> و جین<sup>۱۴</sup> [۲۳] رفتار شکست یک ورق FG شامل ترک‌های موازی با طول‌های متفاوت تحت یک شوک حرارتی را بررسی نمودند. اخلاکف<sup>۱۵</sup> و همکاران [۲۴] یک روش المان مرزی-ناحیه‌ای را برای تحلیل یک ترک ترموالاستیک گذرا در یک ماده همسانگرد غیر همگن و مواد تابعی الاستیک خطی ارائه دادند. آنها یک ترک لب‌های ایستا را در یک ناحیه دو بعدی محدود تحت یک شوک حرارتی در نظر گرفتند و ضرایب شدت تنش را محاسبه کردند.

پدیده رشد ترک در یک ماده تابعی تحت شوک حرارتی- مکانیکی با بهره‌گیری از معادلات ترموالاستیسیته جفت شده تاکنون در مقالات مورد بررسی قرار نگرفته است. در این مقاله با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته و با بکارگیری معادلات ترموالاستیسیته جفت شده، اثر شوک‌های حرارتی-مکانیکی بر روی یک ماده تابعی ترکدار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش دوم معادلات جفت شده ترموالاستیسیته کلاسیک گسسته سازی شده و روش انتگرال‌گیری زمانی نیومارک برای حل سیستم معادلات ماتریسی بدست آمده از گسسته سازی معادلات اولیه ارائه

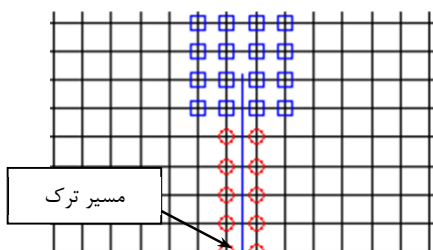
در این مقاله برای مدل‌سازی ترک‌ها از روش المان محدود توسعه یافته استفاده می‌شود که نیازی به شبکه بندی مجدد مدل در صورت رشد ترک ندارد و بر مبنای تفکیک واحد بنا نهاده شده است [۳-۶]. در این روش برای توصیف یک جایجایی گسسته، یک تابع غنی‌سازی ناپیوسته مثل تابع هویساید در امتداد مسیر ترک مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴]. تاکنون در زمینه رشد ترک در مواد همگن مطالعات زیادی صورت گرفته است. بلیچکو<sup>۱</sup> و همکاران [۷] یک روش جدید برای رشد ترک دینامیکی ارائه کردند. روزیچکی<sup>۲</sup> و همکاران [۸] گام زمانی بحرانی در روش المان محدود توسعه یافته برای مسئله رشد ترک را بررسی کردند. لیندر<sup>۳</sup> و آرمرو<sup>۴</sup> [۹] مسئله گسترش ترک دینامیکی را با المان‌های ناپیوسته جاسازی شده مطالعه کردند. منیولارد<sup>۵</sup> و همکاران [۱۰] نیز یک روش جدید برای غنی سازی وابسته به زمان ارائه دادند. مطالعه رفتار ورق‌های تابعی ترکدار تحت شوک‌های حرارتی و مکانیکی فقط در تعداد اندکی از مقالات یافت می‌شود. نودا<sup>۶</sup> و فوجیموتو<sup>۷</sup> [۱۱] و نودا [۱۲ و ۱۳] مطالعاتی را با استفاده از روش المان محدود برای بدست آوردن ضرایب شدت تنش در مواد همگن و مواد تابعی تحت بارگذاری حرارتی انجام دادند. آنها از معادله انتقال حرارت استفاده کردند و جفت شدگی حرارتی-مکانیکی را نادیده گرفتند. جین<sup>۸</sup> و پائولینو<sup>۹</sup> [۱۴] یک ترک لب‌های در یک نوار از ماده تابعی را تحت بارگذاری حرارتی گذرا مطالعه کردند. آنها از یک مدل چند لایه برای شبیه‌سازی ماده تابعی استفاده کردند. با صرفنظر از اثر جفت شدگی ترموالاستیک، محققان زیادی تحلیل دینامیکی گذرای ترک در مواد تابعی را با روش‌های گوناگون انجام داده‌اند. به عنوان مثال مراجع [۱۵] و [۱۶] و مراجع مندرج در آنها را ببینید. حسینی تهرانی و اسلامی [۱۷] و حسینی تهرانی و همکاران [۱۸] با استفاده از روش المان مرزی اثر جملات جفت کنندگی و اینرسی را در

<sup>1</sup> Belytschko<sup>2</sup> Rozycki<sup>3</sup> Linder<sup>4</sup> Armero<sup>5</sup> Menouillard<sup>6</sup> Noda<sup>7</sup> Fujimoto<sup>8</sup> Jin<sup>9</sup> Paulino<sup>10</sup> Dufflot<sup>11</sup> KC<sup>12</sup> Kim<sup>13</sup> Feng<sup>14</sup> Jin<sup>15</sup> Ekhlakov

بندی المان محدود توسعه یافته برای مولفه‌های جابجایی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \sum_N N_n(x, y) \mathbf{a}_n(t) + \sum_{n \in N_{Cr}} N_n(x, y) [H(x, y) - H(x_n, y_n)] \mathbf{b}_n(t) + \sum_m \sum_{n \in N_{tip}} N_n(x, y) [F_m(r, \varphi) - F_m(r_n, \varphi_n)] \mathbf{c}_{nm}(t) \quad (4)$$

که در این رابطه  $N$  تعداد کل گره‌ها،  $N_{Cr}$  مجموعه گره‌های اطراف مسیر ترک و  $N_{tip}$  مجموعه گره‌های نوک ترک هستند (شکل ۱ را ببینید).  $H(x, y)$  تابع هویساید و  $F_m$  توابع غنی سازی نوک ترک هستند [۲۶]. همچنین  $\mathbf{a}_n(t) = \{a_n^u(t), a_n^v(t)\}^T$ ،  $\mathbf{b}_n(t) = \{b_n^u(t), b_n^v(t)\}^T$  و  $\mathbf{c}_{nm}(t) = \{c_{nm}^u(t), c_{nm}^v(t)\}^T$  بردارهای مجهولات گره‌ای هستند.



شکل ۱- انتخاب گره‌های غنی سازی. دایره‌های قرمز گره-های مسیر ترک و مربع‌های آبی گره‌های نوک ترک را مشخص می‌کنند.

با فرض اینکه سطوح ترک آدیاباتیک باشند، دما در امتداد مسیر ترک ناپیوسته و شار گرمایی در نوک ترک تکین است. بنابراین میدان دما نیز مشابه میدان جابجایی غنی سازی می‌شود، با این تفاوت که فقط یک تابع غنی‌سازی به المان‌های نوک ترک اعمال می‌شود [۲۲].

$$\theta(x, y, t) = \sum_{all\ nodes} N_n(x, y) a_n^T(t) + \sum_{n \in N_{Cr}} N_n(x, y) [H(x, y) - H(x_n, y_n)] b_n^T(t) + \quad (5)$$

می‌شود. در بخش سوم کلی‌ترین شکل انتگرال برهم‌کنش برای مواد تابعی بر اساس فرمول‌بندی غیر تعادلی استخراج و نحوه محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی با استفاده از آن ارائه می‌شود. در بخش چهارم مدل‌های میکرومکانیکی که برای مدل‌سازی خواص مواد تابعی مورد استفاده قرار می‌گیرند، ارائه شده‌اند. فصل پنجم نیز به حل مثال‌های عددی اختصاص یافته است. در این فصل برای اطمینان از صحت و دقت نتایج، در چند مورد مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده در این مقاله و نتایج تحلیلی و عددی ارائه شده در مقالات دیگر، صورت گرفته است. در نهایت پدیده گسترش ترک در ماده تابعی شیشه/اپوکسی نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

## ۲- فرمول‌بندی کلی

### ۲-۱- گسسته سازی معادلات

یک سازه تحت شوک حرارتی و مکانیکی با استفاده از شکل جفت شده معادلات ترموالاستیک و انرژی تحلیل می‌شود. حل‌های تحلیلی این گونه از مسائل از نظر ریاضی پیچیده و محدود به یک جسم نامحدود یا نیم فضا با شرایط مرزی ساده هستند [۲۵]. معادلات کلی حاکم بر تئوری ترموالاستیسیته جفت شده کلاسیک عبارتند از [۲۵]:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$q_{i,i} + \rho c_t \dot{\theta} + T_0(1 + \theta/T_0) \beta \dot{\epsilon}_{ii} = R \quad (2)$$

که در این معادلات،  $B_i$  نیروهای جسمی،  $\rho$  چگالی،  $c_t$  ظرفیت گرمایی ویژه و  $\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu)$  است.  $\lambda$  و  $\mu$  نیز ثوابت لامه و  $\alpha$  ضریب انبساط گرمایی است. در صورتی که تغییر دما  $\theta$  در مقایسه با دمای اولیه  $T_0$  کوچک باشد معادله (۲) به صورت زیر ساده می‌شود [۲۵]:

$$q_{i,i} + \rho c_t \dot{\theta} + T_0 \beta \dot{\epsilon}_{ii} = R \quad (3)$$

همان طور که گفته شد سیستم معادلات جفت شده (۱) و (۳) حل تحلیلی عمومی ندارند. برای حل آنها می‌توان از فرمول‌بندی المان محدود مبتنی بر روش گلرکین استفاده نمود. مدل المان محدود توسعه یافته نیز مشابه مدل المان محدود است. در این روش تقریب جابجایی گره‌های اطراف مسیر ترک با یک تابع هویساید و جابجایی‌های گره‌های نوک ترک نیز با حل‌های مجانبی غنی سازی می‌شوند [۳]. این فرآیند برای غنی سازی دما نیز انجام می‌شود [۱۹]. فرمول-

گوس، بعد از ساده سازی و مونتاژ به شکل ماتریسی، معادله زیر برای ترموالاستیسیته جفت شده کلاسیک دو بعدی به دست می‌آید:

$$[M]\{\dot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{Fr\} \quad (14)$$

در این معادله  $[M]$ ،  $[C]$  و  $[K]$  به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی هستند. برای المان مبنای  $(e)$  که به طور کامل غنی سازی شده این ماتریس‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$[M]^{(e)} = \begin{bmatrix} [M_1] & [0]_{48 \times 24} \\ [0]_{24 \times 48} & [0]_{24 \times 24} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[C]^{(e)} = \begin{bmatrix} [0]_{48 \times 48} & [0]_{48 \times 24} \\ [C_1] & [C_2] \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [0]_{24 \times 48} & [K_3] \end{bmatrix} \quad (17)$$

در معادله (۱۴) بردار نیرو است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{F\}^{(e)} = \begin{pmatrix} \int_{V(e)} [S]^T \{Bf\} dV + \int_{A(e)} [S]^T \{Tf\} dA \\ \int_{V(e)} R [St]^T dV - \int_{A(e)} (q_x n_x + q_y n_y) [St]^T dA \end{pmatrix} \quad (18)$$

همچنین  $\{\Delta\}$  بردار جابجایی‌های گره‌ای و تغییرات دما است.  $\{\Delta\}^{(e)} = \{a_h^u, a_h^v, b_h^u, b_h^v, c_{hm}^u, c_{hm}^v, a_h^T, b_h^T, c_{hm}^T\}^T$   $h, m = 1, \dots, 4$  (۱۹)

$\{\dot{\Delta}\}$  و  $\{\Delta\}$  به ترتیب مشتقات اول و دوم هستند. مولفه‌های جرم، میرایی و سفتی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$[M_1] = \int_{V(e)} \rho [S]^T [S] dV \quad (20)$$

$$[C_1] = \int_{V(e)} T_0 \beta [St]^T [S_1] dV, \quad (21)$$

$$[C_2] = \int_{V(e)} \rho c_t [St]^T [St] dV \quad (22)$$

$$[K_1] = \int_{V(e)} [S_2]^T [D] [S_2] dV \quad (23)$$

$$[K_2] = - \int_{V(e)} \beta [S_1]^T [St] dV \quad (24)$$

برای مواد همسانگرد  $k_x = k_y = k$ ، بنابراین  $[K_3]$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[K_3] = \int_{V(e)} k [S_3]^T [S_3] dV \quad (25)$$

$$\sum_{n \in N_{tip}} N_n(x, y) [r^{0.5} \sin(\varphi/2) - r^{0.5} \sin(\varphi_n/2)] c_n^T(t)$$

که  $r$  و  $\varphi$  مختصات قطبی نوک ترک هستند. همچنین  $a_n^T(t)$ ،  $b_n^T(t)$  و  $c_n^T(t)$  مجهولات گره‌ای مربوط به میدان دما هستند. در هر المان مبنای  $(e)$  با این فرض که هر دو نوع غنی سازی به تمامی گره‌های آن اعمال شده‌اند، مولفه‌های جابجایی و تغییر دما را می‌توان به صورت فشرده زیر نمایش داد:

$$u^e(x, y, t) = N_h(x, y) a_h^u(t) + \Phi_h(x, y) b_h^u(t) + \Psi_{hm}(x, y) c_{hm}^u(t) \quad (6)$$

$$v^e(x, y, t) = N_h(x, y) a_h^v(t) + \Phi_h(x, y) b_h^v(t) + \Psi_{hm}(x, y) c_{hm}^v(t) \quad (7)$$

$$\theta^e(x, y, t) = N_h(x, y) a_h^T(t) + \Phi_h(x, y) b_h^T(t) + \Psi_{hm}(x, y) c_{hm}^T(t) \quad (8)$$

$$h = 1, 2, \dots, ne \quad m = 1, 2, 3, 4$$

در این روابط  $ne$  تعداد گره‌ها در المان  $e$  است. همچنین  $\Phi$  و  $\Psi$  جملات غنی شده میدان‌های جابجایی و تغییر دما هستند. با اعمال انتگرال باقی مانده وزنی به معادله حرکت (۱) و معادله انرژی (۲) نسبت به توابع وزنی  $S_l(x, y)$  تقریب گلرکین را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{V(e)} (\sigma_{ij,j} + B_i - \rho \dot{u}_i) S_l dV = 0 \quad (9)$$

$$\int_{V(e)} (q_{i,i} + \rho c_t \dot{\theta} + T_0 \beta \dot{u}_{i,i} - R) S_l dV = 0, \quad l = 1, 2, \dots, ns \quad (10)$$

$ns$  تعداد توابع شکل المان  $e$  و  $S_l$  مولفه‌های بردار  $S$  هستند.

$$S = \{N_1, N_2, N_3, N_4, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Psi_{1m}, \Psi_{2m}, \Psi_{3m}, \Psi_{4m}\} \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad (11)$$

قانون هوک، مولفه‌های تنش را به مولفه‌های جابجایی و تغییر دما به صورت زیر ارتباط می‌دهد:

$$\sigma_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + [\lambda u_{k,k} - \beta \theta] \delta_{ij} \quad (12)$$

که در این رابطه  $\theta = (T - T_0)$ . بر طبق قانون هدایت گرمایی فوریه داریم:

$$q_i = -k_{ij} \theta_{,j} \quad (13)$$

در این رابطه  $k_{ij}$  ضریب هدایت گرمایی برای یک ماده ناهمسانگرد است. با جایگذاری روابط (۶) تا (۸)، (۱۲) و (۱۳) در معادلات (۹) و (۱۰) و بکارگیری قضیه دیورژانس

$$\{\dot{\Delta}_{n+1}\} = \{\dot{\Delta}_n\} + \Delta t(1 - \gamma)\{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t\gamma\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \quad (35)$$

با تغییر مقادیر  $\gamma$  و  $\zeta$  فرمول‌های متفاوتی برای روش نیومارک بدست می‌آید. روش شتاب متوسط یکی از این فرمول‌بندی‌ها برای کاربردهای دینامیک سازه‌ای است که در تمام شرایط پایدار بوده و در آن  $\gamma$  و  $\zeta$  به ترتیب برابرند با  $0/5$  و  $0/25$ . از آنجایی که برای روش المان محدود توسعه یافته با یک فرمول‌بندی نیومارک صریح، گام زمانی پایدار خیلی کوچک است [۲۸] ما در این مقاله از روش ضمنی شتاب متوسط استفاده می‌کنیم.

### ۳- انتگرال برهمکنش و ضرایب شدت تنش

در این بخش، رابطه انتگرال برهمکنش برای مواد تابعی با استفاده از برهم نهی میدان‌های واقعی و کمکی در انتگرال  $J$  [۲۹] استخراج می‌شود. در این مقاله فرمول‌بندی غیر تعادلی [۳۰] برای استخراج انتگرال برهمکنش در مواد تابعی تحت بارگذاری گرمایی-مکانیکی مورد استفاده قرار گرفته است. در نهایت ضرایب شدت تنش دینامیکی با استفاده از انتگرال برهم‌کنش حاصل محاسبه می‌شوند.

اکنون دو میدان واقعی  $(\sigma, \varepsilon, u)$  و کمکی  $(\sigma^{aux}, \varepsilon^{aux}, u^{aux})$  را در نظر می‌گیریم. انتگرال  $J$  برای میدان‌های برهم نهی شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} J^s = & \int_{A^*} \{[(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{j,1} + u_{j,1}^{aux}) \\ & - 1/2(\sigma_{jk} + \sigma_{jk}^{aux})(\varepsilon_{jk}^m + \varepsilon_{jk}^{aux})\delta_{1i} \\ & - 1/2\rho(\dot{u}_k + \dot{u}_k^{aux})(\dot{u}_k + \dot{u}_k^{aux})\delta_{1i}]\mathbf{q}_i \\ & + [(\sigma_{ij,i} + \sigma_{ij,i}^{aux})(u_{j,1} + u_{j,1}^{aux}) \\ & + (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{j,1i} + u_{j,1i}^{aux}) \\ & - 1/2(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(\varepsilon_{ij,1}^m + \varepsilon_{ij,1}^{aux}) \\ & - 1/2(\sigma_{ij,1} + \sigma_{ij,1}^{aux})(\varepsilon_{ij}^m + \varepsilon_{ij}^{aux}) \\ & - \rho(\dot{u}_i + \dot{u}_i^{aux})(\dot{u}_{i,1} + \dot{u}_{i,1}^{aux}) \\ & - 1/2\rho_1(\dot{u}_i + \dot{u}_i^{aux})(\dot{u}_i + \dot{u}_i^{aux})\mathbf{q}]\mathbf{q}\}dA \end{aligned} \quad (36)$$

در این رابطه،  $\mathbf{q}$  یک تابع وزنی است که مقدار آن از ۱ در نوک ترک تا صفر بر روی مرز ناحیه انتگرال گیری  $A^*$  تغییر می‌کند. معادله (۳۶) را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$J^s = J + J^{aux} + MI \quad (37)$$

که در این رابطه  $J$  و  $J^{aux}$  به ترتیب انتگرال  $J$  برای میدان واقعی و میدان کمکی هستند و  $MI$  انتگرال برهمکنش (انتگرال  $M$ ) است که به صورت زیر به دست می‌آید:

ماتریس‌های  $[S]$ ،  $[St]$ ،  $[S_1]$ ،  $[S_2]$  و  $[S_3]$  و بردارهای  $\{Bf\}$  و  $\{Tf\}$  به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$[St] = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_4 & \Phi_1 & \dots & \Phi_4 & \Psi_{11} & \dots & \Psi_{44} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_4 & 0 & \dots & 0 & \Phi_1 & \dots & \Phi_4 \\ 0 & \dots & 0 & N_1 & \dots & N_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Psi_{11} & \dots & \Psi_{44} & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_1 & \dots & \Phi_4 & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11} & \dots & \Psi_{44} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{4,x} & N_{1,y} & \dots & N_{4,y} \\ \dots & N_{4,y} & \Phi_{1,x} & \dots & \Phi_{4,x} & \dots & \Phi_{4,y} \\ \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{44,x} & \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{4,x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_{1,y} & \dots & N_{4,y} \\ N_{1,y} & \dots & N_{4,y} & N_{1,x} & \dots & N_{4,x} \\ \Phi_{1,x} & \dots & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,x} \\ 0 & \dots & \Phi_{1,y} & \dots & \Phi_{4,y} & 0 \\ \Phi_{1,y} & \dots & \Phi_{1,x} & \dots & \Phi_{4,x} & \Psi_{11,y} \\ \dots & \Psi_{44,x} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} \\ \dots & \Psi_{44,y} & \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{44,x} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[S_3] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{4,x} & \Phi_{1,x} & \dots & \Phi_{4,x} \\ N_{1,y} & \dots & N_{4,y} & \Phi_{1,y} & \dots & \Phi_{4,y} \\ \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{44,x} \\ \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\{Bf\} = \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \end{Bmatrix}, \quad \{Tf\} = \begin{Bmatrix} t_x^n \\ t_y^n \end{Bmatrix} \quad (31)$$

ماتریس خواص برای حالت کرنش صفحه‌ای عبارت است از:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

### ۲-۲- انتگرال زمانی

برای حل معادله (۱۴) در قلمرو زمان می‌توان از روش نیومارک استفاده کرد. روش نیومارک پرکاربردترین روش مستقیم برای حل معادله حرکت گسسته سازی شده است. این روش شامل روابط زیر است [۲۷]:

$$[M]\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} + [C]\{\dot{\Delta}_{n+1}\} + [K]\{\Delta_{n+1}\} = \{Fr_{n+1}\} \quad (33)$$

$$\{\Delta_{n+1}\} = \{\Delta_n\} + \Delta t\{\dot{\Delta}_{n+1}\} + \Delta t^2(1/2 - \zeta)\{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t^2\zeta\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \quad (34)$$

مختصات سراسری محاسبه و سپس جهت محاسبه ضرایب شدت تنش به دستگاه مختصات محلی انتقال یابد.

انتگرال M در دستگاه مختصات سراسری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(MI_n)_g = \int_{A^*} \{ [\sigma_{ij} u_{j,n}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,n} - \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{aux} \delta_{ni}] - \rho \dot{u}_k \dot{u}_k^{aux} \delta_{ni} \} \frac{\partial q}{\partial X_i} + [\rho \ddot{u}_j u_{j,n}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux} u_{j,n} + \sigma_{ij}^{aux} (\alpha_n \theta + \alpha \theta_n) \delta_{ij} - (C_{ijkl,n} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux}) - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,n}^{aux} - \rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,n} - \rho_{,n} \dot{u}_i \dot{u}_i^{aux}] q \} dA \quad (41)$$

$n = 1, 2$

در این رابطه  $X_i$  مولفه‌های دستگاه مختصات سراسری هستند. انتگرال M در دستگاه مختصات محلی نوک ترک را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد [۳۰]:

$$MI_l = (MI_1)_g \cos \omega + (MI_2)_g \sin \omega \quad (42)$$

در این رابطه  $\omega$  زاویه بین دستگاه مختصات دکارتی محلی و سراسری در نوک ترک است. رابطه بین انتگرال M و ضرایب شدت تنش برای ترک ایستا در حالت کرنش صفحه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$MI_l = 2(1 - \nu_{tip}^2) (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) / E_{tip} \quad (43)$$

برای ترک متحرک نیز می‌توان رابطه زیر را نوشت [۱۰]:

$$MI_l = 2(1 - \nu_{tip}^2) [\beta_1(\dot{a}) K_I K_I^{aux} + \beta_2(\dot{a}) K_{II} K_{II}^{aux}] / E_{tip} \quad (44)$$

در این روابط  $E_{tip}$  و  $\nu_{tip}$  به ترتیب بیانگر مدول یانگ و نسبت پواسون در نوک ترک هستند و  $\dot{a}$  سرعت ترک است.  $\beta_i$  توابعی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳۳]:

$$\beta_1(\dot{a}) = \frac{4\alpha_d(1 - \alpha_s^2)}{(\kappa + 1)D(\dot{a})}, \quad \beta_2(\dot{a}) = \frac{4\alpha_s(1 - \alpha_s^2)}{(\kappa + 1)D(\dot{a})} \quad (45)$$

که در این توابع

$$\alpha_d = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_d}\right)^2}, \quad \alpha_s = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{a}}{c_s}\right)^2} \quad (46)$$

$$D(\dot{a}) = 4\alpha_d \alpha_s - (1 + \alpha_s^2)^2 \quad (47)$$

در حالی که  $c_d$  و  $c_s$  به ترتیب سرعت موج‌های انبساطی و برشی هستند. و  $\kappa$  ضریب کلوسوف است که در حالت کرنش صفحه‌ای برابر با  $4\nu - 3$  می‌باشد.

$MI =$

$$\int_{A^*} \{ [\sigma_{ij} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1} - 1/2 \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{aux} \delta_{1i}] - \rho \dot{u}_k \dot{u}_k^{aux} \delta_{1i} \} q_i + [\sigma_{ij,i} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux} u_{j,1} + \sigma_{ij} u_{j,1i}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1i} - 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux} - 1/2 \sigma_{ij}^m \varepsilon_{ij,1}^m - 1/2 \sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^{aux} - 1/2 \sigma_{ij,1}^m \varepsilon_{ij}^m - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1}^{aux} - \rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,1} - \rho_{,1} \dot{u}_i \dot{u}_i^{aux}] q \} dA \quad (38)$$

از آنجایی که میدان‌های واقعی از کمیت‌های به دست آمده از شبیه سازی عددی استفاده می‌کنند، شرط تعادل و سازگاری را ارضا می‌نمایند. در فرمول‌بندی غیر تعادلی برای میدان‌های کمکی ترک ایستا شرط تعادل ( $\sigma_{ij,i}^{aux} \neq 0$ ) [۳۰] و برای ترک متحرک معادله حرکت ( $\sigma_{ij,i}^{aux} \neq \rho \ddot{u}_j^{aux}$ ) ارضا نمی‌شود. در حالی که جابجایی‌ها و کرنش سازگارند، یعنی  $\sigma_{ij} u_{j,1i}^{aux} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux}$  و  $\varepsilon_{ij}^{aux} = 0.5(u_{i,j}^{aux} + u_{j,i}^{aux})$  تنش کمکی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{ij}^{aux} = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij}^{aux} \quad (39)$$

توجه کنید که میدان‌های کمکی، همان حل‌های مجانبی برای مواد همگن هستند. در این مقاله، میدان‌های کمکی برای ترک‌های ایستا بر مبنای حل مجانبی ویلیامز [۳۱] و برای ترک‌های متحرک بر پایه حل سونسون<sup>۲</sup> و اینگرافی<sup>۳</sup> [۳۲] استوارند. بنابراین کلی‌ترین شکل انتگرال M برای مواد تابعی در دستگاه مختصات محلی را می‌توان به صورت ساده زیر بیان کرد:

$$MI = \int_{A^*} \{ [\sigma_{ij} u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{j,1} - \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^{aux} \delta_{1i}] - \rho \dot{u}_k \dot{u}_k^{aux} \delta_{1i} \} q_i + [\rho \ddot{u}_j u_{j,1}^{aux} + \sigma_{ij,i}^{aux} u_{j,1} + \sigma_{ij}^{aux} (\alpha_{,1} \theta + \alpha \theta_{,1}) \delta_{ij} - (C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux}) - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1}^{aux} - \rho \dot{u}_i^{aux} \dot{u}_{i,1} - \rho_{,1} \dot{u}_i \dot{u}_i^{aux}] q \} dA \quad (40)$$

که در این رابطه عبارت  $\sigma_{ij,i}^{aux} u_{j,1}$  ناشی از فرمول‌بندی غیر تعادلی است. از آنجایی که محاسبه عددی سایر کمیت‌ها (جابجایی‌ها، کرنش‌ها، تنش‌ها و ...) بر مبنای دستگاه مختصات سراسری است، ابتدا باید انتگرال M در دستگاه

<sup>1</sup> Williams

<sup>2</sup> Swenson

<sup>3</sup> Ingraffea

افزوده شده به ماتریس است. کسر حجمی ماتریس نیز عبارت است از  $V_m(x) = 1 - V_i(x)$ .

در این مقاله از مدل‌های میکرو مکانیکی مواد مرکب که توسط حتا<sup>۱</sup> و تاپا<sup>۲</sup> [۳۴] و موری<sup>۳</sup> و تاناکا<sup>۴</sup> [۳۵] ارائه شده‌اند، برای محاسبه خواص مواد تابعی استفاده می‌شود. بر طبق این مدل‌ها هدایت گرمایی  $k$ ، مدول صلبیت برشی  $\mu$  و مدول حجمی  $K$  از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$k = k_m - \frac{3V_i(k_m - k_i)}{V_m(k_m - k_i) + 3k_m} k_m \quad (52)$$

$$\mu = \frac{\mu_m + V_i(\mu_i - \mu_m) / \{1 + V_m(\mu_i - \mu_m) / [\mu_m + \mu_m(9K_m + 8\mu_m) / 6(K_m + 2\mu_m)]\}}{1 + V_m(K_i - K_m) / (K_m + 4\mu_m/3)} \quad (53)$$

$$K = \frac{K_m + \frac{V_i(K_i - K_m)}{1 + V_m(K_i - K_m) / (K_m + 4\mu_m/3)}}{1 + V_m(K_i - K_m) / (K_m + 4\mu_m/3)} \quad (54)$$

مدول یانگ  $E$  و نسبت پواسون  $\nu$  نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$E = 9\mu K / (\mu + 3K) \quad (55)$$

$$\nu = (3K - 2\mu) / \{2(\mu + 3K)\} \quad (56)$$

چگالی  $\rho$ ، ظرفیت گرمایی ویژه  $c_t$  و ضریب انبساط گرمایی  $\alpha$  با استفاده از قانون اختلاط محاسبه می‌شوند:

$$\rho = V_i \rho_i + V_m \rho_m \quad (57)$$

$$c_t = V_i c_{ti} + V_m c_{tm} \quad (58)$$

$$\alpha = V_i \alpha_i + V_m \alpha_m \quad (59)$$

چقرمگی شکست برای ماده تابعی با استفاده از فرمول اختلاط جین<sup>۵</sup> و بترا<sup>۶</sup> [۳۶] محاسبه می‌شود.

$$K_{IC}(x) = \left\{ V_i(x) (K_{IC}^i)^2 + V_m(x) (K_{IC}^m)^2 \right\}^{0.5} \quad (60)$$

برای تعبیه خواص در مدل المان محدود، تمامی خواص برای هر گره با استفاده از مدل‌های میکرو مکانیکی محاسبه می‌شوند. سپس خواص مورد نیاز برای هر نقطه انتگرال‌گیری گوسی را می‌توان از روی خواص گره‌های المان مربوطه با استفاده از توابع شکل ایزوپارامتریک میان‌یابی کرد. بنابراین خواص ماده از قبیل مدول الاستیک  $E$ ، نسبت پواسون  $\nu$  و

در نهایت  $K_I$  و  $K_{II}$  را می‌توان به ترتیب با قرار دادن  $K_{II}^{aux} = 1$ ،  $K_I^{aux} = 0$  و  $K_I^{aux} = 0$ ،  $K_{II}^{aux} = 1$  در روابط (۴۳) برای ترک ایستا و (۴۴) برای ترک متحرک به دست آورد.

در مکانیک شکست دینامیکی، آغاز و ادامه رشد ترک به مقدار ضریب شدت تنش معادل  $K^{eq}$  نسبت به ضریب شدت تنش بحرانی ماده وابسته است. به عنوان مثال در حالت کرنش صفحه‌ای، مادامی که  $K^{eq} < K_{IC}$  است، ترک همواره ساکن می‌باشد. لحظه‌ای که  $K^{eq} \geq K_{IC}$  شود، ترک رشد خواهد کرد و مادامی که این شرط ارضا شود ترک متحرک خواهد بود. ضریب شدت تنش دینامیکی معادل  $K^{eq}$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

$$K^{eq} = K_{IC} \cos^3(\omega_c/2) - 1.5 K_{II} \cos(\omega_c/2) \sin \omega_c \quad (48)$$

در حالی که  $\omega_c$  زاویه‌ای است که ترک در آن جهت گسترش می‌یابد و با استفاده از معیار ماکزیمم تنش محیطی به دست می‌آید [۱۰]:

$$\omega_c = 2 \arctan(0.25 [K_I/K_{II} - \text{sign}(K_{II}) ((K_I/K_{II})^2 + 8)^{0.5}]) - \pi < \omega_c < \pi \quad (49)$$

برای محاسبه سرعت نوک ترک می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد [۳۳]:

$$\dot{a} = \begin{cases} 0 & K^{eq} < K_{IC} \\ c_r \left(1 - \frac{K_{IC}}{K^{eq}}\right) & K^{eq} \geq K_{IC} \end{cases} \quad (50)$$

بنابراین افزایش طول ترک در جهت  $\omega_c$  در هر گام زمانی  $\Delta t$  عبارت است از  $\Delta a = \dot{a} \Delta t$ .

#### ۴- مدل‌سازی ماده تابعی

خواص یک ماده تابعی در امتداد ضخامت آن باید با استفاده از یک تابع توصیف شود. در این تحقیق فرض می‌شود که تغییر خواص ماده در جهت محور  $x$  رخ می‌دهد و کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس ( $V_i$ ) از یک تابع نمایی ساده پیروی می‌کند. یعنی

$$V_i(x) = (x/L)^p \quad (51)$$

که در این رابطه  $L$  بعد ماده در جهت محور  $x$  و نمای  $p$  پارامتر تعیین کننده پروفیل تغییرات کسر حجمی ماده

<sup>1</sup> Hatta

<sup>2</sup> Taya

<sup>3</sup> Mori

<sup>4</sup> Tanaka

<sup>5</sup> Jin

<sup>6</sup> Batra

این ورق با تعداد  $61 \times 121$  المان مربعی چهارگره‌ای شبکه بندی شده است. گام زمانی استفاده شده در این مثال عبارت است از  $\Delta t = 0.002$  s. همچنین یک محدوده مربعی شکل با ابعاد  $2a \times 2a$  برای محاسبه انتگرال برهمکنش و ضریب شدت تنش KI در نظر گرفته شده است.

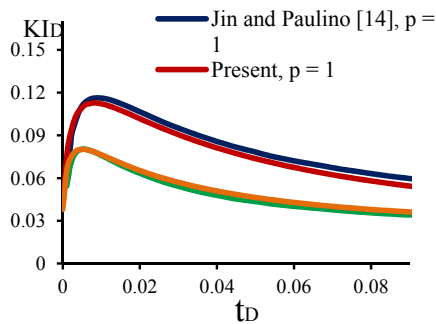
خواص مواد تشکیل دهنده این ورق یعنی  $Al_2O_3$  و  $Si_3N_4$  در جدول ۱ فهرست شده‌اند. همچنین فرض شده که سطح سمت چپ ورق  $Al_2O_3$  خالص باشد و تغییر درصد حجمی  $Si_3N_4$  در جهت محور  $x$  از رابطه (۵۱) تبعیت می‌کند.

ضرایب شدت تنش محاسبه شده برای دو مقدار مختلف  $p$  با مقادیر به دست آمده توسط جین و پائولینو [۱۴] در شکل ۳ مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. برای هماهنگی شرایط مسئله با مرجع [۱۴] از جمله جفت کننده ترموالاستیک صرفنظر شده است. در این مثال ضریب شدت تنش و زمان توسط روابط زیر بی بعد شده‌اند [۱۴]:

$$K_{ID} = K_I(1 - \nu) / \{E\alpha_0(T_0 - T_1)(\pi L)^{0.5}\} \quad (63)$$

$$t_D = k_0 t / \rho_0 c_{t0} L^2 \quad (64)$$

شکل ۳ نشان می‌دهد که نتایج مطابقت بسیار خوبی دارند. بنابراین این مثال بیانگر دقت بالای برنامه نوشته شده در این تحقیق برای مدل‌سازی مواد تابعی ترکدار تحت شوک‌های حرارتی است.



شکل ۳- مقایسه منحنی‌های ضریب شدت تنش (مثال اول).

### ۵-۲- مثال دوم

یک ورق دوبعدی با یک ترک لبه‌ای مطابق شکل ۴ را در نظر بگیرید که یک تنش کششی با مقدار  $\sigma_0 = 63750$  Pa در نظر

چگالی  $\rho$  برای هر نقطه گوسی را می‌توان به کمک روابط زیر محاسبه کرد [۳۷]:

$$E = \sum_{i=1}^m N_i E_i, \quad \nu = \sum_{i=1}^m N_i \nu_i, \quad \rho = \sum_{i=1}^m N_i \rho_i \quad (61)$$

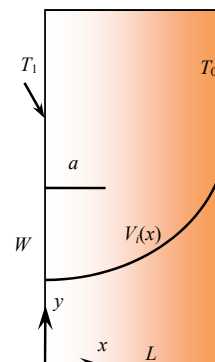
### ۵- مثال‌های عددی

در این بخش، ابتدا سه مثال ارائه می‌شوند که دقت و صحت برنامه نوشته شده را می‌آزمایند. سپس یک تیر ترکدار از جنس ماده تابعی اپوکسی-شیشه تحت شوک‌های حرارتی و مکانیکی مورد مطالعه قرار گرفته و پدیده رشد ترک در آن بررسی می‌شود. تمامی مثال‌ها در شرایط کرنش صفحه‌ای تحلیل می‌شوند.

### ۵-۱- مثال اول

یک ورق دو بعدی تابعی با یک ترک لبه‌ای مطابق با شکل ۲ را در نظر می‌گیریم. ابعاد این ورق عبارتند از  $L = 0.001$  m و  $W = 0.002$  m. طول ترک اولیه  $a = 0.001$  m است. این ورق در ابتدا در دمای اولیه  $T_0 = 200^\circ K$  قرار دارد. دمای سطح سمت چپ ورق در زمان  $t = 0$  به طور ناگهانی به  $T_1 = 190^\circ K$  کاهش می‌یابد، اما دمای سطح سمت راست همواره در مقدار  $200^\circ K$  ثابت باقی می‌ماند. بنابراین شرایط مرزی و اولیه دمایی عبارتند از:

$$\begin{aligned} T &= 200^\circ K \quad \text{در } t = 0, \\ T &= 190^\circ K \quad \text{در } x = 0, \\ T &= 200^\circ K \quad \text{در } x = L \end{aligned} \quad (62)$$

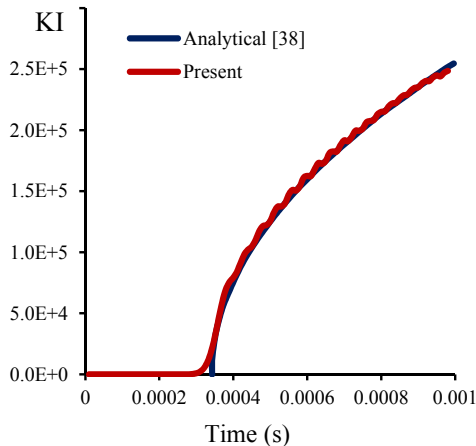


شکل ۲- هندسه و شرط مرزی ورق تابعی مثال اول



جدول ۱- خواص  $\text{Si}_3\text{N}_4$  و  $\text{Al}_2\text{O}_3$  [۲۳].

	مدول یانگ (GPa)	نسبت پواسون	ضریب انبساط گرمایی ( $10^{-6}/\text{K}$ )	هدایت گرمایی (W/mK)	چگالی ( $\text{Kg}/\text{m}^3$ )	ظرفیت گرمایی ویژه (J/KgK)
$\text{Al}_2\text{O}_3$	۳۲۰	۰/۲۵	۸	۲۰	۳۸۰۰	۹۰۰
$\text{Si}_3\text{N}_4$	۳۲۰	۰/۲۵	۳	۳۵	۳۲۰۰	۷۰۰



شکل ۵- مقایسه ضریب شدت تنش  $KI (Pa\sqrt{m})$  به دست آمده با مقادیر حل تحلیلی برای مثال دوم.

### ۵-۳ مثال سوم

یک تیر ترکدار تحت خمش سه نقطه مطابق شکل ۶ را در نظر بگیرید. بارگذاری در حالت مد اول است و ضرایب شدت تنش دینامیکی بین صفر و دو برابر مقدار استاتیکی که از رابطه زیر به دست می‌آید، نوسان می‌کنند [۲۳]:

$$KI_s = \frac{6L\sigma_0}{4BW^2} \sqrt{\pi a \Phi\left(\frac{a}{W}\right)} \quad (65)$$

که در این رابطه

$$\Phi\left(\frac{a}{W}\right) = 1.09 - 1.735\left(\frac{a}{W}\right) + 8.2\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 14.18\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 14.57\left(\frac{a}{W}\right)^4 \quad (66)$$

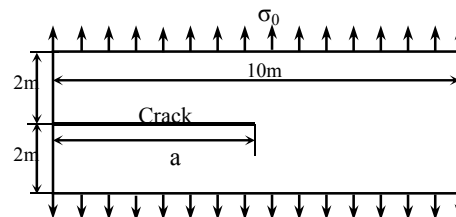
در این روابط  $L = ۰/۰۴\text{m}$  فاصله بین دو تکیه‌گاه،  $a = ۰/۰۰۵\text{m}$  طول ترک،  $W = ۰/۰۱\text{m}$  ارتفاع تیر و  $B = ۱\text{m}$  ضخامت تیر می‌باشند. یک بار گسترده به مقدار  $\sigma_0 = ۴۰۰\text{Pa}$  در لحظه اولیه بر روی طول  $l = ۰/۰۰۲۵\text{m}$  در مرکز تیر اعمال می‌شود.

زمان  $t = ۰$  به لبه‌های بالایی و پایینی آن وارد می‌شود. ابعاد ورق مطابق شکل ۴،  $۴\text{m} \times ۱۰\text{m}$  است و شامل یک ترک اولیه با طول  $a = ۵\text{m}$  می‌باشد.

این ورق از یک ماده همسانگرد و همگن تشکیل شده و خواص ماده تشکیل دهنده آن عبارتند از  $\rho = ۷۸۳۳\text{ kg}/\text{m}^3$ ،  $E = ۲۰۰\text{ GPa}$  و  $\nu = ۰/۳$ . این ورق با  $۲۰۱ \times ۸۱$  المان شبکه بندی شده است.

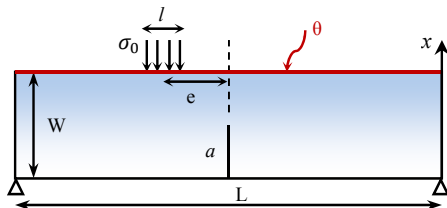
حل تحلیلی این مسئله توسط فروند [۳۸] برای یک ورق بی‌نهایت ارائه شده است. در اینجا چون ابعاد ورق در نظر گرفته شده محدود است، شبیه سازی تا زمان  $t = ۰/۰۰۱\text{ s}$  متوقف می‌شود، یعنی قبل از اینکه موج‌های منعکس شده از لبه‌ها به نوک ترک برسند.

یک ناحیه به ابعاد  $۰/۵\text{m} \times ۰/۵\text{m}$  برای محاسبه انتگرال برهم‌کنش و ضریب شدت تنش مد اول استفاده می‌شود. مقادیر  $KI$  به دست آمده برای این مسئله در شکل ۵ با مقادیر تحلیلی مقایسه شده‌اند و مطابقت خیلی خوبی بین نتایج دیده می‌شود. منحنی حاصل از روش عددی حول مقادیر تحلیلی نوسان دارد که این پدیده در مراجع [۷، ۲۱، ۲۲، ۳۳ و ۳۹] نیز برای روش المان محدود توسعه یافته گزارش شده است. این نوسانات مشخصه حل مسئله انتشار شوک توسط روش گسسته سازی المان محدود در قلمرو مکان و روش نیومارک در قلمرو زمان هستند [۲۲]. این مثال نشان دهنده قابلیت بسیار مناسب روش ارائه شده در حل مسائل تحلیل ترک تحت شوک مکانیکی است.



شکل ۴- هندسه و بارگذاری ورق همسانگرد

هندسه تیر همانند تیر مثال سوم است. خواص مواد تشکیل دهنده تیر در جدول ۲ ارائه شده است. محور  $x$  به سمت بالا در نظر گرفته شده و تغییرات کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس از رابطه نمایی ( $\Delta 1$ ) پیروی می‌کند.



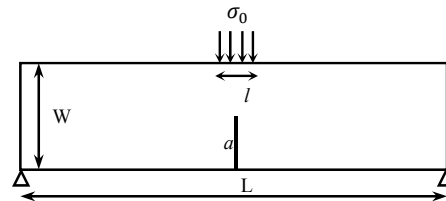
شکل ۸- هندسه و بارگذاری تیر FG ترکدار

شبکه استفاده شده برای حل این مسئله متشکل از  $35 \times 145$  المان مستطیلی چهار گره‌ای است. ناحیه در نظر گرفته شده برای محاسبه انتگرال برهم‌کنش یک مربع به ابعاد تقریبی  $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$  است. گام زمانی  $2 \mu\text{s}$  در نظر گرفته می‌شود.

ابتدا می‌خواهیم پاسخ تیر تحت شوک حرارتی، شوک مکانیکی و بارگذاری حرارتی-مکانیکی به طور همزمان را با هم مقایسه کنیم. فرض کنید که سطح زیرین تیر از جنس شیشه باشد و اپوکسی به عنوان ماده افزودنی در نظر گرفته می‌شود که کسر حجمی آن از رابطه ( $\Delta 1$ ) به دست می‌آید. در این رابطه  $p = 1$  در نظر گرفته می‌شود. در مرحله اول تیر تحت یک بار گسترده به مقدار  $\sigma_0 = 0.1 \text{ MPa}$  که در لحظه اولیه بر روی طول  $l = 0.025 \text{ m}$  در وسط تیر اعمال می‌شود ( $e = 0$ )، تحلیل شده سپس یک شوک حرارتی با مقدار  $\theta = 1$  بر روی سطح بالایی تیر اعمال و پاسخ تیر بدست می‌آید. در انتها تیر تحت هر دو بار به طور همزمان حل می‌شود.

منحنی ضریب شدت تنش KI برای این سه بارگذاری در شکل ۹ ترسیم و با یکدیگر مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که ماکزیمم مقدار منحنی ضریب شدت تنش برای بارگذاری حرارتی و مکانیکی همزمان تقریباً برابر با جمع آثار هر کدام از بارگذاری‌ها به طور جداگانه است.

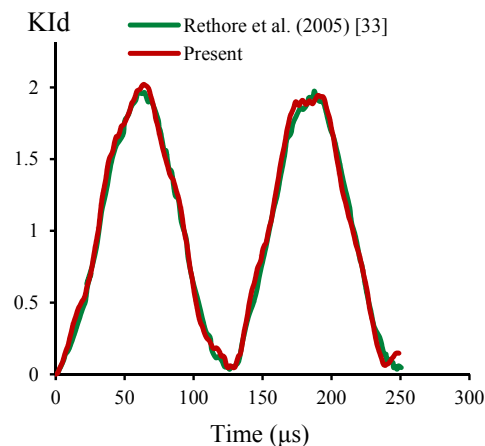
در ادامه اثر پارامتر  $p$  بر روی مقدار ضریب شدت تنش بررسی می‌شود. برای این منظور، دو تیر تحت شوک حرارتی



شکل ۶- هندسه تیر همگن تحت خمش سه نقطه

تیر از یک ماده همسانگرد و همگن با خواص  $E = 200 \text{ GPa}$ ،  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$  و  $\nu = 0.3$  تشکیل شده است. شبکه استفاده شده برای حل این مسئله متشکل از  $21 \times 91$  المان مستطیلی چهار گره‌ای است. ناحیه در نظر گرفته شده برای محاسبه انتگرال برهم‌کنش یک مربع به ابعاد تقریبی  $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$  است. زمان شبیه سازی  $250 \mu\text{s}$  می‌باشد که به  $200$  گام زمانی تقسیم شده است.

ضرایب شدت تنش KI به دست آمده با مقدار استاتیکی (رابطه (۶۵)) بی‌بعد شده و در شکل ۷ با منحنی ارائه شده در مرجع [۳۳] مقایسه شده‌اند. نمودار شکل ۷ نشان می‌دهد که نتایج مطابقت بسیار خوبی با هم دارند.



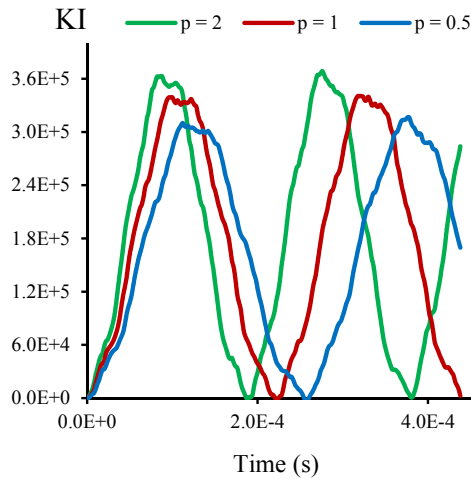
شکل ۷- مقایسه منحنی‌های ضریب شدت تنش KI بی‌بعد شده برای تیر تحت خمش سه نقطه

#### ۴-۵- مثال چهارم

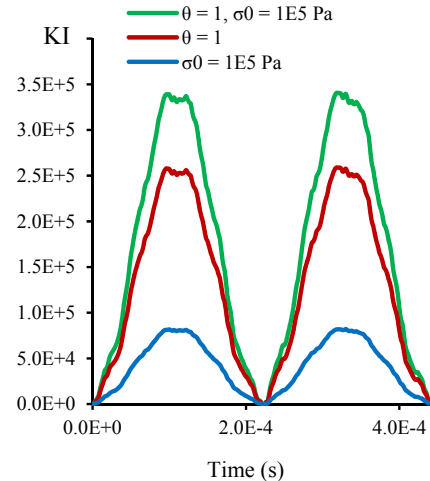
یک تیر ترکدار ساخته شده از ماده تابعی اپوکسی-شیشه تحت خمش سه نقطه مطابق شکل ۸ را در نظر بگیرید.

جدول ۲- خواص اپوکسی و شیشه.

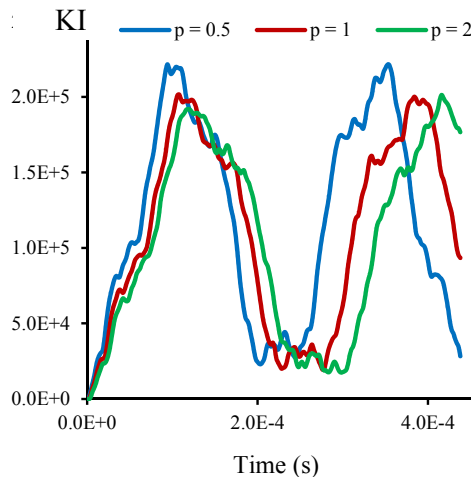
	مدول یانگ (GPa)	نسبت پواسون	ضریب انبساط گرمایی ( $10^{-6}/K$ )	هدایت گرمایی (W/mK)	چگالی (Kg/m <sup>3</sup> )	ظرفیت گرمایی ویژه (J/KgK)	چقرمگی شکست (MPam <sup>1/2</sup> )
اپوکسی	۳/۲	۰/۳۴	۵۵	۰/۱۸۸	۱۱۷۵	۱۲۰۰	۰/۶
شیشه (کربنات سدیم-آهک)	۷۰	۰/۲۳	۸/۳	۰/۹۳۷	۲۵۰۰	۸۸۰	۰/۷۵



(الف)



شکل ۹- مقایسه منحنی‌های  $KI (Pa\sqrt{m})$  بر حسب زمان برای سه بارگذاری مختلف بر روی تیر تابعی با ماتریس شیشه



(ب)

شکل ۱۰- مقایسه منحنی‌های  $KI (Pa\sqrt{m})$  بر حسب زمان برای تیر FG تحت شوک حرارتی-مکانیکی با سه مقدار مختلف p (الف) ماتریس شیشه (ب) ماتریس اپوکسی

$\theta = 1$  و شوک مکانیکی  $\sigma_0 = 0.1 \text{ MPa}$  که به طور همزمان اعمال می‌شوند را در نظر بگیرید. در تیر اول شیشه به عنوان ماتریس (لبه پایینی تیر) و در تیر دوم اپوکسی به عنوان ماتریس در نظر گرفته می‌شود. هر دو تیر با سه مقدار متفاوت  $p = 0.5$ ,  $p = 1$  و  $p = 2$  تحلیل و نتایج در شکل ۱۰ ارائه شده‌اند.

مشاهده می‌شود در صورتی که ماتریس شیشه باشد با افزایش  $p$ ،  $KI$  افزایش می‌یابد و هنگامی که اپوکسی ماتریس باشد، با افزایش  $p$ ،  $KI$  کاهش می‌یابد.

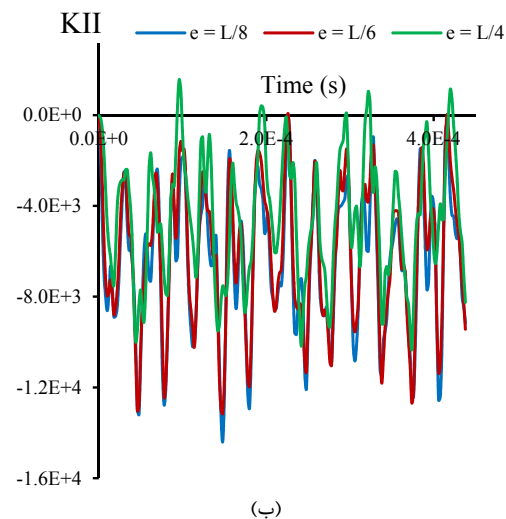
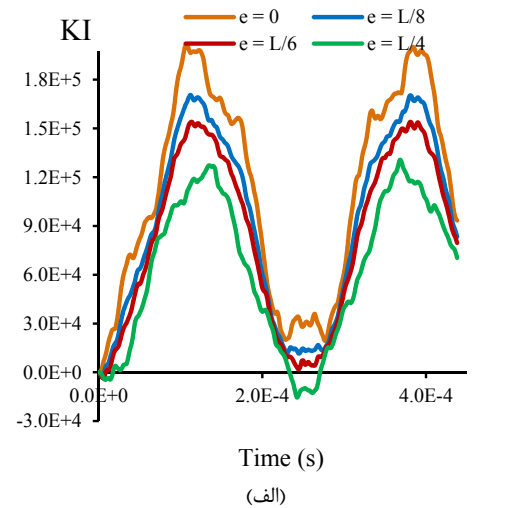
همچنین در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که سرعت رسیدن موج به نوک ترک با افزایش  $p$  در تیر با ماتریس شیشه افزایش یافته و در تیر با ماتریس اپوکسی کاهش می‌یابد.

واضح است که شوک حرارتی ترک را در حالت مد اول قرار می‌دهد. بنابراین هنگامی که بار مکانیکی در مرکز تیر وارد می‌شود ترک در حالت مد اول است و ضریب شدت تنش KII صفر می‌باشد. شکل ۱۱ نشان می‌دهد که با دور شدن بار مکانیکی از مرکز تیر، ترک در حالت مد ترکیبی قرار می‌گیرد و هرچه فاصله بار تا مرکز تیر بیشتر شود KI کاهش یافته زیرا مقدار ممان خمش در مرکز تیر کاهش می‌یابد. منحنی KII نسبت به KI نوسانات شدیدتری دارد و ابتدا با خارج شدن بار از مرکز و قرار گرفتن ترک در حالت مد ترکیبی ناگهان قله‌های این منحنی به بیشترین مقدار خود رسیده و با دور شدن بار مکانیکی از مرکز تیر به دلیل کاهش نیروی برشی در محل ترک، ارتفاع این قله‌ها کاهش می‌یابند. در انتها پدیده رشد ترک در تیر تابعی اپوکسی-شیشه مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور یک تیر مطابق شکل ۸ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم طول ترک اولیه  $a = 0.03m$  و بقیه ابعاد همانند مثال قبل باشند. پارامتر پروفیل ماده تابعی،  $\rho$  برابر با یک انتخاب می‌شود. شبکه استفاده شده برای المان بندی مدل متشکل از  $45 \times 181$  المان مستطیلی چهار گره‌ای است. ناحیه در نظر گرفته شده برای محاسبه انتگرال برهمکنش یک مربع به ابعاد تقریبی  $2mm \times 2mm$  است. گام زمانی نیز برابر با  $1 \mu s$  در نظر گرفته می‌شود. برای اینکه ترک رشد کند باید بار افزایش یابد. بنابراین مقادیر شوک حرارتی و مکانیکی را به ترتیب به  $\theta = 10$  و  $\sigma_0 = 5 MPa$  افزایش می‌دهیم.

شکل ۱۲ مسیر رشد ترک همراه با کانتورهای میدان تنش ون میزز را در یک تیر با ماتریس شیشه در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. این تیر فقط تحت شوک مکانیکی قرار گرفته و همان طور که پیش‌بینی می‌شد، مسیر رشد ترک مستقیم الخط است. شکل ۱۳ مسیر رشد ترک را برای دو تیر با ماتریس‌های شیشه و اپوکسی تحت شوک مکانیکی-حرارتی نشان می‌دهد. می‌توان دید که با دور شدن مکان اعمال بار مکانیکی از مرکز تیر مسیر رشد ترک به سمت بار متمایل می‌شود. سرعت رشد ترک برای این دو تیر در نمودار شکل ۱۴ ترسیم شده است. منحنی ضرایب شدت تنش معادل نیز برای حالت  $e = 0$  در شکل ۱۵ ترسیم شده‌اند.

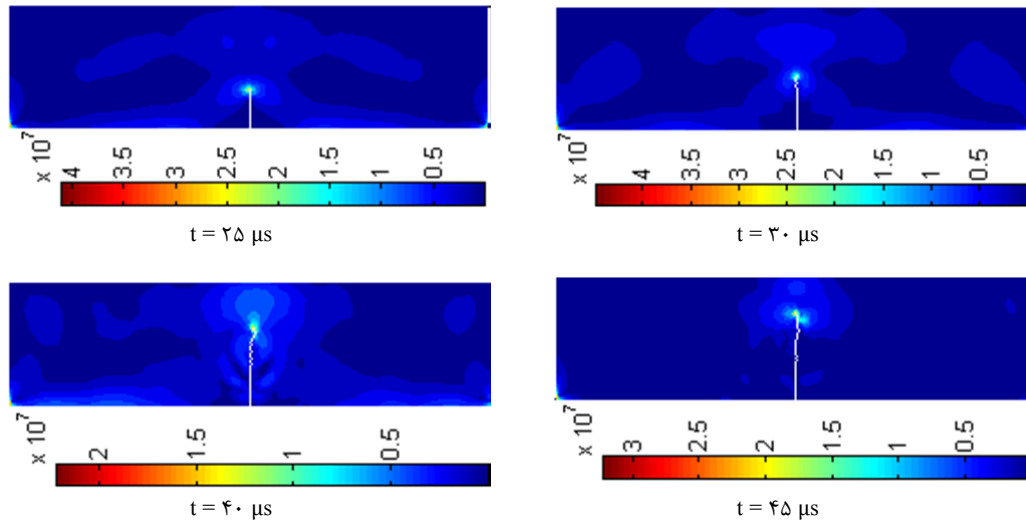
شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نشان می‌دهد که اگر لبه پایینی تیر از اپوکسی خالص (ماتریس اپوکسی) باشد، نسبت به حالتی

در ادامه اثر تغییر مکان اعمال شوک مکانیکی بر روی یک تیر با ماتریس اپوکسی بررسی می‌شود. تیر نشان داده شده در شکل ۸ در نظر گرفته می‌شود. تیر تحت شوک حرارتی  $\theta = 1$  و شوک مکانیکی  $\sigma_0 = 0.1 MPa$  به طور همزمان در لحظه اولیه قرار داده می‌شود. برای سه مقدار مختلف  $e$  یعنی  $e = L/8$ ،  $e = L/6$  و  $e = L/4$ ، ضرایب شدت تنش محاسبه و در شکل ۱۱ نشان داده شده‌اند.

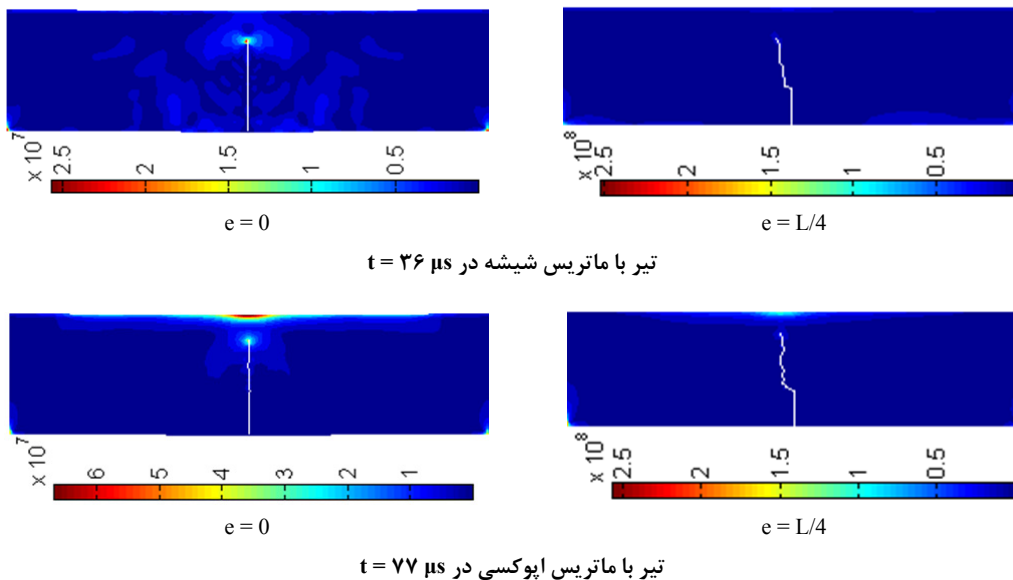


شکل ۱۱- مقایسه منحنی‌های ضرایب شدت تنش با واحد  $Pa\sqrt{m}$  برای تیر تابعی با ماتریس اپوکسی تحت شوک حرارتی-مکانیکی با سه مقدار مختلف  $e$  KI (الف) و KII (ب)

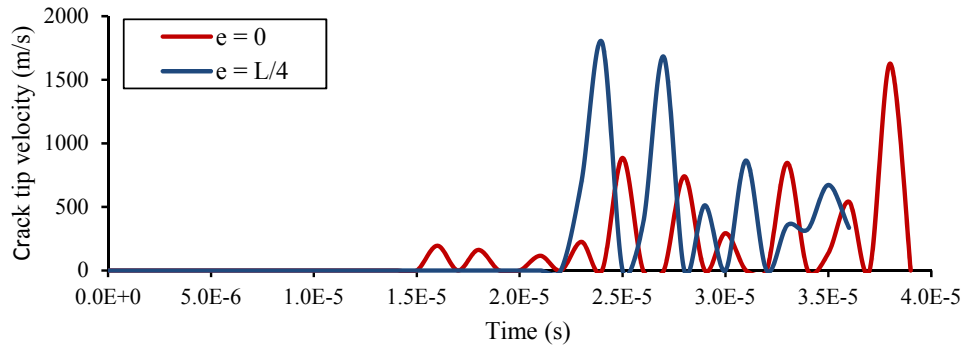
که لبه پایینی شیشه باشد، زمان آغاز رشد ترک افزایش می‌یابد. به عنوان مثال برای حالت  $e = 0$  زمان آغاز رشد ترک از حدود ۱۵ میکرو ثانیه به ۵۰ میکرو ثانیه افزایش یافته است.



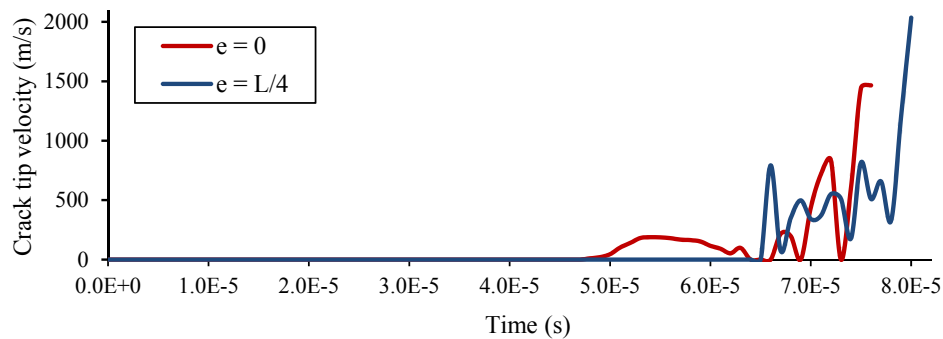
شکل ۱۲- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای میدان تنش ون میز در زمان‌های مختلف برای تیر تابعی با ماتریس شیشه تحت شوک مکانیکی



شکل ۱۳- مسیر رشد ترک به همراه کانتورهای میدان تنش ون میز برای تیرهای تابعی شیشه-اپوکسی تحت شوک مکانیکی و حرارتی



(الف)



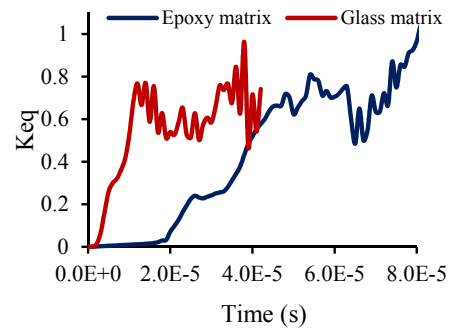
(ب)

شکل ۱۴- منحنی‌های سرعت رشد ترک برای تیر شیشه-اپوکسی تحت شوک حرارتی-مکانیکی  
الف) ماتریس شیشه، ب) ماتریس اپوکسی

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله معادلات ترموالاستیک کوپله برای مواد تابعی با استفاده از روش‌های المان محدود توسعه یافته و روش نیومارک حل شده‌اند و کلی‌ترین شکل انتگرال برهمکنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی در مواد همگن و تابعی استخراج شده است. تعدادی مثال حل شده و دقت روش ارائه شده تایید شده است. همچنین یک تیر ترک‌دار از جنس شیشه-اپوکسی تحت شوک حرارتی و مکانیکی تحلیل شده و پدیده رشد ترک در آن مورد مطالعه قرار گرفته‌است. می‌توان نتایج به دست آمده از تحلیل یک تیر تابعی از جنس شیشه-اپوکسی دارای ترک لبه‌ای (شکل ۸) را به صورت زیر خلاصه کرد:

۱- در صورتی که ماتریس شیشه باشد یعنی لبه زیرین تیر شیشه خالص و لبه بالایی اپوکسی



شکل ۱۵- منحنی‌های ضرایب شدت تنش معادل تنش با واحد  $MPa\sqrt{m}$  برای تیر تابعی تحت شوک گرمایی-مکانیکی در حالت  $e=0$ .

- [9] Linder C, Armero F (2009) Finite elements with embedded branching. *Finite Elem Anal Des* 45: 280–293.
- [10] Menouillard T, Song JH, Duan Q, Belytschko T (2010) Time dependent crack tip enrichment for dynamic crack propagation. *Int J Fract* 162: 33–49.
- [11] Noda N (1997) Thermal stress intensity factor for functionally gradient plate with an edge crack. *J Therm Stres* 20(3–4): 373–387.
- [12] Fujimoto T, Noda N (2000) Crack propagation in a functionally graded plate under thermal shock. *Arch Appl Mech* 70(6): 377–386.
- [13] Fujimoto T, Noda N (2001) Two crack growths in a functionally graded plate under thermal shock. *J Therm Stres* 24: 847–862.
- [14] Jin ZH, Paulino GH (2001) Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *Int J Fract* 107: 73–98.
- [15] Zhang Ch, Sladek J, Sladek V (2003) Effects of Material Gradients on Transient Dynamic Mode-III Stress Intensity Factors. *Int J of Solid and Struc* 40: 5251–5270.
- [16] Xu HM, Yao XF, Feng XO, Yeh HY (2008) Dynamic stress intensity factors of a semi-infinite crack in an orthotropic functionally graded material. *Mech of Mater* 40(1): 37–47.
- [17] Hosseini-Tehrani P, Eslami MR, Daghyani HR (2001) Dynamic crack analysis under coupled thermoelastic assumption. *J Appl Mech* 68(4): 584–588.
- [18] Hosseini-Tehrani P, Hosseini-Godarzi AR, Tavangar M (2005) Boundary element analysis of stress intensity factor KI in some two dimensional dynamic thermoelastic problems. *Eng Anal B E*. 29: 232–240.
- [19] Duflot M (2008) The extended finite element method in thermoelastic fracture mechanics. *Int J Num Meth Engin* 74: 827–847.
- [20] KC A, Kim JH (2008) Interaction integrals for thermal fracture of functionally graded materials. *Engin Fract Mech* 75: 2542–2565.
- [21] Zamani A, Eslami MR (2009) Coupled dynamical thermoelasticity of a functionally graded cracked layer. *J Therm Stres* 32: 969–985.
- [22] Zamani A, Eslami MR (2010) Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation. *Int J Solid Struc* 47:1392–1404.
- [23] Feng Y, Jin Z (2009) Thermal fracture of functionally graded plate with parallel surface cracks. *Acta Mechanica Solida Sinica* 22(5): 453–464.
- [24] Ekhlaqov AV, Khay OM, Zhang Ch, Sladek J, Sladek V (2012) A BDEM for transient thermoelastic crack problems in functionally
- خالص باشد، با افزایش  $p$ ، KI افزایش می‌یابد و هنگامی که اپوکسی ماتریس باشد با افزایش  $p$ ، KI کاهش می‌یابد.
- ۲- با افزایش  $p$ ، سرعت رسیدن موج به نوک ترک در تیر با ماتریس شیشه افزایش یافته و در تیر با ماتریس اپوکسی کاهش می‌یابد.
- ۳- با دور شدن بار مکانیکی از مرکز تیر، ترک در حالت مد ترکیبی قرار می‌گیرد. با افزایش فاصله اعمال بار مکانیکی تا مرکز تیر، KI و KII هر دو کاهش می‌یابند.
- ۴- با دور شدن مکان اعمال بار مکانیکی از مرکز تیر مسیر رشد ترک به سمت بار متمایل می‌شود و نیز زمان آغاز رشد ترک به تاخیر می‌افتد.

## مراجع

- [1] Azadi M, Azadi M (2009) Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinder with temperature-dependent material properties using Hermitian transfinite element. *J of Mech Scie and Tech* 23: 2635–2644.
- [2] Shen HS (2009) Functionally graded materials, Nonlinear analysis of plates and shells. Taylor & Francis Group, LLC.
- [3] Black T, Belytschko T (1999) Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *Int J Numer Method Engin* 45: 601–620.
- [4] Moës N, Dolbow J, Belytschko T (1999) A finite element method for crack growth without remeshing. *Int J Numer Method Engin* 46(1): 131–150.
- [5] Belytschko T, Moës N, Usui S, Parimi C (2001) Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int J Numer Method Engin* 50(4): 993–1013.
- [6]. Melenk JM, Babuška I (1996) The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Comput Meth Appl Mech Engin* 139(1–4): 289–314.
- [7] Belytschko T, Chen H, Xu J, Zi G (2003) Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *Int J for Num Method in Engin* 58: 1873–1905.
- [8] Rozycki P, Moës N, Béchet E, Dubois C (2008) X-FEM explicit dynamics for constant strain elements to alleviate mesh constraints on internal or external boundaries. *Comput Method Appl Mech Engin* 197(5): 349–363.

- finite elements: theory and applications. *comp mech* 3: 381–397.
- [33] Réthoré J, Gravouil A, Combescure A (2005) An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using extended finite element method. *Int J for Num Meth in Engin* 63: 631–659.
- [34] Hatta H, Taya M (1986) Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites. *Int J Engin Scie* 24: 520–524.
- [35] Mori T, Tanaka K (1973) Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Materialia* 21: 571–574.
- [36] Jin ZH, Batra RC (1996) Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials. *J Mech Phys Solid* 44: 1221–1235.
- [37] Kim JH, Paulino GH (2002) Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *ASME J Appl Mech* 69: 502–514.
- [38] Freund LB (1990) *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge University press, Cambridge.
- [39] Duarte CA, Hamzeh ON, Liszka TJ, Tworzydło WW (2001) A generalized finite element method for the simulation of three dimensional dynamic crack propagation. *Comp Meth in Appl Mech and Engin* 190: 2227–2262.
- graded materials under thermal shock. *Comp Mater Scie* 57: 30–37.
- [25] Hetnarski RB, Eslami MR (2009) *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*, Springer.
- [26]. Mohammadi S (2008) *Extended Finite Element Method*. Blackwell Publishing Ltd.
- [27] Hughes TJR (1987) *The finite element method*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall INC.
- [28] Gerlach CA (1999) *Computational methods for the dynamic response of cracked specimens*. Ph.D. Thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois.
- [29] Rice JR (1968) A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *ASME J Appl Mech* 35(2): 379–386.
- [30] Song SH, Paulino GH (2006) Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method. *Int J Solid Struc* 43:4830–4866.
- [31] Williams ML (1957) On the stress distribution at the base of a stationary crack. *ASME J Appl Mech* 24(1): 109–114.
- [32] Swenson DV, Ingraffea AR (1988) Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using