



مدل‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر گرما - شماره با روش مشخصه بنیان چند بعدی

توحید ادیبی^{۱*} و سید اسماعیل رضوی^۲

^۱ استادیار، دانشگاه بناب، دانشکده فنی و مهندسی

^۲ دانشیار، دانشگاه تبریز، دانشکده مکانیک

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۱/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۳/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۷/۱۹

چکیده

طرح مشخصه بنیان جدیدی در روش حجم محدود برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر همراه با انتقال گرما توسعه داده شد. در این طرح، برای محاسبه جمله‌های همرفت، مشخصه‌های چند بعدی به کار رفته است. برای به دست آوردن خطوط مشخصه مجازی و معادلات سازگاری، معادله انرژی با معادلات ناویر-استوکس در نظر گرفته شده‌اند. این طرح فراباد مشخصه بنیان که برای محاسبه جمله‌های همرفت در مرز سلول به کار می‌رود، برای پایداری نیازی به میراگرهای مصنوعی ندارد. به عنوان محک، شبیه‌سازی جریان بین دو صفحه موازی و جریان داخل حفره در جریان با جابجایی اجباری و جابجایی ترکیبی در گستره بزرگی از عددهای رینولدز گراشف و پرانتل به کار رفته‌اند. دقت بالاتر و همگرایی سریع‌تر برای روش پایه، مشخصه بنیان ارایه شده در نتایج قابل مشاهده است. نتایج به دست آمده از این روش، با نتایج موجود در ادبیات فن تطابق خوبی دارند.

کلمات کلیدی: روش پایه مشخصه چندبعدی؛ معادلات ناویر-استوکس؛ تراکم‌پذیری مصنوعی؛ جابجایی ترکیبی؛ روش حجم محدود.

A Novel Multi-dimensional Characteristic Modeling of Incompressible Convective Heat Transfer

T. Adibi^{1,*} and S. E. Razavi²

¹ Assistant Professor, Bonab university, Bonab, Iran.

² Associate. Professor, Tabriz University, Tabriz, Iran.

Abstract

A characteristic-based approach is developed for thermo-flow with finite volume methodology (FVM), in which the multi-dimensional characteristic (MC) scheme is applied for convective fluxes. In order to obtain the compatibility equations and pseudo-characteristics, the energy equation is taken into account in the MC scheme. Using this inherent upwinding technique for evaluating convective fluxes at cell interfaces, no artificial viscosity is required, even at high Reynolds numbers. As benchmarks, the forced convection between parallel plates and forced and mixed convection in a cavity are examined for a wide range of Reynolds, Grashof, and Prandtl numbers. The results obtained by the proposed scheme confirm the robustness of the MC scheme in terms of the accuracy and convergence. These results are in good agreement with the standard benchmark solutions in the literature.

Keywords: Multidimensional Characteristics; Navier-Stokes Equations; Artificial Compressibility; Mixed Convection; Finite Volume Method.

۱- مقدمه

در کل دو دسته روش برای حل معادله‌های تراکم‌ناپذیر ناویر-استوکس موجود است. اولین دسته که روش‌های فشار پایه نامیده می‌شود، بر پایه ارضای مستقیم شرط تراکم‌ناپذیری قرار دارند. دسته دوم (روش‌های چگالی مبنا)، برای حل جریان‌های تراکم‌ناپذیر، بر پایه فرمولبندی جریان‌های تراکم‌پذیر قرار دارند. روش تراکم‌پذیری مصنوعی برای پیوند معادله‌های اندازه حرکت و پیوستگی و اعمال زمانروی به کار می‌رود [۱]. با این روش، معادله‌های حاکم ماهیت هذلولی پیدا نموده، اعمال روش‌های جریان‌های تراکم‌پذیر ممکن می‌شود. از جمله مشخصات روش تراکم‌پذیری مصنوعی در مقایسه با سایر روش‌های تحلیل جریان‌های تراکم‌ناپذیر، همگرایی سریعتر است. در حل معادله‌ها در طرح‌های مبتنی بر گسسته‌سازی حجم محدود، مشکل اصلی محاسبه شارهای همرفت است. ساده‌ترین روش محاسبه شارهای همرفت، میانگین‌گیری است. مشکل، پایداری این روش است که برای غلبه بر آن جمله‌های میراگر مصنوعی نیاز خواهد بود. روش مشخصه‌ها، به دلیل مطابقت با فیزیک واقعی جریان و ارایه جواب‌های دقیق‌تر مورد توجه زیادی بوده، طرح‌های محاسباتی زیادی بر پایه آنها گسترش یافته‌اند.

تامادیس^۱ و همکاران [۲]، روش‌های تراکم‌پذیری مصنوعی و فشار مبنا را برای جریان‌های سه‌بعدی آرام مقایسه کردند. همگرایی سریع‌تر روش تراکم‌پذیری مصنوعی، نسبت به روش فشار مبنا گزارش شد. برای روش فشار مبنا طرح مرتبه سوم QUICK و برای محاسبه میدان فشار الگوریتم SIMPLER به کار رفت. برای روش تراکم‌پذیری مصنوعی، شارهای همرفت توسط روش مرتبه دوم اختلاف مرکزی استفاده شد و برای گسسته‌سازی زمانی طرح اختلاف محدود مرتبه اول به کار رفت. برای پایداری از میراگر مصنوعی مرتبه چهار استفاده شد. علی جلالی و همکارانش [۳]، با استفاده از معادله متشکله گزیکس جریان سه بعدی همراه با انتقال گرمای سیال ویسکوالاستیک در حال توسعه در کانال‌های مستطیلی، شبیه‌سازی کردند. معادلات حاکم بر مسئله، معادلات بقا و همچنین معادله متشکله گزیکس در

حالت دائم می‌باشند که با استفاده از روش تفاضل محدود، گسسته‌سازی شده و با استفاده از روش‌های شبکه جابجا و فشرده‌سازی مصنوعی، مورد تحلیل قرار گرفته‌اند.

دیریکاکیس^۲ و همکاران [۴]، روشی بر پایه مشخصه‌ها (CB) با تراکم‌پذیری مصنوعی برای حل معادله‌های ناویر-استوکس جریان تراکم‌ناپذیر آرام ارایه کردند. برای به دست آوردن روش CB، شیوه حجم محدود به کار رفته است. مقادیر متغیرها روی مشخصه‌ها با طرح اختلاف محدود فراباد، بر اساس علامت مقدار ویژه موضعی ماتریس ژاکوبین شارهای همرفت محاسبه می‌شوند. گسسته‌سازی زمانی با روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم انجام یافته است. تای^۳ و همکاران [۵]، روش دیریکاکیس را به طرح فراباد مرتبه بالا بر اساس مشخصه‌های یک‌بعدی محلی در مرز سلول‌ها برای حل معادله‌های تراکم‌ناپذیر در شبکه‌های دو بعدی و سه بعدی بی‌سازمان گسترش دادند. آنها جهت عمود بر مرز سلول را مینای محاسبه شار همرفت قرار دادند. همچنین برای حل ناپایا، گام زمانی دوگانه به کار رفت.

نیسیاروسو^۴ و لیو^۵ [۶]، با معادله‌های تراکم‌پذیری مصنوعی، جریان‌های آشفته تراکم‌ناپذیر پایا و ناپایا را بر اساس جداسازی معادله‌ها و گسسته‌سازی به روش CB، حل کردند. نیوفیتو^۶ [۷]، بازنگری در به دست آوردن معادله‌های سازگاری و مسیره‌های مشخصه در طرح‌های پایه مشخصه معادله‌های تراکم‌پذیری مصنوعی، انجام داده که باعث بهبود روند همگرایی شده است؛ همچنین برای پیدا کردن معادله‌های مشخصه‌ها، روش بهبود یافته‌ای پیشنهاد شده که بر مبنای روند تکرار قرار دارد. سو^۷ و همکاران [۸]، روش پایه مشخصه بازنگری شده را مورد کنکاش بیشتری قرار داده‌اند. تمامی فرمول‌ها برای فشار و سرعت از روی روش CB بازنگری شده که بر پایه تراکم‌پذیری مصنوعی است. همچنین سازگاری فرمول‌بندی‌های مختلف روش CB اصلی با معادله‌های حاکم بر جریان پس از همگرایی بررسی و

² Drikakis³ Tai⁴ Nithiarasu⁵ Liu⁶ Neofytou⁷ Su¹ Tamamidis

و همکاران [۱۶]، روش تراکم‌پذیری مصنوعی را با روش لتیز بولتزمن (LBM) مقایسه کردند. آنها با تغییر در نحوه محاسبه جمله‌های میراگر مصنوعی، روش تراکم‌پذیری مصنوعی را بهبود بخشیدند. نتایج نشان می‌دهد، روش تراکم‌پذیری مصنوعی تقویت شده در مقایسه با LBM از دقت و پایداری بیشتری برخوردار است. قاسمی^۸ و رضوی [۱۷]، LBM را برای تحلیل جریان تراکم‌ناپذیر همراه با انتقال گرما با روش حجم محدود گسترش دادند. روش فراباد بر پایه فشار و دما تعریف شد که به عنوان تصحیح گر برای محاسبه شار به کار رفت. هاری^۹ و شریمتون^{۱۰} [۱۸]، از روش ضمنی برای حل جریان تراکم‌ناپذیر استفاده کردند. برای تحلیل جریان از الگوریتم SIMPLE با شبکه‌بندی جابه‌جا شده استفاده شد. جابجایی آزاد و اجباری بررسی شدند.

سرینواسا^{۱۱} و اسوارا^{۱۲} [۱۹]، جریان جابجایی آزاد ناپایا را برای مخروط ناقص با دمای دیوار ثابت و با لزجت و عدد پرناتل متغیر حل کردند. از اختلاف محدود ضمنی و شبه یک‌بعدی‌سازی برای حل معادله‌های غیرخطی استفاده شد. با توجه به ماهیت جریان، معادله‌های جریان و انرژی همزمان حل شدند. راجی^{۱۳} و همکاران [۲۰]، جریان با جابجایی آزاد درون حفره را با روش SIMPLER حل کردند. شارهای همرفت با روش پیوندی که در آن اختلاف مرکزی با روش فراباد جایگزین شده بود، محاسبه شدند. سلیمفندیگیل^{۱۴} و اوزتاپ^{۱۵} [۲۱]، جابجایی ترکیبی در حفره را برای گستره‌ای از عددهای رینولدز، گراشف و استروهال شبیه‌سازی کردند. شارهای همرفت در معادله‌های انرژی و اندازه حرکت با QUICK حل شد و الگوریتم SIMPLE برای پیوند سرعت و فشار به کار رفت. سیواسانکاران^{۱۶} و همکاران [۲۲]، جریان جابجایی ترکیبی را داخل حفره شیب‌دار با ابعاد مختلف و جاسازی گرمکن‌هایی در موقعیت‌های مختلف حل کردند. معادله‌های حاکم با روش حجم محدود حل شد و برای

مشخص شده است. رضوی^۱ و همکاران [۹]، روش فراباد پایه مشخصه چند بعدی (MCB) برای حل معادله‌های ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر آرام ارائه کردند. از طرح حجم محدود برای مدل‌سازی شارهای جابه‌جایی استفاده شده است. زمزمیان^۲ و رضوی [۱۰]، طرح فراباد پایه مشخصه چند بعدی MCB معرفی شده در [۹] را در جریان با پله وارون و جریان پایا و ناپایای از روی استوانه به کار برده‌اند. توسعه طرح MCB برای محاسبه شارهای همرفت، در شبکه‌های غیرکارتزین ارائه شده است. همگرایی سریع‌تر و دقت بالاتر طرح پیشنهاد شده، گزارش شد. رضوی و همکاران [۱۱]، مقایسه‌ای بین روش‌های میانگین‌گیری وزنی به کمک فشار، Roe, CB, CB تصحیح شده انجام دادند. مطالعه موردی روی NACA0012 انجام شده است.

آتش بار^۳ و همکاران [۱۲]، جریان صلیبی اطراف استوانه را با روش CB و میانگین‌گیری شبیه‌سازی کردند. سرعت همگرایی بالاتر و پایداری و دقت بیشتر برای روش CB در مقایسه با میانگین‌گیری گزارش شد. برای گسسته‌سازی زمانی از رانگ-کوتای مرتبه پنج استفاده شد. شکیر^۴ و همکاران [۱۳]، معادله‌های ناویر-استوکس و انرژی را با روش حجم محدود گسسته‌سازی کردند. برای محاسبه شارهای همرفت، از روش فراباد استفاده شده، سپس معادله‌های به دست آمده با روش SIMPLE در شبکه‌بندی جابه‌جا شده حل شده‌اند. تمارهاد^۵ و همکاران [۱۴]، همرفت اجباری و آزاد درون حفره را بررسی کردند. برای حل معادله‌های ناویر-استوکس از روش حجم محدود و پیوند میدان سرعت و فشار، روش SIMPLEC به کار رفته است. شیشکینا^۶ و همکاران [۱۵]، گسسته‌سازی حجم محدود را برای حل جریان آشفته با انتقال گرما پیشنهاد دادند. روش پیشنهادی آنها روش اختلاف مرکزی با دقت مرتبه چهار نیمه ضمنی بود. همچنین از شبکه‌بندی جابه‌جا شده استفاده شده است. اودا^۷

⁸ Ghasemi

⁹ Haeri

¹⁰ Shrimpton

¹¹ Srinivasa

¹² Eswara

¹³ Raji

¹⁴ Selimefendigil

¹⁵ Öztop

¹⁶ Sivasankaran

¹ Razavi

² Zamzamin

³ Atashbar

⁴ Shakir

⁵ Tmartnhad

⁶ Shishkina

⁷ Ohwada

معادله‌های (۱) با عوامل زیر بی‌بعد شده‌اند و برای سادگی علامت * از کلیه پارامترها حذف شده است.

$$u^* = \frac{u}{U_{ref}}, \quad v^* = \frac{v}{U_{ref}}, \quad x^* = \frac{x}{L_{ref}}, \quad y^* = \frac{y}{L_{ref}},$$

$$p^* = \frac{p + \rho g y - p_\infty}{\rho_{ref} U_{ref}^2}, \quad t^* = \frac{t U_{ref}}{L_{ref}}, \quad T^* = \frac{T - T_{ref1}}{T_{ref2} - T_{ref1}}. \quad (2)$$

در رابطه (۱) عددهای Gr, Ec, Pr, Re عددهای بی‌بعد هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$Re = \frac{\rho_{ref} u_{ref} L_{ref}}{\mu}, \quad Ec = \frac{u_{ref}^2}{c_p (T_{ref2} - T_{ref1})},$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k}, \quad Gr = \frac{\beta_{ex} g (T_{ref2} - T_{ref1}) L_{ref}^3}{\nu^2}. \quad (3)$$

۲-۱- استخراج روش MC و محاسبه شارهای همرفت

برای محاسبه مقدار هر کمیت روی اضلاع سلول‌ها، روش‌های مختلفی وجود دارد. از ساده‌ترین آنها، میانگین‌گیری بین دو سلول با ضلع مشترک است. (رابطه (۴)) اما برای پایداری، این روش نیازمند جمله‌های میراگر مصنوعی خواهد بود.

$$\lambda_{i,j}^* = (\lambda_{i,j} + \lambda_{i+1,j}) / 2, \quad \lambda = p, u, v, T. \quad (4)$$

روش بعدی، روش پایه مشخصه چندبعدی (MC) است. در این مطالعه، برای اولین بار، معادله‌های سازگاری و صفحه‌ها مشخصه مربوط برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر همراه با انتقال گرما به دست آورده می‌شوند. برای تعیین مشخصه‌ها، محور زمان عمود بر صفحه فیزیکی در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین بردار سرعت مجازی به صورت $V = ui + vj + k$ تعریف می‌شود. مسیر پیمایش ذره در مختصات تعریف شده، خط مسیر مجازی نامیده می‌شود. تصویر این مسیر روی صفحه x,y خط مسیر ذره خواهد بود. برای به دست آوردن مشخصه‌ها از ترکیب خطی معادلات حاکم داریم.

$$\sigma_1 \frac{\partial p}{\partial t} + \sigma_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma_3 \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (\sigma_1 \beta + u \sigma_2) \frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$(v \sigma_2) \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial v}{\partial t} + (u \sigma_3) \frac{\partial v}{\partial x} + (\sigma_1 \beta + v \sigma_3) \frac{\partial v}{\partial y} +$$

$$\sigma_4 \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0. \quad (5)$$

شارهای همرفت و نفوذ به ترتیب، از طرح‌های فراباد و میانگین‌گیری استفاده شد. ابراهیمی و دربندی [۲۳]، جریان جابجایی آزاد همراه با اختلاط دو گاز اکسیژن و نیتروژن در حالت آرام، غیردائم و تراکم‌پذیر در یک چاله مربعی، مورد بررسی قرار دادند. معادلات پیوستگی، ممنوم، انرژی و جرم اجزاء شیمیایی با روش حجم محدود، گسسته‌سازی شده، سپس با استفاده از یک روش جدید بر مبنای الگوریتم سیمپل حل عددی گردید.

بیللا^۱ و همکاران [۲۴]، جابجایی ترکیبی را در حفره با گرمکن دایره‌ای در وسط آن بررسی کردند. برای حل معادله‌های حاکم از روش بهبود یافته المان محدود با روش وزنی گالرکین و روش تکراری نیوتن رابسن استفاده کردند.

برای جریان‌های همراه با انتقال گرما، روش‌های پایه مشخصه به کار نرفته‌اند. در مقاله حاضر برای اولین بار ساختار مشخصه‌ها چند بعدی برای معادله‌های ناوییر-استوکس همراه با معادله انرژی استخراج شده و بر اساس آن طرح فراباد پایه مشخصه، برای تحلیل جریان‌های تراکم‌ناپذیر با انتقال گرما به دست آمده است.

۱-۱- معادلات حاکم بر جریان‌های تراکم‌ناپذیر با انتقال گرما

معادلات حاکم بر جریان‌های آرام، دو بعدی و تراکم‌ناپذیر (با تراکم‌پذیری مصنوعی) با انتقال گرما عبارتند از:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} + \mathbf{H}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \beta u \\ p + u^2 \\ uv \\ (T - Ec p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ p + v^2 \\ (T - Ec p)v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Gr}{Re^2} T \\ \frac{Ec}{Re} \Phi \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right). \quad (1)$$

¹ Billah

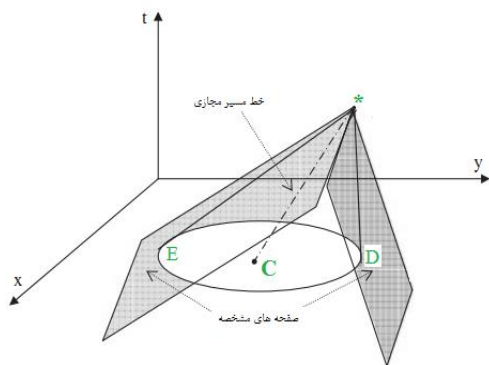
$$dx n_x + dy n_y +$$

$$\frac{dt}{2} \left(-un_x - vn_y \pm \sqrt{(-un_x - vn_y)^2 + 4\beta} \right) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{n_x}{2} (-un_x - vn_y \pm \sqrt{(un_x + vn_y)^2 + 4\beta}) = -a \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{n_y}{2} (-un_x - vn_y \pm \sqrt{(un_x + vn_y)^2 + 4\beta}) = -b \end{cases}$$

خطوط و صفحه‌های مشخصه، با حل معادله‌های بالا به دست می‌آید. معادله اول و دوم، خط مسیر مجازی و معادله‌های سوم و چهارم، صفحه‌ها مشخصه را تعیین می‌کنند. خطوط و صفحه‌های مشخصه در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. سطح تقاطع بین صفحه‌ها مشخصه و صفحه فیزیکی را می‌توان با حل عددی رابطه‌های سوم و چهارم به دست آورد. برای این منظور، $n_x = \cos(\theta)$ ، $n_y = \sin(\theta)$ در نظر گرفته می‌شود.

$$x = x^* + a\Delta t, \quad y = y^* + b\Delta t \quad (12)$$



شکل ۱- صفحه‌ها مشخصه و خط جریان مجازی

در رابطه بالا x^* و y^* نقطه بالایی مخروط نشان داده شده در شکل ۱ است. با توجه به رابطه‌های بالا x, y برای $(0 < \theta < 2\pi)$ به دست می‌آیند. مقطع به دست آمده در شکل ۲ نشان داده شده است. با افزایش مقدار β ، سطح مقطع شبیه دایره می‌شود. در این شرایط، $\sqrt{\beta}$ نقش سرعت صوت را در جریان‌های تراکم‌ناپذیر بازی می‌کند. این شکل در جریان‌های تراکم‌پذیر دایره‌ای است؛ ولی طبق شکل ۲، در جریان‌های تراکم‌ناپذیر این مقطع دایره یا بیضی نیست. با

بردارهایی که مولفه‌های آن، ضریب‌های مشتقات جزئی رابطه بالا هستند، مانند زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} W_1 &= \sigma_2 \mathbf{i} + \sigma_3 \mathbf{j} + \sigma_1 \mathbf{k}, \\ W_2 &= (\sigma_1 \beta + u \sigma_2) \mathbf{i} + (v \sigma_2) \mathbf{j} + \sigma_2 \mathbf{k}, \\ W_3 &= u \sigma_3 \mathbf{i} + (\sigma_1 \beta + v \sigma_3) \mathbf{j} + \sigma_3 \mathbf{k}, \\ W_4 &= u \sigma_4 \mathbf{i} + v \sigma_4 \mathbf{j} + \sigma_4 \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (6)$$

بردار عمود بر صفحه‌های مشخصه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_t \mathbf{k} \quad (7)$$

که $n_x^2 + n_y^2 = 1$ می‌باشد. ضرایب مجهول باید طوری انتخاب شوند که بردارهای W_j در صفحه قرار بگیرند. و رابطه زیر باید برقرار باشد.

$$N \cdot W_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (8)$$

بعد از ساده کردن رابطه بالا، چهار معادله به دست می‌آید. در این معادلات، چهار مجهول σ_1 تا σ_4 وجود خواهد داشت. برای داشتن جواب‌های غیر صفر، دترمینان تابع باید صفر شود. پس

$$\begin{vmatrix} n_t & n_x & n_y & 0 \\ \beta n_x & \psi & 0 & 0 \\ \beta n_y & 0 & \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

در رابطه بالا $(\psi = un_x + vn_y + n_t)$ است. رابطه بالا چهار جواب مانند زیر خواهد داشت.

$$\begin{aligned} n_t &= -un_x - vn_y \quad (\text{ریشه مضاعف}) \\ n_t &= \frac{-un_x - vn_y \pm \sqrt{(un_x + vn_y)^2 + 4\beta}}{2} \quad (\text{دو ریشه}) \end{aligned} \quad (10)$$

بردار هادی خطوط مشخصه $L = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dt \mathbf{k}$ است. این بردار بر بردار N عمود خواهد بود؛ در نتیجه $N \cdot L = 0$. با جایگذاری رابطه (۱۰) در این معادله، رابطه‌های زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} dx n_x + dy n_y + dt (-un_x - vn_y) &= 0 \\ \rightarrow \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad (\text{دو بار}) \end{aligned} \quad (11)$$

به این ترتیب رابطه‌های سازگاری سوم و چهارم به صورت زیر به دست می‌آید.

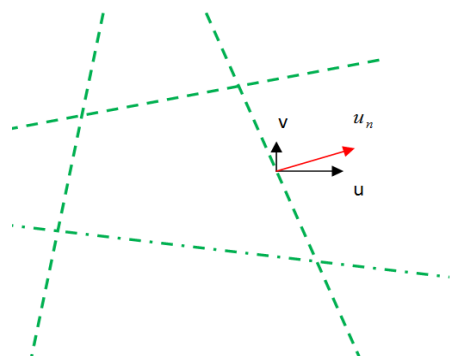
$$\frac{\partial p}{\partial t} - a \frac{\partial p}{\partial x} - b \frac{\partial p}{\partial y} - a \frac{\partial u}{\partial t} + (\beta - au) \frac{\partial u}{\partial x} - (av) \frac{\partial u}{\partial y} - b \frac{\partial v}{\partial t} - (bu) \frac{\partial v}{\partial x} + (\beta - bv) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

با توجه به مسیرهای به دست آمده می‌توان معادله‌های سازگاری دوم تا چهارم به دست آمده را مانند زیر ساده‌تر کرد.

$$\begin{aligned} -n_y \frac{\partial p}{\partial x} + n_x \frac{\partial p}{\partial y} - n_y \frac{du}{dt} + n_x \frac{dv}{dt} = 0 \\ \frac{dp}{dt} - a \frac{\partial u}{\partial t} + (\beta - au) \frac{\partial u}{\partial x} - (av) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial t} - (bu) \frac{\partial v}{\partial x} + (\beta - bv) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

برخلاف رابطه اول، بقیه رابطه‌های معادله دیفرانسیل معمولی نیستند. در نتیجه نیاز به یک‌بعدی‌سازی موضعی خواهند داشت. برای این منظور، روش قبلی با فرض معادله پیوستگی و اندازه حرکت یک‌بعدی تکرار و معادله سازگاری و مسیرهای مشخصه به دست می‌آیند (رابطه (۱۹)). در این رابطه‌ها، u_n سرعت عمود بر مرز خواهد بود (شکل ۳).

$$\frac{dp}{dt} - a \frac{du_n}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = -a, \quad a = \frac{-u_n \pm \sqrt{u_n^2 + 4\beta}}{2} \quad (19)$$

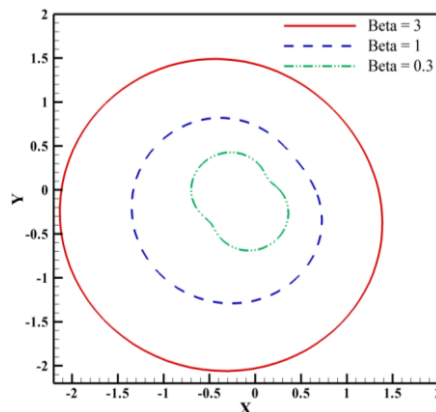


شکل ۳- مولفه عمود بر ضلع سرعت سیال

معادله‌های سازگاری و مسیرهای مشخصه متناظر آنها بعد از گسسته‌سازی و حل همزمان معادلات به دست آمده، به صورت رابطه (۲۰) در خواهند آمد. در این رابطه‌ها برای سادگی اندیس، n در سرعت حذف شده است. در روش پایه

جاگذاری جواب اول و دوم رابطه (۱۰)، در رابطه (۸) رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -\frac{n_y}{n_x} \sigma_3, \sigma_3, \sigma_4 = \text{اختیاری} \quad (13)$$



شکل ۲- سطح مقطع مخروط ماخ مجازی روی صفحه فیزیکی

با انتخاب $(\sigma_3 = 0, \sigma_4 = 1)$ اولین معادله سازگاری (رابطه (۱۴)) و با انتخاب $(\sigma_3 = 1, \sigma_4 = 0)$ دومین معادله سازگاری (رابطه (۱۵)) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

رابطه بالا روی خط مشخصه متناظر آن، به معادله

$$\text{دیفرانسیل معمولی } \frac{dT}{dt} = 0 \text{ تبدیل می‌شود.}$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{n_y}{n_x} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(-\frac{n_y}{n_x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + u \left(-\frac{n_y}{n_x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ v \left(-\frac{n_y}{n_x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

با جاگذاری جواب سوم و چهارم رابطه (۱۰)، در رابطه (۸) رابطه‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \sigma_4 = 0, \sigma_1 = \text{اختیاری} \\ \sigma_2 = -\frac{n_x (-un_x - vn_y \pm \sqrt{(un_x + vn_y)^2 + 4\beta})}{2} \sigma_1 \\ \sigma_3 = -\frac{n_y (-un_x - vn_y \pm \sqrt{(un_x + vn_y)^2 + 4\beta})}{2} \sigma_1 \end{aligned} \quad (16)$$

شکل ۵- الگوی محاسبه بقیه شارهای همرفت
 ۲- محاسبه جمله‌های لزج و گسسته‌سازی زمانی و شرایط مرزی

برای محاسبه مشتق‌ها روی مرز دو سلول (جمله‌های لزج) از رابطه (۲۱) استفاده شده و طبق شکل ۶، نیاز به سلول ثانویه است. برای محاسبه مقدار کمیت‌ها در نقاط B, D از مقدار سلول و برای محاسبه مقدار کمیت‌ها در نقاط A, C می‌توان از میانگین ۴ سلولی استفاده کرد که شامل آن نقطه هستند و در نهایت، برای محاسبه مقدار کمیت‌ها روی ضلع‌های سلول‌های ثانویه می‌توان از میانگین‌گیری معمولی بین دو نقطه ضلع استفاده کرد.

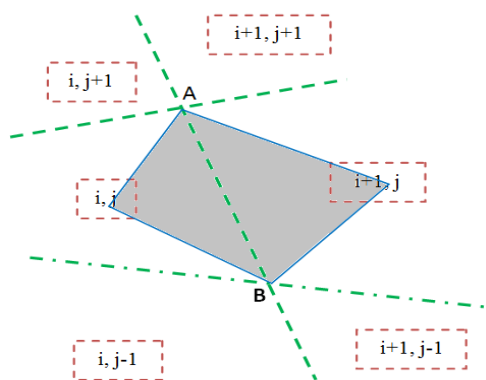
$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{AB} = \frac{1}{S} \oint \eta dy = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^4 \eta \Delta y_k, \quad \eta = u, v, T \quad (21)$$

برای به دست آوردن Q_{ij} در مرحله $n+1$ از مقادیر آن در مرحله n از رانگ-کوتای مرتبه پنج استفاده شده است (رابطه (۲۲)). این روش، سرعت همگرایی و دامنه بزرگتری دارد. استفاده از رانگ-کوتای مرتبه پنج، مزیت دیگری هم دارد. برای پیدا کردن کمیت‌ها در هر مرحله از کمیت‌های به دست آمده در مرحله قبلی و مرحله اول استفاده می‌شود و در نتیجه، نیازی به ذخیره کمیت‌ها در مرحله‌های میانی وجود ندارد.

$$Q_{ij}^{(p)} = Q_{ij}^{(n)} - F(Q_{ij}^{(p-1)}),$$

$$\alpha_p = \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, 1, \quad p = 1, 2, \dots, 5. \quad (22)$$

در همه محک‌های مورد بررسی، در دیوارها شرط عدم لغزش سیال برای تعیین سرعت و دما به کار رفته و فشار برون یابی مرتبه دوم شده است.



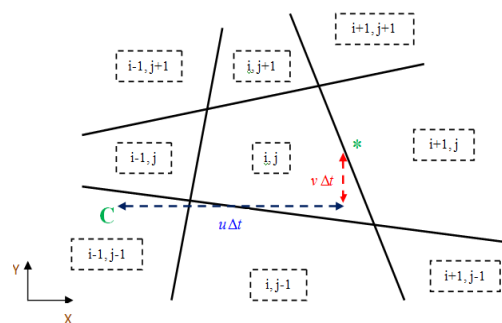
مشخصه توضیح داده شده، شارهای همرفت در زمان $n+1$ محاسبه می‌شوند و بدین ترتیب این روش نیمه ضمنی می‌شود.

$$(u^*)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4\beta}} ((p_E)^n - (p_D)^n) + \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 + 4\beta})(u_E)^n - \frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2 + 4\beta})(u_D)^n, \quad (20)$$

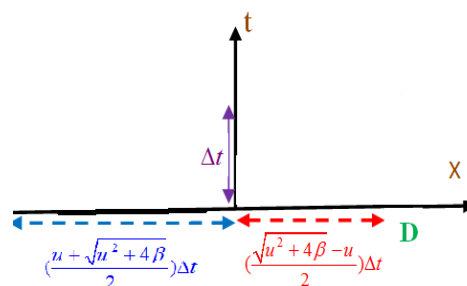
$$(p^*)^{n+1} = (p_E)^n - \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2 + 4\beta})(u^*)^{n+1} - (u_E)^n$$

$$(T^*)^{n+1} = (T_C)^n$$

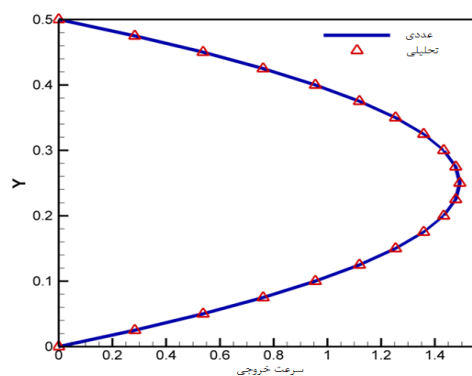
در این مرحله، نقاط C, D, E یافت می‌شوند. مانند شکل ۱ نقطه C روی خط مسیر یکسان با نقطه * است. تصویر این نقاط روی صفحه فیزیکی در شکل ۴ نشان داده شده است. نقاط D, E روی خط مشخصه یکسانی با * قرار دارند. این نقاط در شکل ۵، نمایانده شده‌اند. برای به دست آوردن دما، فشار و سرعت در نقاط ذکر شده، دو روش وجود دارد. اول اینکه مقدار آن برابر با مقدار مرکز سلولی باشد که نقطه مورد نظر در آن قرار دارد و روش دوم اینکه بین مراکز سلولی که نقطه مورد نظر را احاطه کرده‌اند، دورن‌یابی انجام شود. برای جلوگیری از نوسان از روش اول استفاده شده است.



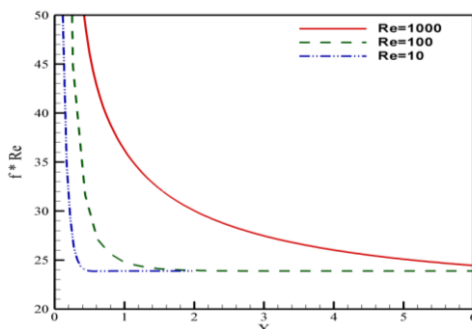
شکل ۴- الگوی محاسبه شارهای همرفت در معادله انرژی



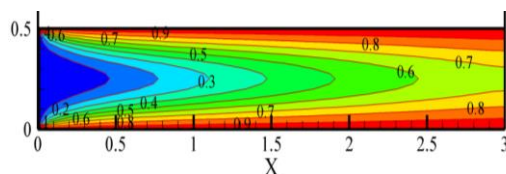
تغییرات عدد ناسلت نسبت به طول برای عدددهای رینولدز و پرانتل مختلف در شکل ۱۰ و شکل ۱۱ نشان داده شده است. عدد ناسلت در طول صفحه، کاهش یافته، بعد از توسعه یافته شدن جریان از نظر دمایی، به مقدار ثابت ۷/۵۶ می‌رسد. با افزایش عدد رینولدز و پرانتل طول توسعه یافتگی افزایش می‌یابد. برای مقایسه عملکرد دو روش عددی ذکر شده، تاریخچه همگرایی آنها در شکل ۱۲ رسم شده است. همگرایی سریع‌تر روش پیشنهادی، نسبت به روش میانگین‌گیری مشخص است.



شکل ۷- مقایسه سرعت خروجی به دست آمده از روش MC و روش تحلیلی در $Re=100$



شکل ۸- تغییرات $f*Re$ نسبت به طول



شکل ۹- خطوط دما ثابت در $Re=100$

شکل ۶- سلول ثانویه برای محاسبه مشتقات مرتبه دوم سرعت و دما در ورودی جریان بین دو صفحه موازی، معلوم و فشار برون‌یابی شده است و در خروجی فشار معلوم و سرعت و دما برون‌یابی شده است.

۳- نتایج و بحث

برای بررسی عملکرد طرح MC، جریان بین دو صفحه موازی و جریان داخل حفره با روش MC و میانگین‌گیری شبیه سازی شده است. نتایج به دست آمده برای جریان بین دو صفحه موازی در شکل‌های ۷ تا ۱۲ و برای جریان داخل حفره در شکل‌های ۱۳ تا ۲۵ نشان داده شده است. در جریان بین دو صفحه موازی سرعت ورودی U_{ref} دمای دیواره‌ها T_{ref2} و دمای سیال ورودی T_{ref1} و قطر هیدرولیکی (دو برابر فاصله بین دو صفحه) L_{ref} در نظر گرفته شده است. در جریان داخل حفره، سرعت صفحه بالایی U_{ref} دمای صفحه گرم T_{ref2} و دمای صفحه سرد T_{ref1} و عرض حفره L_{ref} در نظر گرفته شده است. در شکل ۷، سرعت خروجی رسم و با نتیجه تحلیلی مقایسه شده است. سرعت خروجی در حالت توسعه یافته، سهمی شکل است و سرعت بیشینه آن ۱/۵ برابر سرعت متوسط است. ضریب اصطکاک در جریان بین دو صفحه موازی از رابطه (۲۳) به دست می‌آید.

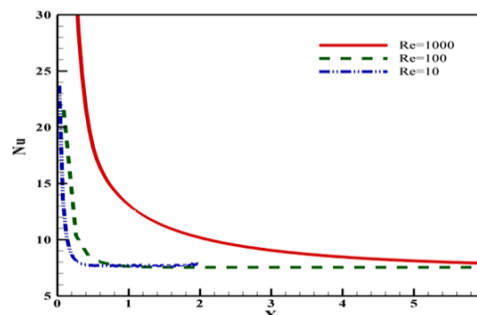
$$f = \frac{2 \frac{\partial u}{\partial y}}{Re} \quad (23)$$

تغییرات ضریب اصطکاک در عدد رینولدز نسبت به طول در شکل ۸ نشان داده شده است. ضریب اصطکاک در طول صفحه کاهش می‌یابد و بعد از توسعه یافته شدن جریان به مقدار ثابت $f = \frac{24}{Re}$ می‌رسد. با افزایش رینولدز، طول لازم برای توسعه یافته شدن جریان افزایش می‌یابد. خطوط دما ثابت در شکل ۹، نشان داده شده است. دمای متوسط سیال در طول صفحه افزایش می‌یابد و به علت تشکیل شدن لایه مرزی گرمایی، دمای سیال در نزدیکی جدار بیشتر از دمای سیال در قسمت‌های میانی است. در جریان بین دو صفحه موازی، عدد ناسلت از رابطه زیر به دست می‌آید:

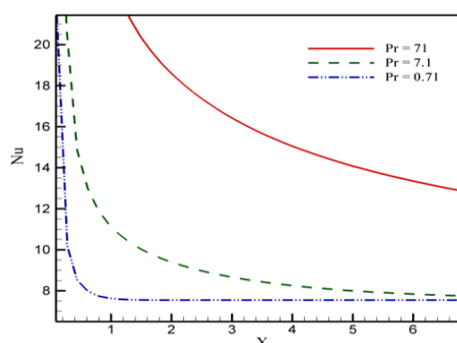
$$Nu = \frac{\frac{\partial T}{\partial y}}{T_{wall} - T_{mean}}, \quad T_{mean} = \frac{\iint T u dA}{A u_{mean}} \quad (24)$$

چنگ^۱ [۲۳] در شکل ۱۳ مقایسه شده است. در رینولدزهای پایین یک گردابه اصلی در حفره تشکیل می‌شود و دو گردابه کوچک در قسمت پایین تشکیل می‌شود. با افزایش عدد رینولدز گردابه‌های کوچک در قسمت پایین حفره، بزرگتر می‌شوند و در رینولدزهای بیشتر از ۳۲۰۰، گردابه کوچک دیگری در سمت چپ و بالا تشکیل می‌شود. مرکز گردابه اصلی به وجود آمده با افزایش رینولدز به سمت پایین حرکت می‌کند. سیال در قسمت‌های بالایی حفره به علت حرکت قسمت‌های پایین حفره، سیال تمایل به ایستادن دارد و گردابه‌های تشکیل شده در این قسمت، بسیار ضعیف هستند. با افزایش عدد رینولدز و در نتیجه سرعت در قسمت‌های بالایی گردابه اصلی با سرعت بیشتری می‌چرخد؛ ولی به علت مقاومت قسمت‌های پایینی از جدارهای پایینی فاصله می‌گیرد و این باعث بزرگتر شدن گردابه‌های ضعیف پایینی می‌شود. با ادامه افزایش رینولدز گردابه اصلی از دیوار سمت چپ و بالا، فاصله می‌گیرد. خطوط دما ثابت در رینولدزهای مختلف در شکل ۱۴ نشان داده شده است.

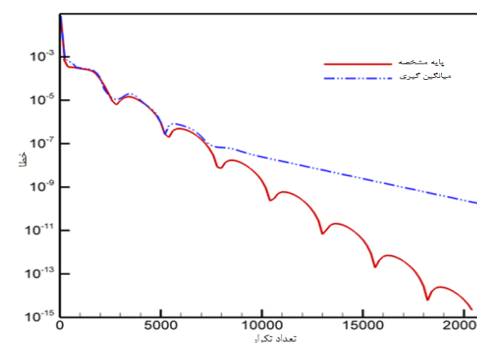
با توجه به شرایط مرزی اعمال شده، دما در قسمت‌های بالایی بیشتر از قسمت‌های پایینی است. در رینولدزهای پایین طبقه‌های منظم دمایی تشکیل می‌شود و در نتیجه عامل اصلی انتقال گرما در این حالت، رسانش گرمایی است؛ اما با افزایش عدد رینولدز جابجایی اجباری اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. به علت جهت حرکت سیال، دما در سمت راست به دمای بالا نزدیک می‌شود و در سمت چپ بر عکس. گرادیان دما در قسمت‌های بالایی و میانی به علت حرکت سیال و حضور جابجایی اجباری قوی در این منطقه، شدیدتر از قسمت‌های پایینی است. با افزایش عدد گراشف، همرفت آزاد به همرفت اجباری اضافی می‌شود. در این حالت خطوط جریان و سرعت‌ها نیز از شرایط مرزی تاثیر خواهند پذیرفت و در نتیجه، با وجود ثابت ماندن عدد رینولدز با تغییرات عدد گراشف الگوی جریان متفاوتی، وجود خواهد داشت. خطوط جریان و خطوط دما ثابت در رینولدزهای مختلف در شکل ۱۵ و ۱۶ نشان داده شده، نتایج به دست آمده از روش MC با نتایج چنگ [۲۳] مقایسه شده است.



شکل ۱۰- تغییرات عدد ناسلت نسبت به طول در عدهای رینولدز مختلف و $Pr=0.71$



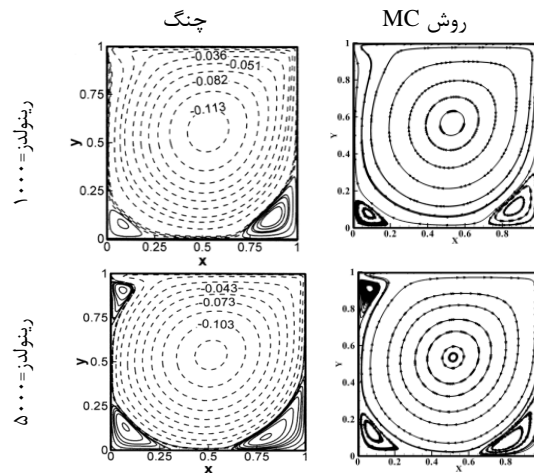
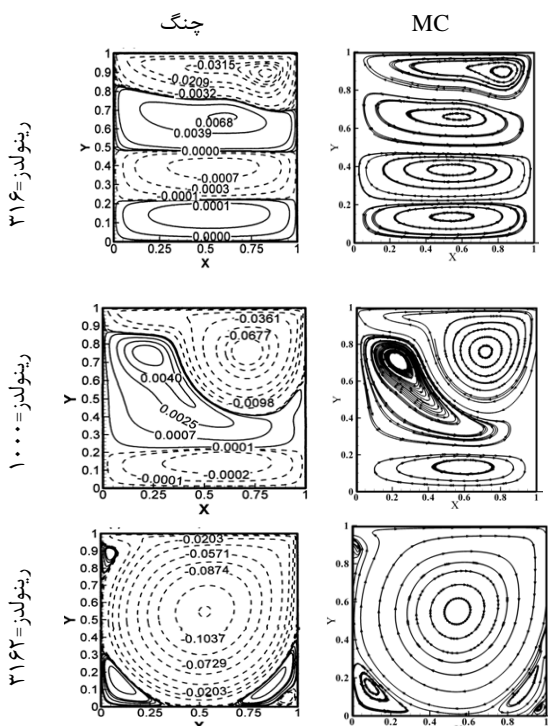
شکل ۱۱- تغییرات عدد ناسلت نسبت به طول در عدهای پراوتل مختلف و $Re=100$



شکل ۱۲- تاریخچه همگرایی در $Re=100, Pr=0.71$

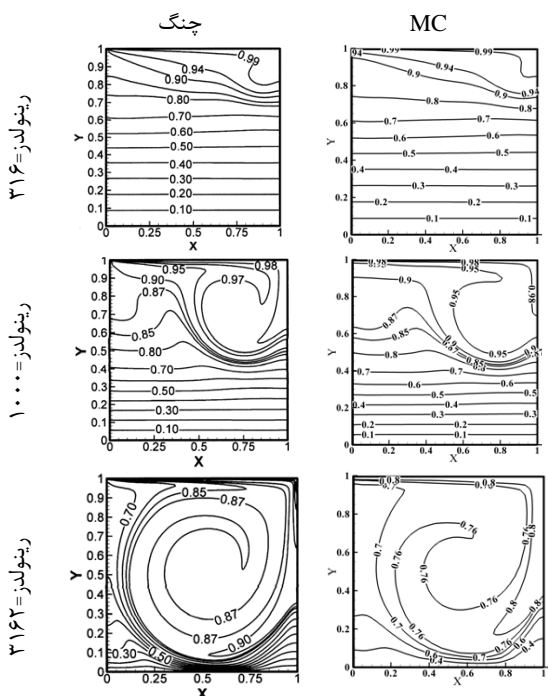
برای بررسی جریان داخل حفره جابجایی اجباری و ترکیبی بررسی شده است. در جابجایی اجباری، عدد گراشف صفر فرض می‌شود و در نتیجه خطوط جریان و خطوط فشار ثابت و سرعت‌ها، تابع شرایط مرزی گرمایی نخواهند بود. اما خطوط دما ثابت، تابع شرایط مرزی گرمایی خواهد بود. خطوط جریان به دست آمده در $Re=1000, 5000$ با نتایج

¹ Cheng

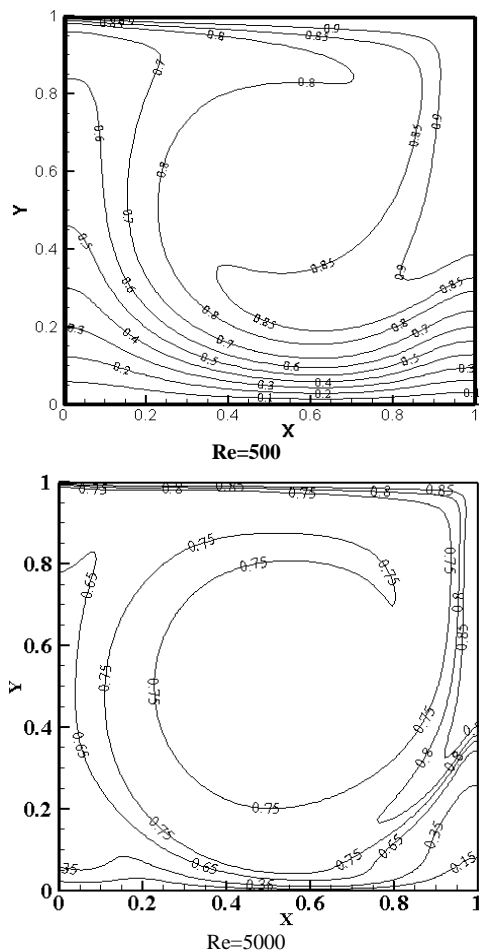


شکل ۱۳- مقایسه خطوط جریان به دست آمده از روش MC با نتایج جنگ [۲۳] در رینولدزهای مختلف

شکل ۱۵- مقایسه خطوط جریان به دست آمده از روش MC با نتایج جنگ [۲۳] در رینولدزهای مختلف و $Gr=1E6$

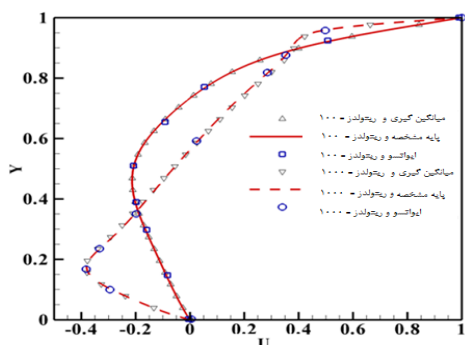


شکل ۱۶- مقایسه خطوط دما ثابت به دست آمده از روش MC با نتایج جنگ [۲۳] در رینولدزهای مختلف و $Gr=1E6$

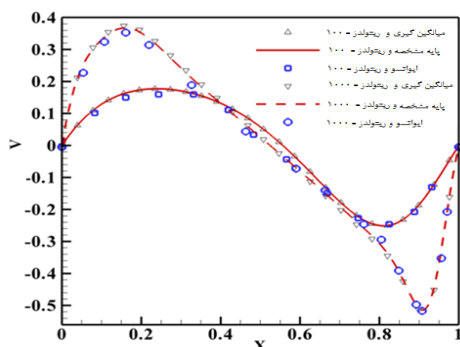


شکل ۱۷- خطوط دما ثابت در رینولدزهای مختلف

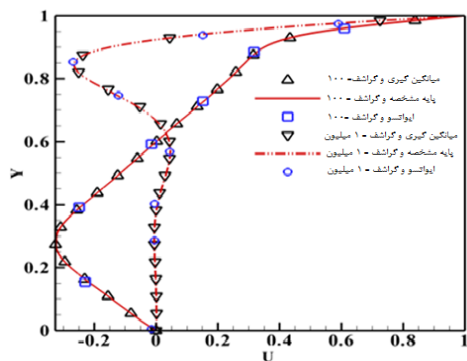
عمودی گذرنده از مرکز حفره در رینولدز، گراشف و پرانتل‌های مختلف در شکل ۲۱ و ۲۲ نشان داده شده است. با افزایش عدد گراشف، تغییرات دمایی یکنواخت‌تر می‌شود.



شکل ۱۷- تغییرات u روی خط $x=0.5$ به دست آمده از روش MC و میانگین‌گیری و مقایسه آنها با نتایج ایواتسو [۲۴] در $Gr=100, Pr=0.71$

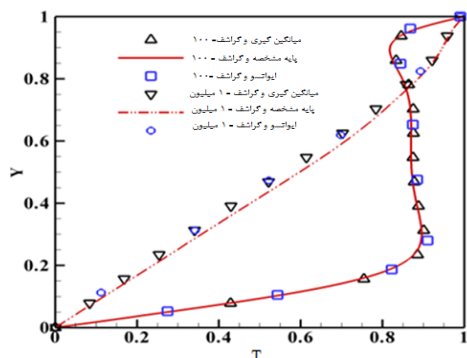


شکل ۱۸- تغییرات v روی خط $y=0.5$ به دست آمده از روش MC و میانگین‌گیری و مقایسه آنها با نتایج ایواتسو [۲۴] در $Gr=100, Pr=0.71$

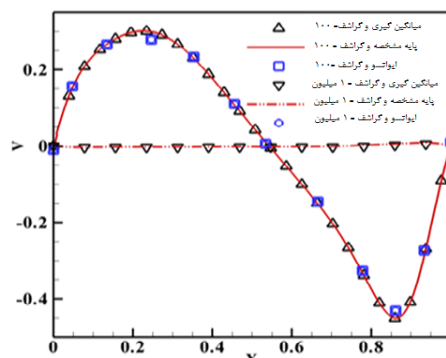


شکل ۱۹- تغییرات u روی خط $x=0.5$ به دست آمده از روش MC و میانگین‌گیری و مقایسه آنها با نتایج Iwatsu [۲۴] در $Re=400, Pr=0.71$

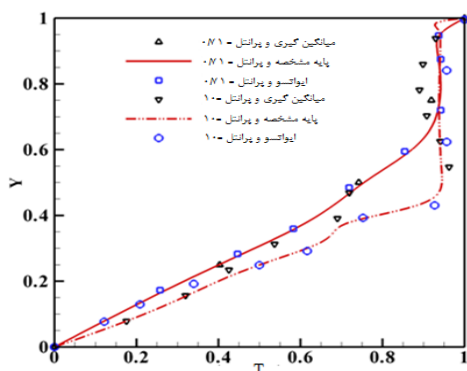
با افزایش عدد رینولدز، عدد ریچاردسون ($Ri = \frac{Gr}{Re^2}$) کوچک‌تر می‌شود و همرفت ترکیبی به همرفت اجباری نزدیک می‌شود. در عددهای رینولدز پایین، تفاوت جدی بین خطوط جریان در همرفت اجباری با خطوط جریان در همرفت ترکیبی وجود دارد. در عددهای رینولدز پایین، چهار گردابه تقریباً هم اندازه تشکیل شده است و جریان داخل حفره را به جریان ۴ طبقه تبدیل کرده است و تفاوت بسیار زیادی با حالت همرفت اجباری وجود دارد که در آن یک گردابه بزرگ در وسط و دو گردابه کوچک در پایین تشکیل می‌شد. با افزایش رینولدز، این ۴ گردابه جای خود را به سه گردابه می‌دهند که باز تفاوت چشمگیری بین حالت همرفت ترکیبی و اجباری وجود دارد. با افزایش بیشتر عدد رینولدز، جریان به یک گردابه اصلی با چهار گردابه کوچک تبدیل می‌شود. تفاوتی که در این حالت بین همرفت اجباری و همرفت ترکیبی وجود دارد، وجود یک گردابه بسیار کوچک در سمت چپ و پایین در همرفت ترکیبی است. برای $Ri > 1$ گردان دمایی ثابتی سیال را در قسمت میانی و پایینی حفره به حرکت می‌اندازد. در این حالت، همرفت آزاد بیشتر بر جریان تسلط دارد و باعث ایجاد تغییرات دمایی یکنواخت‌تر از پایین تا بالای صفحه می‌شود و عامل اصلی انتقال گرما بین طبقات تشکیل شده رسانش گرمایی است و همرفت اجباری، تنها در قسمت‌های بالایی حفره عامل اصلی حرکت سیال می‌باشد. در $Ri < 1$ حرکت صفحه بالایی، عامل اصلی حرکت سیال داخل حفره است و به نوعی می‌توان گفت همرفت اجباری، عامل اصلی جریان است. برای بررسی دقیق‌تر موضوع، جزئیات بیشتری در شکل‌های ۱۷ تا ۲۴ نشان داده شده است. در این شکل‌ها سرعت‌ها، خطوط دما ثابت، عدد ناسلت محلی نشان داده شده است. سرعت افقی روی خط عمودی گذرنده از مرکز حفره و سرعت عمودی روی خط افقی گذرنده از مرکز حفره در رینولدز، گراشف و پرانتل‌های مختلف در شکل ۱۷ تا ۲۰ نشان داده شده است. با افزایش عدد رینولدز، بیشینه سرعت‌ها افزایش می‌یابد. با افزایش عدد گراشف، همرفت آزاد مهم می‌شود و در نتیجه خطوط جریان و الگوی گردابه‌ها تغییر می‌کند. در این حالت، مقدار سرعت در قسمت‌های پایین و وسط حفره که متاثر از همرفت آزاد است، بسیار کوچک‌تر از مقدار سرعت در قسمت بالای حفره است که متاثر از همرفت اجباری است. توزیع دما روی خط



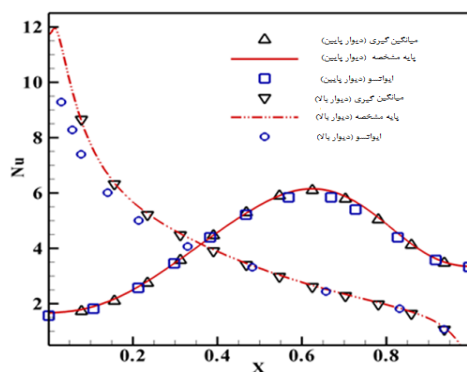
شکل ۲۱- توزیع دما روی خط $x=0.5$ به دست آمده از روش MC و میانگین‌گیری و مقایسه آنها با نتایج ایواتسو [۲۴] در $Re=400, Pr=0.71$



شکل ۲۰- تغییرات y روی خط $y=0.5$ به دست آمده از روش MC و میانگین‌گیری و مقایسه آنها با نتایج ایواتسو [۲۴] در $Re=400, Pr=0.71$



شکل ۲۲- توزیع دما روی خط $x=0.5$ به دست آمده از روش MC و میانگین‌گیری و مقایسه آنها با نتایج ایواتسو [۲۴] در $Re=1000, Gr=1e6$



شکل ۲۳- مقایسه تغییرات عدد Nu در صفحه بالایی و پایینی به دست آمده از روش MC با نتایج ایواتسو [۲۴] در $Re=400, Gr=100$

در عددهای گراشف کم، گرادیان دمایی در قسمت بالایی و پایینی حفره بسیار بیشتر از قسمت‌های میانی است که دلیل آن تشکیل لایه مرزی گرمایی است. با افزایش عدد پرانتل ضخامت لایه مرزی گرمایی نازک تر شده و در نتیجه گرادیان دمایی بیشتر می‌شود. عدد ناسلت در جریان داخل حفره از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$Nu = \frac{\partial T}{\partial y} \quad (25)$$

عدد ناسلت محلی در روی صفحه پایینی و صفحه بالایی در رینولدز، گراشف و پرانتل‌های مختلف در شکل ۲۳ و ۲۴ نشان داده شده است. عدد ناسلت در روی صفحه بالایی، بیشتر از صفحه پایینی است که ناشی از گرادیان دمایی بالاتر در قسمت‌های بالایی است. در روی صفحه بالایی، آهنگ انتقال گرما در واحد سطح با افزایش ضخامت لایه مرزی کاهش می‌یابد. با این وجود در روی صفحه پایینی، تغییرات آهنگ انتقال گرما در واحد سطح پیچیده‌تر است و به علت عملکرد گردابه‌های اصلی و ثانویه دارای بیشینه محلی است. در شکل‌های ۱۷ تا ۲۴ نتایج دو روش MC و میانگین‌گیری به دست آمده و با نتایج ایواتسو [۲۴] مقایسه شده است. برای مقایسه عملکرد دو روش عددی ذکر شده، تاریخچه همگرایی آنها در شکل ۲۵ رسم شده است. همگرایی سریع‌تر روش پیشنهادی، نسبت به روش میانگین‌گیری مشخص است.

همگرایی را نشان می‌دهد. مزیت دیگر روش ارایه شده، عدم نیاز به افزودن جمله‌های میراگر مصنوعی برای پایداری است.

۵- فهرست علائم

روش میانگین‌گیری	Ave
ظرفیت گرمایی ویژه (W/kg.K)	cp
عدد اکرت	Ec
ثابت گرانش زمین (m/s^2)	g
عدد گرافش	Gr
ضریب رسانش گرمایی (W/m.K)	k
روش پایه مشخصه چندبعدی	MC
عدد ناسلت	Nu
فشار بی‌بعد	p
عدد پراتنل	Pr
عدد رینولدز	Re
دمای بی‌بعد	T
سرعت‌های بی‌بعد در جهت x, y	u, v
مختصات بی‌بعد	x, y
علائم یونانی	
ضریب تراکم‌پذیری مصنوعی بی‌بعد	β
ضریب انبساط حجمی (K^{-1})	β_{ex}
چگالی (kgm^{-3})	ρ
لزجت دینامیکی ($kgm^{-1}s^{-1}$)	μ
لزجت سینماتیکی (m^2/s)	
زیرنویس‌ها	
مرجع	ref

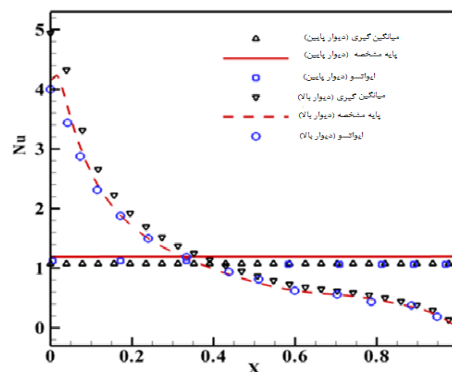
۶- مراجع

[1] Chorin AJ (1997) A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. J Comput Phys 135(2): 118-125.

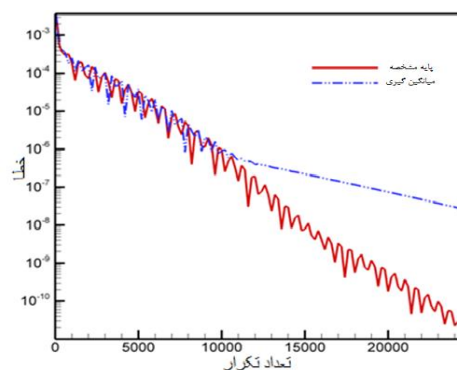
[2] Tamamidis P, Zhang G, Assanis DN (1996) Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows. J Comput Phys 124(1): 1-13.

[3] Drikakis D, Govatsos PA, Papantonis DE (1994) A characteristic-based method for incompressible flows. Int J Numer Meth Fl 19: 667-685.

[4] Tai CH, Zhao Y (2003) Parallel unsteady incompressible viscous flow computations using an unstructured multigrid method. J Comput Phys 192(1): 277-311.



شکل ۲۴- مقایسه تغییرات عدد Nu در صفحه بالایی و پایینی به دست آمده از روش MC با نتایج ایواتسو [۲۴] در $Re=400, Gr=1E6$



شکل ۲۵- تاریخچه همگرایی $(Re=3162, Gr=1E6, Pr=0.71)$

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش بالادست چندبعدی جدید بر اساس مشخصه‌های معادلات جریان‌های تراکم‌ناپذیر (پیوستگی، اندازه‌حرکت و انرژی) تصحیح شده با روش تراکم‌پذیری مصنوعی ارایه شده است. روش جدید ارایه شده، بر اساس گسسته‌سازی حجم محدود بوده، روش میانگین‌گیری و روابط استخراج شده از روش پایه مشخصه برای محاسبه شارهای همرفت در مرز بین دو سلول به کار رفته است. روش پایه مشخصه مرتبه اول و میانگین‌گیری مرتبه دوم برای شبیه‌سازی جریان همرفت اجباری و ترکیبی بین دو صفحه موازی، داخل گودال و روی استوانه در اعداد رینولدز، گرافش و پراتنل مختلف به کار رفته‌اند. نتایج طرح پایه مشخصه با نتایج از روش میانگین‌گیری مقایسه شده است. نتایج به دست آمده عملکرد مناسب طرح ارایه شده در دقت و سرعت

- Boltzmann method: Similarities and differences. *Comput Math Appl* 61(12): 3461-3474.
- [16] Ghasemi J, Razavi SE (2010) On the finite-volume Lattice Boltzmann modeling of thermo-hydrodynamics. *Comput Math Appl* 60(5): 1135-1144.
- [17] Haeri S, Shrimpton JS (2013) A new implicit fictitious domain method for the simulation of flow in complex geometries with heat transfer. *J Comput Phys* 237(0): 21-45.
- [18] Srinivasa AH, Eswara AT (2013) Unsteady free convection flow and heat transfer from an isothermal truncated cone with variable viscosity. *Int J Heat Mass Tran* 57(1): 411-420.
- [19] Raji A, Hasnaoui M, Naïmi M, Slimani K, Ouazzani MT (2012) Effect of the subdivision of an obstacle on the natural convection heat transfer in a square cavity. *Comput Fluids* 68(0): 1-15.
- [20] Selimefendigil F, Öztop HF (2014) Numerical investigation and dynamical analysis of mixed convection in a vented cavity with pulsating flow. *Comput Fluids* 91(0): 57-67.
- [21] Sivasankaran S, Sivakumar V, Hussein AK (2013) Numerical study on mixed convection in an inclined lid-driven cavity with discrete heating. *Int Commun Heat Mass* 46(0):112-125.
- [22] Billah MM, Rahman MM, Sharif UM, Rahim NA, Saidur R, Hasanuzzaman M (2011) Numerical analysis of fluid flow due to mixed convection in a lid-driven cavity having a heated circular hollow cylinder. *Int Commun Heat Mass* 38(8): 1093-1103.
- [23] Cheng TS, Liu WH (2010) Effect of temperature gradient orientation on the characteristics of mixed convection flow in a lid-driven square cavity. *Comput Fluids* 39(6): 965-978.
- [24] Iwatsu R, Hyun JM, Kuwahara K (1993) Mixed convection in a driven cavity with a stable vertical temperature gradient. *Int J Heat Mass Tran* 36(6): 1601-1608.
- [5] Nithiarasu P, Liu CB (2006) An artificial compressibility based characteristic based split (CBS) scheme for steady and unsteady turbulent incompressible flows. *Comput Method Appl M* 195(23-24): 2961-2982.
- [6] Neofytou P (2007) Revision of the characteristics-based scheme for incompressible flows. *J Comput Phys* 222: 475-484.
- [7] Su X, Zhao Y, Huang X (2007) On the characteristics-based ACM for incompressible flows. *J Comput Phys* 227(1): 1-11.
- [8] Razavi SE, Zamzamin K, Farzadi A (2008) Genuinely multidimensional characteristic-based scheme for incompressible flows. *Int J Numer Meth Fl* 57: 929-949.
- [9] Zamzamin K, Razavi SE (2008) Multidimensional upwinding for incompressible flows based on characteristics. *J Comput Phys* 227(19):8699-8713.
- [10] Razavi SE, Orang AA (2011) A comparative investigation of hydrofoil at angles of attack. *Int J Numer Meth Fl* 68: 1087-1101.
- [11] Atashbar Orang A, Razavi SE, Pourmirzaagha H (2014) Computational study of incompressible turbulent flows with method of characteristics. *J Comput Appl Math* 259(0): 741-751.
- [12] Shakir AM, Mohammed AK, Hasan MI (2011) Numerical investigation of counter flow microchannel heat exchanger with slip flow heat transfer. *Int J Therm Sci* 50(11): 2132-2140.
- [13] Tmartnhad I, El Alami M, Najam M, Oubarra A (2008) Numerical investigation on mixed convection flow in a trapezoidal cavity heated from below. *Energ Convers Manage* 49(11): 3205-3210.
- [14] Shishkina O, Wagner C (2005) A fourth order accurate finite volume scheme for numerical simulations of turbulent Rayleigh-Bénard convection in cylindrical containers. *C R Mecanique* 333(1): 17-28.
- [15] Ohwada T, Asinari P, Yabusaki D (2011) Artificial compressibility method and lattice