



تحلیل غیر خطی ترموالاستیک صفحات گرد ساندویچی با هسته تابعی

محمد اسماعیل گلمکانی^{۱*}، علیرضا یوسفیان ثقی^۲^{۱*} استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۰/۰۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۰۶/۱۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۱/۳۰

چکیده

در این مقاله تحلیل غیر خطی خمش متقارن محوری صفحات ساندویچی دایره ای شکل با پوسته های همگن و هسته تابعی تحت بار مکانیکی- حرارتی بررسی شده است. معادلات حاکم بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و روابط غیر خطی کرنش ون کارمن می باشند و دستگاه معادلات تعادل غیر خطی به دست آمده توسط ترکیب روش عددی رهایی پویا و تفاضل محدود تحلیل گردیده اند. همچنین خواص مواد در دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما بررسی شده است. به منظور بررسی صحت و دقت تحقیق، نتایج به دست آمده با روش المان محدود مقایسه شده است. در نهایت به مطالعه اثر پارامترهایی همچون نسبت ضخامت هسته به پوسته، شرایط مرزی، دما و تغییر در خواص مواد تابعی بر روی خمش غیر خطی پرداخته می شود. همچنین در برخی از موارد به منظور بررسی اختلاف بین پاسخ های خطی و غیر خطی، نتایج هر دو تحلیل ارائه می گردد. برخی از نتایج حاکی از این است که تغییرات نسبت ضخامت هسته به پوسته در صفحه حلقوی، تاثیر بیشتری بر روی نتایج نسبت به صفحه دایره ای تو پر دارد.

کلمات کلیدی: صفحات ساندویچی تابعی؛ روش رهایی پویا؛ بار مکانیکی- حرارتی.

Nonlinear thermoelastic analysis of circular sandwich plates with functionally graded core

M.E. Golmakani^{1*} and A.R. Yoosefian Saghi²^{1*} Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Mashhad branch, Mashhad, Iran² MS student, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University, Mashhad branch, Mashhad, Iran

Abstract

In this article, nonlinear axisymmetric bending analysis of sandwich circular plates with homogeneous face sheet and functionally graded core subjected to thermo - mechanical loads is presented. The formulations are based on first-order shear deformation plate theory (FSDT) and large deflection von Karman equations. The nonlinear equilibrium equations are solved using the dynamic relaxation (DR) method combined with the finite difference discretization technique. Material properties are compare to be temperature-dependent and temperature-independent. In order to verify the current work some obtained results are compared with Abaqus finite element method. Finally, The influences of material grading index, boundary conditions, tempresure, core-to-face sheets thickness ratio on the results are studied in detail. Also, in order to investigate the differences between the linear and nonlinear solutions some results are presented based on both linear and nonlinear analysis. Some results indicate that variation of core-to-face sheets thickness ratio has greater effect on the results of annular geometry compared to circular one.

Keywords: Functionally graded sandwich Plates; DR method; Thermo-mechanical load.

۱- مقدمه

صفحات ساندویچی تقریباً پنجاه سال است که به دلیل مقاومت در برابر خمش، وزن کم، کیفیت ساختاری و مشخصات ارتعاشاتی خوب، مورد استفاده قرار می‌گیرند. صفحات ساندویچی از دو بخش هسته و پوسته تشکیل شده اند. هسته در وسط و پوسته‌ها در دو طرف هسته قرار گرفته اند. هسته در این مقاله از جنس مواد تابعی می‌باشد. این مواد از دید ماکروسکوپی، مواد مرکب غیرهمگنی هستند که ترکیبی از فلزات و سرامیک‌ها می‌باشند. سرامیک مقاومت در برابر حرارت و خوردگی دارد و فلز مقاومت در برابر شکست دارد. مواد تابعی، موادی هستند که خواص آنها به صورت پیوسته و آرام از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر تغییر پیدا می‌کند که این، احتمال جدایش لایه‌ها را کم می‌کند. خواص مهندسی این مواد همچون مدول یانگ و ضریب حرارتی در جهت ضخامت و یا شعاع تغییر می‌کند. شایان ذکر است که در صفحه ساندویچی مورد مطالعه، پوسته بالا، سرامیک و پوسته پایین، فلز و هسته از مواد تابعی در نظر گرفته شده است. از موارد کاربرد استفاده از این نوع چیدمان، می‌توان به بارگذاری شدید مکانیکی - حرارتی نام برد که یک سطح باید کامل سرامیک باشد و سطح دیگر به طور کامل فلز انتخاب شود و برای این که یک توزیع پیوسته در ماده وجود داشته باشد، سطح میانی تابعی فرض می‌گردد.

تا کنون مطالعات زیادی بر روی خمش خطی، ارتعاشات آزاد و تحلیل کمانش صفحات ساندویچی انجام شده است. در بین آنها، در سال ۱۹۸۰ آی یورن^۱ [۱] خمش غیر خطی صفحه ساندویچی دایره‌ای شکل را بررسی کرد. در سال ۲۰۰۴ کریستوفر ایگلن و هی^۲ [۲] تحلیل خمش صفحات ساندویچی مستطیلی کم هزینه را بررسی کردند. در سال ۲۰۰۶ یاروایا^۳ [۳] تحلیل خمش ترموالاستیک صفحات ساندویچی دایره‌ای شکل بر پایه انعطاف پذیر را بررسی کرد. در سال ۲۰۱۰ زنگور^۴ [۴] تحلیل پاسخ خمش صفحات ساندویچی ای جی سی^۵ را بر اساس تئوری برشی سینوسی و

با استفاده از روش حل ناویر انجام دادند. در سال ۲۰۱۰ جلالی [۵] تحلیل کمانش حرارتی صفحه ساندویچی مدرج تابعی دایره‌ای شکل با ضخامت‌های گوناگون را با تئوری برشی مرتبه اول و روش حل شوتینگ انجام داد. وی اثبات کرد که کمانش حرارتی از نسبت ضخامت هسته به پوسته، ایندکس درصد حجمی ماده تابعی و تغییر ضخامت کل تاثیر می‌پذیرد. در سال ۲۰۱۱ تونسسی^۶ [۶] تحلیل خمش ترموالاستیک صفحات ساندویچی مدرج تابعی را توسط تئوری برشی مثلثاتی و روش حل ناویر بررسی کرد. در سال ۲۰۱۱ وانگ و شن^۷ [۷] تحلیل غیر خطی خمش، ارتعاشات و پس کمانش صفحات ساندویچی مدرج تابعی مستطیلی را بر اساس تئوری برشی مراتب بالا و معادلات ون کارمن و تکنیک پرتوبیشن ارائه کردند. در سال ۲۰۱۱ سلیمان مرداسی^۸ و همکارانش [۸] تحلیل خمش صفحات ساندویچی مدرج تابعی را توسط دو تئوری تغییر شکل برشی تصحیح شده انجام دادند. در سال ۲۰۱۲ رن اکسیاهوی^۹ و همکارانش [۹] تحلیل صفحات ساندویچی و کامپوزیت‌های چند لایه با پیکربندی عمومی را توسط روش المان محدود و تئوری زیگ زاگ انجام دادند. در سال ۲۰۱۲ خلیلی و محمدی [۱۰] تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی مدرج تابعی وابسته به دما را با استفاده از تئوری برشی مراتب بالا و اصل همیلتون انجام دادند. در سال ۲۰۱۳ شرعیات و همکارانش [۱۱] تحلیل تنش صفحات ساندویچی با لایه‌های تابعی را با استفاده از روش مرتبه چهارم رانگ کوتاه و تغییر شکل تیلور بررسی کردند. طبق مطالعاتی که بر روی پژوهش‌ها در زمینه صفحات ساندویچی صورت گرفته، مشاهده می‌شود که تا کنون تحلیلی در زمینه خمش غیر خطی صفحه ساندویچی تابعی دایره‌ای شکل تحت بار مکانیکی - حرارتی انجام نشده است. لذا در این تحقیق به بررسی رفتار خمش غیرخطی ترموالاستیک صفحات ساندویچی تابعی متقارن محوری دایره‌ای و حلقوی پرداخته می‌شود. همچنین خواص مواد در دو حالت وابسته به دما^{۱۰} و مستقل از دما^{۱۱}

⁶ Tounsi⁷ Wang & Shen⁸ Merdaci⁹ R Xiaohui¹⁰ TD¹¹ TID¹ IU Ren² CE Glenn & Hye³ Yarovaya⁴ Zenkour⁵ Exponentially graded composite

درصد حجمی سرامیک برای پوسته بالایی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$V_C = 1 \quad (2)$$

به طور مشابه، درصد حجمی سرامیک برای پوسته پایینی عبارتست از:

$$V_C = 0 \quad (3)$$

همچنین درصد حجمی سرامیک برای هسته به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$V_C = \left(\frac{Z - t_2}{t_1 - t_2} \right)^K \quad (4)$$

گفتنی است که $V_M + V_C = 1$ می‌باشد. در رابطه بالا اندیس K شاخص تابعی است و میزان تغییرات خواص را در راستای ضخامت هسته تعیین می‌کند. همچنین t_1 و t_2 بترتیب بیانگر مختصه سطوح بالایی و پایینی هسته در راستای محور Z می‌باشند. لازم به ذکر است که ضخامت هسته h ، ضخامت پوسته بالا h_2 و ضخامت پوسته پایین h_1 است و ضخامت کل H می‌باشد. بار حرارتی اعمالی به هسته تابعی به گونه‌ای است که سطح بالایی که کاملاً سرامیک است دارای یک دما و سطح پایینی هسته که غنی از فلز است دارای دمایی دیگر باشد. توزیع دما در راستای ضخامت هسته را می‌توان از حل معادله انتقال حرارت یک بعدی زیر به دست آورد [۱۲]:

$$\frac{-d}{dz} \left(N(z) \frac{dT(z)}{dz} \right) = 0 \quad (5)$$

در رابطه بالا $N(z)$ ضریب هدایت حرارتی است که توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۲]:

$$N(Z) = [N_C - N_M] \left(\frac{Z - t_2}{t_1 - t_2} \right)^K + N_M \quad (6)$$

با در نظر گرفتن دمای سطح بالایی هسته T_C و سطح پایینی آن T_M ، رابطه توزیع دما را برای هسته از معادله زیر می‌توان یافت [۱۲]:

$$T(Z) = [T_C - T_M] \left(\int_{-\frac{h}{2}}^Z \frac{dz}{N(z)} \right) / \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{dz}{N(z)} \right) + T_M \quad (7)$$

همان طور که گفته شد، خواص مکانیکی و حرارتی مواد تابعی با دما تغییر می‌کند. برخی از محققان از وابستگی خواص به دما صرف نظر کرده‌اند. در ادامه نشان داده خواهد شد که مستقل گرفتن خواص از دما، در دماهای بالا سبب به وجود آمدن خطای چشم‌گیری در پیش‌بینی رفتار می‌شود.

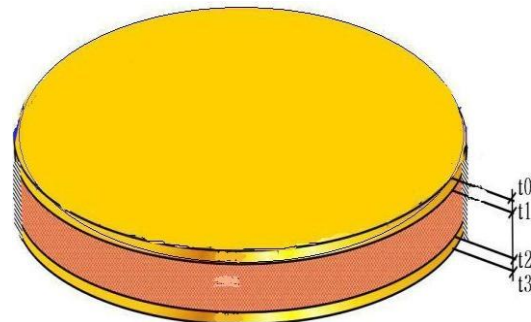
بررسی شده است. فرمولاسیون غیر خطی براساس تئوری برشی مرتبه اول و روابط غیر خطی کرنش ون کارمن می‌باشد و دستگاه معادلات تعادل غیر خطی به دست آمده توسط ترکیب روش عددی رهایی پویا و تفاضل محدود تحلیل می‌گردد. به منظور بررسی صحت و دقت تحقیق انجام شده به مقایسه نتایج به دست آمده با روش المان محدود پرداخته شده است. در نهایت به بررسی اثر پارامترهایی همچون نسبت ضخامت هسته به پوسته، شرایط مرزی، دما و شاخص تابعی بر روی خمش غیر خطی پرداخته می‌شود.

۲- معادلات حاکم

در ابتدا به بررسی روابط حاکم بر توزیع مواد در هسته تابعی صفحه ساندویچی پرداخته می‌شود. همانطوری که گفته شد این مواد از دید ماکروسکوپی، مواد مرکب غیر همگنی هستند که ترکیبی از فلزات و سرامیک‌ها می‌باشند. روابط حاکم بر ترکیب این دو ماده با استفاده از قانون اختلاط ساده نوشته شده است. شکل ۱ نمای کلی صفحه ساندویچی دایره‌ای را نشان می‌دهد. شایان ذکر است که جهت محور Z در شکل ۱ رو به بالا در نظر گرفته شده است. برای تعیین مدول یانگ E_F ، ضریب حرارتی α_F ، خصوصیت موثر ماده P_F از مدل خطی ویت^۱ استفاده می‌گردد [۷]:

$$P_F = P_C V_C + P_M V_M \quad (1)$$

اندیس C بیانگر سرامیک و اندیس M معرف فلز می‌باشد.



شکل ۱- نمای کلی صفحه ساندویچی دایره‌ای

^۱ Voit

همچنین میدان جابجایی برای پوسته پایین به صورت ذیل می‌باشد:

$$u_r(r,z)=u_0(r) + (z) \varphi_r \quad -\frac{h}{2} - h_1 \leq z \leq \frac{-h}{2} \quad (13)$$

$$u_z(r,z)=w_0(r)$$

میدان جابجایی برای پوسته بالا نیز به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u_r(r,z)=u_0(r) + (z) \varphi_r \quad \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} + h_2 \quad (14)$$

$$u_z(r,z)=w_0(r)$$

معادلات کرنش نیز با در نظر گرفتن فرضیات تغییر شکل های بزرگ و ن کارمن در ادامه برای سه لایه هسته، پوسته بالا و پوسته پایین بیان می‌شود. میدان کرنش برای هسته بصورت ذیل می‌باشد [۱۲]:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 + z k_r$$

$$\varepsilon_r^0 = \left(\frac{du_0}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_0}{dr} \right)^2 \right),$$

$$k_r = \frac{d\varphi_r}{dr}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + z k_\theta \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{u_0}{r}, \quad k_\theta = \frac{\varphi_r}{r} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw_0}{dz} = 0$$

$$\gamma_{rz} = \varphi_r + \frac{dw_0}{dr}$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{r\theta}^0 + z k_{r\theta} = 0$$

$$\gamma_{\theta z} = k_{\theta z} = 0 \quad (15)$$

میدان کرنش برای پوسته پایین و بالا همانند رابطه بالاست با این تفاوت که مقادیر ضخامت مربوط به خودشان در روابط جایگزین می‌شود. بنابراین میدان تنش در حالت متقارن محوری برای لایه‌ها به شکل ذیل می‌باشد [۱۲]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(n)} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix}^{(n)} - \begin{bmatrix} E\alpha\Delta T \\ 1-\theta \\ E\alpha\Delta T \\ 1-\theta \\ 0 \end{bmatrix}^{(n)} \quad (16)$$

که در روابط بالا $n=1,2,3$ شماره لایه است به طوری که از بالا به پایین نامگذاری شده است. بنابراین پوسته بالا، لایه شماره ۱ است. از آنجا که مدول یانگ در راستای ضخامت تغییر می‌کند بایستی در هر لایه، ضخامت مربوط به خوش در روابط جایگزین گردد. ضرایب استفاده شده در روابط بالا به صورت زیر می‌باشند:

$$Q_{11}=E/I-\theta^2 \quad Q_{22}=E/I-\theta^2 \quad Q_{12}=E\theta/I-\theta^2$$

$$E = E(Z,T) \quad Q_{66} = E/2(1+\theta) \quad (17)$$

$$\alpha = \alpha(Z,T)$$

با انتگرال گیری از میدان تنش در راستای ضخامت صفحه، منتهج های تنش و گشتاور به شکل زیر تعریف می‌شوند [۱۲]:

$$(N_r, N_\theta, Q_r) = \int_{-H/2}^{+H/2} (\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}) dz$$

خواص مکانیکی و حرارتی را می‌توان به صورت یک تابع غیر خطی از دما به صورت زیر بیان کرد [۷]:

$$P_F = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (8)$$

که در آن:

$$T = T_0 + \Delta T \quad (9)$$

ΔT نیز اختلاف دمای سطح بالا و پایین می‌باشد بطوری که $(\Delta T = T_U - T_L)$ و $T_0=300k$ برابر دمای اتاق در نظر گرفته می‌شود. $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ ضرایب دما هستند که مقادیرشان در جدول ۱ آورده شده است [۷].

جدول ۱: ضرایب دما برای سرامیک و فلز [۷]

ماده	P_0	P_{-1}	$P_1(\times 10^{-7})$	$P_2(\times 10^{-9})$	$P_3(\times 10^{-11})$
سرامیک					
E	$244/2 \times 10^9$	۰	-۱/۳	۱/۲	-۳
α	$12/76 \times 10^{-6}$	۰	-۱/۵	۱۰	-۰/۶
فلز					
E	$122/5 \times 10^9$	۰	-۰/۴۵	۰	۰
α	$2/5 \times 10^{-6}$	۰	۰/۶۶	-۳/۱	۰

مدول یانگ و ضریب حرارتی برای هر نقطه در هسته به صورت ذیل به دست می‌آید:

$$E_F(Z,T) = [E_C(T) - E_M(T)] \left(\frac{Z-t_2}{t_1-t_2} \right)^K + E_M(T)$$

$$\alpha_F(Z,T) = [\alpha_C(T) - \alpha_M(T)] \left(\frac{Z-t_2}{t_1-t_2} \right)^K + \alpha_M(T) \quad (10)$$

با توجه به دایره ای شکل بودن هندسه صفحه از مختصات قطبی برای استخراج معادلات حاکم استفاده شده است. لذا با توجه به تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان تغییر مکان برای هر نقطه درون صفحه در حالت متقارن محوری به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

$$u_r(r,z)=u_0(r) + z \varphi_r$$

$$u_z(r,z)=w_0(r) \quad (11)$$

که در رابطه بالا u_0 جابجایی تار خنثی در جهت شعاع و w_0 جابجایی تار خنثی در جهت ضخامت و چرخش حول محور شعاع φ_r می‌باشد. با توجه به رابطه (۱۱)، میدان جابجایی برای هسته به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u_r(r,z)=u_0(r) + z \varphi_r$$

$$u_z(r,z)=w_0(r) \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (12)$$

بر اساس تئوری برشی مرتبه اول توسط روابط زیر تعریف می شود [۱۳]:

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r} + N_r \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{N_\theta}{r} \frac{dw}{dr} + q = 0$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = 0 \quad (۲۱)$$

در رابطه بالا q بار مکانیکی عرضی اعمالی بر صفحه می باشد. با نوشتن معادلات تعادل بر حسب میدان جابجایی خواهیم داشت:

$$A_{11} \left(\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) +$$

$$A_{12} \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{u_r}{r} \right) \right) + B_{11} \frac{d^2 \varphi_r}{dr^2} + B_{12} \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \right) +$$

$$+ \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{du_\theta}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) (A_{11} - A_{12}) + \right.$$

$$\left. \frac{u_\theta}{r} (A_{12} - A_{22}) + \frac{d\varphi_r}{dr} (B_{11} - B_{12}) + \frac{\varphi_r}{r} (B_{12} - B_{22}) \right\} = 0$$

$$C \left(\frac{d\varphi_r}{dr} + \frac{d^2 w_\theta}{dr^2} \right) + C \left(\frac{\varphi_r}{r} + \frac{dw_\theta}{r dr} \right) +$$

$$\frac{d^2 w_\theta}{dr^2} \left(A_{11} \left(\frac{du_\theta}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) + A_{12} \frac{u_\theta}{r} + \right.$$

$$B_{11} \frac{d\varphi_r}{dr} + B_{12} \frac{\varphi_r}{r} \left. \right) + \frac{1}{r} \frac{dw_\theta}{dr} \left(A_{12} \left(\frac{du_\theta}{dr} + \right. \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) + A_{22} \frac{u_\theta}{r} + B_{12} \frac{d\varphi_r}{dr} +$$

$$B_{22} \frac{\varphi_r}{r} \left. \right) - N_r^T \left(\frac{d^2 w_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_\theta}{dr} \right) + q = 0$$

$$B_{11} \left(\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) + B_{12} \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right) +$$

$$D_{11} \frac{d^2 \varphi_r}{dr^2} + D_{12} \left(\frac{d}{dr} \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \right) + \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{du_\theta}{dr} + \right. \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) (B_{11} - B_{12}) + \frac{u_\theta}{r} (B_{12} - B_{22}) +$$

$$\left. \frac{d\varphi_r}{dr} (D_{11} - D_{12}) + \frac{\varphi_r}{r} (D_{12} - D_{22}) \right\} -$$

$$C \left(\varphi_r + \frac{dw_\theta}{dr} \right) = 0 \quad (۲۲)$$

به منظور کامل کردن فرمولاسیون، معادلات تعادل با شرایط مرزی همراه می شوند. شرایط مرزی برای دو تکیه گاه ساده و گیر دار برای دو صفحه دایره ای و حلقوی در زیر بررسی شده اند. برای یک صفحه دایره ای شکل با تکیه گاه ساده شرایط زیر برقرار است:

$$At r = 0, u = 0, \varphi_r = 0, Q_r = 0 \quad (۲۳)$$

$$At r = r_o, u = 0, w = 0, M_r = 0$$

برای یک صفحه دایره ای شکل با تکیه گاه گیردار نیز شرایط مرزی عبارتند از:

$$At r = 0, u = 0, \varphi_r = 0, Q_r = 0 \quad (۲۴)$$

$$At r = r_o, u = 0, w = 0, \varphi_r = 0$$

برای یک صفحه حلقوی شکل نیز با تکیه گاه گیردار در لبه داخلی و خارجی شرایط زیر برقرار است:

$$At r = r_i, u = 0, w = 0, \varphi_r = 0 \quad (۲۵)$$

$$At r = r_o, u = 0, w = 0, \varphi_r = 0$$

$$(M_r, M_\theta) = \int_{-H/2}^{+H/2} (\sigma_r, \sigma_\theta) z dz$$

$$N_r^T = N_\theta^T = \int_{-H/2}^{+H/2} (E/1 - \nu) \alpha \Delta T dz$$

$$M_r^T = M_\theta^T = \int_{-H/2}^{+H/2} (E/1 - \nu) \alpha \Delta T z dz \quad (۱۸)$$

با جایگذاری روابط کرنش در تنش می توان نتیجه های تنش و گشتاور بر حسب جابجایی ها را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$N_r = A \left(\left(\frac{du_\theta}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) + \nu \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right) +$$

$$B \left(\left(\frac{d\varphi_r}{dr} \right) + \nu \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \right) - N_r^T$$

$$N_\theta = A \left(\left(\nu \frac{du_\theta}{dr} + \left(\frac{\nu}{2} \right) \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) + \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right) +$$

$$B \left(\left(\nu \frac{d\varphi_r}{dr} \right) + \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \right) - N_\theta^T$$

$$M_r = B \left(\left(\frac{du_\theta}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) + \nu \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right) +$$

$$D \left(\left(\frac{d\varphi_r}{dr} \right) + \nu \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \right) - M_r^T$$

$$M_\theta = B \left(\left(\nu \frac{du_\theta}{dr} + \left(\frac{\nu}{2} \right) \left(\frac{dw_\theta}{dr} \right)^2 \right) + \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \right) +$$

$$D \left(\left(\nu \frac{d\varphi_r}{dr} \right) + \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \right) - M_\theta^T \quad (۱۹)$$

$$Q_r = C \left(\varphi_r + \frac{dw_\theta}{dr} \right)$$

که در روابط (۱۹) N_r و N_θ منتهجه تنش های درون صفحه ای و M_r و M_θ لنگرهای خمشی و Q_r منتهجه تنش برشی می باشند. همچنین، ماتریس های سختی A, B و D در روابط (۱۹) توسط روابط زیر به دست می آیند [۱۲]:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}-h_1} Q_{ij}^{(3)} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}^{(2)} dz +$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} Q_{ij}^{(1)} dz$$

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}-h_1} Q_{ij}^{(3)} z dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}^{(2)} z dz +$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} Q_{ij}^{(1)} z dz$$

$$D_{ij} =$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}-h_1} Q_{ij}^{(3)} z^2 dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}^{(2)} z^2 dz +$$

$$\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} Q_{ij}^{(1)} z^2 dz \quad ij=1,2,6$$

$$C = 0.833 \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}-h_1} \tau_{rz}^{(3)} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{rz}^{(2)} dz + \right.$$

$$\left. \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} \tau_{rz}^{(1)} dz \right) \quad (۲۰)$$

در این روابط Z فاصله لایه n ام از تار خنثی است و n شماره لایه است. معادلات تعادل را می توان از طریق مینیمم سازی انرژی و یا تعادل المان به دست آورد. معادلات تعادل

$$c_n = 2 \left\{ \frac{\{X_n\}^T \{F(X_n)\}}{\{X_n\}^T [M_n] \{X_n\}} \right\}^{1/2} \quad (33)$$

همچنین ماتریس دمپینگ با رابطه زیر به ماتریس جرمی وابسته می باشد [۱۵]:

$$C = c[M] \quad (34)$$

باجایگذاری (۳۱) در (۳۰) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\{\ddot{X}\}^{n+1/2} = \frac{(2-\Delta t c)}{(2+\Delta t c)} \{\dot{X}\}^{n-1/2} - \frac{2\Delta t}{(2+\Delta t c)} [M]^{-1} \{R\}^n \quad (35)$$

$$\{X\}^{n+1} = \{X\}^n + \Delta t \{\dot{X}\}^{n+1/2} \quad (36)$$

در اینجا $\{R\}^n$ بردار نیروهای باقیمانده است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\{R\}^n = \{P\}^n - [k]\{X\} \quad (37)$$

۴- تبدیل به فرمت مقدار اولیه

معادلات حاکم از نوع مسائل با مقدار مرزی مشخص می باشند و باید آنها را به فرمت مسائلی با مقدار اولیه معین در آورد. برای نیل به این هدف باید ترم های اینرسی و دمپینگ را به صورت زیر به سمت راست معادلات تعادل اضافه کنیم [۱۲]:

$$\begin{aligned} \frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_\theta}{r} &= m_u \frac{d^2 u}{dt^2} + c_u \frac{du}{dt} \\ \frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r} + N_r &= \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{N_\theta}{r} \frac{dw}{dr} + q = \\ m_w \frac{d^2 w}{dt^2} + c_w \frac{dw}{dt} \\ \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r &= m_{\phi_r} \frac{d^2 \phi_r}{dt^2} + c_{\phi_r} \frac{d\phi_r}{dt} \end{aligned} \quad (38)$$

اگر در سمت راست روابط (۳۸) به جای مشتقات اول و دوم زمانی، روابط (۲۸) و (۲۹) جایگذاری گردد و عبارت حاصله را برای به دست آوردن سرعت که در آن $X=u, w, \phi_r$ می باشد، ساده کنیم روابط زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^{n+1/2} &= \frac{2\Delta t^n}{2+\Delta t^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_\theta}{r} \right)_i^n + \\ &\frac{2-\Delta t^n c_i^n}{2+\Delta t^n c_i^n} \dot{u}_i^{n-1/2} \\ \dot{w}_i^{n+1/2} &= \frac{2\Delta t^n}{2+\Delta t^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r} + N_r \frac{d^2 w}{dr^2} + \right. \\ &\left. \frac{N_\theta}{r} \frac{dw}{dr} + q \right)_i^n + \frac{2-\Delta t^n c_i^n}{2+\Delta t^n c_i^n} \dot{w}_i^{n-1/2} \\ \dot{\phi}_{ri}^{n+1/2} &= \frac{2\Delta t^n}{2+\Delta t^n c_i^n} (m_{ii}^n)^{-1} \left(\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r \right)_i^n + \\ &\frac{2-\Delta t^n c_i^n}{2+\Delta t^n c_i^n} \dot{\phi}_{ri}^{n-1/2} \end{aligned} \quad (39)$$

پس از حل روابط بالا مقادیر سرعت ها به دست می آیند. حال با استفاده از رابطه زیر مقادیر جا بجایی و دوران در انتهای هر بازه زمانی محاسبه می شود:

$$X^{n+1} = X^n + \Delta t^{n+1} \dot{X}^{n+1/2} \quad (40)$$

همچنین برای یک صفحه حلقوی شکل با تکیه گاه ساده در لبه داخلی و خارجی شرایط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} At r = r_i, u = 0, w = 0, M_r = 0 \\ At r = r_o, u = 0, w = 0, M_r = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

۳- روش حل رهایی پویا

استفاده از روش رهایی پویا به دهه اول قرن بیستم باز می گردد. در روش رهایی پویا یک سیستم استاتیکی با افزودن نیروهای فرضی اینرسی و دمپینگ به یک فضای ساختگی دینامیکی انتقال می یابد [۱۴]:

$$[M]\{\ddot{X}\}^n + [C]\{\dot{X}\}^n + [k]\{X\}^n = \{P(t^n)\} \quad (27)$$

در این رابطه $[C]$ ، $[M]$ و $[k]$ ماتریس های میرایی، جرمی و سفتی هستند. در پیوست به طور کامل به توضیح ماتریس سفتی $[k]$ پرداخته شده است. همچنین $\{X\}^n$ بردار جابجایی، $\{\dot{X}\}^n$ و $\{\ddot{X}\}^n$ بیانگر سرعت و شتاب می باشند. با استفاده از روش تفاضل محدود، بردارهای سرعت و شتاب را می توان به صورت زیر نوشت [۱۵]:

$$\begin{aligned} \{\dot{X}\}^n &= \frac{\{X\}^{n+1/2} - \{X\}^{n-1/2}}{\Delta t} \\ \{\ddot{X}\}^{n-1/2} &= \frac{\{\dot{X}\}^n - \{\dot{X}\}^{n-1}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (28)$$

Δt در این معادله گام زمانی ساختگی می باشد. طبق رابطه میانگین، سرعت را می توان به شکل زیر بیان کرد [۱۵]:

$$\{\dot{X}\}^n = \frac{\{\dot{X}\}^{n-1/2} + \{\dot{X}\}^{n+1/2}}{2} \quad (29)$$

با جایگذاری روابط سرعت و شتاب در رابطه (۲۷)، سرعت در گام $(n+1/2)$ و جابه جایی در گام $(n+1)$ به شکل زیر بیان می شوند [۱۵]:

$$\begin{aligned} \{\dot{X}\}^{n+1/2} &= \frac{\left(\frac{[M] - [C]}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{[M] + [C]}{\Delta t}\right)} \{\dot{X}\}^{n-1/2} + \frac{([P] - [k]\{X\})}{\left(\frac{[M] + [C]}{\Delta t}\right)} \\ \{X\}^{n+1} &= \{X\}^n + \Delta t \{\dot{X}\}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (30)$$

برای ماتریس جرمی، ضریب میرایی، گام زمانی و بردار جابجایی اولیه باید مقادیر مناسبی اختیار شود تا پایداری و همگرایی پروسه حاصل گردد. با توجه به تئوری گرشگورین ماتریس جرمی را می توان با رابطه زیر به دست آورد [۱۴]:

$$m_{ii} \geq \frac{1}{4} \Delta t^2 \sum_{j=1}^n |k_{ij}| \quad (31)$$

$$k = \frac{\partial F}{\partial X} \quad (32)$$

ضریب میرایی نیز طبق ایده ارائه شده توسط ژانگ به صورت زیر به دست می آید [۱۴]:

$$\begin{aligned}\bar{q} &= q r_o^4 / E_M H^4 \\ \bar{M}_r &= M_r r_o^2 / E_M H^4 \\ \bar{N}_r &= N_r r_o^2 / E_M H^3 \\ \bar{\sigma}_r &= \sigma_r H^2 / q r_o^2\end{aligned}\quad (42)$$

مثال ۱: صفحه ساندویچی دایره ای شکل با پوسته های تابعی و هسته همگن سرامیکی تحت بار مکانیکی - حرارتی قرار گرفته است و مشخصات زیر را داراست.

$$h_{top} = h_{bottom} = 0.025 \text{ m}, h_{core} = 0.05 \text{ m}, \nu = 0.3$$

$$\bar{q} = 50, \text{ Radius} = 1 \text{ m}, T_0 = 300 \text{ k}$$

برای صحت سنجی، نتایج عددی به دست آمده توسط روش رهایی پویا با نتایج روش المان محدود حاصله از نرم افزار آباکوس [۱۷] در جدول ۲ مقایسه شده است. همانطور که در جدول ۲ دیده می شود اختلاف چندانی بین نتایج تحقیق حاضر و نتایج روش المان محدود وجود ندارد و نتایج به دست آمده از مقایسه، حاکی از دقت و صحت بالای تحلیل عددی صورت گرفته می باشد. در ادامه با توجه به هندسه صفحه ساندویچی داده شده در مثال بالا، به مطالعه پارامتریک اثرات گوناگون پرداخته می شود. به منظور بررسی اثرات ضخامت هسته و پوسته، صفحات ساندویچی بر اساس نسبت ضخامت هسته به پوسته تقسیم بندی شده اند. صفحه ساندویچی (۱-۱-۱) که از سه لایه مساوی تشکیل شده و متقارن می باشد. صفحه ساندویچی (۱-۲-۱) که در آن ضخامت هسته برابر مجموع ضخامت پوسته هاست و متقارن می باشد و ضخامت پوسته ها با هم برابر است. صفحه ساندویچی (۲-۱-۲) که در آن ضخامت هسته، نصف ضخامت پوسته می باشد و ضخامت پوسته ها با هم برابر است و متقارن می باشد. صفحه ساندویچی (۱-۰-۱) که از دو پوسته مساوی تشکیل شده است و در آن هسته ای وجود ندارد و متقارن است. در جدول ۳ نتیجه گشتاور برای دو حالت خطی و غیر خطی به ازای مقادیر مختلف بار در شاخص های تابعی متفاوت در صفحه ساندویچی گرد تابعی با تکیه گاه گیر دار برای صفحه (۱-۲-۱) در اختلاف دمای ۲۰۰ درجه کلوین و در حالت مستقل از دما برای مرکز صفحه گرد ارائه شده است. همانطور که مشاهده می شود برای دو حالت خطی و غیرخطی با افزایش شاخص تابعی، نتیجه گشتاور کاهش می یابد. زیرا با افزایش شاخص تابعی، طبق رابطه (۱۰) مدول یانگ کاهش و پیرو آن طبق رابطه (۱۶) تنش شعاعی و در انتها نتیجه گشتاور کاهش می یابد.

در روابط بالا $X = u, w, \varphi_r$ می باشد. بنابراین با استفاده از روابط (۳۹) و (۴۰) و روابط (۱۵) تا (۲۲) معادلات کامل مورد نظر برای الگوریتم رهایی پویا تشکیل می شوند. به منظور اعمال روش رهایی پویا برای حل دستگاه معادلات آورده شده باید تمامی روابط توسط روش تفاضل محدود گسسته گردند. بطوری که برای محاسبه مشتقات بر روی مرزهای خارجی و داخلی بترتیب از روش های تفاضل محدود پیشرو و پسرو استفاده شده است و برای تعیین مقادیر مشتق در بقیه نقاط داخل صفحه از تفاضل محدود مرکزی استفاده شده است. همچنین همانطور که از روابط پیداست، اعمال معادلات بر روی گره مرکزی امکانپذیر نمی باشد، لذا به منظور برطرف کردن مشکل نقطه تکین در مرکز صفحه از رابطه زیر که توسط کوباباشی و تروی [۱۶] پیشنهاد شده است، استفاده گردیده است:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_0}{r} = \frac{du_0}{dr} \quad (41)$$

الگوریتم مورد نظر برای حل به ترتیب زیر می باشد [۱۲]:

۱. مقدار اولیه تمام متغیرها را صفر داده و بار q اعمال می شود.
۲. مقادیر C و M به دست می آیند.
۳. سرعت ها از روابط (۳۹) محاسبه می شوند.
۴. جا بجایی ها و دوران از رابطه (۴۰) تعیین می گردند.
۵. شرایط مرزی جابجایی اعمال می شوند.
۶. کرنش ها و انحنای صفحه به دست می آیند.
۷. نتیجه های تنش و گشتاور صفحه محاسبه می شوند.
۸. همگرایی محاسبات بررسی می گردد. برای مثال سرعت ها کمتر از 10^{-7} حاصل شده باشند.
۹. اگر معیار همگرایی برقرار شود نتایج را چاپ کن در غیر این صورت به مرحله ۲ برگرد و محاسبات را دو باره انجام بده.

۵- نتایج و بحث

برای مطالعه رفتار غیر خطی خمش ترموالاستیک صفحات ساندویچی تابعی از مثال هایی استفاده شده است. پارامتر های بدون بعد استفاده شده در مقاله مطابق روابط زیر هستند:

جدول ۳- منته‌گشتاور به ازای مقادیر مختلف بار در شاخص‌های متفاوت

\overline{M}_r				\overline{q}
K=۲	K=۲	K=۱	K=۱	
(خطی)	(غیرخطی)	(خطی)	(غیرخطی)	
۰/۰۶۷۳	۰/۰۴۷۲	۰/۰۹۰۶	۰/۰۵۴۲	۲۵
۰/۱۶۴۶	۰/۰۹۴۵	۰/۱۶۳۲	۰/۱۰۸۶	۵۰
۰/۲۸۷۲	۰/۲۰۷۹	۰/۳۲۶۵	۰/۲۳۹۰	۷۵
۰/۴۳۰۹	۰/۳۳۸۵	۰/۵۰۷۸	۰/۳۸۹۳	۱۰۰
۰/۵۷۴۵	۰/۴۳۷۱	۰/۶۸۹۳	۰/۵۰۱۹	۱۵۰
۰/۷۲۲۶	۰/۵۰۹۳	۰/۸۶۱۶	۰/۵۸۴۷	۲۰۰
۰/۸۹۷۷	۰/۵۶۹۲	۱/۰۴۳۱	۰/۶۵۴۵	۲۵۰
۰/۰۶۷۳	۰/۰۴۷۲	۰/۰۹۰۶	۰/۰۵۴۲	۳۰۰

جدول ۷ منته‌گشتاور را به ازای مقادیر مختلف بار در شاخص ۰/۸ در صفحه ساندویچی گرد با تکیه‌گاه گیر دار برای صفحه (۱-۲-۱) در دماهای مختلف و در حالت مستقل از دما در مرکز صفحه نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش دما، منته‌گشتاور کاهش می‌یابد. زیرا طبق رابطه (۱۸) با افزایش دما M_T^I افزایش می‌یابد که افزایش این پارامتر طبق رابطه (۱۹) باعث کاهش منته‌گشتاور می‌شود. شکل ۲ تغییرات خیز و منته‌گشتاور در راستای شعاع را برای شاخص‌های متفاوت در صفحه ساندویچی دایره‌ای شکل با تکیه‌گاه گیر دار و خواص مهندسی وابسته به دما نشان می‌دهد. با مشاهده شکل نمایان است که با افزایش شاخص تابعی، جا بجایی در جهت ضخامت افزایش و منته‌گشتاور کاهش می‌یابد. زیرا با افزایش شاخص تابعی، طبق رابطه (۱۰) مدول یانگ کاهش و پیرو آن طبق رابطه (۱۶) تنش شعاعی و در انتها منته‌گشتاور کاهش می‌یابد. با کاهش مدول یانگ نیز، ماده تابعی به سمت فلز بودن و انعطاف پذیری بیشتر میل می‌کند که همین امر سبب افزایش خیز می‌شود. همچنین از این شکل دریافت می‌شود که افزایش شاخص تابعی در شاخص‌های پایین‌تر (۰ تا ۵) تاثیر بیشتری بر افزایش خیز دارد و برای شاخص‌های بیشتر (۵ تا ۳۰۰) تاثیر شاخص تابعی بر روی خیز کمتر می‌شود.

در جدول ۴ مقادیر خیز در شاخص تابعی ۱ و جدول ۵ با شاخص تابعی ۲ در دو حالت خطی و غیرخطی به ازای بارهای مختلف در صفحه ساندویچی گرد تابعی با تکیه‌گاه گیر دار برای صفحه (۱-۲-۱) در اختلاف دمای ۲۰۰ درجه کلون و در حالت مستقل از دما برای مرکز صفحه نشان داده شده است. در جدول ۴ و ۵ برای ارزیابی صحت نتایج مقایسه با آباکوس [۱۷] نیز آورده شده است. با مقایسه جدول ۴ و ۵ مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص تابعی، اختلاف خیز بین دو حالت خطی و حالت غیر خطی بیشتر می‌شود. بطوریکه با افزایش بار نیز، اختلاف خیز در دو حالت خطی و غیر خطی افزایش می‌یابد. به عنوان مثال در $\overline{q}=150$ از خیز در حالت غیر خطی در شاخص تابعی ۲ به میزان ۱۴٪ از خیز در شاخص تابعی ۱ بیشتر است.

جدول ۲- خیز به ازای مقادیر مختلف بار در دماهای متفاوت (کلون)

W_{max}/H				\overline{q}
T=۷۰۰	T=۷۰۰	T=۵۰۰	T=۵۰۰	
رهای پویا [۱۷]	رهای پویا	رهای پویا [۱۷]	رهای پویا	
۰/۷۸۵	۰/۷۷۸	۰/۶۸۹	۰/۶۸۲	۲۵
۱/۱۷۲	۱/۱۶۱	۱/۰۲۸	۱/۰۱۸	۵۰
۱/۴۵۰	۱/۴۳۶	۱/۲۷۲	۱/۲۶۰	۷۵
۱/۶۳۲	۱/۶۱۵	۱/۴۳۱	۱/۴۱۷	۱۰۰
۱/۸۷۲	۱/۸۵۵	۱/۶۴۳	۱/۶۲۷	۱۵۰
۲/۰۵۵	۲/۰۳۴	۱/۸۰۲	۱/۷۸۵	۲۰۰
۲/۲۳۶	۲/۲۱۴	۱/۹۶۱	۱/۹۴۲	۲۵۰
۲/۳۵۷	۲/۳۳۴	۲/۰۶۷	۲/۰۴۷	۳۰۰

جدول ۶ خیز دو حالت خطی و غیر خطی را به ازای مقادیر مختلف بار در دماهای متفاوت در صفحه ساندویچی گرد تابعی با تکیه‌گاه گیر دار برای صفحه (۱-۲-۱) در شاخص تابعی ۱/۵ و در حالت مستقل از دما در مرکز صفحه نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود که با افزایش دما، خیز افزایش می‌یابد. بطوریکه با افزایش بار و افزایش دما، اختلاف خیز در دو حالت خطی و غیر خطی افزایش می‌یابد. به عنوان مثال در $\overline{q}=150$ خیز در حالت غیر خطی در دمای ۷۰۰ درجه کلون به میزان ۱۲٪ از خیز در دمای ۵۰۰ درجه کلون بیشتر است.

همچنین نتیجه گشتاور در حالت وابسته به دما از حالت مستقل از دما کمتر است.

جدول ۴- خیز ماکزیمم به ازای مقادیر مختلف بار در شاخص تابعی ۱

جدول ۶- خیز ماکزیمم به ازای مقادیر مختلف بار در دماهای متفاوت (کلوین)

W_{max}/H				\bar{q}
T=۵۰۰	T=۷۰۰	T=۵۰۰	T=۷۰۰	
غیرخطی	غیرخطی	خطی	خطی	
۰/۶۱۴۲	۰/۷۰۰۲	۰/۶۲۰۴	۰/۷۸۲۵	۲۵
۰/۹۱۶۶	۱/۰۴۴۹	۱/۱۲۴۰	۱/۲۵۶۴	۵۰
۱/۱۳۴۰	۱/۲۹۲۷	۱/۵۴۱۷	۱/۷۱۵۹	۷۵
۱/۲۷۵۷	۱/۴۵۴۳	۱/۹۰۰۷	۲/۱۹۹۷	۱۰۰
۱/۴۶۴۷	۱/۶۶۹۷	۲/۶۸۷۳	۳/۱۷۳۰	۱۵۰

W_{max}/H				\bar{q}
غیرخطی	خطی	غیرخطی	خطی	
رهای پویا	رهای پویا	[۱۷]آکوس	[۱۷]آکوس	
۰/۴۹۳۴	۰/۵۹۰	۰/۴۸۵۵	۰/۵۹۴۹	۲۵
۰/۸۳۴۷	۱/۱۶۱	۰/۸۳۹۷	۱/۱۶۱۷	۵۰
۰/۹۹۸۷	۱/۵۳۵	۰/۹۹۸۸	۱/۵۴۰۸	۷۵
۱/۱۲۱۹	۱/۹۹۱	۱/۱۲۷۹	۱/۹۹۲۶	۱۰۰
۱/۳۰۱۴	۲/۹۶۸	۱/۳۰۴۵	۲/۹۷۸۲	۱۵۰

جدول ۷- نتیجه گشتاور به ازای مقادیر مختلف بار در دماهای متفاوت (کلوین)

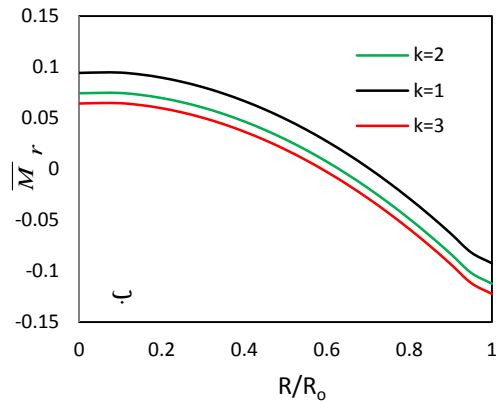
\bar{M}_r				\bar{q}
T=۵۰۰	T=۷۰۰	T=۵۰۰	T=۷۰۰	
(غیرخطی)	(غیرخطی)	(خطی)	(خطی)	
۰/۰۶۹۳	۰/۰۴۸۶	۰/۰۹۳۳	۰/۰۵۵۸	۲۵
۰/۱۳۸۶	۰/۰۹۷۳	۰/۱۶۸۱	۰/۱۱۱۸	۵۰
۰/۲۹۵۸	۰/۲۱۴۱	۰/۳۳۶۲	۰/۲۴۶۱	۱۰۰
۰/۴۴۳۷	۰/۳۴۸۶	۰/۵۲۳۰	۰/۴۰۰۹	۱۵۰
۰/۵۹۱۷	۰/۴۵۰۱	۰/۷۰۹۹	۰/۵۱۶۹	۲۰۰
۰/۷۴۴۲	۰/۵۲۴۵	۰/۸۸۷۴	۰/۶۰۲۱	۲۵۰
۰/۹۲۴۶	۰/۵۸۶۲	۱/۰۷۴۳	۰/۶۷۴۱	۳۰۰

جدول ۵- خیز ماکزیمم به ازای مقادیر مختلف بار در شاخص تابعی ۲

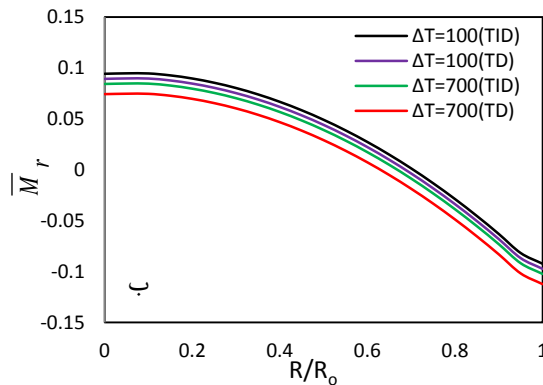
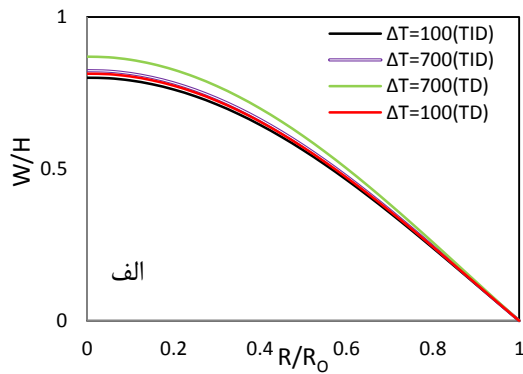
W_{max}/H				\bar{q}
غیرخطی	خطی	غیرخطی	خطی	
رهای پویا	رهای پویا	[۱۷]آکوس	[۱۷]آکوس	
۰/۵۴۲۸	۰/۶۵۰۰	۰/۵۵۰۱	۰/۶۷۳۶	۲۵
۰/۸۵۸۸	۱/۲۸۷۱	۰/۸۵۹۴	۱/۲۹۹۲	۵۰
۱/۰۹۸۵	۱/۷۲۴۷	۱/۱۰۵۱	۱/۷۲۵۵	۷۵
۱/۲۳۴۰	۲/۱۹۰۳	۱/۲۴۰۸	۲/۱۹۲۵	۱۰۰
۱/۴۳۱۶	۳/۲۰۵۷	۱/۴۳۵۵	۳/۲۰۸۱	۱۵۰

شکل ۴ تغییرات خیز و نتیجه گشتاور در راستای شعاع را برای دماهای متفاوت در صفحه ساندویچی با هسته تابعی دایره ای شکل با تکیه گاه گیر دار و دو حالت خواص مواد مستقل و وابسته به دما نشان می دهد. در این شکل، شاخص هدفمندی $K=10$ در نظر گرفته شده است. با مقایسه شکل ۳ و ۴ این نکته مشخص می شود که در شاخص های تابعی بالاتر، اختلاف خیز در دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما بیشتر می شود. شکل ۵ تغییرات خیز و نتیجه گشتاور را در راستای شعاع برای اختلاف دماهای متفاوت در صفحه ساندویچی با پوسته های همگن دایره ای شکل با تکیه گاه ساده و دو حالت خواص مواد مستقل و وابسته به دما نشان

شکل ۳ تغییرات خیز و نتیجه گشتاور را در راستای شعاع برای اختلاف دماهای متفاوت و خواص مواد وابسته به دما با تکیه گاه گیر دار نشان می دهد. در این شکل شاخص تابعی، $K=1$ در نظر گرفته شده است. با دقت در شکل مشاهده می شود که با افزایش دما، خیز افزایش و نتیجه گشتاور کاهش می یابد و همچنین خیز در حالت وابسته به دما از خیز در حالت مستقل از دما بیشتر است و با افزایش دما اختلاف دو حالت بیشتر می شود. همانطوری که در شکل نمایان است در دمای ۱۰۰ درجه کلون دو حالت ذکر شده اختلاف کمی با هم دارند ولی در دمای ۷۰۰ درجه کلون اختلافشان بیشتر می باشد. میزان درصد اختلاف خیز در مرکز بین دمای ۱۰۰ درجه کلون و ۷۰۰ درجه کلون در حالت مستقل از دما ۳٪ و در حالت وابسته به دما به میزان ۶٪ می باشد.



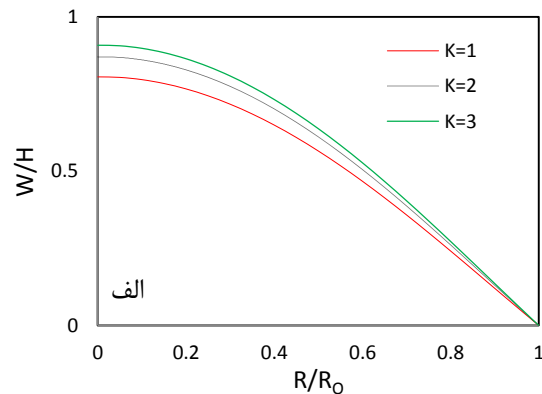
شکل ۲- تغییرات خیز (الف) - منته‌ج گشتاور (ب) در صفحه ساندویچی با تکیه‌گاه گیر دار وابسته به دما در شاخص‌های متفاوت



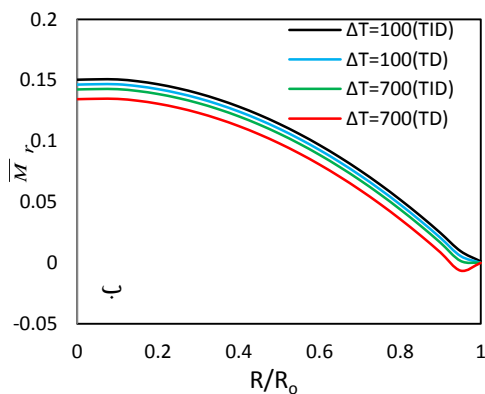
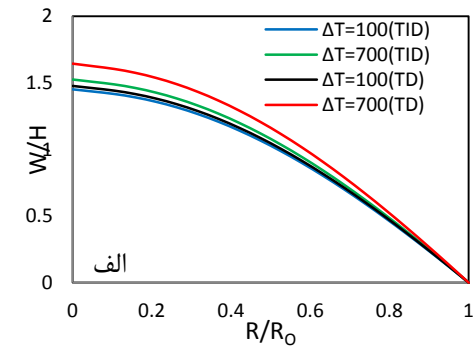
شکل ۳- تغییرات خیز (الف) - منته‌ج گشتاور (ب) در راستای شعاع برای اختلاف دماهای متفاوت (کلوین) در شاخص هدفمندی ۱

شکل ۷ تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت را برای صفحه‌های ساندویچی تابعی (۱-۱)، (۱-۲) در تکیه‌گاه گیردار با اختلاف دمای ۳۰۰ درجه کلوین و خواص مواد وابسته به دما نشان می‌دهد. با دقت در شکل ۷

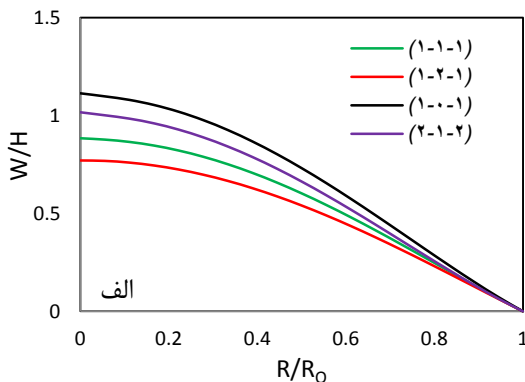
می‌دهد. شاخص تابعی، $K = 1$ در نظر گرفته شده است. با مقایسه شکل ۳ و ۵ این نتیجه حاصل می‌گردد که اختلاف خیز بین دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما در تکیه‌گاه ساده تقریباً مانند تکیه‌گاه گیر دار می‌باشد. جدول ۸ خیز را بر اساس مش بندی در راستای شعاع برای دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما بررسی می‌کند. مشاهده می‌شود که برای تعداد ۲۰ گره به بعد جابجایی مرکز دایره همگرا می‌شود. بنابراین برای استخراج نتایج از ۲۰ عدد گره در راستای شعاع استفاده گردیده است. نکته دیگر این که خیز در حالت وابسته به دما از حالت دیگر در تمام مش بندی‌ها، بیشتر است و با افزایش تعداد مش اختلاف بین دو حالت کمتر می‌شود. شکل ۶ تغییرات خیز و منته‌ج گشتاور در راستای شعاع را برای صفحات ساندویچی متفاوت با تکیه‌گاه گیر دار نمایش می‌دهد. در این شکل شاخص تابعی، $K = 1$ در نظر گرفته شده است و اختلاف دما ۳۰۰ درجه کلوین و خواص مواد وابسته به دما می‌باشد. با مشاهده شکل ۶ این نکته نمایان است که صفحه (۱-۲-۱) کمترین خیز را داراست و صفحه (۱-۰-۱) بیشترین خیز را به خود اختصاص داده است. خیز مرکز صفحه (۱-۰-۱) به میزان ۱۰٪ از صفحه (۲-۱-۲) و به میزان ۲۴٪ از صفحه (۱-۱-۱) و به میزان ۴۱٪ از صفحه (۱-۲-۱) بیشتر است. بنابراین با کاهش نسبت ضخامت هسته به پوسته، خیز افزایش و منته‌ج گشتاور کاهش می‌یابد.



شکل با تکیه گاه گیر دار- گیردار در اختلاف دمای ۷۰۰ درجه کلون نشان می دهد. خواص مواد در این شکل برای دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما بررسی شده است. همانطور که مشاهده می شود مشابه صفحه توپر، با افزایش شاخص تابعی، خیز افزایش و منته گشتاور کاهش می یابد.

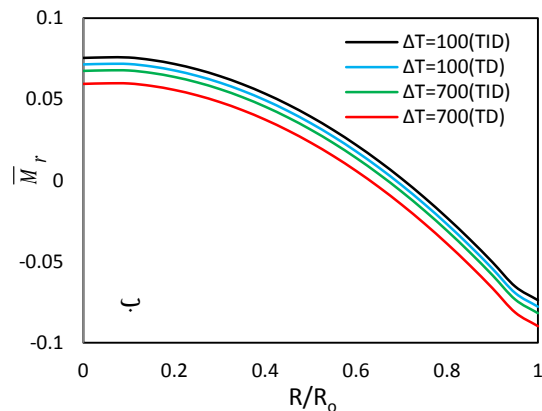
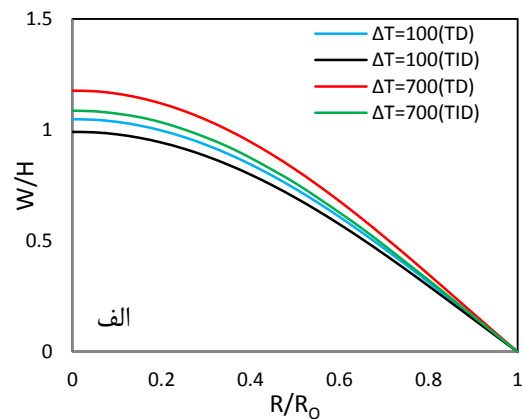


شکل ۳- تغییرات خیز (الف) - منته گشتاور (ب) با اختلاف دما متفاوت (کلون) در شاخص تابعی ۱ با تکیه گاه ساده



مشخص می شود که تنش در صفحه (۱-۲-۱) بیشتر از تنش در صفحه (۱-۱-۱) می باشد. بنابراین با افزایش نسبت ضخامت هسته به پوسته، تنش شعاعی افزایش می یابد.

شکل ۸ تغییرات تنش شعاعی در راستای ضخامت را برای صفحه ساندویچی (۱-۲-۱) در شاخص تابعی ۱ برای شعاع های متفاوت در تکیه گاه گیردار با اختلاف دمای ۳۰۰ درجه کلون و خواص مواد وابسته به دما نشان می دهد. از این شکل نتیجه می شود که در صفحه ساندویچی دایره ای تابعی با افزایش شعاع، تنش شعاعی کاهش می یابد. در ادامه به تحلیل رفتار خمش صفحه ساندویچی هدفمند حلقوی با تکیه گاه های مختلف پرداخته می شود که شعاع داخلی آن ۲۵ سانتیمتر و شعاع خارجی آن ۱۲۰ سانتیمتر می باشد.



شکل ۴- تغییرات خیز (الف) - منته گشتاور (ب) در راستای شعاع برای اختلاف دما های متفاوت در شاخص هدفمندی ۱۰

شکل ۹ تغییرات خیز و منته گشتاور را در راستای شعاع برای شاخص های متفاوت در صفحه ساندویچی حلقوی

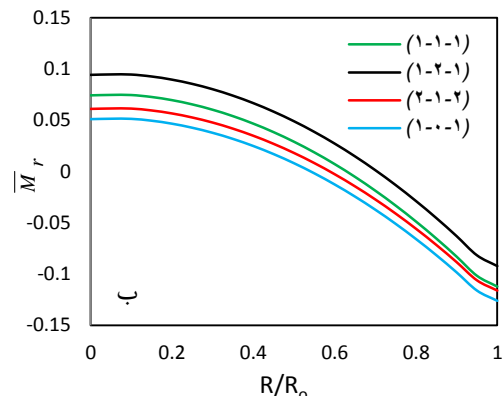
شکل ۱۰ تغییرات خیز و منتجه گشتاور در راستای شعاع را برای شاخص‌های متفاوت در صفحه ساندویچی با هسته تابعی حلقوی شکل با تکیه‌گاه ساده-ساده در اختلاف دمایی ۷۰۰ درجه کلوین برای دو حالت خواص مواد مستقل و وابسته به دما نشان می‌دهد.

با مقایسه شکل ۹ و ۱۰ این نتیجه حاصل می‌گردد که خیز صفحه حلقوی با تکیه‌گاه ساده-ساده بیشتر از تکیه‌گاه گیردار-گیردار است و همچنین اختلاف خیز در دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما در تکیه‌گاه ساده-ساده بیشتر از تکیه‌گاه گیردار-گیردار می‌باشد.

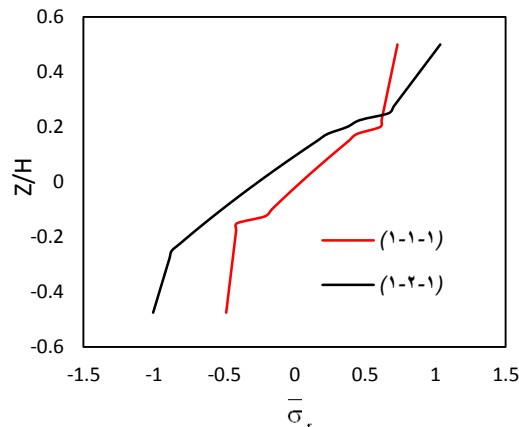
شکل ۱۱ تغییرات خیز و منتجه گشتاور در راستای شعاع را برای صفحات ساندویچی حلقوی با نسبت ضخامت متفاوت نمایش می‌دهد. با مشاهده شکل ۱۱ این نکته نمایان است که صفحه (۱-۲-۱) کمترین خیز را داراست و صفحه (۱-۰-۱) بیشترین خیز را به خود اختصاص داده است. همچنین خیز صفحه (۱-۰-۱) به میزان ۶۱٪ از صفحه (۱-۱-۱) و به میزان ۱۰۸٪ از صفحه (۱-۲-۱) بیشتر است. بیشترین جابجایی در $\bar{r} = 0.56$ رخ می‌دهد. با مقایسه شکل ۱۱ با شکل ۶ مشخص می‌شود که تغییرات ضخامت در صفحه حلقوی، تاثیر بیشتری بر جابجایی نسبت به صفحه گرد تو پر دارد.

جدول ۸- خیز بر اساس مش بندی‌های مختلف

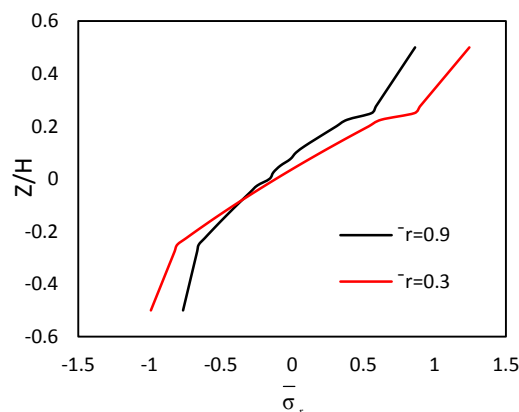
تعداد مش	۵	۱۵	۲۰	۳۰	۴۰
W/H(TD)	0.090	0.081	0.0805	0.0806	0.0806
W/H(TID)	0.089	0.0805	0.0802	0.0801	0.0801



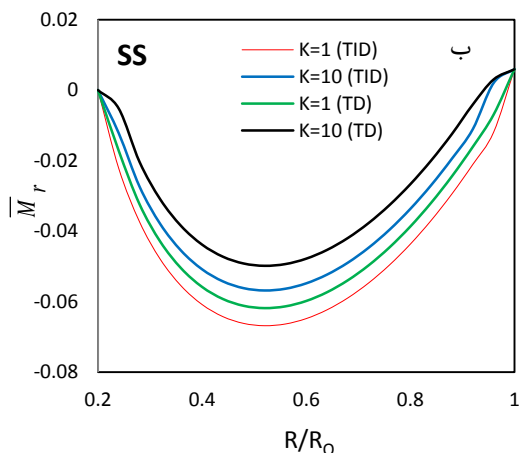
شکل ۶- تغییرات خیز (الف) - منتجه گشتاور (ب) در راستای شعاع برای انواع صفحات ساندویچی



شکل ۷- تنش در راستای ضخامت برای انواع صفحه‌های ساندویچی



شکل ۸- تنش بر حسب ضخامت برای صفحه (۱-۲-۱)

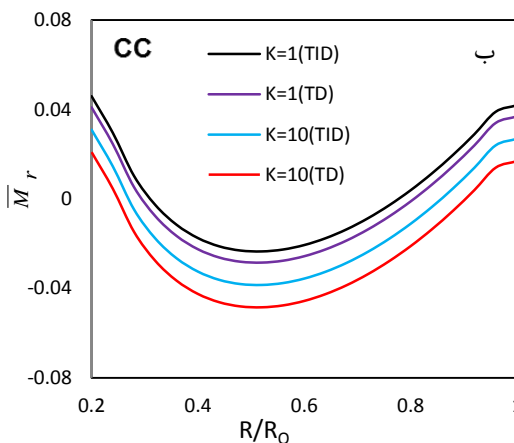
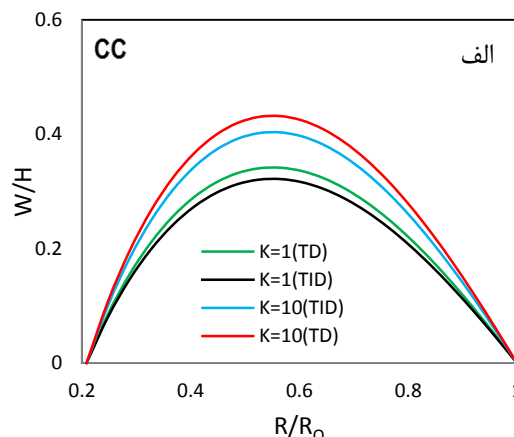


شکل ۱۰- تغییرات خیز (الف) - لنگر خمشی (ب) در راستای شعاع در صفحه حلقوی ساده- ساده در اختلاف دمای ۷۰۰ درجه کلوین

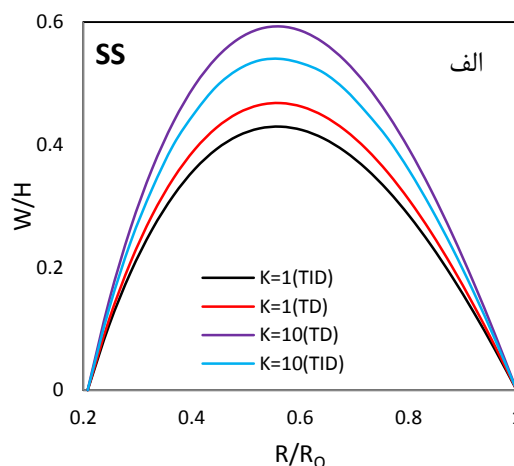
۷- نتیجه گیری

در این مقاله تحلیل غیر خطی خمش صفحات ساندویچی دایره ای و حلقوی با پوسته های همگن و هسته تابعی تحت بار مکانیکی-حرارتی بررسی شده است. روابط حاکم بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و روابط کرنش ون کارمن برای تغییر شکل های بزرگ استخراج شده است. دستگاه معادلات تعادل غیر خطی به دست آمده توسط ترکیب روش های عددی رهایی پویا و تفاضل محدود تحلیل گردیده اند. در نهایت به بررسی اثر پارامترهایی همچون نسبت ضخامت هسته به پوسته، شرایط مرزی، دما و ثابت تابعی بر روی خمش غیر خطی پرداخته شده است. برخی از نتایج مهم بدست آمده عبارتند از:

- در هر دو حالت صفحه دایره ای و حلقوی، صفحه ساندویچی (۱-۲-۱) کمترین خیز را داراست و صفحه (۱-۱-۱) بیشترین خیز را به خود اختصاص داده است.
- با کاهش نسبت ضخامت هسته به پوسته، خیز افزایش، تنش شعاعی و منتجه گشتاور کاهش می یابد.
- تغییرات نسبت ضخامت هسته به پوسته در صفحه حلقوی، تاثیر بیشتری بر روی نتایج نسبت به صفحه دایره ای تو پر دارد.
- خیز در حالت وابسته به دما از حالت مستقل از دما بیشتر است و با افزایش دما این اختلاف دو حالت افزایش می یابد و



شکل ۹- تغییرات خیز (الف) - لنگر خمشی (ب) در راستای شعاع در صفحه حلقوی گیردار- گیردار در اختلاف دمای ۷۰۰ درجه کلوین در شاخص های متفاوت



ساندویچی با هسته تابعی و پوسته های ایزوتروپ در نرم افزار آباکوس مدل شد. شایان ذکر است که در مدل سازی از المان دو بعدی چهارگوش استفاده گردیده است و تحلیل به صورت متقارن محوری دو بعدی صورت پذیرفته است و تعداد ۸۰۰ المان به کار گرفته شده است.

همان طور که در بخش روش رهایی پویا توضیح داده شد، ماتریس سفتی از مشتق نیرو نسبت به جا بجایی به دست می آید. نیروها از سمت چپ معادله (۳۸) به دست می آیند که در رابطه (۴۳) نشان داده شده اند:

$$p^u = \frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r - N_\theta}{r}$$

$$p^w = \frac{dQ_r}{dr} + \frac{Q_r}{r} + N_r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{N_\theta}{r} \frac{dw}{dr} + q$$

$$p^{\varphi_r} = \frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r \quad (43)$$

با استفاده از روابط قبل ماتریس سفتی به شکل زیر تعریف می شود:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{\partial p^u}{\partial u_0} & \frac{\partial p^u}{\partial \varphi_r} & \frac{\partial p^u}{\partial w_0} \\ \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial u_0} & \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial \varphi_r} & \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial w_0} \\ \frac{\partial p^w}{\partial u_0} & \frac{\partial p^w}{\partial \varphi_r} & \frac{\partial p^w}{\partial w_0} \end{bmatrix}$$

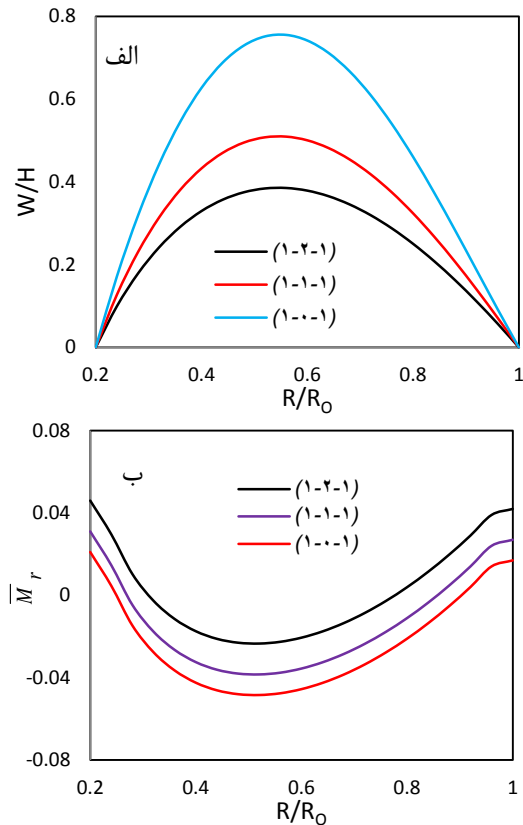
$$k_{11} = \frac{\partial p^u}{\partial u_0} = A_{11} \left(\frac{d^3 u_0}{du_0 dr^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d^2}{du_0 dr} \left(\frac{dw_0}{dr} \right)^2 \right) + A_{12} \left(\frac{d^2}{du_0 dr} \left(\frac{u_0}{r} \right) \right) + B_{11} \frac{d^3 \varphi_r}{du_0 dr^2} + \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{d^2 u_0}{du_0 dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d}{du_0} \left(\frac{dw_0}{dr} \right)^2 \right) (A_{11} - A_{12}) + \frac{d}{du_0} \frac{u_0}{r} (A_{12} - A_{22}) + \frac{d^2 \varphi_r}{du_0 dr} (B_{11} - B_{12}) \right\}$$

$$k_{12} = \frac{\partial p^u}{\partial \varphi_r} = A_{11} \left(\frac{d^3 u_0}{d\varphi_r dr^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d^2}{d\varphi_r dr} \left(\frac{dw_0}{dr} \right)^2 \right) + B_{11} \frac{d^3 \varphi_r}{d\varphi_r dr^2} + B_{12} \left(\frac{-1}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{d^2 u_0}{d\varphi_r dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d}{d\varphi_r} \left(\frac{dw_0}{dr} \right)^2 \right) (A_{11} - A_{12}) + \frac{d}{dr} \frac{\varphi_r}{r} (B_{11} - B_{12}) + \frac{1}{r} (B_{12} - B_{22}) \right\}$$

$$k_{13} = \frac{\partial p^u}{\partial w_0} = A_{11} \left(\frac{d^3 u_0}{dw_0 dr^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d^2}{dw_0 dr} \left(\frac{dw_0}{dr} \right)^2 \right) + A_{12} \left(\frac{d^2}{dw_0 dr} \left(\frac{u_0}{r} \right) \right) + B_{11} \frac{d^3 \varphi_r}{dw_0 dr^2} + \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{d^2 u_0}{dw_0 dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d}{dw_0} \left(\frac{dw_0}{dr} \right)^2 \right) (A_{11} - A_{12}) + \frac{d^2 \varphi_r}{dw_0 dr} (B_{11} - B_{12}) \right\}$$

همچنین در شاخص های تابعی بالاتر، اختلاف خیز در دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما بیشتر می شود.

• ماکزیمم اختلاف خیز بین دو حالت وابسته به دما و مستقل از دما نیز در تکیه گاه ساده - ساده و می نیمم مقدار آن در تکیه گاه گیر دار - گیر دار است.



شکل ۱۱- تغییرات خیز (الف)-لنگر خمشی (ب) در راستای شعاع برای صفحه حلقوی با نسبت ضخامت متفاوت

۸- پیوست

در تحقیق حاضر برای مدل کردن هسته تابعی در نرم افزار آباکوس بدین ترتیب عمل شده است که ابتدا هسته تابعی را به ده لایه ایزوتروپیک مساوی تقسیم می گردد. با تقسیم بندی هسته تابعی به ده لایه ایزوتروپیک با مدول یانگ مختلف (که در راستای ضخامت تغییر می کند و مقادیرش از برنامه فرترن به دست آمده است) و با قراردادن این ده لایه کنار هم هسته تابعی مدل می شود. همچنین پوسته ها نیز به مانند یک لایه ایزو تروپیک با مدول یانگ مربوط به خودشان در طرفین قرار گرفته اند و بدین ترتیب صفحه

- [2] Glenn CE, Hye MW (2005) Bending behavior of low-cost sandwich plates. *Composites Part A* 36: 1449–1456.
- [3] Yarovaya AV (2006) Thermo elastic bending of a Sandwich plate on a deformable foundation. *International Applied Mechanics* 42: 212–222.
- [4] Zenkour AM (2010) Bending responses of exponentially graded simply supported elastic / viscoelastic / elastic sandwich plates. *Acta Mechanica Solida Sinica* 24: 332–341.
- [5] Jalali SK, Naei MH, Poorsolhjoui A (2010) Thermal stability analysis of circular functionally graded sandwich plates of variable thickness using pseudo-spectral method. *Materials and Design* 31(7): 4755–4763.
- [6] Tounsi A (2011) A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates. *Aerospace Science and Technology* 11(1): 663–684.
- [7] Wang ZX, Shen HS (2011) Nonlinear analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundations. *Composite Structures* 93: 2521–2532.
- [8] Merdaci S, Tounsi A, Houari MSA, Mechab I, Hebali H, Benyoucef S (2011) Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates. *Archive Applied Mechanics* 81: 1507–1522.
- [9] Xiaohui R, Wanji C, Zhen W (2012) A C0-type, zig-zag theory and finite element for laminated, composite and sandwich plates with general configurations. *Arch Appl Mech* 82: 391–406.
- [10] Khalili SMR, Mohammadi Y (2012) Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties. *European Journal Mechanics / A Solids* 35: 61–74.
- [11] Shariyat M, Alipour MM (2013) Semi-analytical consistent zigzagelasticity formulations with implicit layer wise shear correction factors for dynamic stress analysis of sandwich circular plates with FGM layer. *Composites Part B* 49(1): 43–64.
- [12] Golmakani ME, Kadkhodayan M (2011) Large deflection analysis of circular and annular FGM plates under thermo-mechanical loadings with temperature-dependent properties. *Composites Part B* 92: 614–662.
- [13] Golmakani ME, Kadkhodayan M (2011) Nonlinear bending analysis of annular FGM plates using higher-order shear deformation plate theories. *Composite Structures* 93: 973–982.
- [14] Golmakani ME, Emami M (2013) Non linear bending and buckling analysis of functionally graded annular plates. *Modares Mechanical Engineering* 13(11): 1–14 (In Persian).

$$k_{21} = \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial u_o} = B_{11} \left(\frac{d^3 u_o}{du \cdot dr^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d^2}{du \cdot dr} \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) + B_{12} \left(\frac{d^2}{du \cdot dr} \left(\frac{u_o}{r} \right) \right) + D_{11} \frac{d^3 \varphi_r}{du \cdot dr^2} + D_{12} \left(\frac{d^2}{du \cdot dr} \left(\frac{\varphi_r}{r} \right) \right) + \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{d^2 u_o}{du \cdot dr} + \frac{d}{du} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) (B_{11} - B_{12}) + (B_{12} - B_{22}) + \frac{d^2 \varphi_r}{du \cdot dr} (D_{11} - D_{12}) \right\} - C \left(\frac{d}{du} \varphi_r + \frac{d^2 w_o}{du \cdot dr} \right)$$

$$k_{22} = \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial \varphi_r} = B_{11} \left(\frac{d^3 u_o}{d \varphi_r \cdot dr^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d^2}{d \varphi_r \cdot dr} \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) + B_{12} \left(\frac{d^2}{d \varphi_r \cdot dr} \left(\frac{u_o}{r} \right) \right) + D_{11} \frac{d^3 \varphi_r}{d \varphi_r \cdot dr^2} + D_{12} \left(\frac{-1}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 u_o}{d \varphi_r \cdot dr} + \frac{d}{d \varphi_r} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) (B_{11} - B_{12}) + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 \varphi_r}{d \varphi_r \cdot dr} (D_{11} - D_{12}) + \frac{(D_{12} - D_{22})}{r} \right) - C \left(1 + \frac{d^2 w_o}{d \varphi_r \cdot dr} \right)$$

$$k_{23} = \frac{\partial p^{\varphi_r}}{\partial w_o} = B_{11} \left(\frac{d^3 u_o}{dw_o \cdot dr^2} + \left(\frac{1}{2} \right) \frac{d^2}{dw_o \cdot dr} \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) + D_{11} \frac{d^3 \varphi_r}{dw_o \cdot dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 u_o}{dw_o \cdot dr} + \frac{d}{dw_o} \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) (B_{11} - B_{12}) + \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 \varphi_r}{dw_o \cdot dr} (D_{11} - D_{12}) \right) - C \left(\frac{d^2 w_o}{dw_o \cdot dr} \right)$$

$$k_{31} = \frac{\partial p^w}{\partial u_o} = C \left(\frac{d^2 \varphi_r}{du \cdot dr} + \frac{d^3 w_o}{du \cdot dr^2} \right) + C \left(\frac{d^2 w_o}{r \cdot dr \cdot du} \right) + \frac{d^3 w_o}{du \cdot dr^2} \left(A_{11} \left(\frac{du_o}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) + A_{12} \frac{u_o}{r} + B_{11} \frac{d \varphi_r}{dr} + B_{12} \frac{\varphi_r}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_o}{du \cdot dr} \left(A_{12} \left(\frac{du_o}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) + A_{22} \frac{u_o}{r} + B_{12} \frac{d \varphi_r}{dr} + B_{22} \frac{\varphi_r}{r} \right) - N_r^T \left(\frac{d^3 w_o}{du \cdot dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_o}{du \cdot dr} \right)$$

$$k_{32} = \frac{\partial p^w}{\partial \varphi_r} = C \left(\frac{d^2 \varphi_r}{d \varphi_r \cdot dr} + \frac{d^3 w_o}{d \varphi_r \cdot dr^2} \right) + C \left(\frac{d^2 w_o}{r \cdot dr \cdot d \varphi_r} \right) + \frac{d^3 w_o}{d \varphi_r \cdot dr^2} \left(A_{11} \left(\frac{du_o}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) + A_{12} \frac{u_o}{r} + B_{11} \frac{d \varphi_r}{dr} + B_{12} \frac{\varphi_r}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_o}{d \varphi_r \cdot dr} \left(A_{12} \left(\frac{du_o}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) + A_{22} \frac{u_o}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_o}{d \varphi_r \cdot dr} \left(B_{12} \frac{d \varphi_r}{dr} + B_{22} \frac{\varphi_r}{r} \right) - N_r^T \left(\frac{d^3 w_o}{d \varphi_r \cdot dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_o}{d \varphi_r \cdot dr} \right)$$

$$k_{33} = \frac{\partial p^w}{\partial w_o} = C \left(\frac{d^2 \varphi_r}{dw_o \cdot dr} + \frac{d^3 w_o}{dw_o \cdot dr^2} \right) + C \left(\frac{d^2 w_o}{r \cdot dr \cdot dw_o} \right) + \frac{d^3 w_o}{dw_o \cdot dr^2} \left(A_{11} \left(\frac{du_o}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) + B_{11} \frac{d \varphi_r}{dr} + B_{12} \frac{\varphi_r}{r} + A_{12} \frac{u_o}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_o}{dw_o \cdot dr} \left(A_{12} \left(\frac{du_o}{dr} + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{dw_o}{dr} \right)^2 \right) + B_{12} \frac{d \varphi_r}{dr} + B_{22} \frac{\varphi_r}{r} + A_{22} \frac{u_o}{r} \right) - N_r^T \left(\frac{d^3 w_o}{dw_o \cdot dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w_o}{dw_o \cdot dr} \right)$$

منابع

- [1] Ren IU (1981) Nonlinear bending of circular sandwich plates. *Applied Mathematics and Mechanics*, English edition 2: 414–420.

[16] Kobayashi H, Turvey GJ (1993) On the application of a limiting process to the dynamic relaxation analysis of circular membranes, circular plates and spherical shells. *Computer Structures* 48: 1107–1116.

[17] Abaqus, version 6.10.1.

[15] Golmakani ME, Mehrabian M (2014) Elastic large deflection analysis of ring-stiffened annular laminated plates by using of dynamic relaxation method. *Modares Mechanical Engineering* 13(12): 109–123 (In Persian).