



شناسایی ترک در تیرها تحت اثر نیروی متحرک به کمک تبدیل هیلبرت-هوانگ

سحرناز زلقی^۱، علی نیکخو^{۲*} و حامد کارگر^۳

^۱ دانشجوی دکتری، عمران-سازه، دانشگاه تهران، تهران

^۲ دانشیار، مهندسی عمران-سازه، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران

^۳ کارشناسی ارشد، عمران-سازه، دانشگاه تهران، تهران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۲۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵

چکیده

شناسایی و ترمیم به موقع آسیب در سازه‌ها (مانند ترک در عرشه پل‌ها)، به ویژه در سازه‌هایی که همواره تحت بارهای متناوب قرار دارند از اهمیت بسزایی برخوردار است. در سالیان اخیر روش‌های جدیدی بر پایه پاسخ‌های دینامیکی ثبت شده از سازه ارائه شده است که اکثر این روش‌ها بر اساس روش‌های به روز رسانی مدل توسعه یافته و معمولاً از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه می‌باشند. برای غلبه بر مشکل فوق، در این مطالعه از یک روش بر پایه تبدیل هیلبرت-هوانگ استفاده می‌شود. در این روش پل به صورت یک تیر اولر-برنولی و وسیله نقلیه نیز در چهار حالت مختلف به صورت بار متحرک، جرم متحرک، نوسانگر متحرک و سیستم متحرک مدل می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که در همه حالات، روش بررسی شده با دقت قابل قبولی قادر به شناسایی ترک در عرشه پل‌ها است.

کلمات کلیدی: شناسایی ترک؛ تبدیل هیلبرت-هوانگ؛ تیر اولر-برنولی؛ بار متحرک؛ جرم متحرک؛ نوسانگر متحرک؛ سیستم متحرک.

Identification of Crack in Beams under Moving Forces Using Hilbert-Huang Transform

S. Zalaghi¹, A. Nikkhoo^{2,*}, H. Kargar³

¹ Ph.D. Student, Civil. Eng., Tehran univ., Tehran, Iran.

² Assoc. Prof., Civil. Eng., university of science and culture., Tehran, Iran.

³ M. Sc, Civil. Eng., Tehran univ., Tehran, Iran.

Abstract

This article identifies crack in beams under moving forces (a moving load, a moving mass, a moving oscillator and a four degree of freedom moving system) using the Hilbert Huang transform. Timely identification and repair of damage in structures (such as cracks in bridge decks), especially in those structures that are always under dynamic loads, is very important. In recent years, new methods have been proposed based on the recorded dynamic responses of the structure. most of these methods are based on developed model updating methods which are usually very costly computationally. To overcome this problem, this study presents a method based on the Hilbert-Huang transform. In this method, the bridge is modeled in the form of an Euler-Bernoulli beam and the vehicle is also modeled in different conditions as a moving load, a moving mass, a moving oscillator and a moving system. The results show that the proposed method is able to detect cracks in bridge decks with an acceptable accuracy in all cases.

Keywords: Crack Detection; Hilbert-Huang Transform; Euler-Bernoulli Beam; Moving Load; Moving Mass; Moving Oscillator; Moving System.

۱- مقدمه

تیرها به عنوان یکی از المان‌های پرکاربرد سازه‌ای به منظور تحمل بارهای استاتیکی و دینامیکی گوناگون طراحی شده و همواره در معرض آسیب‌های جدی مانند ترک‌های سازه‌ای و یا غیر سازه‌ای قرار دارند. به طور کلی پیدایش و گسترش آسیب در المان‌های سازه‌ای سلامت و پایایی سازه را به خطر انداخته و همین امر لزوم شناسایی و ترمیم زود هنگام آن را آشکار می‌سازد.

در دهه‌های اخیر تلاش‌های زیادی در جهت مطالعه رفتار دینامیکی تیرهای سالم و آسیب دیده تحت نیروی متحرک (بار متحرک، جرم متحرک، نوسانگر متحرک و سیستم متحرک) انجام گرفته است [۱-۵]. به عنوان نمونه ون^۱ و همکاران [۶]، از طریق روش تحلیلی ایزومتریک رفتار دینامیکی یک تیر الاستیک تحت حرکت یک سیستم یک و دو محوره را مورد مطالعه قرار دادند. در مطالعه‌ای دیگر، مفید و همکاران [۷] از طریق دو روش متفاوت رفتار تیرهای ویسکوالاستیک با شرایط تکیه‌گاهی مختلف را تحت جرم متحرک مورد بررسی قرار دادند. در مطالعه‌ای مشابه، یانگ^۲ و همکاران [۸] عبور یک وسیله نقلیه دو محوره (دو درجه آزادی) از یک تیر ساده را مورد مطالعه قرار دادند. هم زمان با این مطالعات، رفتار دینامیکی تیر آسیب دیده و نحوه مدل سازی ترک نیز نظر بسیاری از محققان را به خود جلب کرد. مرور این مطالعات نشان می‌دهد که در اغلب آن‌ها از روش ماتریس تبدیل جهت مدل‌سازی ترک استفاده شده است. در این روش ترک به صورت یک فنر پیچشی که قطعات تیر از طریق آن به یکدیگر متصل شده اند، مدل می‌شود. عطار^۳ [۹] از طریق روش ماتریس تبدیل پاسخ ارتعاش آزاد یک تیر با چندین ترک را به دست آورد؛ همچنین در این مطالعه روشی برای شناسایی و مکان‌یابی ترک بر پایه پاسخ ارتعاش آزاد تیر نیز پیشنهاد شد. در مطالعه‌ای دیگر، معزی و همکاران [۱۰] فرکانس‌های طبیعی تیر طره‌ی ترک‌دار را از طریق این روش محاسبه کردند. مقصودی و همکاران [۱۱] از طریق روش ماتریس تبدیل رابطه‌ای میان فرکانس‌های

طبیعی تیر و محل و عمق ترک‌ها پیشنهاد دادند. در مطالعه‌ای مشابه لا^۴ و ژو^۵ [۱۲] رفتار دینامیکی یک تیر آسیب دیده تحت عبور یک نیروی متحرک را مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه نیروی متحرک به صورت یک سیستم چهار درجه آزادی، تیر به صورت یک تیر اولر-برنولی و ترک‌ها به صورت فنر پیچشی مدل شدند.

در دهه‌های اخیر روش‌های غیرمخرب شناسایی آسیب در سازه‌ها، نظر بسیاری از محققان را به خود جلب کرده و مطالعات زیادی نیز در این حوزه انجام گرفته است. نتیجه این مطالعات در حوزه شناسایی ترک در تیرها منجر به ارائه روش‌های متعددی بر پایه ایجاد ارتباط بین پارامترهای مودال سازه (فرکانس‌های طبیعی و اشکال مودی)، اندرکنش سازه و بار عبوری و پارامترهای مرتبط به آسیب (عمق و موقعیت ترک) شده است. باراد^۶ و همکاران [۱۳]، گیلیچ^۷ و پرایساج^۸ [۱۴]، مقصودی و همکاران [۱۱] فرآیند شناسایی ترک در تیرها را بر اساس عملکرد تابع پاسخ فرکانس مورد مطالعه قرار دادند. در رویکردی دیگر، خنیاجر^۹ و بنامار^{۱۰} [۱۵] از طریق ترسیم رابطه فرکانس مودهای ارتعاشی بر حسب عمق و موقعیت ترک‌ها و نهایتاً برهم نهی منحنی حاصل از سه مود اول تیر ترک خورده، رویکرد جدیدی جهت شناسایی و مکان‌یابی موقعیت ترک پیشنهاد دادند. نگوین^{۱۱} و همکاران [۱۶]، اوشیما^{۱۲} و همکاران [۱۷] آسیب‌های موجود در سازه را از طریق روش‌هایی شناسایی کردند که بر پایه اشکال مودی استوار بودند. اخیراً با ارتقاء الگوریتم‌های بهینه‌یابی و افزایش قدرت محاسباتی کامپیوترها، رویکردی جدید در این حوزه بر پایه روش‌های به روز رسانی مدل ارائه شد. در همین راستا، آلتونسیک^{۱۳} و همکاران [۱۸] آسیب موجود در یک تیر طره را از طریق روش به روز رسانی خودکار مدل شناسایی کردند. در مطالعه‌ای مشابه، شومر^{۱۴} و

⁴ Law

⁵ Zhu

⁶ Barad

⁷ Gillich

⁸ Praisach

⁹ Khnajar

¹⁰ Benamar

¹¹ Nguyen

¹² Oshima

¹³ Altunışık

¹⁴ Schommer

¹ van

² Yang

³ Attar

هدف از این مطالعه بررسی تاثیر روش مدل سازی وسیله نقلیه (بار متحرک، جرم متحرک، نوسانگر متحرک و سیستم متحرک) بر روش شناسایی موقعیت آسیب بر پایه تبدیل هیلبرت-هوانگ است. در مطالعات پیشین، وسیله نقلیه توسط یک بار متحرک و یا یک نوسانگر ساده مدل شده است. در این مطالعه با ارتقاء روش مدل سازی، از یک سیستم متحرک که یک مدل واقعی تر از یک وسیله نقلیه می باشد؛ استفاده می گردد. همانند مطالعات پیشین، پل به صورت یک تیر اولر-برنولی و ترک از طریق یک فنر پیچشی به روش ماتریس تبدیل [۲۷] مدل می شوند؛ همچنین در این مطالعه اثر عمق ترک و سرعت نیروی متحرک بر نتایج به دست آمده مورد ارزیابی قرار می گیرند و با یکدیگر مقایسه می شوند.

۲- رفتار دینامیکی تیر ترک دار تحت نیروی متحرک

در این بخش رفتار یک تیر اولر-برنولی ساده که تحت یک نیروی متحرک مطابق شکل ۱ است مورد مطالعه قرار می گیرد. به منظور بررسی اثر نوع نیروی متحرک بر نتایج بارگذاری در چهار حالت مورد بررسی قرار می گیرد (بار متحرک، جرم متحرک، نوسانگر متحرک و سیستم متحرک). در همه حالات سرعت نیروی متحرک هنگام عبور از روی تیر ثابت و سطح تماس بار و تیر بدون اصطکاک فرض می شود. در حالت کلی، معادله حرکت تیر اولر-برنولی ساده تحت یک نیروی متحرک به صورت زیر است.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = f(x,t) \quad (1)$$

در این رابطه A سطح مقطع تیر، L طول تیر، ρ جرم حجمی، E و I به ترتیب مدول الاستیسیته و ممان اینرسی تیر و $f(x,t)$ نیز با توجه به نوع مدل بارگذاری در ادامه بخش معرفی می شود.

برای حل معادله دیفرانسیل فوق، پاسخ در فضای مودال به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) u_i(t) \quad (2)$$

در این رابطه $w(x,t)$ پاسخ جابجایی تیر، $\varphi_i(x)$ و $u_i(t)$ به ترتیب تابع شکل و مختصات مودال مود i ام است. با جایگذاری

همکاران [۱۹] از طریق یک فرآیند به روز رسانی مدل آسیب های ایجاد شده در کابل های پیش تنیده یک پل بتنی را شناسایی کردند. این در حالیست که کاربرد روش های فوق به علت پیچیدگی روابط موجود در آنها و همچنین وابستگی به روش های به روز رسانی مدل محدود شده است که معمولاً شامل الگوریتم های تکرار شونده و پرهزینه از نظر محاسباتی می باشند.

برای غلبه بر مشکلات عنوان شده و افزایش کارایی و سرعت شناسایی آسیب، روش هایی بر پایه پردازش سیگنال (مانند تبدیل موجک و تبدیل هیلبرت-هوانگ) پیشنهاد شدند. در یکی از این مطالعات، مکگتريک^۱ و کیم^۲ [۲۰] سیگنال های ثبت شده از پاسخ وسیله نقلیه را با استفاده از تبدیل موجک مورد بررسی قرار دادند؛ همچنین در این مطالعه، اثر پیکربندی خودرو، سرعت و میرایی پل بر نتایج روش ارائه شده مورد ارزیابی قرار گرفت. در مطالعه ای مشابه، دینگ^۳ و چن^۴ [۲۱] از تحلیل چند مقیاسه موجک جهت شناسایی موقعیت آسیب استفاده کردند. تبدیل هیلبرت-هوانگ نیز روش دیگری در حوزه پردازش سیگنال ها است که نخستین بار توسط هوانگ^۵ و همکاران [۲۲] در سال ۱۹۹۸ ارائه شد. در این روش سیگنال اولیه توسط فرآیندی که تجزیه مود تجربی نامیده می شود به توابع تک مؤلفه ساده ای به نام توابع مود ذاتی تجزیه می شود. رووری^۶ و کارکاترا^۷ [۲۳] نشان دادند که یک پرش فرکانسی در تابع فرکانس لحظه ای اولین تابع مود ذاتی در محل آسیب تشکیل می شود. در این حوزه مطالعات گسترده ای توسط نیکخو و همکاران صورت گرفته است [۲۴ و ۲۵]. در یکی از این مطالعات، نیکخو و همکاران [۲۶] با استفاده از پاسخ های شتاب ثبت شده از یک حسگر متصل به وسیله نقلیه (حسگر متحرک)، موقعیت ترک را در تیر شناسایی نمودند. آنها عملکرد روش ارائه شده نسبت به روش های کنونی که در آنها حسگر در مکانی ثابت روی عرشه پل جانمایی می شد، مورد ارزیابی قرار دادند.

¹ Mcgetrick

² Kim

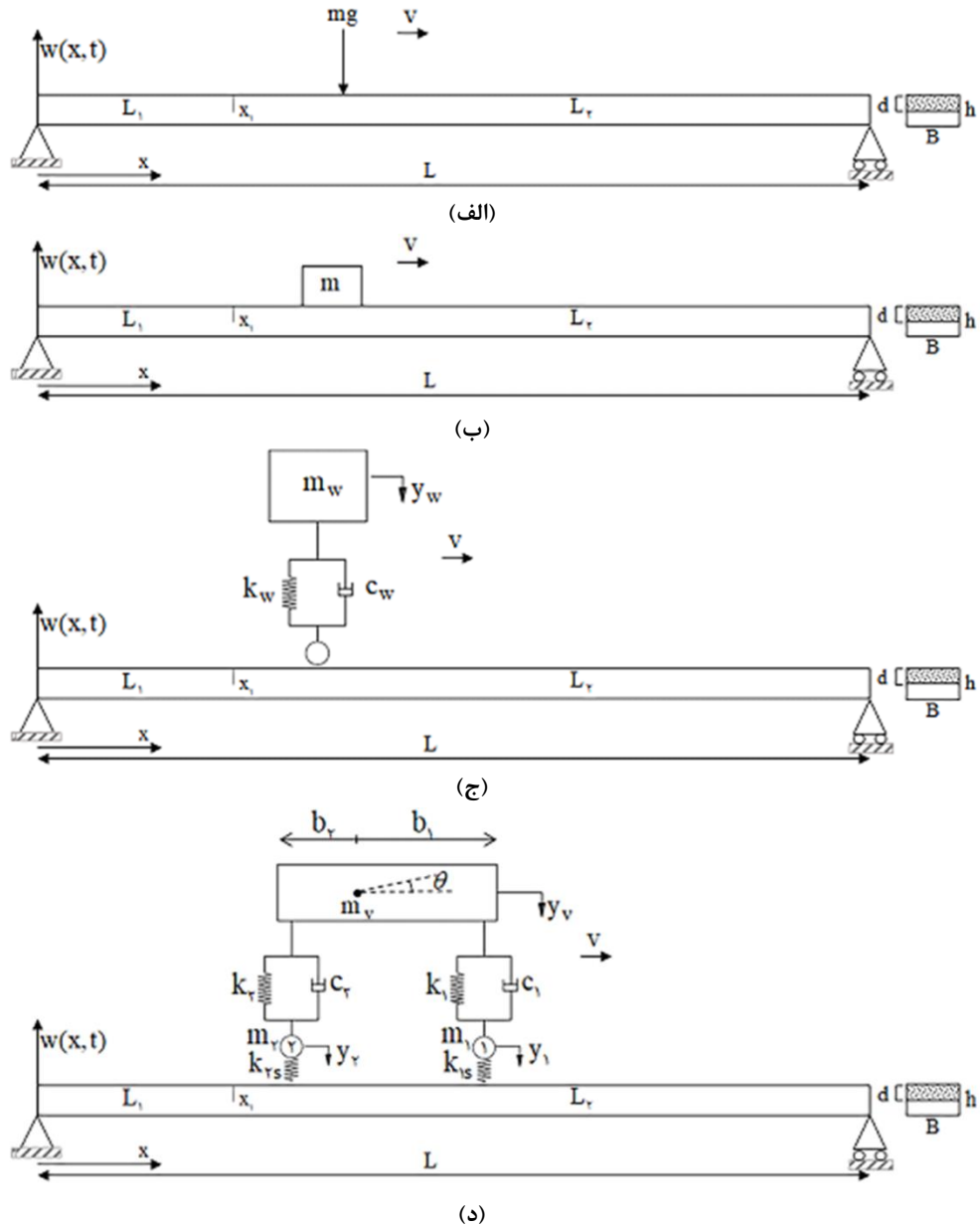
³ Ding

⁴ Chen

⁵ Huang

⁶ Roveri

⁷ Carcaterra



شکل ۱- عبور نیروی متحرک از روی تیر دارای ترک در موقعیت x_1 : (الف) بار متحرک، (ب) جرم متحرک، (ج) نوسانگر متحرک و (د) سیستم متحرک

۲-۱- بار متحرک

در حالت اول، یک بار متحرک با اندازه mg از روی تیر عبور می‌کند شکل (۱-الف). در این صورت $f(x,t)$ در معادله ۱ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$f(x,t) = mg\delta(x-vt) \quad (۴)$$

معادله ۲ در معادله ۱ و همچنین با توجه به خاصیت تعامد مودها، معادله دیفرانسیل حرکت تیر در حالت کلی برای i مود اول به دست می‌آید.

$$M\ddot{A}(t) + C\dot{A}(t) + KA(t) = F(t) \quad (۳)$$

در معادله فوق پارامترهای M, C, K و $A(t), F(t)$ برای هر حالت، در ادامه ارائه می‌شود.

$$f(x,t)=m_w(g-\ddot{y}_w(t))\delta(x-vt) \quad (۸)$$

$$m_w\ddot{y}_w(t)+c_w(\dot{y}_w(t)-\dot{w}_w(x,t))+k_w(y_w(t)-w_w(x,t))=0 \quad (۹)$$

δ تابع دلتای دیراک است.

در این حالت پارامترهای معادله ۳ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \mathbf{M}_b & \mathbf{M}_n \\ 0 & m_w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_n & c_w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} \mathbf{K}_b & 0 \\ \mathbf{K}_n & k_w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} \mathbf{F}_b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(t)=[u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_n(t) \quad y_w(t)]^T \quad (۱۰)$$

زیر-ماتریس‌های غیر صفر در روابط فوق به صورت رابطه (۱۱) محاسبه می‌شوند.

$$[M_b]_{ij}=\rho A \int_0^L \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$$

$$[M_n]_i=m_w\varphi_i(vt)$$

$$[C_n]_j=-c_w\varphi_j(vt)$$

$$[K_b]_{ij}=EI \int_0^L \varphi_i''(x)\varphi_j''(x)dx$$

$$[K_n]_j=-k_w\varphi_j(vt)$$

$$[F_b]_j=m_w g\varphi_j(vt) \quad (۱۱)$$

۲-۴- سیستم متحرک

در این حالت بار به صورت یک سیستم متحرک (سیستمی با ۳ درجه آزادی انتقالی و ۱ درجه آزادی دورانی) با پارامترهای نشان داده شده در شکل ۱-د در نظر گرفته می‌شود. در این حالت $f(x,t)$ در معادله ۱ و همچنین معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم متحرک به صورت زیر بدست می‌آید.

$$f(x,t)=(k_{1s}(y_1-w(x_1(t),t))+(m_1+\frac{b_2}{b_1+b_2})g)\delta(x-x_1(t))+(k_{2s}(y_2-w(x_2(t),t))+(m_2+\frac{b_1}{b_1+b_2})g)\delta(x-x_2(t)) \quad (۱۲)$$

$$I_v\ddot{\theta}-c_1b_1(\dot{y}_v-\dot{y}_1-b_1\dot{\theta})-k_1b_1(y_v-y_1-b_1\theta)+c_2b_2(\dot{y}_v-\dot{y}_2+b_2\dot{\theta})+k_2b_2(y_v-y_2+b_2\theta)=0 \quad (۱۳)$$

که در این رابطه δ تابع دلتای دیراک است. در این حالت پارامترهای معادله ۳ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$[M]_{ij}=\rho A \int_0^L \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$$

$$[C]_{ij}=0$$

$$[K]_{ij}=EI \int_0^L \varphi_i''(x)\varphi_j''(x)dx$$

$$[F]_i=mg\varphi_i(vt)$$

$$\mathbf{A}(t)=[u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_n(t)]^T \quad (۵)$$

۲-۲- جرم متحرک

در حالت دوم، بار به صورت یک جرم متحرک با جرم m فرض می‌شود (شکل ۱-ب). در این صورت $f(x,t)$ در معادله ۱ به صورت رابطه (۶) در نظر گرفته می‌شود.

$$f(x,t)=m(g-\ddot{W}(x,t))\delta(x-vt) \quad (۶)$$

که در این رابطه δ تابع دلتای دیراک است. در این حالت پارامترهای معادله ۳ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$[M]_{ij}=\rho A \int_0^L \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx+m\varphi_i(vt)\varphi_j(vt)$$

$$[C]_{ij}=2m v\varphi_i(vt)\varphi_{j,x}(vt)$$

$$[K]_{ij}=EI \int_0^L \varphi_i''(x)\varphi_j''(x)dx+m v^2\varphi_i(vt)\varphi_{j,xx}(vt)$$

$$[F]_i=mg\varphi_i(vt)$$

$$\mathbf{A}(t)=[u_1(t) \quad u_2(t) \quad \dots \quad u_n(t)]^T \quad (۷)$$

۲-۳- نوسانگر متحرک

در این قسمت بار به صورت یک نوسانگر متحرک با پارامترهای نشان داده شده در شکل ۱-ج در نظر گرفته می‌شود. در این صورت $f(x,t)$ در معادله ۱ و همچنین معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت نوسانگر به صورت زیر به دست می‌آید.

$$m_v \ddot{y}_v + c_1 (\dot{y}_v - \dot{y}_1 - b_1 \dot{\theta}) + k_1 (y_v - y_1 - b_1 \theta) + c_2 (\dot{y}_v - \dot{y}_2 + b_2 \dot{\theta}) + k_2 (y_v - y_2 + b_2 \theta) = 0 \quad (14)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 - c_1 (\dot{y}_v - \dot{y}_1 - b_1 \dot{\theta}) - k_1 (y_v - y_1 - b_1 \theta) + k_{1s} (y_1 - w(x_1(t), t)) = 0 \quad (15)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - c_2 (\dot{y}_v - \dot{y}_2 + b_2 \dot{\theta}) - k_2 (y_v - y_2 + b_2 \theta) + k_{2s} (y_2 - w(x_2(t), t)) = 0 \quad (16)$$

$$C_v = \begin{bmatrix} c_1 b_1^2 + c_2 b_2^2 & c_2 b_2 - c_1 b_1 & c_1 b_1 & -c_2 b_2 \\ c_2 b_2 - c_1 b_1 & c_1 + c_2 & -c_1 & -c_2 \\ c_1 b_1 & -c_1 & c_1 & 0 \\ -c_2 b_2 & -c_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$[K_b]_{ij} = EI \int_0^L \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx + k_{1s} \varphi_i(x_1(t)) \varphi_j(x_1(t)) + k_{2s} \varphi_i(x_2(t)) \varphi_j(x_2(t))$$

$$[K_n]_i = [0, 0, -k_1 \varphi_i(x_1(t)), -k_2 \varphi_i(x_2(t))]$$

$$[K_m]_j = [0, 0, -k_{1s} \varphi_j(x_1(t)), -k_{2s} \varphi_j(x_2(t))]^T$$

$$K_v = \begin{bmatrix} k_1 b_1^2 + k_2 b_2^2 & k_2 b_2 - k_1 b_1 & k_1 b_1 & -k_2 b_2 \\ k_2 b_2 - k_1 b_1 & k_1 + k_2 & -k_1 & -k_2 \\ k_1 b_1 & -k_1 & k_1 + k_{1s} & 0 \\ -k_2 b_2 & -k_2 & 0 & k_2 + k_{2s} \end{bmatrix}$$

$$[F_b]_j = \left(m_1 + \frac{b_2}{b_1 + b_2} m_v \right) g \varphi_j(x_1(t)) + \left(m_2 + \frac{b_1}{b_1 + b_2} m_v \right) g \varphi_j(x_2(t)) \quad (18)$$

معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر ترک‌دار نیز همانند روابط به دست آمده در حالت تیر سالم است با این تفاوت که در این حالت شکل‌های مودی و فرکانس‌های طبیعی تیر ترک‌دار که از طریق روش ماتریس تبدیل به دست آمده‌اند، جایگزین شکل‌های مودی و فرکانس‌های طبیعی تیر سالم در روابط فوق می‌شوند. در این مطالعه برای حل معادلات دیفرانسیل به دست آمده، از روش رانگ-کوتا استفاده می‌شود.

۳- تبدیل هیلبرت-هوانگ

هدف از این بخش ارائه یک مرور مختصر بر روش هیلبرت-هوانگ است. تبدیل هیلبرت-هوانگ توسط هوانگ و همکاران [۲۲] در سال ۱۹۹۸ میلادی به منظور تحلیل سیگنال‌های ناپیوسته و غیرخطی ارائه شد. به طور کلی، این تبدیل از دو بخش مجزا (الف) تجزیه مود تجربی؛ (ب) تبدیل

در روابط فوق $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب موقعیت چرخ اول و دوم سیستم متحرک بر روی تیر را نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$x_1(t) = vt$$

$$x_2(t) = vt - (b_1 + b_2)$$

در این حالت پارامترهای معادله ۳ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$M = \begin{bmatrix} M_b & M_n \\ 0 & M_v \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_v \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_b & K_n \\ K_m & K_v \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), \theta(t), y_v(t), y_1(t), y_2(t)]^T \quad (17)$$

زیر-ماتریس‌های غیرصفر در روابط فوق به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$[M_b]_{ij} = \rho A \int_0^L \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$$

$$[M_n]_i = [a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad a_{1,3} \quad a_{1,4}]$$

$$a_{1,1} = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{m_v}{b_1 + b_2} (b_2 \varphi_1(x_1(t)) - b_1 \varphi_1(x_2(t)))$$

$$a_{1,3} = -m_1 \varphi_1(x_1(t))$$

$$a_{1,4} = -m_2 \varphi_1(x_2(t))$$

$$M_v = \text{diag}(I_v, m_v, m_1, m_2)$$

به منظور دست‌یابی به یک برآورد بهتر از اولین تابع مود ذاتی، سیگنال $h_1(t)$ به عنوان سیگنال اصلی در نظر گرفته شده و فرایند فوق تکرار می‌شود.

$$h_{11}(t) = h_1(t) - m_{11}(t) \quad (21)$$

در صورتی که تابع $h_{11}(t)$ ویژگی‌های یک تابع مود ذاتی را نداشته باشد، الگوریتم فوق تا k مرحله برای دستیابی به اولین تابع مود ذاتی تکرار می‌گردد.

$$h_{1k}(t) = h_{1(k-1)}(t) - m_{1k}(t) \quad (22)$$

در این مرحله با حذف اولین تابع مود ذاتی $(c_1(t))$ از سیگنال اولیه، اولین باقیمانده $(r_1(t))$ به دست می‌آید.

$$r_1(t) = x(t) - c_1(t) \quad (23)$$

الگوریتم فوق با در نظر گرفتن سیگنال $r_1(t)$ به عنوان سیگنال اصلی و تا دستیابی به دومین تابع مود ذاتی و دومین باقیمانده تکرار می‌گردد. این فرآیند تا محاسبه آخرین باقی مانده‌ای ادامه می‌یابد که دیگر نتوان از آن هیچ تابع مود ذاتی دیگری استخراج کرد؛ در نتیجه با استفاده از الگوریتم فوق سیگنال اولیه به مجموعه‌ای از توابع مود ذاتی و یک سیگنال باقیمانده تجزیه می‌شود.

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) + r_n(t) \quad (24)$$

۳-۲- تبدیل هیلبرت

تبدیل هیلبرت در حوزه زمان به صورت کانولوشن تابع دلخواه $x(t)$ و تابع $1/t$ مطابق رابطه (۲۵) تعریف می‌شود.

$$H(x(t)) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (25)$$

در این رابطه $H(x(t))$ و PV به ترتیب تبدیل هیلبرت سیگنال و مقدار اساسی انتگرال کوشی است. با استفاده از این تبدیل، سیگنال تحلیلی یک سیگنال حقیقی مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$Z(t) = x(t) + iH(x(t)) = a(t)e^{i\theta(t)} \quad (26)$$

در این رابطه توابع $a(t)$ و $\theta(t)$ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (H(x(t)))^2} \quad (27)$$

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{H(x(t))}{x(t)}\right) \quad (28)$$

هیلبرت تشکیل شده است. بر اساس تبدیل هیلبرت- هوانگ، ابتدا یک سیگنال از طریق روش تجزیه مود تجربی به مجموعه‌ای از سیگنال‌ها تجزیه می‌شود که توابع مود ذاتی نامیده می‌شوند. سپس فرکانس لحظه‌ای هر یک از این توابع مود ذاتی از طریق تبدیل هیلبرت به دست می‌آید. بر اساس تعریف ارائه شده توسط هوانگ و همکاران، هر یک از توابع مود ذاتی دارای دو ویژگی بسیار مهم می‌باشند. (الف) در هر تابع مود ذاتی تعداد اکستریم‌ها و صفرها بایستی برابر و یا حداکثر اختلاف یک واحدی داشته باشند؛ (ب) در هر نقطه میانگین پوش برازش شده به وسیله نقاط ماکزیمم محلی و مینیمم محلی، صفر است. وجود دو ویژگی فوق در الگوریتم روش تجزیه مود تجربی سبب می‌گردد که توابع مود ذاتی به دست آمده، از نظر فرکانسی تک مؤلفه‌ای باشند. در این بخش روش تجزیه مود تجربی و تبدیل هیلبرت که دو رکن تشکیل دهنده تبدیل هیلبرت- هوانگ می‌باشند، به طور مجزا مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳-۱- تجزیه‌ی مود تجربی

همانطور که بیان شد؛ هدف از روش تجزیه مود تجربی، تجزیه یک سیگنال به مجموعه‌ای از سیگنال‌های تک مؤلفه‌ای به نام توابع مود ذاتی (IMF)^۱ است. به منظور دستیابی به هدف فوق در این روش، از یک الگوریتم تکرار شونده استفاده می‌شود. در این الگوریتم ابتدا پوش‌های بالایی $(e_{up}(t))$ و پایینی $(e_{down}(t))$ سیگنال $x(t)$ به ترتیب با استفاده از مقادیر ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های محلی، از طریق روش اسپلین مکعبی به دست می‌آید. در مرحله بعد به کمک رابطه زیر میانگین پوش‌های به دست آمده در مرحله قبل محاسبه می‌شود.

$$m_1(t) = \frac{e_{up}(t) + e_{down}(t)}{2} \quad (19)$$

در این مرحله، اولین برآورد از اولین تابع مود ذاتی با حذف میانگین به دست آمده از سیگنال اولیه حاصل می‌شود.

$$h_1(t) = x(t) - m_1(t) \quad (20)$$

¹ Intrinsic Mode Function

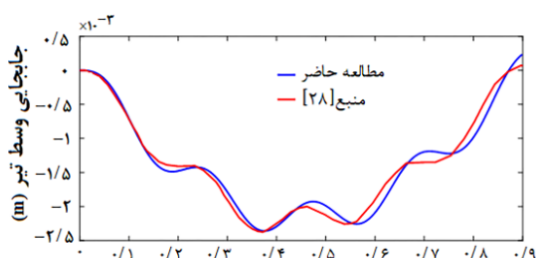
عبور از امتداد تیر است. پاسخ تغییرشکل و شتاب وسط دهانه تیر در شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج وجود دارد.

۵- مطالعات عددی

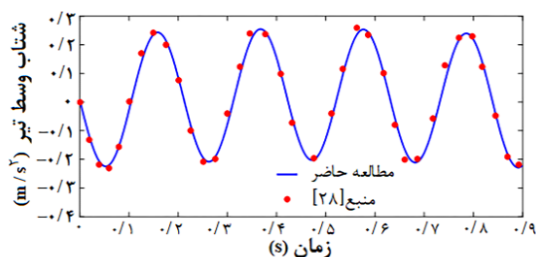
در این بخش روش ارائه شده برای شناسایی ترک و تاثیر پارامترهای: (الف) عمق ترک؛ (ب) سرعت متحرک بر نتایج آن از طریق مثال‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در تمامی مثال‌ها مشخصات تیر ثابت و به صورت $\rho=7800 \text{ kg/m}^3$, $E=2/1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $L=25 \text{ m}$, $B=0/3 \text{ m}$ و $h=0/6 \text{ m}$ در نظر گرفته شده‌اند.

۵-۱- بررسی تاثیر عمق ترک

هدف از این مثال بررسی تأثیر عمق ترک بر دقت روش پیشنهادی در بخش (۳-۳) می‌باشد. بر همین اساس در گام نخست چهار تیر با عمق ترک $d=0/1h$, $d=0/2h$, $d=0/3h$ و $d=0/5h$ مدل می‌شود. در تمامی مدل‌ها، ترک در فاصله‌ی $x_1=0/3L$ از تکیه گاه سمت چپ واقع شده است. هر تیر توسط یک نیروی متحرک (بار، جرم، نوسانگر و یا سیستم متحرک) با مشخصات جدول ۱ تحریک می‌شود. برای اینکه



(الف)



(ب)

شکل ۲- الف) جابجایی وسط تیر، ب) شتاب وسط تیر

با توجه به مطالب فوق، فرکانس لحظه‌ای سیگنال $x(t)$ از طریق رابطه (۲۹) محاسبه می‌شود.

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (29)$$

۳-۳- الگوریتم شناسایی موقعیت ترک

در این مطالعه بر اساس الگوریتم بررسی شده توسط نیکخو و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۲۰ میلادی، روشی جامع برای تعیین موقعیت ترک در یک تیر بارگذاری شده توسط یک نیروی متحرک (بار متحرک، جرم متحرک، نوسانگر متحرک و سیستم متحرک) ارائه می‌شود. بر اساس الگوریتم در صورتی که نیروی متحرک از مقطع ترک خورده یک تیر عبور کند، یک پرش فرکانسی در اولین تابع مود ذاتی آن مشاهده می‌شود. بر همین اساس در این مطالعه روش زیر برای شناسایی ترک در یک تیر با استفاده از تبدیل هیلبرت-هوانگ به کار می‌رود.

۱- پاسخ سازه توسط یک حسگر شتاب سنج ثبت می‌شود.

۲- پاسخ شتاب ثبت شده از سازه با استفاده از روش تجزیه مود تجربی (بخش ۳-۱) به مجموعه‌ای از توابع مود ذاتی تجزیه می‌شود.

۳- با استفاده از تبدیل هیلبرت (بخش ۳-۲) فرکانس لحظه‌ای اولین تابع مود ذاتی به دست می‌آید.

۴- موقعیت ترک موجود در مقطع تیر از طریق پرش فرکانسی موجود در اولین تابع مود ذاتی تعیین می‌شود.

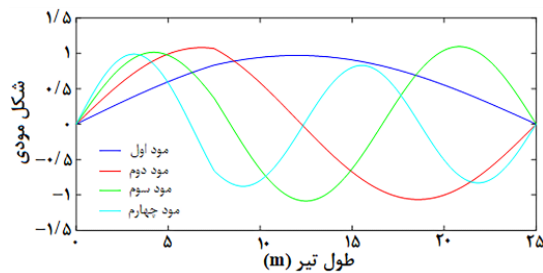
۴- مثال صحت سنجی

به منظور بررسی دقت روش عددی پیشنهادی در این مطالعه برای محاسبه پاسخ‌های دینامیکی تیر، مثال زیر در حالتی که نوسانگر متحرک از روی دهانه تیر عبور می‌کند، بررسی شده است. این نمونه توسط چند محقق گزارش شده است [۲۶] و [۲۸]. بر همین اساس یک تیر ساده با طول موثر $L=20 \text{ m}$ ، مدول یانگ $E=2/8 \text{ GPa}$ ، ممان اینرسی $I=2/90 \text{ m}^4$ و جرم حجمی $\rho=2303 \text{ kg/m}^3$ مدل می‌شود. تیر توسط یک نوسانگر متحرک ($m=5707 \text{ kg}$ ، سختی $k=1595 \text{ kN/m}$) تحریک می‌شود که با سرعت ثابت $v=27/78 \text{ m/s}$ در حال

در این شرایط اشکال ۴ تا ۷ فرکانس لحظه‌ای نخستین تابع مود ذاتی پاسخ شتاب وسط دهانه تیر برای هر مدل را نشان می‌دهند. (جهت بررسی دقیق تر این نمودار ها، بخش هایی از آن به صورت بزرگ نمایی شده رسم شده است). همانطور که مشاهده می‌شود؛ (الف) در تمامی حالات پرش فرکانسی قابل رؤیتی در محل ترک ایجاد شده است؛ (ب) به طور کلی با افزایش عمق ترک، ارتفاع پرش فرکانسی افزایش می‌یابد؛ (ج) در شکل ۵ با عبور جرم متحرک از روی تیر فرکانس لحظه‌ای در محل ترک به صورت ناگهانی تغییر می‌کند؛ در حالی که در سایر نقاط تیر این تغییرات به صورت کاملاً تدریجی بوده و علت آن در نظر گرفتن اثر اینرسی در روابط مربوط به جرم متحرک است؛ (د) در شکل ۷ هنگام ورود چرخ دوم به تکیه‌گاه سمت چپ پرش فرکانسی شماره (۱) در موقعیت چرخ اول ایجاد می‌شود. به مرور و با گذر

جدول ۱- مشخصات انواع نیروی متحرک

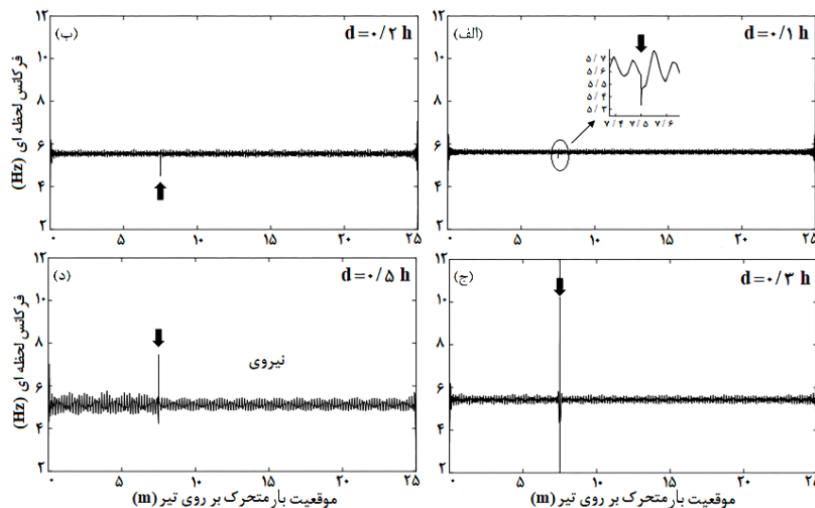
نوع نیروی متحرک	پارامتر (واحد)	مقدار
بار متحرک	m (kg)	۷۰۲۰
جرم متحرک	m (kg)	۷۰۲۰
	m (kg)	۷۰۲۰
نوسانگر متحرک	c (Ns/m)	۱
	k (N/m)	۷۲۵/۷۶
	m _v (kg)	۷۰۰۰
	m ₁ , m ₂ (kg)	۱۰
سیستم متحرک	c ₁ , c ₂ (Ns/m)	۱
	k ₁ , k ₂ (N/m)	۷۲۵/۷۶
	k _{1s} , k _{2s} (N/m)	۷۲۵/۷۶
	b ₁ , b ₂ (m)	۰/۵



شکل ۳- شکل مودی تیر دارای ترک با نسبت عمق

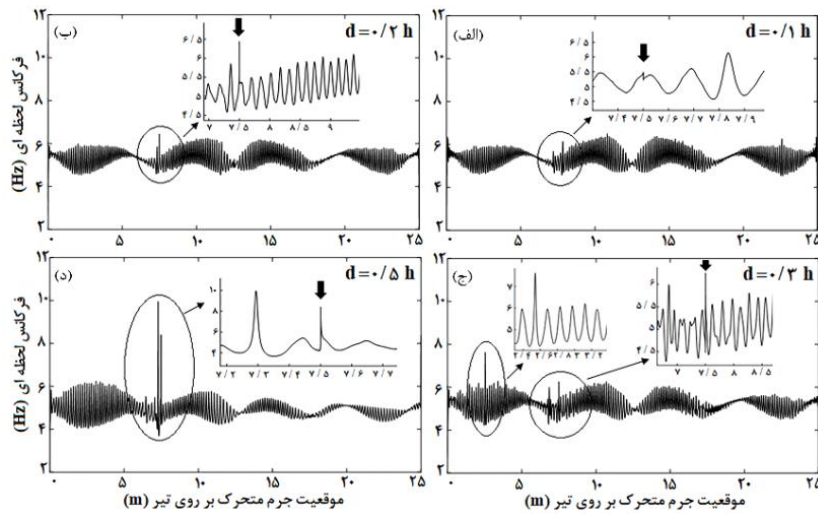
$$x_1 = 0/3L \text{ در موقعیت } d = 0/5 h$$

بتوان هر چهار نوع بارگذاری را با یکدیگر مقایسه نمود، ضرایب میرایی نوسانگر و سیستم متحرک برابر ۱ Ns/m در نظر گرفته شده است. سرعت بار نیز در تمامی مدل‌ها ثابت و برابر $v = 2/82 \text{ m/S}$ است.

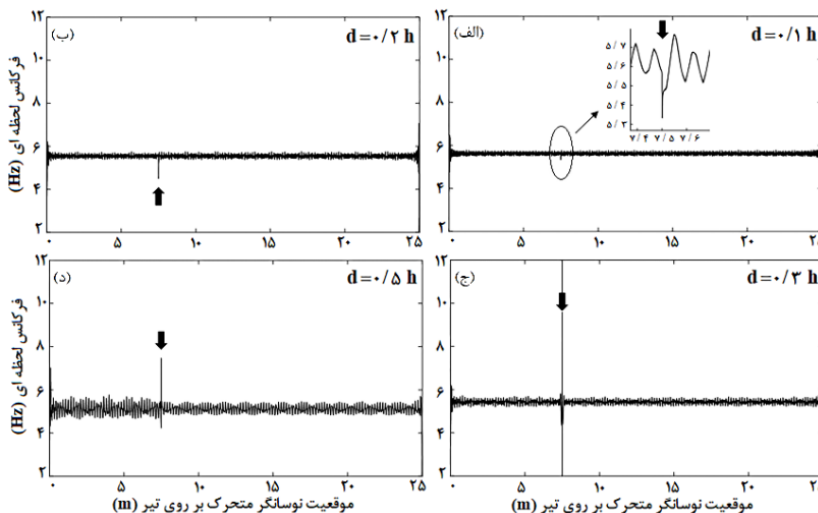


شکل ۴- فرکانس لحظه‌ای اولین تابع مود ذاتی پاسخ شتاب وسط تیر تحت بار متحرک در نسبت‌های مختلف عمق ترک

$$\text{الف) } (d=0/1 h \text{ ب) } (d=0/2 h \text{ ج) } (d=0/3 h \text{ د) } (d=0/5 h$$



شکل ۵- فرکانس لحظه‌ای اولین تابع مود ذاتی پاسخ شتاب وسط تیر تحت جرم متحرک در نسبت‌های مختلف عمق ترک
 (الف) $d=0/1 h$ (ب) $d=0/2 h$ (ج) $d=0/3 h$ (د) $d=0/5 h$

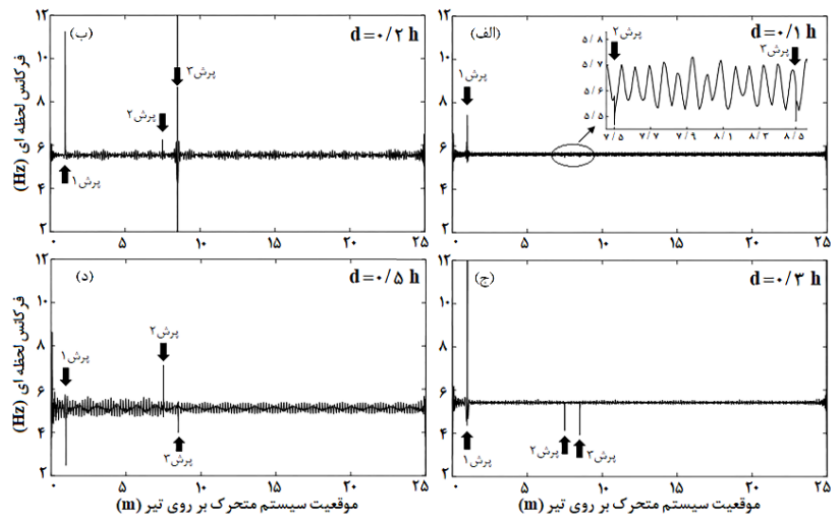


شکل ۶- فرکانس لحظه‌ای اولین تابع مود ذاتی پاسخ شتاب وسط تیر تحت نوسانگر متحرک در نسبت‌های مختلف عمق ترک
 (الف) $d=0/1 h$ (ب) $d=0/2 h$ (ج) $d=0/3 h$ (د) $d=0/5 h$

۵-۲- بررسی تاثیر سرعت نیروی متحرک

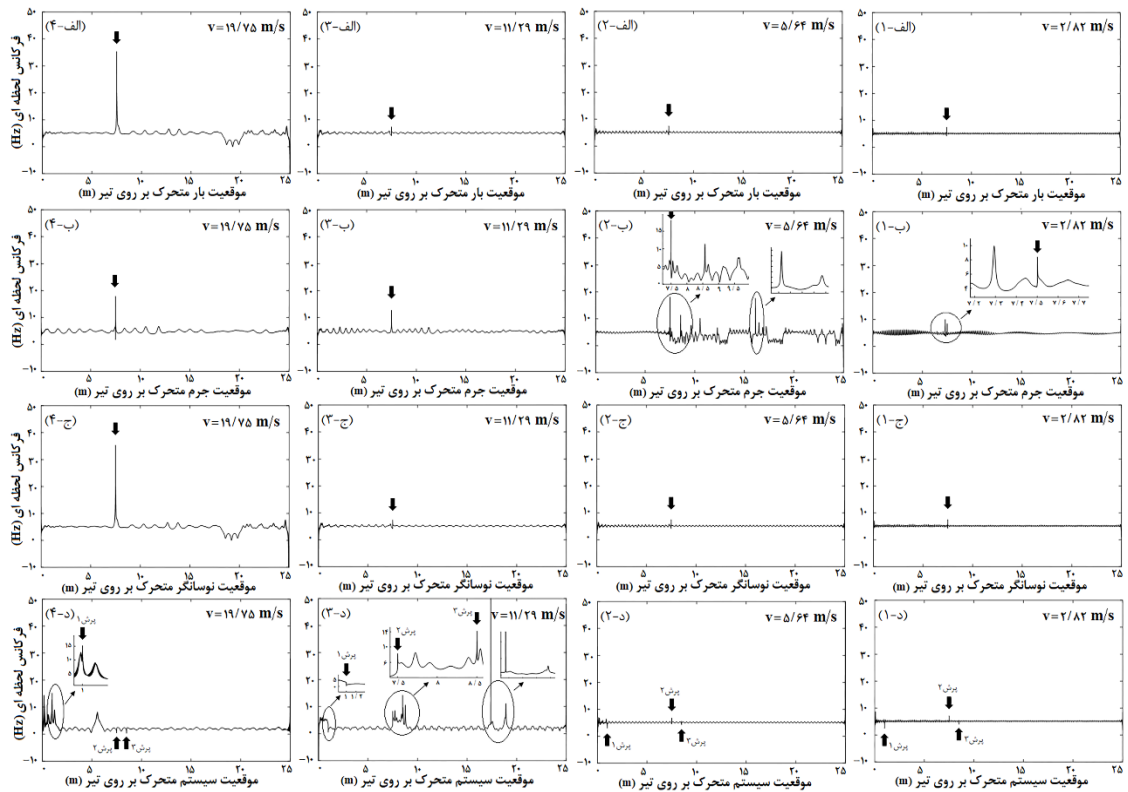
در این مرحله، به منظور بررسی تأثیر سرعت نیروی متحرک بر دقت روش ارائه شده چهار تیر مدل شده است. در تمامی مدل‌ها ترک در فاصله $x_1=0/3 L$ از تکیه گاه سمت چپ بوده و عمق آن برابر با $d=0/5h$ در نظر گرفته شده است. هرکدام از تیرها توسط یک نیروی متحرک (بار متحرک، جرم متحرک، نوسانگر متحرک و سیستم متحرک) با مشخصات در

چرخ دوم از روی ترک موجود در دهانه‌ی تیر دو پرش فرکانسی دیگر (پرش فرکانسی شماره ۲ و ۳) در فرکانس لحظه‌ای مشاهده می‌شود که پرش فرکانسی شماره ۲ در موقعیت چرخ دوم هنگام عبور از محل ترک و پرش فرکانسی شماره ۳ در موقعیت چرخ اول دیده می‌شوند. فاصله‌ی ۱ متری بین پرش ۲ و ۳ از یکدیگر به دلیل فاصله ۱ متری چرخ‌های سیستم متحرک است.



شکل ۷- فرکانس لحظه‌ای اولین تابع مود ذاتی پاسخ شتاب وسط تیر تحت سیستم متحرک در نسبت‌های مختلف عمق ترک

(الف) $d=0/1 h$ (ب) $d=0/2 h$ (ج) $d=0/3 h$ (د) $d=0/5 h$



شکل ۸- فرکانس لحظه‌ای اولین تابع مود ذاتی شتاب وسط تیر برای سرعت‌های مختلف نیروی متحرک

(الف) بار متحرک، (ب) جرم متحرک، (ج) نوسانگر متحرک و (د) سیستم متحرک

$v=19/75 \text{ m/s}$ (۴)، $v=11/29 \text{ m/s}$ (۳)، $v=5/64 \text{ m/s}$ (۲)، $v=2/82 \text{ m/s}$ (۱)

فرکانس لحظه‌ای نخستین تابع مود ذاتی پاسخ شتاب تیر به عبور چرخ‌های سیستم متحرک حساس بوده و به ازای گذر هر یک از آن‌ها از محل ترک، یک پرش فرکانسی در سیگنال فرکانس لحظه‌ای مشاهده می‌شود و همانطور که انتظار می‌رود، فاصله این پرش‌ها از یکدیگر برابر با فاصله چرخ‌های سیستم متحرک از یکدیگر است.

۷- مراجع

- [1] Nikkhoo A, Rofooei F, Shadnam M (2007) Dynamic behavior and modal control of beams under moving mass. *J Sound Vib* 306(3-5): 712-724
- [2] Stăncioiu D, Ouyang H, Mottershead JE (2008) Vibration of a beam excited by a moving oscillator considering separation and reattachment. *J Sound Vib* 310(4-5): 1128-1140
- [3] Muscolino G, Palmeri A, Sofi A (2009) Absolute versus relative formulations of the moving oscillator problem. *Int J Solids Struct* 46(5): 1085-1094
- [4] Kiani K, Nikkhoo A, Mehri B (2010) Assessing dynamic response of multispan viscoelastic thin beams under a moving mass via generalized moving least square method. *Acta Mech Sin* 26(5): 721-733
- [5] Yang Y-B, Lin C, Yau J (2004) Extracting bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle. *J Sound Vib* 272(3-5): 471-493
- [6] Van Do VN, Ong TH, Thai CH (2017) Dynamic responses of Euler-Bernoulli beam subjected to moving vehicles using isogeometric approach. *Appl Math Model* 51:405-428
- [7] Mofid M, Tehrani A, Ostadhossein A (2010) On the viscoelastic beam subjected to moving mass. *Adv Eng Softw* 41(2): 240-247
- [8] Yang Y, Zhang B, Wang T, Xu H, Wu Y (2019) Two-axle test vehicle for bridges: Theory and applications. *Int J Mech Sci* 152: 51-62
- [9] Attar M (2012) A transfer matrix method for free vibration analysis and crack identification of stepped beams with multiple edge cracks and different boundary conditions. *Int J Mech Sci* 57(1): 19-33
- [10] Moezi SA, Zakeri E, Zare A (2018) A generally modified cuckoo optimization algorithm for crack detection in cantilever Euler-Bernoulli beams. *Precis Eng* 52: 227-241
- [11] Maghsoodi A, Ghadami A, Mirdamadi HR (2013) Multiple-crack damage detection in multi-step beams by a novel local flexibility-based damage index. *J Sound Vib* 332(2): 294-305

جدول ۱ تحریک می‌شود. سرعت متحرک در هر مدل به ترتیب برابر با $v=2/82m/S$ ، $v=5/64m/S$ ، $v=11/29m/S$ و $v=19/75m/S$ است. شکل ۸ فرکانس لحظه‌ای اولین تابع مود ذاتی پاسخ شتاب وسط دهانه‌ی تیر هر مدل را نمایش می‌دهد.

همانطور که در شکل ۸ دیده می‌شود؛ (الف) در همه‌ی سرعت‌ها پرش فرکانسی قابل رؤیتی در محل ترک ایجاد می‌شود که به طور کلی ارتفاع آن‌ها با افزایش سرعت عبور نیروی متحرک از روی تیر افزایش می‌یابد؛ (ب) با افزایش سرعت عبور جرم متحرک از روی تیر، شناسایی ترک ساده تر می‌شود؛ (ج) همانطور که پیش تر نیز گفته شد، عبور هر یک از چرخ‌های سیستم متحرک از تکیه گاه تیر و ترک موجود در آن موجب ایجاد یک پرش فرکانسی در فرکانس لحظه‌ای می‌شود که این موضوع در سرعت‌های بالاتر نیز قابل مشاهده است؛ (د) در این اشکال پرش‌های مرتبط با ترک‌های موجود در دهانه تیر، کاملاً به صورت قله‌های نوک تیز نمایان می‌شود و این در حالی است که نوسانات دیگر در سایر نقاط نمودار فرکانس لحظه‌ای بسیار تدریجی و با شیب ملایم است.

۶- نتیجه گیری

در این مطالعه یک روش بر پایه تبدیل هیلبرت هوانگ در جهت شناسایی ترک در عرشه پل‌ها بررسی شد. در این روش پل به صورت یک تیر اولر-برنولی و وسیله نقلیه نیز در چهار حالت مختلف به صورت بار متحرک، جرم متحرک، نوسانگر متحرک و سیستم متحرک مدل شد. سپس کارایی و عملکرد این روش جهت شناسایی ترک از طریق چند مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته و تاثیر نوع مدل استفاده شده جهت مدل سازی وسیله نقلیه، اثر عمق ترک و سرعت نیروی متحرک بر نتایج مورد مطالعه قرار گرفتند. نتایج این مطالعه نشان داد که روش ارائه شده قادر است با دقت قابل قبولی ترک را تحت هریک از انواع نیروی متحرک شناسایی کند؛ همچنین نشان داده شد که؛ (الف) به طور کلی ارتفاع پرش فرکانسی با عمق ترک در تیر رابطه مستقیم داشته و با افزایش عمق ترک افزایش می‌یابد؛ (ب) سرعت نیروی متحرک تأثیر بسزایی در روند شناسایی ترک ندارد و اگر عمق ترک به اندازه‌ی کافی رشد کرده باشد، در هر سرعتی امکان شناسایی موقعیت ترک وجود دارد؛ (ج) سیگنال

- [21] Ding K, Chen TP, editors (2013) Study on damage detection of bridge based on wavelet multi-scale analysis. *Adv Mat Res Trans Tech Publ*.
- [22] Huang NE, Shen Z, Long SR, Wu MC, Shih HH, Zheng Q, et al (1998) The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc Math Phys Eng Sci* 454(1971): 903-995.
- [23] Roveri N, Carcaterra A (2012) Damage detection in structures under traveling loads by Hilbert–Huang transform. *Mech Syst Signal Process* 28: 128-144
- [24] Nikkhoo A, Karegar H, Mohammadi RK, Hejazi F, editors (2020) Improving the performance of the autoregressive method in modal identification of output-only systems using the empirical mode decomposition. *Structures*, Elsevier.
- [25] Nikkhoo A, Karegar H, Karami Mohammadi R (2021) Improving the performance of the autoregressive method in modal identification of output-only systems using Hilbert vibration decomposition method. *Sharif Journal of Civil Engineering*.
- [26] Nikkhoo A, Karegar H, Karami Mohammadi R, Hajirasouliha I (2020) An acceleration-based approach for crack localisation in beams subjected to moving oscillators. *J Vib Control*: 1077546320929821
- [27] Lin HP, Chang SC, Wu J-D (2002) Beam vibrations with an arbitrary number of cracks. *J Sound Vib* 258(5): 987-99.
- [28] Zhang Q-L, Vrouwenvelder A, Wardenier J (2001) Numerical simulation of train–bridge interactive dynamics. *Comput Struct* 79(10): 1059-1075.
- [12] Law S, Zhu X (2004) Dynamic behavior of damaged concrete bridge structures under moving vehicular loads. *Eng Struct* 26(9): 1279-1293
- [13] Barad KH, Sharma D, Vyas V (2013) Crack detection in cantilever beam by frequency based method. *Procedia Eng* 51: 770-775
- [14] Gillich G-R, Praisach Z-I (2014) Modal identification and damage detection in beam-like structures using the power spectrum and time–frequency analysis. *Signal Processing* 96: 29-44
- [15] Khnajar A, Benamar R (2017) A new model for beam crack detection and localization using a discrete model. *Eng Struct* 150: 221-230
- [16] Nguyen KV (2014) Mode shapes analysis of a cracked beam and its application for crack detection. *J Sound Vib* 333(3): 848-872
- [17] Oshima Y, Yamamoto K, Sugiura K (2014) Damage assessment of a bridge based on mode shapes estimated by responses of passing vehicles. *Smart Struct Syst* 13(5): 731-753
- [18] Altunışık AC, Okur FY, Kahya V (2017) Automated model updating of multiple cracked cantilever beams for damage detection. *J Constr Steel Res* 138: 499-512
- [19] Schommer S, Nguyen VH, Maas S, Zürbes A (2017) Model updating for structural health monitoring using static and dynamic measurements. *Procedia Eng* 199: 2146-2153
- [20] Mcgetrick P, Kim C, editors (2012) Wavelet based damage detection approach for bridge structures utilising vehicle vibration. *GJBS09*