مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۹/ دوره ۱۰/ شماره ۴/ صفحه ۲۰۹-۲۲۳

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/jsfm.2020.8446.3062

ترکیب روش‌های عددی بدون المان پتروف گالرکین محلی و تفاضل محدود برای تحلیل معادلات ناویراستوکس تراکم‌ناپذیر و گذرا

محمد جواد محمودآبادی[۱،*]، فهیمه محمودآبادی[۲] و میثم آتش‌افروز[۱]

[۱] دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

[۲] دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۸/۲۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۸/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۱۵

چکیده

در این تحقیق، یک الگوریتم عددی برای حل معادلات ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر، لزج و دو بعدی در حالت ناپایا ارائه شده است. در روش پیشنهادی، برای حل معادله پواسون فشار، روش بدون المان پتروف گالرکین محلی و برای گسسته‌سازی بخش زمانی معادلات، روش تفاضل محدود پیش‌رو اعمال شده است. در تحلیل حاضر، از تقریب حداقل مربعات متحرک به عنوان درون‌یاب و از تابع وزن گاوسی برای تابع آزمون استفاده شده است؛ همچنین، روش ضریب جریمه برای ارضای شرایط مرزی اساسی به کار گرفته شده است. در مثال‌های عددی ارائه شده، اثر تغییر تعداد گره‌ها، اندازه بازه زمانی و همچنین توزیع گره‌ها به دو صورت منظم و نامنظم، بر خطای نسبی نتایج بررسی و زیر دامنه‌های انتگرالی گاوسی به دو شکل دایره و مربع، لحاظ و دقت نتایج در حالت‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند. تحلیل این نتایج برای هندسه معیار محفظه دو بعدی با شرایط مرزی مختلف به‌وضوح نشان می‌دهد که دقت روش ترکیبی پیشنهادی در حل مسایل مربوط به جریان سیال تراکم‌ناپذیر، دو بعدی، ویسکوز و غیر دایم، بسیار بالا و اختلاف آن‌ها با حل تحلیلی دقیق بسیار ناچیز است.

کلمات کلیدی: روش بدون المان پتروف گالرکین محلی؛ تفاضل محدود پیش‌رو؛ حداقل مربعات متحرک؛ جریان سیال تراکم‌ناپذیر؛ جریان ناپایا.

Combination of Meshless Local Petrov-Galerkin and Finite Difference Methods for Analysis of Transient and Incompressible Navier–Stokes Equations

M.J. Mahmoodabadi[1,*], F. Mahmoodabadi[2], M. Atashafrooz[1]

[1] Assoc. Prof., Mech. Eng., Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

[2] M.Sc., Mech. Eng., Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

Abstract

This paper presents a numerical algorithm for solving unsteady viscous incompressible two–dimensional (2D) Navier–Stokes equations. In the proposed method, for discretization of time derivatives and solving the Poisson equation of the pressure, Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) and forward finite difference methods are employed, respectively. In the present analysis, the moving least-square (MLS) approximation is regarded for interpolation, and the Gaussian weight function is used as the test function. To satisfy the boundary conditions, the penalty approach is applied. In the numerical examples, the accuracy and efficiency of the method are compared with those of the exact solutions. The effects of the number of nodes, the size of time interval, as well as the nodes distribution (both regular and irregular) on the relative errors are investigated. Moreover, the Gaussian integral sub-domains with the circular and square shapes are considered, and the accuracy of the results is compared with each other. Analysis of these results for 2D benchmark geometries with different boundary conditions clearly displays that the accuracy of the suggested combined method for solution of the problem related to unsteady viscous incompressible 2D flows is high such that its differences with analytical solution is negligible.

Keywords: Meshless Local Petrov-Galerkin Method; Forward Finite Difference; Moving Least Squares; Incompressible Fluid Flow; Unsteady Flow.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۴۴۱۵۲۲۰۷۱؛ فاکس: ۰۳۴۴۱۵۲۲۰۵۴

آدرس پست الکترونیک: mahmoodabadi@sirjantech.ac.ir

۱- مقدمه

یکی از علومی که استفاده از روش‌های عددی در آن به امری اجتناب‌ناپذیر درآمده، علم دینامیک سیالات محاسباتی است. از سوی دیگر، کامل‌ترین شبیه‌سازی ریاضی مسائل مربوط به دینامیک سیالات با استفاده از معادلات ناویر استوکس انجام می‌پذیرد. در این راستا، روش‌های تفاضل محدود، اجزا محدود، حجم محدود و المان‌های مرزی، در طی سال‌های اخیر بارها توسط محققان مختلف برای حل عددی معادلات مذکور مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از آنجا که ساختار این روش‌ها همگی وابسته به شبکه‌بندی دامنه است، استفاده از آن‌ها در تحلیل مسائل با هندسه پیچیده بسیار مشکل و پر هزینه است. هر یک از این روش‌ها در شبیه‌سازی مسائل، مخصوصا مسائل دارای مرزهای متغیر با زمان مانند سطح آزاد، دارای مشکلات خاصی می‌باشند. به طوری که در هر گام زمانی به شبکه‌بندی مجدد نیاز بوده و این امر مستلزم صرف وقت فراوان برای ایجاد شبکه و در نتیجه بالا رفتن هزینه محاسباتی است. این مشکل به حدی جدی است که به گفته محققان، این مرحله از کار، زمان و هزینه بیشتری را نسبت به تحلیل محاسباتی طلب می‌کند. علاوه‌براین، نیاز به نگاشت متغیرهای میدان نیز منجر به محاسبات اضافی و کاهش دقت می‌شود [۱]؛ بنابراین، روش‌های بدون شبکه امیدوارترین روش‌ها، برای شبیه‌سازی مسائل پیچیده دینامیک سیالات محاسباتی می‌باشند. جذاب‌ترین خصوصیت روش‌های مذکور این است که برای حل مسئله نیازی به شبکه‌بندی نداشته و این موضوع یک روزنه جدید برای پیشبرد تحلیل مسائل مربوط به دینامیک سیالات محاسباتی روی محققان گشوده است.

یکی از موفق‌ترین روش‌های بدون شبکه گزارش شده در دهه‌های اخیر، روش بدون المان پتروف گالرکین محلی بوده که اولین بار، در سال ۱۹۹۸، توسط اتلوری و ژو معرفی شده است [۲]. از آن زمان تاکنون، تحقیقات فراوانی جهت بسط و کاربرد آن، توسط دانشمندان انجام شده است. در روش بدون المان پتروف گالرکین محلی از روش باقی‌مانده وزنی برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود؛ ولی ایده اصلی این روش، به‌کارگیری فرم انتگرالی باقیمانده وزنی برای یک حوزه عملی کوچک به ازای هر نقطه است. در این روش، به منظور استخراج مقادیر توابع شکل از روش حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود. اتلوری و شن با توجه به توابع آزمون مختلفی که در این روش استفاده می‌شود، آن را به شش دسته تقسیم‌بندی کرده‌اند [۳]. درتحلیل حاضر، تابع آزمون مشابه تابع میدان حداقل مربعات متحرک انتخاب شده است.

در زمینه استفاده از روش‌های بدون شبکه در حل عددی معادلات ناویر استوکس، محققان پژوهش‌های زیادی انجام داده‌اند که از جمله آن‌ها می‌توان به مسائل زیر اشاره کرد.

در سال۲۰۰۱، معادلات ناویراستوکس تراکم‌ناپذیر، دوبعدی و پایا برای اولین بار با این روش حل شدند [۴]. در سال ۲۰۰۵، وو و همکارانش از این روش برای مدل‌سازی جریان سیالات تراکم‌ناپذیر، دو بعدی و دائم در یک دامنه حلقوی بر پایه فرمول‌بندی توابع جریان و چرخش استفاده کردند [۵]. درسال ۲۰۰۶، محمدی از دیدگاهی دیگر، به ارائه چگونگی حل عددی مسائل جریان سیال ویسکوز و تراکم-ناپذیر با استفاده از روش بدون المان پتروف گالرکین محلی پرداخت [۶]. در همین سال، آنالیز مسائل جریان سیال درحالت دو بعدی با این روش به وسیله توابع پایه شعاعی ارائه شد [۷]. در سال ۲۰۱۰ وو و همکارانش، از روش بدون المان پتروف گالرکین محلی پایدار برای شبیه‌سازی جریان سیالات تراکم‌ناپذیر در حالت پایا استفاده کردند [۸]. شایان و همکاران از یک روش لاتیس بولتزمن بدون شبکه برای شبیه‌سازی عددی جریان خارجی لزج تراکم‌ناپذیر استفاده کردند [۹]. در سال ۲۰۱۵، روش بدون المان پتروف گالرکین محلی برای حل مسایل جریان سیال و انتقال حرارت بکار گرفته شد [۱۰]. در سال ۲۰۱۶، از یک روش بدون المان در حل مسائل جریان چند فازی در فضای دو بعدی برای محیط‌های متخلخل استفاده شد [۱۱]. در همین سال، موسوی و اشرفی زاده از روش شبکه بولتزمن بدون المان، مسائل جریان در هندسه‌های پیچیده را تحلیل کردند [۱۲]. دهقان و عباس‌زاده با ارائه نسخه جدیدی از روش گالرکین بدون المان به حل معادله ناویراستوکس تراکم‌ناپذیر پرداختند [۱۳]. در سال ۲۰۱۷، با استفاده از روش‌های بدون المان، جریان دو فازی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت [۱۴]. در همین سال، روشی بدون المان ارائه شد که به طور پایدار به تحلیل جریان رسانایی وابسته به زمان می‌پرداخت

[۱۵]. بورانتاس و همکاران با بکارگیری روش‌های بدون المان به بررسی جریان سیال تراکم‌ناپذیر با هندسه‌های نامنظم در فضاهای دو و سه بعدی پرداختند [۱۶]. چن و همکاران با استفاده از روش بدون المان گالرکین به بررسی هدایت طبیعی در مسائل جریان محیط‌های متخلخل پرداختند [۱۷]. کوزک یک حل عددی محلی از مسئله جریان سیال روی یک دامنه نامنظم را ارائه کرد [۱۸]. در سال ۲۰۱۸، جریان‌های گرمایی سطح آزاد در فرایند پر کردن قالب با یک روش عددی بدون المان حل شد [۱۹]. در همین سال، تالات و همکاران با بسط روش میدان فازی بدون المان به تحلیل مسائل جریان دو فازی پرداختند [۲۰]. در یک مطالعه دیگر، محمودآبادی و همکاران از طریق گسترش روش بدون المان پتروف گالرکین محلی به تحلیل معادلات ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر لایه‌ایی در فضای سه‌بعدی پرداختند [۲۱] که به لحاظ شکل زیردامنه‌های محلی، توابع پایه، توابع آزمون، توابع وزن و توابع درون‌یاب به طور کامل با تحقیق حاضر متفاوت است. علاوه‌براین، ذکر این نکته ضروری است که در تحقیق مرجع [۲۱]، اثر تغییر تعداد گره‌ها، اندازه بازه زمانی، نحوه توزیع گره‌ها و شکل زیر دامنه‌های انتگرالی بر خطای نسبی نتایج بررسی نشده و تحلیل حساسیت روش پیشنهادی نیز صورت نگرفته است.

اگرچه تاکنون چندین مطالعه و تحقیق برای حل مسائل مختلف با استفاده از روش بدون المان پتروف گالرکین محلی انجام شده است، اما براساس اطلاعات نویسندگان، ترکیب این روش با روش تفاضل محدود برای حل عددی معادلات ناویراستوکس تراکم‌ناپذیر و گذرا در یک محفظه مربعی شکل که سرعت روی دیواره‌های آن تابعی از زمان است، توسط محققان دیگر بررسی نشده است. این موضوع به نویسندگان حاضر انگیزه داد تا برای اولین بار به معرفی یک الگوریتم عددی با ترکیب روش‌های تفاضل محدود و بدون المان پتروف گالرکین محلی جهت آنالیز جریان سیال تراکم‌ناپذیر ناپایا در یک محفظه مربعی شکل بپردازند. علاوه بر این، تحلیل حساسیت روش پیشنهادی به پارامترهایی همچون، تعداد گره‌ها، نحوه توزیع گره‌ها، اندازه بازه زمانی و شکل زیر دامنه‌های انتگرالی بر خطای نسبی را انجام دهند.

۲- فرمول بندی مسئله

معادلات ناویر استوکس بی بعد حاکم بر جریان سیال دو بعدی و لزج در قالب معادله پیوستگی (۱) و معادلات مومنتوم (۲) و (۳)، با فرض تراکم‌ناپذیری و خواص ثابت، عبارتند از:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{۱}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}+f_x \tag{۲}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial y}+f_y \tag{۳}$$

در معادلات فوق، u و v به ترتیب مقادیر سرعت در جهت x و y، p میدان فشار، f_x و f_y نیروهای حجمی در راستای x و y و Re عدد رینولدز را نشان می‌دهد.

شرایط مرزی مسئله به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$p=\bar{p} \text{ on } \Gamma_u \tag{۴}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}\equiv q_p=\bar{q}_p \text{on } \Gamma_q \tag{۵}$$

در این رابطه، $\bar{p}$ فشار روی مرز، Γ_u شرط مرزی اساسی، $\bar{q}_p$ مقدار شار روی مرز و Γ_q شرط مرزی طبیعی است. Γ_u و Γ_q زیر مجموعه مرز Γ بوده، به‌طوری‌که $\Gamma_u \cap \Gamma_q=\emptyset$ و $\Gamma_u \cup \Gamma_q=\Gamma$.

۳- درون‌یاب حداقل مربعات متحرک

در بیشتر روش‌های بدون المان، از جمله روش بدون المان پتروف گالرکین محلی، برای تقریب تابع میدان از روش تخمین حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود. در این مدل، برای هر نقطه با مختصات دلخواه $z(x,y)$، براساس تعداد گره‌های اطراف آن، یک زیر دامنه به نام دامنه تأثیر تعریف و میدان $\Psi(z)$ در نقطه z به شکل زیر تخمین زده می‌شود:

$$\Psi(z)=\sum_{I=1}^{N}\varphi_I\,(z)\overline{\Psi}_I \tag{۶}$$

N تعداد گره‌های اطراف نقطه z است که داخل دامنه تأثیر قرار دارند. $\varphi_I(z)$ تابع شکل است که به صورت رابطه (۷) محاسبه می‌شود:

$$\varphi_I(z)=\sum_{j}^{m} e_j\,(z)\left(A^{-1}(z)B(z)\right)_{jI} \qquad (۷)$$

درحالت دوبعدی، $e(z)$ یک مجموعه کامل از چند جمله‌ای‌های پایه تا درجه m است که با رابطه (۸) تعریف می‌شود [۲۲]:

$$e(z)=[1,x,y,xy,x^2,y^2,\dots,x^m,y^m]^T \qquad (۸)$$

در این مقاله، از چند جمله‌ای‌های پایه چهار $(m=4)$ استفاده شده است. ماتریس‌های رابطه (۷) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A(z)=E^TWE=B(z)E \qquad (۹)$$

$$B(z)=E^TW \qquad (۱۰)$$

در روابط اخیر، $E^T(z)=[e(z_1),e(z_2),\dots,e(z_N)]$. همچنین، $W_I(z)$ تابع وزن است که روی دامنه تأثیر گره I، به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود:

$$W_I(z)=\begin{cases}\dfrac{\exp\left[-\left(\frac{d_I}{C_I}\right)^{2k}\right]-\exp\left[-\left(\frac{r_I}{C_I}\right)^{2k}\right]}{1-\exp\left[-\left(\frac{r_I}{C_I}\right)^{2k}\right]} & 0\le d_I\le r_I\\ 0 & d_I\ge r_I\end{cases} \qquad (۱۱)$$

که در آن $d_I=|z-z_I|$ فاصله اقلیدسی نقطه z ازگره z_I بوده و C_I ثابت کنترل تابع وزن W_I است. r_I اندازه ناحیه تابع وزن W_I بوده و در واقع، محدوده همسایگی گره z_I را مشخص می‌کند. برای ساده‌سازی می‌توان $k=1$ را انتخاب کرد. به آسانی دیده می‌شود که تابع وزن گاوس روی تمام دامنه Ω دارای پیوستگی از نوع C^0 است. مشتقات مرتبه اول تابع وزن گاوسی به ترتیب در معادلات (۱۲) و (۱۳) آمده است:

$$W_{I,x}(z)=\begin{cases}\dfrac{-2k(x-x_i)d_I^{2k-2}\exp\left[-\left(\frac{d_I}{C_I}\right)^{2k}\right]}{C_I^{2k}(1-\exp\left[-\left(\frac{r_I}{C_I}\right)^{2k}\right])} & 0\le d_I\le r_I\\ 0 & d_I\ge r_I\end{cases} \qquad (۱۲)$$

$$W_{I,y}(z)=\begin{cases}\dfrac{-2k(y-y_i)d_I^{2k-2}\exp\left[-\left(\frac{d_I}{C_I}\right)^{2k}\right]}{C_I^{2k}(1-\exp\left[-\left(\frac{r_I}{C_I}\right)^{2k}\right])} & 0\le d_I\le r_I\\ 0 & d_I\ge r_I\end{cases} \qquad (۱۳)$$

برای حالتی که $d_I=0$، مشتقات مرتبه اول و دوم تابع وزن گاوس به ترتیب در معادلات (۱۴) و (۱۵) آمده است:

$$W_{I,x}(z)=W_{I,y}(z)=0 \qquad (۱۴)$$

$$W_{I,xx}(z)=W_{I,yy}(z)=\frac{-2kd_I^{2k-4}\exp\left[-\left(\frac{d_I}{C_I}\right)^{2k}\right]}{C_I^{2k}\left(1-\exp\left[-\left(\frac{r_I}{C_I}\right)^{2k}\right]\right)} \qquad (۱۵)$$

مشتقات جزئی مرتبه اول $\varphi_I(z)$ به وسیله دیفرانسیل‌گیری مستقیم از معادله (۷) به صورت زیر در می‌آید [۲۱]:

$$\varphi_{I,K}=\sum_{j=1}^{m}\left[E_{j,K}(A^{-1}B)_{jI}+E_j\left(A^{-1}B_{,K}+A_{,K}^{-1}B\right)_{jI}\right] \qquad (۱۶)$$

که در آن

$$A_{,K}^{-1}=-A^{-1}A_{,K}A^{-1} \qquad (۱۷)$$

مشتقات جزئی مرتبه دوم $\varphi_I(x)$ به وسیله دیفرانسیل‌گیری مجدد از معادله (۱۶) به صورت معادله (۱۸) در می‌آید:

$$\begin{aligned}\varphi_{I,KL}=\sum_{j=1}^{m}&[E_{j,KI}(A^{-1}B)_{jI}\\&+E_{j,K}\left(A^{-1}B_{,L}+A_{,L}^{-1}B\right)_{jI}\\&+E_{j,L}\left(A^{-1}B_{,K}+A_{,K}^{-1}B\right)_{jI}\\&+\left(A^{-1}B_{,KL}+A_{,KL}^{-1}B+A_{,L}^{-1}B_{,K}+A_{,K}^{-1}B_{,L}\right)_{jI}\Big]\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که در آن

$$\begin{aligned}A_{,KL}^{-1}=&A^{-1}A_{,L}A^{-1}A_{,K}A^{-1}-A^{1}A_{,KL}A^{-1}\\&+A^{-1}A_{,K}A^{-1}A_{,L}A^{-1}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

همچنین، مشتقات مرتبه دوم تابع وزن گاوسی به ترتیب در معادلات (۲۰) و (۲۱) آمده است:

$$w_{i,xx}(x)=\begin{cases}\dfrac{-2kd_i^{2k-4}\exp\left[-\left(\frac{d_I}{C_i}\right)^{2k}\right]}{C_i^{2k}(1-\exp\left[-\left(\frac{r_I}{C_i}\right)^{2k}\right]}\times\left[\left(\dfrac{-2k(x-x_i)^2d_I^{2k}}{C_i^{2k}}\right)+(2k-2)(x-x_i)^2+d_I^2\right] & d_I\le r_I\\ 0 & d_I>r_I\end{cases} \qquad (۲۰)$$

$$w_{i,yy}(x) = \begin{cases} \dfrac{-2k d_I^{2k-4} \exp\left[-\left(\frac{d_I}{C_i}\right)^{2k}\right]}{C_i^{2k}\left(1-\exp\left[-\left(\frac{r_I}{C_i}\right)^{2k}\right]\right)} \times \\ \left[\left(\dfrac{-2k(y-y_i)^2 d_I^{2k}}{C_i^{2k}}\right) + \\ (2k-2)(y-y_i)^2 + d_I^2\right] & d_I \le r_I \\ 0 & d_I > r_I \end{cases} \tag{۲۱}$$

۴- گسسته‌سازی مشتقات زمانی و الگوریتم حل مسئله

با استفاده از روش تفاضل محدود پیشرو، گسسته‌سازی عبارت زمانی در معادلات (۲) و (۳)، به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_n) = \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} \tag{۲۲}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t_n) = \frac{v^{n+1}(x) - v^n(x)}{\Delta t} \tag{۲۳}$$

با جایگذاری روابط (۲۲) و (۲۳) در معادلات (۲) و (۳) داریم:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial u^n}{\partial x} - v\frac{\partial u^n}{\partial y} - \frac{\partial p^n}{\partial x} + f_x^n \tag{۲۴}$$

به عبارت دیگر

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t\frac{\partial p^n}{\partial x} + \Delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial u^n}{\partial x} - v\frac{\partial u^n}{\partial y} + f_x^n\right] \tag{۲۵}$$

که اگر α^n به صورت زیر تعریف شود:

$$\alpha^n = u^n + \Delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial u^n}{\partial x} - v\frac{\partial u^n}{\partial y} + f_x^n\right] \tag{۲۶}$$

آن‌گاه

$$u^{n+1} = \alpha^n - \Delta t\frac{\partial p^n}{\partial x} \tag{۲۷}$$

با فرآیندی مشابه، برای سرعت در جهت y خواهیم داشت:

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial v^n}{\partial x} - v\frac{\partial v^n}{\partial y} - \frac{\partial p^n}{\partial y} + f_y^n \tag{۲۸}$$

به عبارت دیگر

$$v^{n+1} = v^n - \Delta t\frac{\partial p^n}{\partial y} + \Delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial v^n}{\partial x} - v\frac{\partial v^n}{\partial y} + f_y^n\right] \tag{۲۹}$$

اگر β^n به‌صورت زیر تعریف شود:

$$\beta^n = v^n + \Delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial v^n}{\partial x} - v\frac{\partial v^n}{\partial y} + f_y^n\right] \tag{۳۰}$$

آن‌گاه

$$v^{n+1} = \beta^n - \Delta t\frac{\partial p^n}{\partial y} \tag{۳۱}$$

با استفاده از معادلات (۲۷) و (۳۱) می‌توان روابط (۳۲-۳۳) را بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = \frac{\partial \alpha^n}{\partial x} - \Delta t\frac{\partial^2 p^n}{\partial x^2} \tag{۳۲}$$

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = \frac{\partial \beta^n}{\partial y} - \Delta t\frac{\partial^2 p^n}{\partial y^2} \tag{۳۳}$$

با جایگذاری معادلات (۳۲) و (۳۳) در معادله پیوستگی (۳۴)، معادله (۳۵) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = 0 \tag{۳۴}$$

$$\frac{\partial^2 p^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^n}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial \alpha^n}{\partial x} + \frac{\partial \beta^n}{\partial y}\right) \tag{۳۵}$$

بنابراین به طور خلاصه، الگوریتم حل معادلات ناویر استوکس (معادلات (۱) تا (۳)) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۱- محاسبه میدان سرعت متوسط با استفاده از روش تفاضل محدود پیشرو به صورت زیر:

$$\alpha^n = u^n + \Delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial u^n}{\partial x} - v\frac{\partial u^n}{\partial y} + f_x^n\right] \tag{۳۶}$$

$$\beta^n = v^n + \Delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2}\right) - u\frac{\partial v^n}{\partial x} - v\frac{\partial v^n}{\partial y} + f_y^n\right] \tag{۳۷}$$

۲- حل معادله پواسون فشار با روش بدون المان پتروف گالرکین محلی به‌صورت معادله (۳۸):

$$\frac{\partial^2 p^n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p^n}{\partial y^2}=\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial \alpha^n}{\partial x}+\frac{\partial \beta^n}{\partial y}\right) \tag{۳۸}$$

۳- به دست آوردن سرعت‌ها برای گام زمانی $n+1$ ام با استفاده از:

$$u^{n+1}=\alpha^n-\Delta t\frac{\partial p^n}{\partial x} \quad v^{n+1}=\beta^n-\Delta t\frac{\partial p^n}{\partial y} \tag{۳۹}$$

۵- فرمول‌بندی معادله پواسون فشار برای حل به روش بدون المان پتروف گالرکین محلی

روش بدون المان پتروف گالرکین محلی، از شکل ضعیف روی زیر دامنه محلی Ω_s و تقریب حداقل مربعات متحرک برای حل معادلات مقدار مرزی به صورت بدون شبکه استفاده می‌کند. Ω_s زیر دامنه محلی داخل دامنه مسئله است که در دو بعد می‌تواند دایره یا مربع باشد. یک شکل ضعیف محلی تعمیم یافته از معادله دیفرانسیل (۳۸) روی زیر دامنه محلی Ω_s می‌تواند به صورت رابطه (۴۰) ارائه شود:

$$\int_{\Omega_s}\left[\left(\frac{\partial^2 p^n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p^n}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial F^n}{\partial x}+\frac{\partial G^n}{\partial y}\right)\right]Wd\Omega$$
$$-\varepsilon\int_{\Gamma_{su}}(p^n-\bar{p}^n)Wd\Gamma=0 \tag{۴۰}$$

که در آن W تابع آزمون است که در این پژوهش، همان تابع وزن معرفی شده در بخش ۳ در نظر گرفته شده است. انتگرال دوم در معادله (۴۰)، یک انتگرال خطی است که شرایط مرزی اساسی را اعمال می‌کند، زیرا توابع شکل حداقل مربعات متحرک در روش بدون شبکه پتروف گالرکین محلی فاقد خاصیت تابع دلتای کرونکر هستند [۳,۲]. Γ_{su} قسمتی از مرز $\partial\Omega_s$ بوده که شرایط مرزی اساسی روی آن تعریف شده است. در حالت کلی $\partial\Omega_s=\Gamma_s\cup L_s$ که Γ_s قسمتی از مرز محلی است که روی مرز کلی قرار گرفته است و L_s قسمت دیگر از مرز محلی است که درون دامنه کلی مساله قرار گرفته است.

به عبارت دیگر، $\Gamma_s=\partial\Omega_s\cap\Gamma, \mathrm{L}_s=\partial\Omega_s-\Gamma$. اگر زیر دامنه Ω_s به طور کامل داخل دامنه کلی قرار گرفته و هیچ تداخلی بین مرز محلی و مرز کلی Γ وجود نداشته باشد، انتگرال مرزی روی Γ_s صفر خواهد شد. در معادله (۴۰)، از یک ضریب جریمه $1 \ll \varepsilon$ برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده شده که دراین مقاله، $\varepsilon=10^{14}$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از معادله زیر:

$$(\nabla^2 p)W=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}W\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}W\right)\right]$$
$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y}\right) \tag{۴۱}$$

با به‌کارگیری قضیه دیورژانس، از معادله (۴۰)، رابطه (۴۲) حاصل می‌شود:

$$\int_{\Omega_s}\left(\frac{\partial p^n}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial p^n}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y}\right)d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma_s}\left(\frac{\partial p^n}{\partial x}n_1+\frac{\partial p^n}{\partial y}n_2\right)Wd\Gamma$$
$$-\int_{\Gamma_{su}}\left(\frac{\partial p^n}{\partial x}n_1+\frac{\partial p^n}{\partial y}n_2\right)Wd\Gamma$$
$$+\varepsilon\int_{\Gamma_{su}}p^n\,Wd\Gamma=\varepsilon\int_{\Gamma_{su}}\bar{p}^n\,Wd\Gamma$$
$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega_s}\left(\alpha^n\frac{\partial W}{\partial x}+\beta^n\frac{\partial W}{\partial y}\right)d\Omega$$
$$-\frac{1}{\Delta t}\int_{\Gamma_s}(\alpha^n n_1 W+\beta^n n_2 W)d\Gamma$$
$$-\frac{1}{\Delta t}\int_{\Gamma_{su}}(\alpha^n n_1 W+\beta^n n_2 W)d\Gamma \tag{۴۲}$$

که n_1 و n_2 بردارهای یکه و عمود بر مرز به سمت بیرون هستند. اگر کمیت میدانی فشار با استفاده از تابع شکل حداقل مربعات متحرک به صورت رابطه (۴۳) تقریب زده - شود:

$$p^n=\sum_{I=1}^{N}\varphi_I.\bar{p}_I^n \tag{۴۳}$$

آنگاه با جایگذاری آن در معادله (۴۲)، رابطه (۴۴) به دست می‌آید:

$$\sum_{J=1}^{M}\int_{\Omega_s}\left(\frac{\partial\varphi_J\bar{p}^{nJ}}{\partial x}\frac{\partial W_I}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_J\bar{p}^{nJ}}{\partial y}\frac{\partial W_I}{\partial y}\right)d\Omega$$

$$+\varepsilon\sum_{J=1}^{M}\int_{\Gamma_{su}}\varphi_J\bar{p}^{nJ}\,Wd\Gamma$$

$$-\sum_{J=1}^{M}\int_{\Gamma_s}\left(\frac{\partial\varphi_J\bar{p}^{nJ}}{\partial x}n_1+\frac{\partial\varphi_J\bar{p}^{nJ}}{\partial y}n_2\right)W_I\,d\Gamma$$

$$-\sum_{J=1}^{M}\int_{\Gamma_{su}}\left(\frac{\partial\varphi_J\bar{p}^{nJ}}{\partial x}n_1+\frac{\partial\varphi_J\bar{p}^{nJ}}{\partial y}n_2\right)Wd\Gamma$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega_s}\left(\alpha^n\frac{\partial W}{\partial x}+\beta^n\frac{\partial W}{\partial y}\right)d\Omega$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\int_{\Gamma_s}(\alpha^n n_1W+\beta^n n_2W)d\Gamma$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\int_{\Gamma_{su}}(\alpha^n n_1W+\beta^n n_2W)d\Gamma$$

$$+\varepsilon\int_{\Gamma_{su}}\bar{p}^n\,Wd\Gamma \qquad (۴۴)$$

معادلهٔ (۴۴) می‌تواند به صورت معادلات جبری خطی (۴۵) روی $\bar{p}^n$ خلاصه شود:

$$\sum_{j=1}^{M}K_{ij}\bar{p}_i^n=h_i \quad i=1,2,3,\dots,M \qquad (۴۵)$$

که در آن M تعداد کل گره‌ها بوده و ماتریس K_{ij} و بردار h_i بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K_{ij}=\sum_{J=1}^{M}\int_{\Omega_s}\left(\frac{\partial\varphi_J}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_J}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)d\Omega$$

$$+\varepsilon\sum_{J=1}^{M}\int_{\Gamma_{su}}\varphi_J\,wd\Gamma$$

$$-\sum_{J=1}^{M}\int_{\Gamma_s}\left(\frac{\partial\varphi_J}{\partial x}n_1+\frac{\partial\varphi_J}{\partial y}n_2\right)wd\Gamma$$

$$-\sum_{J=1}^{M}\int_{\Gamma_{su}}\left(\frac{\partial\varphi_J}{\partial x}n_1+\frac{\partial\varphi_J}{\partial y}n_2\right)wd\Gamma \qquad (۴۶)$$

$$h_i=\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega_s}\left(\alpha^n\frac{\partial w}{\partial x}+\beta^n\frac{\partial w}{\partial y}\right)d\Omega$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\int_{\Gamma_s}(\alpha^n n_1w+\beta^n n_2w)d\Gamma$$

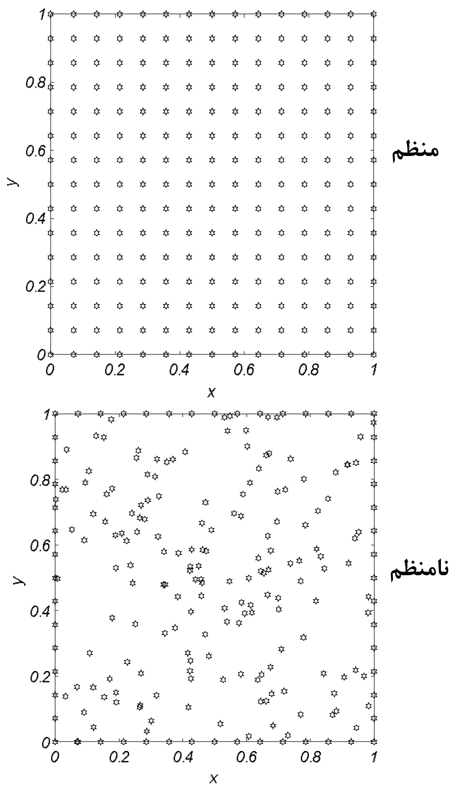
$$-\frac{1}{\Delta t}\int_{\Gamma_{su}}(\alpha^n n_1w+\beta^n n_2w)d\Gamma+\varepsilon\int_{\Gamma_{su}}\bar{p}^n\,wd\Gamma$$

$$h_i=\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega_s}\left(\alpha^n\frac{\partial w}{\partial x}+\beta^n\frac{\partial w}{\partial y}\right)d\Omega$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\int_{\Gamma_s}(\alpha^n n_1w+\beta^n n_2w)d\Gamma$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\int_{\Gamma_{su}}(\alpha^n n_1w+\beta^n n_2w)d\Gamma+\varepsilon\int_{\Gamma_{su}}\bar{p}^n\,wd\Gamma$$

(۴۷)



شکل ۱- هندسه مسئله همراه با نحوه توزیع گره‌ها

۶- اعتبار سنجی نتایج و تحلیل همگرایی

در این قسمت، برای سنجش و ارزیابی عملکرد الگوریتم ارائه شده در این تحقیق، چندین مثال عددی مختلف از جریان سیال تراکم‌ناپذیر، غیر دائم، دو بعدی و ویسکوز با شرایط مرزی و شرایط اولیه متفاوت، در یک دامنه مربعی $[0,1]\times[0,1]$، مورد بررسی و حل قرار می‌گیرند. شماتیک هندسی این دامنه حل، همراه با نحوه توزیع گره‌ها به صورت منظم و نامنظم، مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. در حقیقت، شرایط مرزی و اولیه مورد نیاز برای حل با استفاده از الگوریتم عددی ارائه شده در این پژوهش، از حل دقیق به دست آمده‌اند. برای همه مثال‌ها، شعاع همسایگی $r = 1$، شعاع زیر دامنه‌های انتگرالی $r_0 = 0.05$، عدد رینولدز $Re = 100$ و مدت زمان حل $t = 0.1$ لحاظ شده است. بازه‌های زمانی به دو صورت $\Delta t = 0.05$ و $\Delta t = 0.001$ و زیر دامنه‌های انتگرالی به هر دو شکل دایره و مربعی در نظر گرفته شدند. اثر افزایش تعداد گره‌ها بر خطاهای نسبی سرعت‌ها و فشار نیز بررسی شده است.

۶-۱- اعتبار سنجی نتایج

۶-۱-۱- مثال

یک حل دقیق از مساله که در معادلات پیوستگی و مومنتوم صدق می‌کند، به‌صورت رابطه (۴۸) در نظر گرفته می‌شود:

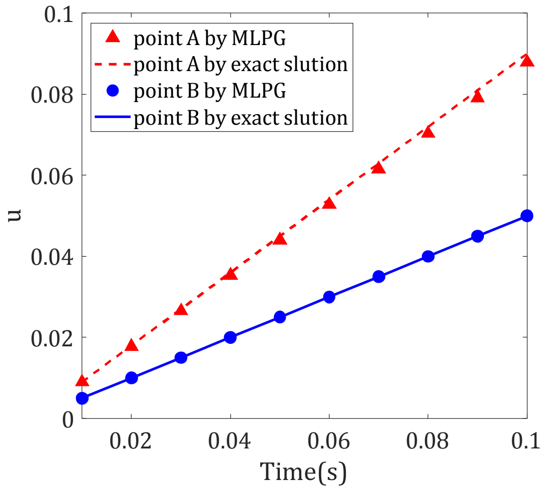
$$u = xt$$
$$v = -yt$$
$$p = -0.5(x^2 - y^2)$$
$$f_x = xt^2$$
$$f_y = yt^2 \qquad (۴۸)$$

با استفاده از این جواب‌ها، شرایط مرزی و اولیه مربوط به میدان فشار به شکل (۴۹) بدست می‌آیند:

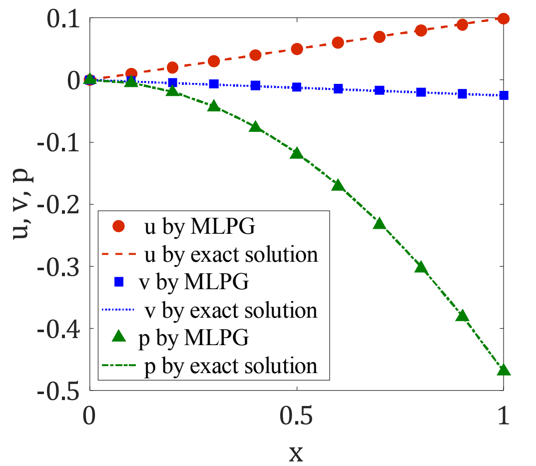
$$p(0,y,t) = 0.5y^2$$
$$p(1,y,t) = -0.5(1-y^2)$$
$$p(x,0,t) = -0.5x^2$$
$$p(x,1,t) = -0.5(x^2-1)$$
$$p(x,y,0) = -0.5(x^2-y^2) \qquad (۴۹)$$

همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد، با بکارگیری این شرایط و با استفاده از الگوریتم ارائه شده در این تحقیق، می‌توان به حل عددی مساله پرداخت. نتایج حاصل از این الگوریتم، در شکل‌های ۲ تا ۴ نشان داده شده است.

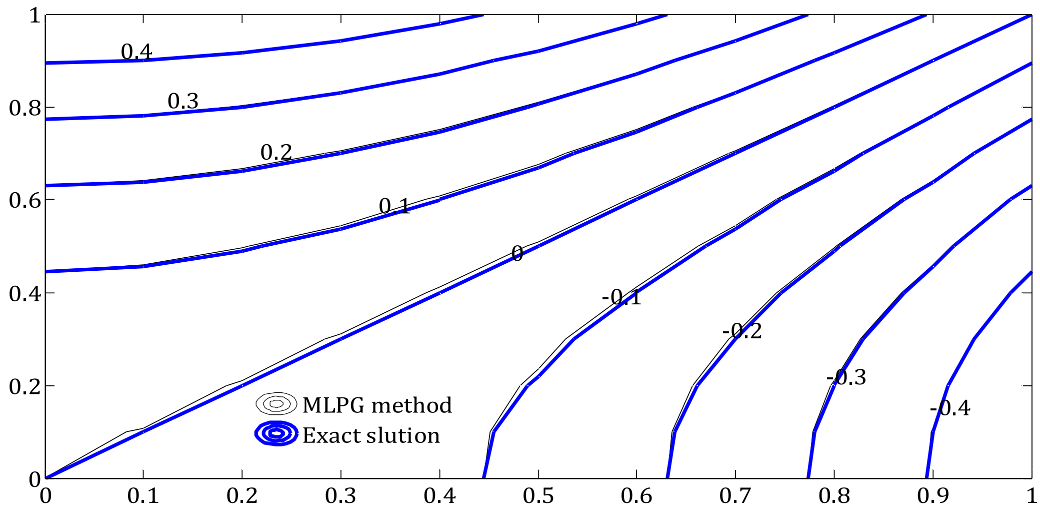
در شکل ۲، مقادیر مولفه سرعت در جهت x در دو نقطه با مختصات $A(0.5,0.5)$ و $B(0.9,0.9)$ در زمان‌های مختلف ارائه و با نتایج حاصل از حل دقیق مقایسه شده‌اند. همان‌گونه که از این شکل مشاهده می‌شود، الگوریتم ارائه شده در این تحقیق، از دقت بسیار بالایی برخوردار است. برای اطمینان بیشتر از صحت و دقت نتایج الگوریتم ارائه شده، مقادیر



شکل ۲- مولفه سرعت در جهت x بر حسب زمان در نقاط $A(0.5,0.5)$ و $B(0.9,0.9)$ برای مثال ۱



شکل ۳- فشار و مولفه‌های سرعت در دو جهت x و y بر حسب محور x و در خط ثابت5 $y = 0.2$ برای مثال ۱



شکل ۴- توزیع خطوط فشار ثابت در کل دامنه محاسباتی برای مثال ۱

مولفه‌های سرعت در دو جهت x و y و همچنین مقادیر فشار بدست آمده از این الگوریتم، بر حسب محور x و در راستای خط ثابت $y = 0.25$ با نتایج حاصل از حل دقیق مقایسه شده‌اند که در شکل ۳ ارائه شده است. همان‌طور که از این شکل نیز به‌خوبی مشخص است، نتایج حاصل از ترکیب روش‌های عددی تفاضل محدود و بدون المان پتروف گالرکین محلی، تطابق بالایی با نتایج حل دقیق دارند. این انطباق نتایج، از مقایسه توزیع خطوط فشار ثابت در کل دامنه محاسباتی که در شکل ۴ ارائه شده نیز به‌وضوح مشهود است.

۶-۱-۲- مثال ۲

یک حل دقیق دیگر از معادلات حاکم بر مساله مورد بررسی، به‌شکل رابطه (۵۰) ارائه می‌شود:

$$u = \cosh(x)\sin(y)\,e^{-t}$$

$$v = sinh(x)\cos(y)\,e^{-t}$$

$$p = \sinh(x)\sin(y)\,e^{-t}$$

$$f_x = \cosh(x)\sinh(x)\,e^{-2t}$$

$$f_y = \sin(y)\cos(y)e^{-2t} \qquad (۵۰)$$

شرایط مرزی و اولیه منطبق بر این حل، برای میدان فشار به‌صورت رابطه (۵۱) خواهند بود:

$$p(0, y, t) = 0$$

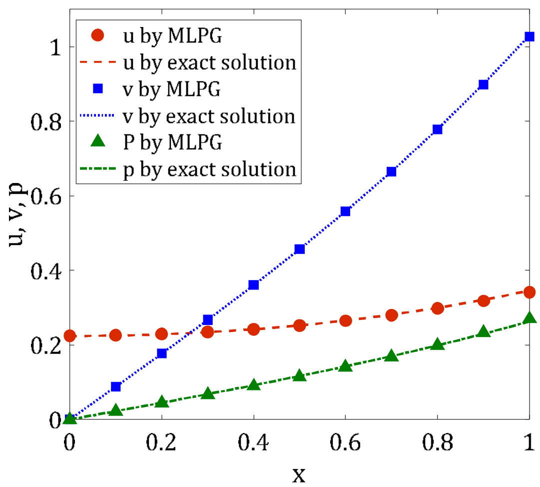
$$p(1, y, t) = \sinh(1)\sin(y)\,e^{-t}$$

$$p(x, 0, t) = 0$$

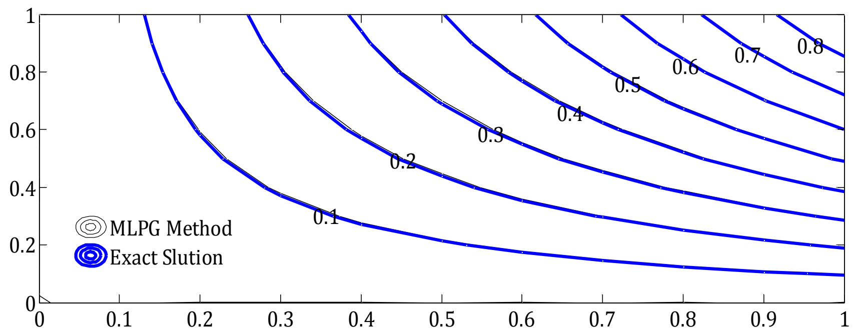
$$p(x, 1, t) = \sinh(x)\sin(1)\,e^{-t}$$

$$p(x, y, 0) = \sinh(x)\sin(y) \qquad (۵۱)$$

با استفاده از این شرایط مرزی و اولیه مربوط به میدان فشار، یک‌بار دیگر به حل مساله با استفاده از روش عددی ترکیبی پیشنهادی پرداخته شد. سپس، نتایج حاصل از این حل عددی با نتایج حل دقیق مقایسه شدند. این مقایسه‌ها در شکل‌های ۵ و ۶ ارائه شده‌اند.



شکل ۵- فشار و مولفه‌های سرعت در دو جهت x و y بر حسب محور x و در خط ثابت $y = 0.25$ برای مثال ۲



شکل ۶- توزیع خطوط فشار ثابت در کل دامنه محاسباتی برای مثال ۲

همان‌طور که از این شکل‌ها به‌وضوح مشخص است، الگوریتم ارائه داده شده در این تحقیق، توانایی بسیار زیادی برای حل معادلات پیوستگی و ناویر استوکس دارد.

۶-۱-۳- مثال ۳

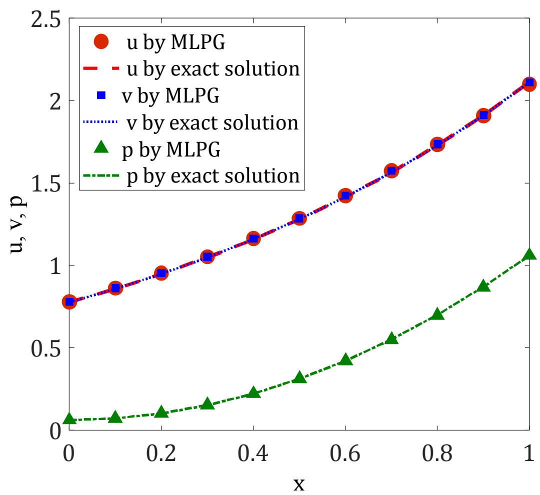
در سومین مثال، برای اعتبار سنجی و ارزیابی نتایج حاصل از ترکیب روش‌های عددی تفاضل محدود و بدون المان پتروف گالرکین محلی، یک حل دقیق دیگر از مساله مورد بررسی، همراه با شرایط مرزی و اولیه منطبق بر آن، بصورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$u(x,y,t) = e^{(x-y)}e^{\left(-\frac{2t}{Re}\right)}$$
$$v(x,y,t) = e^{(x-y)}e^{\left(-\frac{2t}{Re}\right)}$$
$$p(x,y,t) = (x^2+y^2)e^{\left(-\frac{t}{Re}\right)}$$
$$f_x = 2xe^{\left(-\frac{t}{Re}\right)}$$
$$f_y = 2ye^{\left(-\frac{t}{Re}\right)} \qquad (۵۲)$$
$$p(0,y,t) = y^2e^{\left(-\frac{t}{Re}\right)}$$
$$p(1,y,t) = (1+y^2)e^{\left(-\frac{t}{Re}\right)}$$
$$p(x,0,t) = x^2e^{\left(-\frac{t}{Re}\right)}$$
$$p(x,1,t) = (x^2+1)e^{\left(-\frac{t}{Re}\right)}$$
$$p(x,y,0) = (x^2+y^2) \qquad (۵۳)$$

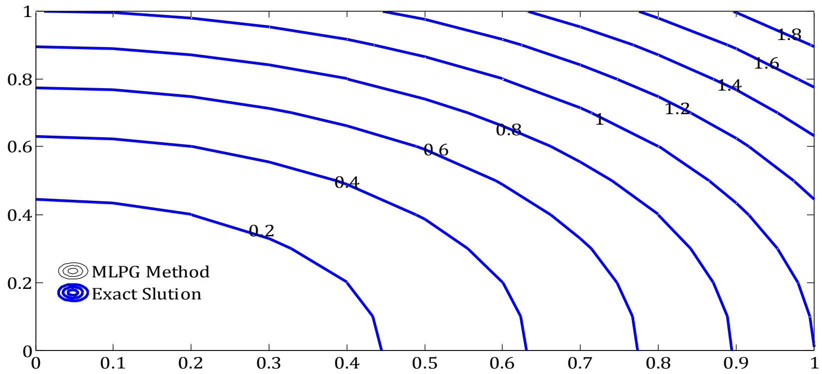
با استفاده از شرایط مرزی و اولیه داده شده در معادله (۵۳)، می‌توان به حل مساله با استفاده از الگوریتم ارائه داده شده در این تحقیق پرداخت. نتایج حاصل از این حل همراه با نتایج حاصل از حل دقیق، در شکل های ۷ و ۸ ارائه و مقایسه شده‌اند. تحلیل دقیق این شکل‌ها نشان می‌دهد که دقت روش بدون المان پتروف گالرکین محلی در حل مسایل مربوط به جریان سیال تراکم‌ناپذیر، دو بعدی، ویسکوز و غیر دایم بسیار بالا است. ذکر این نکته ضروری است که این دقت بالا مربوط به استفاده همزمان از تکنیک‌های پیشنهادی است.

۶-۲- تحلیل حساسیت و همگرایی

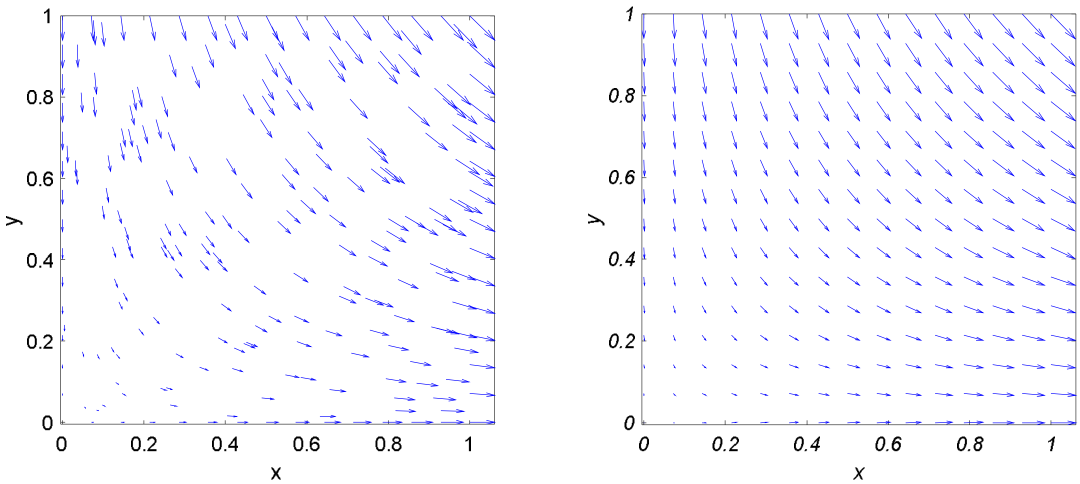
یکی از موارد مهم در حل عددی معادلات ناویر استوکس، آنالیز همگرایی روش حل است. برای بررسی دقیق همگرایی الگوریتم ارائه شده در این پژوهش، جداول ۱ تا ۳ و همچنین شکل‌های ۹ تا ۱۱ ارائه شده‌اند. در جداول ۱ تا ۳، تأثیر توزیع گره‌ها، شکل زیر دامنه، اندازه بازه‌های زمانی و تعداد گره‌ها بر خطاهای نسبی سرعت‌ها و فشارهای به دست آمده از روش بدون المان پتروف گالرکین محلی برای هر سه مثال ارائه شده در قسمت قبل، بررسی شده‌اند.



شکل ۷- فشار و مولفه‌های سرعت در دو جهت x و y بر حسب محور x و در خط ثابت $y = 0.25$ برای مثال ۳

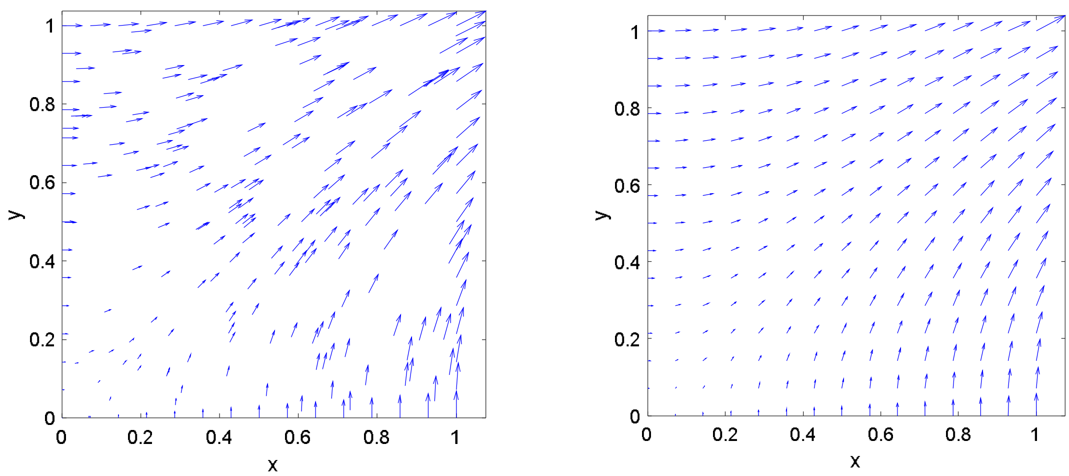


شکل ۸- توزیع خطوط فشار ثابت در کل دامنه محاسباتی برای مثال ۳



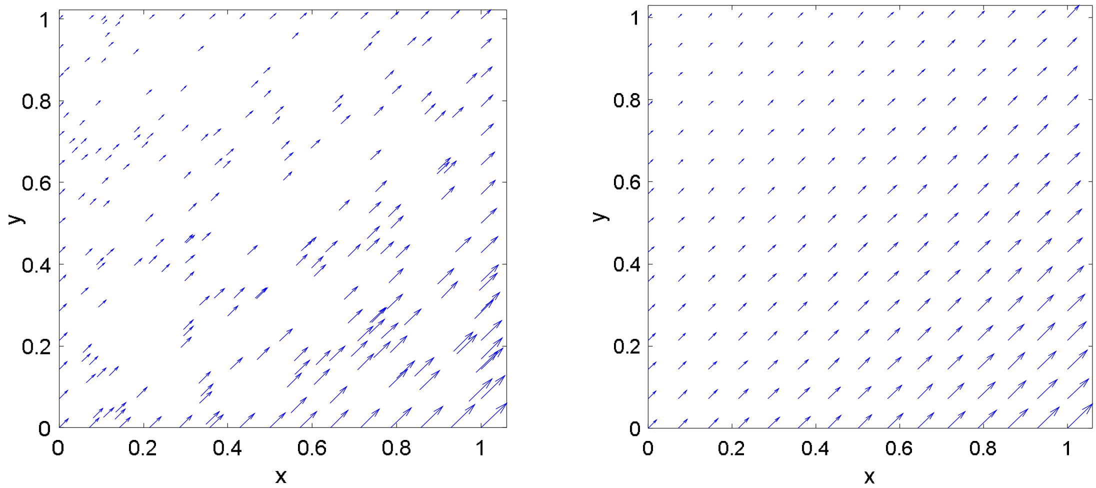
نامنظم منظم

شکل ۹- توزیع بردارهای سرعت در مثال ۱ برای دو نوع توزیع گرهی



نامنظم منظم

شکل ۱۰- توزیع بردارهای سرعت در مثال ۲ برای دو نوع توزیع گرهی



نامنظم منظم

شکل ۱۱- توزیع بردارهای سرعت در مثال ۳ برای دو نوع توزیع گرهی

جدول ۱- تأثیر پارامترهای مختلف بر خطاهای نسبی سرعت‌ها و فشار در مثال ۱

چیدمان گره‌ها	شکل زیردامنه	گام زمانی	تعداد گره‌ها	C_I	u	v	p
منظم	دایره‌ای	۰/۰۵	۱۲۱	۰/۲	3.53×10^{-4}	7.17×10^{-4}	1.06×10^{-3}
		۰/۰۰۱			4.07×10^{-4}	8.01×10^{-4}	1.15×10^{-3}
	مربعی	۰/۰۵	۲۲۵	۰/۱	2.73×10^{-4}	7.57×10^{-4}	1.17×10^{-3}
نامنظم	دایره‌ای	۰/۰۵	۱۲۱	۰/۲	6.52×10^{-4}	4.04×10^{-4}	1.79×10^{-3}
			۲۲۵	۰/۱۵	6.62×10^{-4}	4.10×10^{-4}	1.78×10^{-3}
	مربعی		۱۲۱	۰/۲	3.64×10^{-7}	9.33×10^{-8}	5.72×10^{-7}
			۲۲۵	۰/۱۵	9.22×10^{-7}	2.54×10^{-7}	1.35×10^{-6}

جدول۲- تأثیر پارامترهای مختلف بر خطاهای نسبی سرعت‌ها و فشار در مثال ۲

چیدمان گره‌ها	شکل زیر دامنه	گام زمانی	تعداد گره‌ها	C_I	u	v	p
منظم	دایره‌ای	۰/۰۵	۱۲۱	۰/۲	1.12×10^{-3}	7.35×10^{-4}	1.74×10^{-4}
		۰/۰۰۱			1.14×10^{-3}	1.45×10^{-3}	3.52×10^{-4}
	مربعی	۰/۰۵	۲۲۵	۰/۱	1.35×10^{-3}	7.06×10^{-4}	1×10^{-4}
نامنظم	دایره‌ای	۰/۰۵	۱۲۱	۰/۲	1.12×10^{-3}	7.58×10^{-4}	7.92×10^{-4}
			۲۲۵	۰/۱۵	1.17×10^{-3}	6.8×10^{-4}	8.37×10^{-4}
	مربعی		۱۲۱	۰/۲	5.56×10^{-4}	1.23×10^{-3}	3.91×10^{-4}
			۲۲۵	۰/۱۵	5.74×10^{-4}	1.23×10^{-3}	3.47×10^{-4}

جدول ۳- تأثیر پارامترهای مختلف بر خطاهای نسبی سرعت‌ها و فشار در مثال ۳

p	v	u	C_I	تعداد گره‌ها	گام زمانی	شکل زیر دامنه	چیدمان گره‌ها
6.98×10^{-4}	9.32×10^{-3}	8.67×10^{-3}	۰/۲	۱۲۱	۰/۰۵	دایره‌ای	منظم
2.7×10^{-3}	1.73×10^{-2}	1.11×10^{-2}			۰/۰۰۱		
4.65×10^{-3}	1.06×10^{-2}	9.3×10^{-3}	۰/۱	۲۲۵	۰/۰۵	مربعی	
8.42×10^{-4}	9.28×10^{-3}	8.57×10^{-3}	۰/۲	۱۲۱	۰/۰۵	دایره‌ای	نامنظم
6.45×10^{-4}	9.19×10^{-3}	8.58×10^{-3}	۰/۱۵	۲۲۵			
2.83×10^{-4}	1.21×10^{-3}	5.64×10^{-4}	۰/۲	۱۲۱		مربعی	
2.81×10^{-4}	1.22×10^{-3}	6.12×10^{-4}	۰/۱۵	۲۲۵			

همانگونه که از آنالیز این جدول مشخص است، با تغییر هر کدام از این موارد، همگرایی الگوریتم پیشنهادی برقرار مانده است. در شکل‌های ۹ تا ۱۱ نیز توزیع بردارهای سرعت برای دو نوع توزیع گره منظم و غیر منظم و برای هر سه مثال تشریح شده در قسمت قبل نشان داده شده‌اند. آنالیز دقیق این شکل‌ها، بخوبی نشان دهنده حساس نبودن الگوریتم حل پیشنهادی به نوع توزیع گره است.

۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک الگوریتم عددی بر پایه ترکیب روش‌های عددی بدون المان پتروف گالرکین محلی و تفاضل محدود پیشرو پیشنهاد و از آن برای حل معادلات جریان سیال تراکم‌ناپذیر گذرا استفاده شده است. در حقیقت، الگوریتم حل پیشنهادی، برای گسسته‌سازی بخش زمانی معادلات ناویر استوکس، از روش تفاضل محدود پیشرو و برای حل معادله فشار، از روش بدون المان پتروف گالرکین محلی بهره برده است. علاوه‌براین، برای درون یابی متغیر میدان از درون-یاب حداقل مربعات متحرک، برای تابع آزمون از تابع وزن گوسی و برای اعمال شرایط مرزی از روش ضریب جریمه استفاده شده است. چندین مثال عددی با شرایط مرزی و شرایط اولیه متفاوت برای سنجش و ارزیابی عملکرد این الگوریتم ارائه شده است. در کلیه این مثال‌ها، موفقیت و کارآیی الگوریتم پیشنهاد شده در حل عددی معادلات حاکم بر جریان سیال تراکم‌ناپذیر و گذرا نشان داده شده است؛ همچنین، تحلیل حساسیت روش پیشنهادی به پارامترهای مؤثر همچون اندازه بازه زمانی، شکل زیر دامنه‌های محلی، تعداد و چیدمان گره‌ها و ضریب تابع وزن گوسی انجام و همگرایی آن در همه موارد به اثبات رسیده است. در پایان می‌توان به این نکته اشاره کرد که با توجه به اینکه در مراحل الگوریتم عددی پیشنهاد شده در این تحقیق هیچ‌گونه محدودیتی بر هندسه و شرایط مرزی اعمال نشده است، لذا می‌توان انتظار داشت که کارایی روش مذکور نه تنها در ارتباط با مثال‌های مورد مطالعه است، بلکه قابل تعمیم به موارد دیگر نیز باشد.

۸- فهرست علائم

C_I	ثابت کنترل تابع وزن
d_I	فاصله اقلیدسی نقطه ازگره
f_x	نیرو حجمی بی‌بعد در راستای x
f_y	نیرو حجمی بی‌بعد در راستای y
k	ثابت تابع وزن
K و L	راستاهای مشتق‌گیری
m	درجه چند جمله‌ایی پایه
N	تعداد گره‌های داخل دامنه تأثیر
n_1 و n_2	بردارهای یکه و عمود بر مرز
p	میدان فشار بی‌بعد

$\bar{q}_p$	شار بی‌بعد روی مرز
r_I	اندازه ناحیه تابع وزن
Re	عدد رینولدز
u	سرعت بی‌بعد در جهت x
v	سرعت بی‌بعد در جهت y
W_I	تابع وزن
φ_I	تابع شکل
Γ_q	مرز طبیعی
Γ_u	مرز اساسی
Γ	مرز دامنه
Ω	دامنه حل مسئله

۹- مراجع

[1] Hoffmann KA, Chiang S (2000) Computational fluid dynamics engineering education system. Wichita, Kan, USA 1.

[2] Atluri SN, Zhu T (1998) A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Computational Mechanics 22: 117-127.

[3] Atluri SN, Shen S (2002) The Meshless Local Petrov-galerkin (MLPG) method.

[4] Lin H, Atluri SN (2001) Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for solving incompressible Navier-Stokes equations. CMES-Comp Model Eng 2: 117-142.

[5] Wu YL, Liu GR, Gu YT (2005) Application of Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach to simulation of incompressible flow. Numer Heat Tr B-Fund 48: 459-475.

[6] Mohammadi M (2006) Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for incompressible viscous fluid. Proceedings of European Fluids Engineering Summer Meeting 1-11.

[7] Mohammadi MH, Shamsai A (2006) meshless solution of 2d fluid flow problems by subdomain variational method using MLPG method with Radial Basis Functions (RBFS). In ASME 2006 2nd Joint US-European Fluids Engineering Summer Meeting Collocated With the 14th International Conference on Nuclear Engineering. 333-341.

[8] Wu XH, Tao WQ, Shen SP, Zhu XW (2010) A stabilized MLPG method for steady state incompressible fluid flow simulation. J Comput Phys 229: 8564-8577.

[۹] شایان ا، دادوند ع، میرزایی ا (۱۳۹۴) شبیه‌سازی عددی جریان خارجی لزج تراکم‌ناپذیر با استفاده از روش لاتیس بولتزمن بدون شبکه. *مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۴(۴): ۱۷۵-۱۸۹.

[10] Enjilela V, Arefmanesh A (2015) Two-step Taylor-Characteristic-Based MLPG method for fluid flow and heat transfer applications. Eng Anal Bound Elem 51: 174-190.

[11] Kovářík K, Masarovičová S, Mužík J, Sitányiová D (2016) A meshless solution of two dimensional multiphase flow in porous media. Eng Anal Bound Elem 70: 12-22.

[12] Musavi HS, Ashrafizaadeh M (2016) A Mesh-Free lattice boltzmann solver for flows in complex geometries. Int J Heat Fluid Fl 59: 10-19.

[13] Dehghan M, Abbaszadeh M (2016) Proper Orthogonal Decomposition Variational Multiscale Element Free Galerkin (POD-VMEFG) meshless method for solving incompressible Navier–Stokes equation. Comput Method Appl M 311: 856-888.

[14] Zhou Y (2017) A Sharp-Interface treatment technique for Two-Phase flows in meshless methods. Comput Fluids 147: 90-101.

[15] Benkhaldoun F, Halassi A, Ouazar D, Seaid M, Taik A (2017) A stabilized meshless method for Time-Dependent convection-dominated flow problems. Math Comput Simulat 137: 159-176.

[16] Bourantas GC, Loukopoulos VC, Chowdhury HA, Joldes GR, Millerc K, Bordasacd SPA (2017) An implicit potential method along with a meshless technique for incompressible fluid flows for regular and irregular geometries in 2D and 3D. Eng Anal Bound Elem 77: 97-111.

[17] Chen J, Zhang X, Zhang P, Deng J (2017) Variational multiscale element free galerkin method for natural convection with porous medium flow problems. Int J Heat Mass Tran 107: 1014-1027.

[18] Kosec G (2018) A local numerical solution of a fluid-flow problem on an irregular domain. Adv Eng Softw 120: 36-44.

[19] Reséndiz-Flores EO, Saucedo-Zendejo FR (2018) Meshfree numerical simulation of free surface thermal flows in mould filling processes using the finite pointset method. Int J Therm Sci 127: 29-40.

[20] Talat N, Mavrič B, Belšak G, Hatić V, Bajt S, Šarler B (2018) Development of meshless phase field method for two-phase flow. Int J Multiphas Flow 108: 169-180.

[21] Mahmoodabadi MJ, Mahmoodabadi F, Atashafrooz M (2019) Development of the meshless local Petrov-Galerkin method to analyze three-dimensional transient incompressible laminar fluid flow. J Serbian Soc Comput Mech 12 (2):128-152.

[۲۲] محمودآبادی م ج، شجاعی ف، آرسته ز (۱۳۹۷) تحلیل معادله شرودینگر وابسته به زمان سه بعدی به روش بدون المان پتروف-گالرکین محلی. پژوهش سیستم‌های بس ذره‌ای ۸(۱۷): ۵۸-۵۱.