



تحلیل تیر تابعی هدفمند با ضخامت متغیر تحت بارهای مکانیکی و حرارتی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

منوچهر محمدحسینی میرزائی^۱، محمد عارفی^{۲*} و عباس لقمان^۳

^۱ دانشجوی دکتری، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

^۲ دانشیار، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

^۳ استاد، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۲/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۵/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۰/۰۸

چکیده

در این مطالعه تحلیل ترموالاستیک تیرهای با ضخامت متغیر ساخته شده از مواد هدفمند تابعی انجام شده است. هندسه و شرایط مرزی تیر، مشابه پره توربین است. تیر تحت ترکیبی از نیروهای عرضی گسترده و نیروهای حجمی حاصل از چرخش آن حول محور عمود بر طول تیر و میدان مشخصی از درجه حرارت قرار دارد. در ریشه تیر، شرایط مرزی گیردار و در لبه آن، به صورت آزاد است. خواص مکانیکی و حرارتی در راستای طولی تیر به صورت توانی متغیر فرض می‌گردند. با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، روابط جابجایی- کرنش و قانون هوک، دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه دومی بدست می‌آید. به کمک روش بخش‌بندی، جابجایی‌های طولی و عرضی و تنش‌های طولی، برشی و موثر هر بخش حاصل شده است. برای شش توزیع ناهمگنی مختلف تحلیل انجام شد. بررسی نتایج مشخص نمود که در تیر ساخته شده با ماده هدفمند تابعی با پارامتر توزیع ناهمگنی مثبت و بزرگتر، جابجایی طولی و عرضی و تنش‌های طولی، برشی و موثر بیشینه، کمتر خواهد بود.

کلمات کلیدی: تیر ضخامت متغیر؛ مواد هدفمند تابعی؛ توزیع ناهمگنی؛ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT).

Analysis of Functionally Graded Beam with Variable Thickness using First-Order Shear Deformation Theory Subjected to Mechanical and Thermal Loads

M. Mohammad Hosseini Mirzaei¹, M. Arefi^{2,*}, A. Loghman³

¹ Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering., University of Kashan., Kashan, Iran.

² Associate. Prof., Department of Mechanical Engineering., University of Kashan., Kashan, Iran.

³ Prof., Department of Mechanical Engineering., University of Kashan., Kashan, Iran.

Abstract

In this research, thermoelastic analysis of the beams with variable thickness made of functionally graded materials (FGM) has been carried out. The beam geometry is similar to a turbine blade. Loading is composed of a transverse distributed force, a specific temperature field and an inertia body force due to rotation. Tip of the beam is free and root of the beam is fixed. Mechanical and thermal properties are assumed to be variable along the longitudinal direction of the beam based on the power law variation. Using first-order shear deformation theory, linear strain-displacement relations and Generalized Hooke's law, a system of second order differential equation is obtained. Using division method, differential equations are solved. For each division, longitudinal and transverse deflections and longitudinal, shear and effective stresses are obtained. For six different nonhomogeneous distributions, analyses were carried out based on the power law variation. The results show that beam made of FGM with positive and further index of non homogeneity, maximum longitudinal and transverse deflections and longitudinal, shear and effective stresses would be less.

Keywords: Variable Thickness Beam; Functionally Graded Materials (FGM); Distribution of Non homogeneity; First-order Shear Deformation Theory (FSDT).

۱- مقدمه

همزمان با طراحی موتورها، توربین‌های گازی و سایر ادوات مشابه مهندسان با چالش‌های بزرگی روبرو شدند. یکی از این چالش‌ها، تعیین دقیق تغییر شکل طولی الاستیک و ترموالاستیک پره ناشی از چرخش است؛ چراکه از یک سو نسبت معکوسی است، بین فاصله پره‌های توربین تا جداره موتور با ضریب کارآیی موتور و از سویی دیگر برخورد لبه‌های پره‌ها به جداره محفظه فاجعه بار است. مهندسان می‌خواستند با بهبود شکل و مشخصات پره‌ها، راندمان موتور و توربین را بالا ببرند. مستلزم این کار، داشتن تحلیل درستی از رفتار الاستیک، ترموالاستیک، دینامیکی و... پره‌ها است. به همین منظور تلاش‌ها برای چنین تحلیل‌های آغاز شد؛ همچنین اخیراً تحقیق و پژوهش در خصوص استفاده از مواد مدرج تابعی به‌جای سوپرآلیاژها در پره‌ها، مورد توجه قرار گرفته شده است؛ چراکه این مواد هم قیمت کمتری نسبت به سوپرآلیاژها داشته و هم خواص مکانیکی مطلوب‌تری دارند [۱]. در این مطالعه سعی شده برای تیر با ضخامت متغیر به‌عنوان المان نزدیک به شکل پره، حل شبه تحلیلی ارائه شود.

۱-۱- تحلیل تیرهای ساخته‌شده از مواد هدفمند تابعی

کاپانیا و راسیتی در مقاله‌ای مروری، مطالعات قبلی خود در زمینه تحلیل تیرها و صفحات لایه‌ای را گردآوری نمودند [۲]. آنها در بخشی از مرور کارهای قبلی، روی تئوری‌های برشی مختلف برای صفحات و تیرها بحث نمودند و در مرور خود به چندین روش تحلیل، بر پایه المان محدود اشاره کردند. یکی از روش‌های المان محدودی که آنها به آن اشاره نمودند، روش المان محدودی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا است. استفاده از تئوری تغییر شکل برشی باز هم مورد توجه محققان برای تحلیل تیرها، بالاخص تیرهای کامپوزیتی قرار گرفته است. بطوریکه شی و همکارانش مدل جدیدی براساس المان محدود برای تحلیل المان تیرهای کامپوزیتی ارائه دادند. جالب اینکه اصل و اساس این مدل، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی است [۳]. سنکر در پژوهشی

حل تحلیلی الاستیک برای تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی ارائه نمود. در پژوهش ایشان خواص مکانیکی مانند، مدول ینگ، مدول برشی و... تابعی از ضخامت تیر است. هرچند در این پژوهش، روش ارائه شده در تحلیل تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی قابل استفاده نیست که تقویت‌کننده در راستای طولی تیر توزیع شده باشد [۴]. به روش مشابهی ایشان و همکارش، تنش‌های حرارتی در تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی را مورد بررسی و تحلیل قرار دادند. در اینجا نیز تقویت‌کننده در جهت ضخامت متغیر است [۵]. در تحقیق دیگری چاکروباتی و همکارانش، تیر سه لایه‌ای را به روش المان محدود، مورد بررسی قرار دادند [۶]. این تیر از دو لایه ماده هموزن متفاوت در سطوح بالا و پایین و یک هسته ساخته شده از ماده مدرج تابعی تشکیل شده است. در این تحقیق نیز، خواص تابعی از ضخامت هسته است؛ همچنین کادولی و همکارانش، تحلیل استاتیکی برای تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی به کمک تئوری تغییر شکل برشی ارائه کردند [۷]. آنها در بخشی از تحقیقات خود مقایسه‌ای بین نتایج استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه‌های بالاتر انجام دادند و به این نتیجه رسیدند که تفاوت نتایج بسیار اندک و ناچیز است. در مطالعه مشابه دیگری لی، فرمول‌بندی برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیرهای مدرج تابعی اوپلر-برنولی و تیموشینکو ارائه کرد [۸]. ایشان به کمک این فرمول‌بندی، مودهای ارتعاشی تیر را به صورت تحلیلی بدست آورده و گزارش کردند. تحقیقات روی کماتش حرارتی تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی، توسط کیانی و همکارش انجام شده است. در اینجا نیز تقویت‌کننده در ضخامت تیر متغیر در نظر گرفته شده است [۹]. این پژوهش برای شرایط مرزی گوناگون تحت توزیع‌های حرارتی مختلف بررسی شده است. ژو و همکارش تحلیل دو بعدی ترموالاستیک تیرهای هموزن با ضخامت‌های متغیر تحت نیروهای ترمومکانیکی برای شرایط مرزی ساده ارائه کرده‌اند [۱۰]. آنها در ابتدا سری‌های هارمونیک با ضرایب مجهول برای توزیع دما و تنش فرض کرده و سپس به کمک شرایط مرزی بالا و پایین سطوح و شرایط مرزی ساده، ضرایب مذکور را اخذ کردند. سپس تحلیل خود را به کمک المان محدود اعتبارسنجی نمودند. در مقاله دیگری نگوبین و

¹ Higher-order Shear Deformation Theory

مرکب ارائه کردند [۱۵]. آنها روش خود را با تحلیل المان محدود مقایسه و اعتبارسنجی نمودند؛ همچنین به کمک روش توسعه داده شده در پژوهش خود، توانستند تحلیل استاتیکی روی تیرهای دوزنقه‌ای شکل با سطح مقطع I شکل ارائه دهند.

در این پژوهش تیر ساخته شده از مواد هدفمند تابعی با ضخامت متغیر تحت بارهای مکانیکی و حرارتی، به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. ماده هدفمند تابعی برخلاف مطالعات قبلی که به آنها اشاره شد، در جهت طولی تیر دارای خواص تابعی هستند. نوآوری این مطالعه تحلیل الاستیک و ترموالاستیک تیرهای با ضخامت متغیر (با هر رابطه دلخواهی برای ضخامت) ساخته شده از مواد مدرج تابعی است که تقویت‌کننده در راستای طولی تیر توزیع شده است. در اینجا محدودیتی برای شکل توزیع تقویت‌کننده وجود نداشته و تحلیل برای هر نوع توزیعی با هر تابعی بر حسب طول تیر قابل انجام است.

۲- هندسه تیر، بارگذاری و شرایط مرزی

در این پژوهش رفتار ماده الاستیک خطی و تغییر شکل‌ها کوچک در نظر گرفته شده است؛ همچنین تیر ضخیم و نسبت به تاریخچه متقارن است. توزیع خواص مکانیکی و حرارتی شامل، مدول الاستیک و برشی، چگالی و ضریب انبساط حرارتی به صورت توانی فرض می‌گردند. بر اساس این فرض، توزیع خواص را می‌توان مشابه رابطه مورد استفاده در مرجع [۱] به صورت رابطه (۱) توصیف کرد.

$$M(x) = M_{root} \left(\frac{x + r_0}{r_0} \right)^n \quad (1)$$

در این رابطه $M(x)$ خاصیت مورد نظر در محل x تیر، M_{root} مقدار همان خاصیت در ریشه تیر و n ثابت ناهمگنی است. این تیر تحت نیروهای حجمی حاصل از گردش حول محور عمود بر مقطع طولی و همچنین نیروهای گسترده با تابع مشخصی بر حسب طول تیر و عمود بر محور طولی تیر و خلاف جهت چرخش تیر قرار دارد. یک انتهای تیر در همه جهات به صورت گیردار بوده و سمت دیگر آن آزاد است. تیر در میدان درجه حرارت مشخصی قرار دارد که تابع موقعیت در راستای طولی تیر است. چون این تیر در واقع شبیه‌سازی

همکارانش، روشی برای تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه کردند. آنها توزیع تقویت‌کننده را در راستای ضخامت به صورت رابطه‌ای توانی فرض کردند. آنها تاثیر ضریب توانی رابطه خواص مواد مدرج تابعی بر تغییر شکل‌ها، تنش‌ها، فرکانس‌های طبیعی، نیروهای بحرانی کم‌انرژی و منحنی نیرو-فرکانس مربوط به مودهای ارتعاشی را بررسی و گزارش کردند [۱۱]. نیکنام و همکارانش، خمش غیر خطی تیر دوزنقه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت نیروهای حرارتی و مکانیکی را مورد بررسی و تحقیق قرار دادند [۱۲]. آنها همانند پژوهش‌های قبل که در اینجا توضیح داده شد، تقویت‌کننده را در راستای ضخامت، متغیر فرض نمودند و حل تحلیلی بسته‌ای برای حالتی ارائه کرده‌اند که نیروی محوری وجود ندارد. آنها مجبور شدند، برای حالت عمومی‌تر که نیروی محوری نیز در راستای تیر وجود دارد، از تکنیک گلرکین^۱ یا روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته^۲ برای کفایت معادلات استفاده کنند. در نهایت نتایج دو روش را با هم مقایسه کردند. با بررسی مطالعات قبلی مشاهده می‌شود که استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای تحلیل المان‌های مشهور مانند، دیسک‌ها، استوانه‌ها، ورق‌ها و تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند، تابعی سودمند و راهگشا است. عارفی و همکارانش در مقاله‌ای تاثیر نیروهای متغیر حرارتی و مکانیکی را روی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند تابعی، به کمک این تئوری بررسی کردند [۱۳]. حشمتی و دانشمند تاثیر ناخالصی روی ارتعاش تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار دادند [۱۴]. در این مطالعه، تقویت‌کننده در راستای ضخامت تیر به صورت هدفمند توزیع شده است و ضخامت تیر به صورت متغیر فرض گردید. آنها با این مطالعه به این نتیجه رسیدند که حصول مودهای ارتعاشی و فرکانس‌های مختلف برای تیر با تغییر در ضخامت آن قابل دستیابی است. زاپینو و همکارانش در مطالعه‌ای به کمک فرمولبندی ترکیبی کاررا، تحلیل استاتیکی برای سازه‌های جدارضخیم دوزنقه‌ای شکل ساخته شده از مواد

^۱ Galerkin technique

^۲ Generalized Differential Quadrature (GDQ)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= E(x)\varepsilon_{xx} = E(x) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} + \alpha T(x) \right] \\ \tau_{xz} &= G(x)\gamma_{xz} = G(x) \left[\psi(x) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (۴)$$

تغییرات انرژی کرنشی با توجه به اصل کار مجازی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A \int_Z (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dA \\ &= \int_A \int_Z \left(\sigma_{xx} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \delta \psi(x)}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\delta \psi(x) + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) \right) dz dA \\ &= \int_A \left(N_{xx} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + M_{xx} \frac{\partial \delta \psi(x)}{\partial x} + N_{xz} \delta \psi(x) + N_{zz} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \right) dA \end{aligned} \quad (۵)$$

که نیروهای محوری و لنگر خمشی بر حسب منته‌جه‌های تنش با توجه به متغیر بودن خواص مکانیکی و حرارتی در راستای طول، برابرند با:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int \sigma_{xx} dz = \left[\int E(x) dz \right] \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ &\quad + \left[\int z E(x) dz \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} + \int E(x) \alpha(x) T(x) dz \\ Q_x &= \int \tau_{xz} dz = \left[\int G(x) dz \right] \left[\psi(x) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \\ M_{xx} &= \int z \sigma_{xx} dz = \left[\int z E(x) dz \right] \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ &\quad + \left[\int z^2 E(x) dz \right] \frac{\partial \psi}{\partial x} + \int E(x) \alpha(x) T(x) z dz \end{aligned} \quad (۶)$$

از پره‌های توربین است و شرایط بارگذاری و مرزی مشابه پره‌های توربین فرض شده است [۱۶]، لذا نیروهای گسترده معرف نیروهای آئرودینامیکی و همچنین نیروهای حجمی، ناشی از گردش توربین می‌باشند. در شکل ۱ طرح‌واره‌ای از تیر مذکور نشان داده شده است. طول تیر با L نمایش داده شده است. تغییرات ضخامت تیر به کمک رابطه $h(x)$ بیان می‌شود. این رابطه در واقع معرف شکل سطوح بالایی و پایینی تیر است. مقدار این رابطه در $x=L$ برابر t_t و در $x=0$ برابر t_r است. فاصله t_r با محور دوران r_0 است.

۳- معادلات حاکم و روش تحلیل

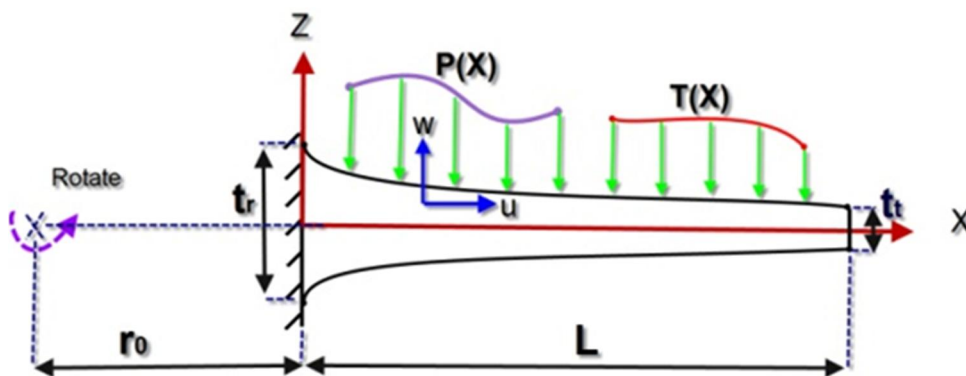
در این بخش به کمک روش تغییر شکل برشی مرتبه اول حل الاستیک تیر مذکور انجام می‌شود. جابجایی در جهات x و y مطابق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مطابق رابطه (۲) است [۱۷].

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) + z\psi(x) \\ w(x, z) = w_0(x) \end{cases} \quad (۲)$$

در اینجا $u_0(x)$ جابجایی طولی تار خنثی بوده و $w_0(x)$ جابجایی عرضی تار خنثی در جهت ضخامت است؛ همچنین $\psi(x)$ زاویه‌ی چرخش خط عمود بر تار خنثی نسبت به صفحه میانی است. کرنش‌ها بر اساس روابط سینماتیک به شکل رابطه (۳) است [۱۷].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} + \alpha T(x) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \psi(x) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (۳)$$

تنش‌ها روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد عبارتند از [۱۷]:



شکل ۱- طرح‌واره تیر

(۱۲)، به علت وابستگی ثابت‌ها به x ، از روش شبه‌تحلیلی بخش‌بندی^۲ کمک گرفته می‌شود [۱۹]. در این روش مقطع تیر در جهت x به تعداد مشخصی، تقسیم‌بندی می‌شود. روش شبه‌تحلیلی بخش‌بندی روشی برای حل دستگاه‌ها و معادلات دیفرانسیل با ثوابت متغیر و وابسته به متغیر مستقل است که دارای حل تحلیلی نیستند. در این روش با تقسیم‌بندی دامنه حل به قطعات متناهی و حصول ثوابت برای هر بخش، دستگاه معادلات دیفرانسیل با ثوابت متغیر به دستگاه معادلات با ثوابت مشخص و معین تبدیل می‌شود [۱۹-۲۳] طرح‌واره‌ای از تقسیم‌بندی تیر در شکل ۲ نمایش داده شده است.

برای مرکز هر بخش ثابت‌ها بدست می‌آیند و مختص آن بخش، دستگاه معادلات رابطه (۱۲) تشکیل شده و به کمک شرایط مرزی محلی که در روابط (۱۳) معرفی شده‌اند و شرایط مرزی ابتدایی و انتهایی که در معادلات (۱۴) نشان داده شده است، ثابت‌ها برای هر بخش حاصل می‌شوند. با داشتن ثابت‌ها برای هر قسمت، جابجایی‌ها، تنش‌ها و کرنش‌ها حاصل می‌گردند. شرایط مرزی محلی که با توجه به شرط پیوستگی حاصل شده‌اند، عبارتند از:

$$\begin{aligned} u\left(x^k + \frac{t^k}{2}\right) &= u\left(x^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}\right) \\ \psi\left(x^k + \frac{t^k}{2}\right) &= \psi\left(x^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}\right) \\ w\left(x^k + \frac{t^k}{2}\right) &= w\left(x^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}\right) \\ u_{,x}\left(x^k + \frac{t^k}{2}\right) &= u_{,x}\left(x^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}\right) \\ \psi_{,x}\left(x^k + \frac{t^k}{2}\right) &= \psi_{,x}\left(x^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}\right) \\ w_{,x}\left(x^k + \frac{t^k}{2}\right) &= w_{,x}\left(x^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

کار نیروهای خارجی بصورت رابطه (۷) است.

$$\begin{aligned} W &= - \int_z \left(F_1(x)u(x, z) + F_2(x)\psi + F_3(x)w(x, z) \right) dx \\ &= - \int_z \left(\omega^2 \rho(x)h(x)[r_0 + x]u(x, z) + F_2(x)\psi + P(x)w(x, z) \right) dx \end{aligned} \quad (7)$$

که

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ F_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \rho(x)h(x)[r_0 + x] \\ 0 \\ -P(x) \end{bmatrix} \quad (8)$$

با توجه به رابطه (۸)، تغییرات کار خارجی بصورت معادله (۹) بیان می‌شود.

$$\delta W = - \int_z \left(F_1(x)\delta u(x, z) + F_2(x)\delta \psi + F_3(x)\delta w(x, z) \right) dx \quad (9)$$

بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است [۱۸]، یعنی:

$$\delta U = \delta W \quad (10)$$

با توجه به رابطه (۵) و استفاده از اصول حساب تغییرات^۱، روابط (۱۱) برای معادلات حاکم و شرایط مرزی بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + A_5(x)T(x) = F_1(x) \\ -\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + N_{xz} = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + A_6(x)T(x) = F_3(x) \end{cases} \quad \text{B.C} \begin{cases} N_{xx}\delta u_0|_{x=0} = 0 \\ M_{xx}\delta \psi|_{x=0} = 0 \\ Q_x\delta w|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

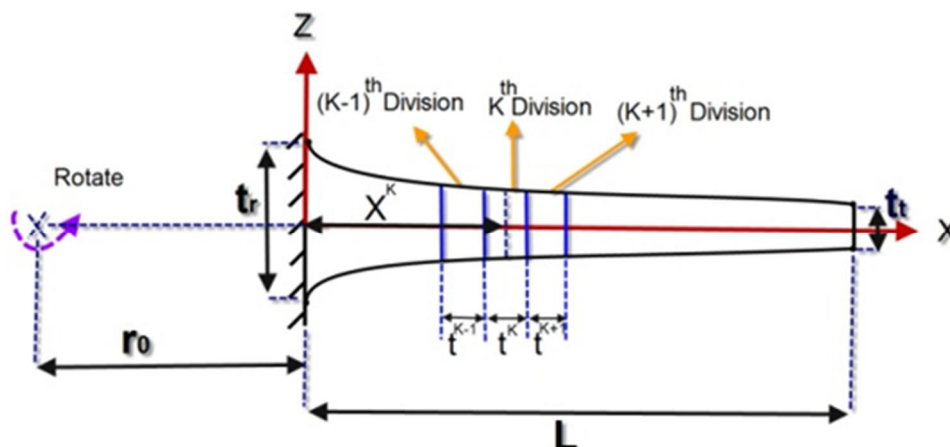
با جایگذاری رابطه (۶) در رابطه (۱۱)، روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} A_1(x)u_{,xx} + A_2(x)\psi_{,xx} + A_5(x)T(x) &= F_1(x) \\ -A_2(x)u_{,xx}(x) - A_4(x)\psi_{,xx}(x) + A_3(x)\psi(x) + A_3(x)w_{,x}(x) &= 0 \\ A_3(x)\psi_{,x}(x) + A_3(x)w_{,xx}(x) + A_6(x)T(x) &= F_3(x) \end{aligned} \quad (12)$$

که $A_i(x) (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ در بخش ضمیمه ارائه شده است. برای حل دستگاه سه معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم رابطه

² Division Method

¹ Variational Calculu



شکل ۲- طرح‌واره بخش‌بندی تیر در راستای طولی

بخش قبل، تحلیل انجام می‌شود. تابع مفروض منحنی‌های سطوح بالا و پایین برحسب میلیمتر که با $f(x)$ و $-f(x)$ نمایش داده شده‌اند، به ترتیب در روابط (۱۶) و (۱۷) آورده شده است.

$$f(x) = 0.0002x^2 - 0.0735x + 15 \quad (16)$$

$$-f(x) = -0.0002x^2 + 0.0735x - 15 \quad (17)$$

با توجه به تابع منحنی‌های سطوح، $h(x)$ که ضخامت در هر نقطه از تیر را نشان می‌دهد، به شکل رابطه (۱۸) بیان می‌شود.

$$h(x) = 2f(x) = 0.0004x^2 - 0.1470x + 30 \quad (18)$$

نیروی گسترده $P(x)$ و درجه حرارت $T(x)$ در اینجا از سمت ریشه تا نوک تیر، خطی و افزایشنده فرض شده و به ترتیب مطابق روابط (۱۹) و (۲۰) در نظر گرفته می‌شوند.

جدول ۱- خواص مکانیکی و حرارتی [۲۰]

مقدار	خاصیت (واحد)
۷۰	E_i (GPa)
۲۷	G_i (GPa)
$23/1 \times 10^{-6}$	$(K^{-1}) \alpha_T$
۲۷۰۰	ρ_T (kgm ⁻³)

و شرایط مرزی ابتدایی و انتهایی تیر عبارتند از:

$$B.c: \begin{cases} u = 0 \\ \psi = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad x = 0$$

$$B.c: \begin{cases} Q_x = \int \tau(x, z) dA = 0 \\ M_{xx} = \int z \sigma_{xx} dA = 0 \\ N_{xx} = \int \sigma_{xx} dA = 0 \end{cases} \quad x = L \quad (14)$$

با توجه به روش مذکور روابط (۱۲) به صورت روابط زیر بازنویسی می‌شود.

$$A_1(x^k)u_{,xx} + A_2(x^k)\psi_{,xx} + A_5(x^k)T(x^k) = F_1(x^k)$$

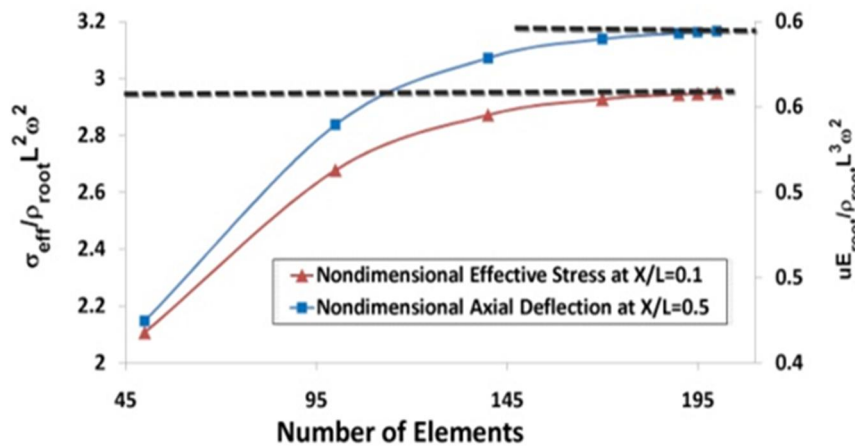
$$-A_2(x^k)u_{,xx}(x^k) - A_4(x^k)\psi_{,xx}(x^k) + A_3(x^k)\psi(x^k) + A_3(x^k)w_{,x}(x^k) = 0$$

$$A_3(x^k)\psi_{,x}(x^k) + A_3(x^k)w_{,xx}(x^k) + A_6(x^k)T(x^k) = F_3(x^k) \quad (15)$$

که ثابت‌ها $A_i(x_k)$ ($i=1,2,3,4,5,6$) در بخش پیوست آمده است. با این روش ثوابت متغیر و وابسته به x در دستگاه معادلات دیفرانسیلی (۱۲) به دستگاه معادلات دیفرانسیلی با ضرایب ثابت برای هر بخش تبدیل می‌گردند که این دستگاه برای هر بخش حل تحلیلی پیدا می‌کند.

۴- نتایج عددی و بحث و بررسی

در این بخش برای تیر ساخته شده از ماده هدفمند تابعی که ناهمگنی در راستای طولی است، به کمک روش بیان شده در



شکل ۳- تغییرات تنش موثر و جابجایی بر حسب تعداد اجزاء شبکه‌بندی در تحلیل اجزاء محدود

تخصیص مشخصات هر جزء ماده مرکب، از زیرروال آدر محیط برنامه‌نویسی فرترن و ارتباط آن با نرم‌افزار آباکوس استفاده می‌شود.

۴-۱- آزمون همگرایی

دو نقطه برای آزمون حساسیت انتخاب می‌شود:

نقطه $A = \frac{x}{L} = 0.1$ و $B = \frac{x}{L} = 0.5$. برای یافتن تعداد اجزاء مناسب برای تحلیل دقیق، نمودار جابجایی بی‌بعد نقطه A و تنش موثر بی‌بعد در نقطه B، به تعداد اجزاء شبکه‌بندی ترسیم می‌گردد. این دو نقطه اختیاری می‌باشند، ولی چون در سمت ریشه تیر گرادیان تنش موثر بیشتر است، نقطه A برای بررسی همگرایی حل برای تنش انتخاب شده است. نتیجه این آزمون در شکل ۳ نمایش داده شده است. شکل ۳ گویای این واقعیت است که اگر تعداد اجزاء شبکه بیش از ۱۹۵ عدد انتخاب شود، همگرایی نتایج برای تحلیل المان محدود فراهم می‌شود.

۴-۲- مقایسه

در این بخش برای اعتبارسنجی تحلیل، نمودارهای توزیع جابجایی طولی و عرضی و تنش‌های موثر در دو حل اجزاء محدود و پژوهش جاری در تیر ساخته شده از ماده هدفمند تابعی با توزیع دلخواه مورد مقایسه قرار می‌گیرند. در اینجا

$$P(x) = 0.03x + 0.05 \quad (19)$$

$$T(x) = 0.5x + 600 \quad (20)$$

سرعت چرخش $\omega = 7000 \text{ rpm}$ ، $r_0 = 300 \text{ mm}$ و $L = 200 \text{ mm}$ است.

همچنین خواص مکانیکی و حرارتی ماده مفروض در جدول ۱ آورده شده است. این خواص متعلق به آلومینیوم است. توابع سطوح بالا و پایین در اینجا فرضی می‌باشند؛ همچنین رفتار افزایشی درجه حرارت و نیروهای گسترده از ریشه تا نوک در مراجع [۱۶، ۲۴] مشاهده می‌شود.

برای شش توزیع ناهمگنی ۱-، ۰، ۱، ۲، ۳، n توزیع جابجایی‌های طولی و عرضی و تنش‌های طولی، برشی و موثر توسط روش ارائه شده ترسیم می‌شود.

در ابتدا، برای یکی از توزیع‌ها اعتبارسنجی انجام می‌گردد. برای اعتبارسنجی این پژوهش از تحلیل اجزای محدود^۱ کمک گرفته می‌شود. با استفاده از نرم‌افزار آباکوس، جابجایی‌ها و تنش‌ها برای یکی از توزیع‌ها محاسبه و با توزیع متناظر بدست آمده از روش تحلیلی ارائه شده، مقایسه می‌گردند. برای شبکه‌بندی حل، از اجزاء یک‌بعدی CPS8R استفاده می‌شود [۲۵]. تحلیل به صورت دو بخش کوپل‌شده‌ی حرارتی و مکانیکی انجام می‌شود و نیروهای گریز از مرکز به صورت نیروهایی حجمی اعمال می‌گردند. برای سهولت تحلیل هنگام تقسیم‌بندی ضخامت به اجزای محدود و

² Subroutine

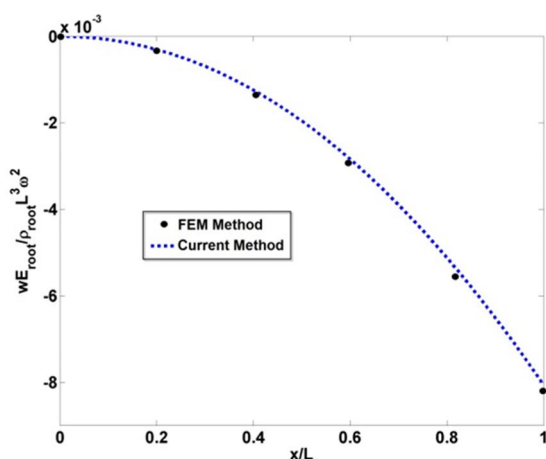
¹ Finite Element Method (FEM)

همانطور که در شکل ۷ مشخص است، در تیرهای ساخته شده از مواد هدفمند تابعی با ضریب ناهمگنی توانی مثبت، توزیع جابجایی‌های طولی تیر کمتر خواهد بود. به تبع آن جابجایی نوک تیر که از اهمیت فراوانی برای طراحان برخوردار است، در این حالت کمتر خواهد بود. هرچقدر ضریب ناهمگنی ماده هدفمند افزایش یابد، افزایش طولی کمتری در تیر دیده می‌شود. توزیع جابجایی عرضی تیر نیز، وضعیتی مشابه توزیع جابجایی طولی تیر دارد. شکل ۸ نشان می‌دهد که با افزایش ضریب توانی ناهمگنی ماده، جابجایی عرضی تیر کاسته می‌شود. شکل ۹ نشان می‌دهد که با تغییر

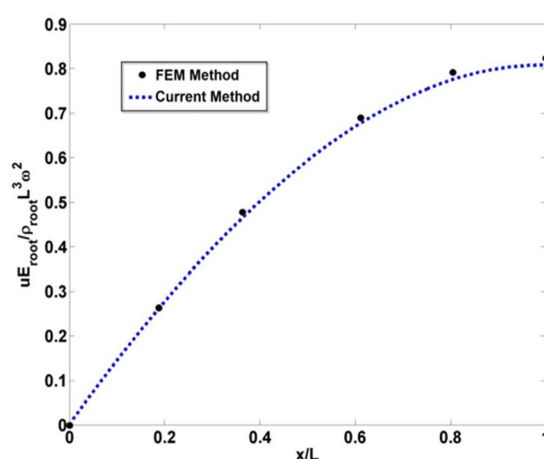
توزیع ناهمگنی $n=2$ فرض می‌شود. مقایسه در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند.

با توجه به شکل‌های ۴، ۵ و ۶ مشخص است که تطابق خوبی بین روش ارائه شده در این مطالعه و روش المان محدود، چه از لحاظ مقدار و چه از لحاظ رفتار وجود دارد. بیشینه خطا در شکل ۴، ۵ و ۶ به ترتیب برابر $1/7$ ، $1/6$ و $1/5$ درصد است.

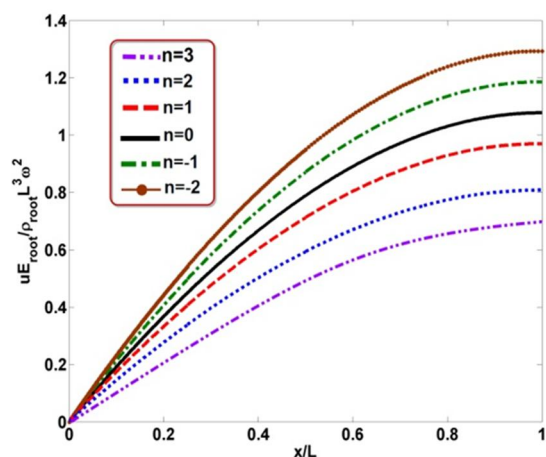
شکل‌های ۷ تا ۱۱ به ترتیب جابجایی طولی، جابجایی عرضی، تنش طولی، تنش برشی و تنش موثر هر شش توزیع که به صورت بی‌بعد شده‌اند، نمایش می‌دهند.



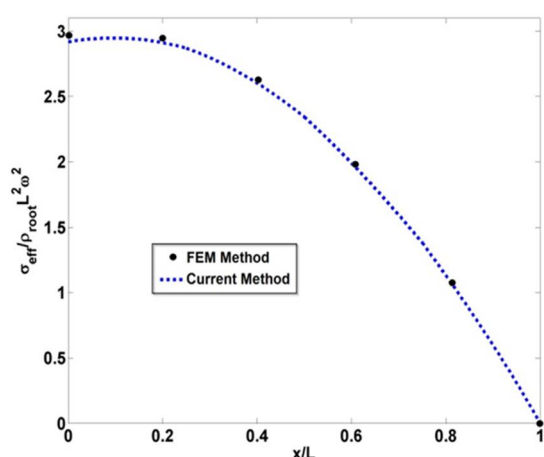
شکل ۵- مقایسه توزیع جابجایی عرضی در تحلیل اجزاء محدود و پژوهش جاری



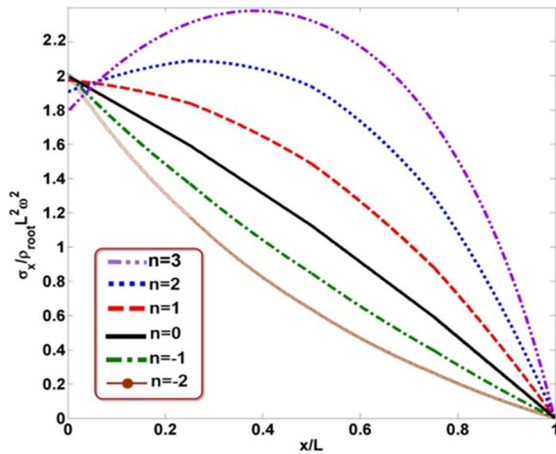
شکل ۴- مقایسه توزیع جابجایی طولی در تحلیل اجزاء محدود و پژوهش جاری



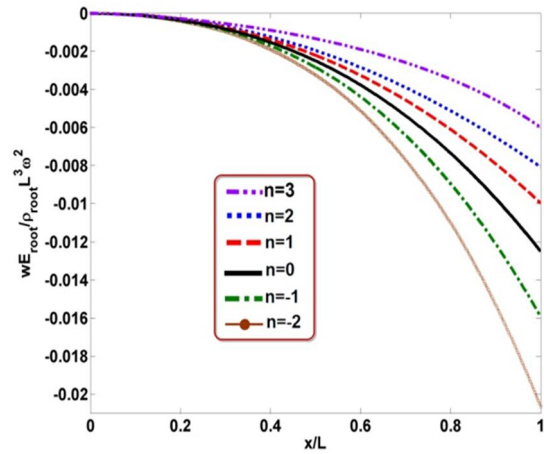
شکل ۷- توزیع جابجایی طولی در امتداد طول تیر



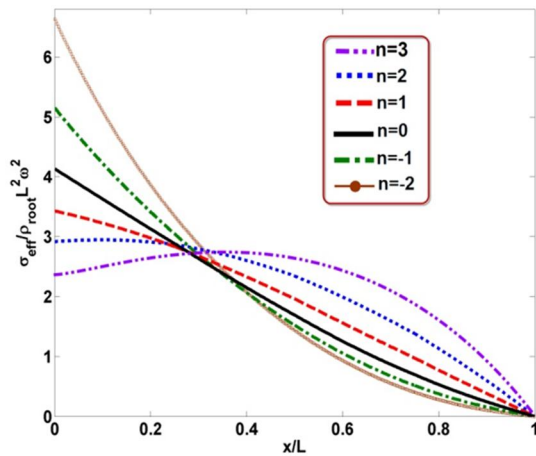
شکل ۶- مقایسه توزیع تنش موثر ترموالاستیک در تحلیل اجزاء محدود و پژوهش جاری



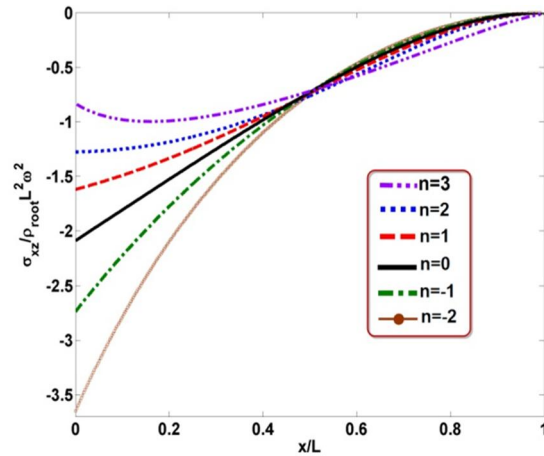
شکل ۹- توزیع تنش طولی ترموالاستیک در امتداد طول تیر



شکل ۸- توزیع جابجایی عرضی در امتداد طول تیر



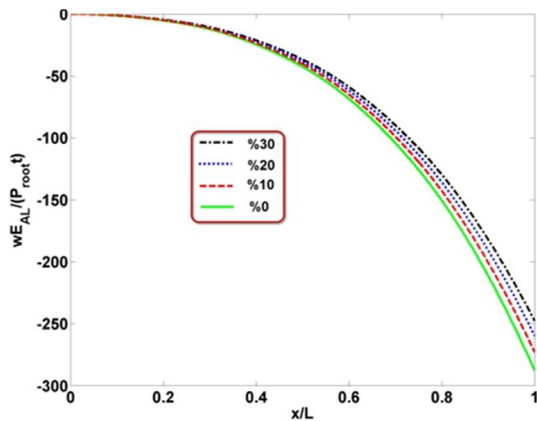
شکل ۱۱- توزیع تنش موثر ترموالاستیک در امتداد طول تیر



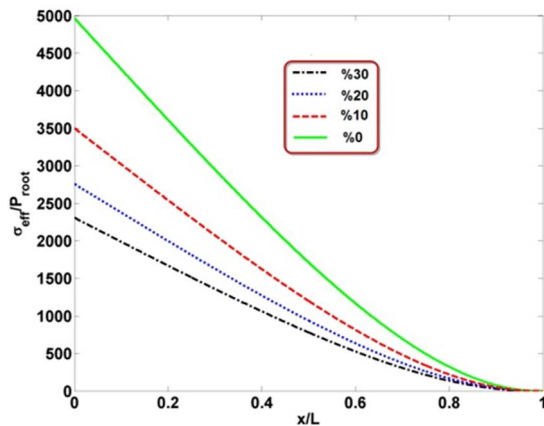
شکل ۱۰- توزیع تنش برشی ترموالاستیک در امتداد طول تیر

مشخص است. با تغییر ضریب ناهمگنی ماده هدفمند تابعی از ۲- تا ۲، مقدار بیشینه تنش موثر کمتر از نصف می‌شود که این برای طراحان بسیار مهم است. $n=0$ بیانگر ثابت بودن خواص در سرتاسر طول تیر است، این خواص همان خواص ریشه تیر است. مثلاً در اینجا چون خواص ریشه تیر آلومینیوم خالص فرض شده است، در نتیجه تیر هموزن ساخته‌شده از آلومینیوم خالص تحلیل گردیده است. در $n=\infty$ چون مقدار حد داخل پرنانز بینهایت می‌گردد، از لحاظ فیزیکی و تئوری بی‌معنی می‌شود. در $n=-\infty$ چون حد داخل پرنانز صفر می‌گردد، در اینجا نیز مقدار کلیه خواص صفر گردیده و از لحاظ فیزیکی و تئوری بی‌معنی می‌شود.

علامت ضریب ناهمگنی، جهت تقعر نمودار توزیع تنش طولی عوض می‌شود. در ضرایب منفی تقعر رو به بالا و ضرایب مثبت، تقعر رو به پایین است. حتی با تغییر ضریب ناهمگنی، امکان تغییر محل بیشینه تنش طولی در تیر وجود دارد، مثلاً در ضریب $n=2$ بیشینه تنش طولی در نقطه بی‌بعد 0.25 است؛ همچنین شکل ۱۰ نشان می‌دهد که هرچقدر ضریب ناهمگنی افزایش می‌یابد، بیشینه تنش برشی که در ریشه تیر است، کاهش می‌یابد. در اینجا مقدار بیشینه تنش برشی برای $n=2$ تقریباً $2/8$ برابر $n=2$ است. شکل‌های ۹ و ۱۰ بیان‌گر این واقعیت هستند که با تغییر ضریب ناهمگنی، می‌توان کنترل خوبی روی مقدار بیشینه تنش‌ها بالاخص تنش موثر داشت. این نتیجه مهم در شکل ۱۱ به‌خوبی



شکل ۱۲- توزیع جابجایی عرضی برای تیر با ضخامت یکنواخت در امتداد طول تیر



شکل ۱۳- توزیع تنش موثر الاستیک برای تیر با ضخامت یکنواخت در امتداد طول تیر

به کمک تئوری برشی مرتبه اول، معادلات حاکم استخراج شد و سپس به روش شبه تحلیلی بخش بندی و به کمک شرایط مرزی پیوستگی در مرز مشترک هر بخش و شرایط مرزی کلی ابتدا و انتهای تیر، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل جداگانه برای هر قسمت حل شد. در نهایت توزیع جابجایی‌ها و تنش‌ها برای کل تیر محاسبه و ترسیم شد. قابل ذکر است که در این مطالعه توزیع ناهمگنی به صورت توانی فرض گردید. لیکن از لحاظ روش ارائه شده، محدودیتی برای توصیف ناهمگنی وجود ندارد. شش توزیع ۰، ۱، ۲، ۳= n مورد بررسی قرار گرفت و برای هر توزیع ناهمگنی، جابجایی‌های طولی و عرضی و تنش‌های طولی، برشی و موثر ترسیم شد. با توجه به نتایج برای این توزیع

در ادامه برای تیر کامپوزیتی با ضخامت ثابت تحلیل انجام می‌گیرد که تقویت‌کننده بصورت یکنواخت و با درصدهای ۰، ۱۰، ۲۰ و ۳۰ است. رابطه نیروی گسترده بصورت رابطه ذیل است.

$$P(x) = -0.06x^2 + 0.05 + 0.01 \quad (21)$$

همچنین ضخامت تیر ثابت و برابر ۲۶ میلی‌متر و $L=200\text{mm}$ فرض می‌گردند.

شکل‌های ۱۲ و ۱۳ به ترتیب توزیع جابجایی عرضی و تنش‌های موثر را نمایش می‌دهند.

با توجه به بحث‌های انجام شده مشخص است که استفاده از هدفمند از تقویت‌کننده چقدر می‌تواند در کاهش تنش‌ها و جابجایی‌ها موثر باشد. از کاربردهای صنعتی این پژوهش می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد.

- ۱- تخمین تنش‌های طولی، برشی و موثر و جابجایی‌های عرضی و بالاخص طولی در پره‌های ساده توربین‌ها
- ۲- استفاده هدفمند از تقویت‌کننده برای کاهش تنش‌ها و یا جابجایی‌ها، به‌خصوص جابجایی طولی نوک پره‌ها
- ۳- تعیین محل بیشینه تنش برای تعیین بازرسی‌های دوره‌ای جهت جلوگیری از پدیده‌های تخریب مثل خزش یا خوردگی تنش و ...
- ۴- بررسی تغییرات هندسی پره‌های ساده روی تنش‌ها و جابجایی‌ها
- ۵- بررسی اثر نیروهای حجمی و آنرویدینامیکی و حرارت بطور انفرادی یا توأمان روی تنش‌ها و جابجایی‌های پره‌های ساده

۸- نتیجه‌گیری

در این مطالعه تحلیل تیرهای با ضخامت متغیر، ساخته شده از مواد هدفمند تابعی تحت بارهای مکانیکی و حرارتی انجام شده است. ناهمگنی هدفمند، برخلاف بیشتر پژوهش‌های مشابه قبلی، در راستای طولی تیر واقع شده است. شرایط بارگذاری و مرزی تیر مشابه پره‌های توربین‌ها و ادوات مشابه فرض شده است. تیر تحت بار گسترده و در میدان حرارتی مشخص که تابع طول تیر است، قرار دارد. ابتدای تیر (ریشه پره) در همه جهات گیردار و انتهای تیر (لبه پره) آزاد است.

$$A_4(x) = \int_{-0.5h(x)}^{0.5h(x)} z^2 E(x) dz$$

$$A_5(x) = \int_{-0.5h(x)}^{0.5h(x)} E(x) \alpha(x) dz$$

$$A_6(x) = \int_{-0.5h(x)}^{0.5h(x)} E(x) \alpha(x) z dz$$

$$A_i(x^k) (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$A_1(x^k) = \int_{-0.5h(x^k)}^{0.5h(x^k)} E(x^k) dz$$

$$A_2(x^k) = \int_{-0.5h(x^k)}^{0.5h(x^k)} z E(x^k) dz$$

$$A_3(x^k) = \int_{-0.5h(x^k)}^{0.5h(x^k)} G(x^k) dz$$

$$A_4(x^k) = \int_{-0.5h(x^k)}^{0.5h(x^k)} z^2 E(x^k) dz$$

$$A_5(x^k) = \int_{-0.5h(x^k)}^{0.5h(x^k)} E(x^k) \alpha(x^k) dz$$

$$A_6(x^k) = \int_{-0.5h(x^k)}^{0.5h(x^k)} E(x^k) \alpha(x^k) z dz$$

۱۱- مراجع

- [1] Oh Y, Yoo HH (2016) Vibration analysis of rotating pretwisted tapered blades made of functionally graded materials. *Int J Mech Sci* 119: 68-79.
- [2] Kapania RK, Raciti S (1989) Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part I - Shear effects and buckling. *AIAA J* 27(7): 923-935.
- [3] Shi G, Lam KY, Tay TE (1998) On efficient finite element modeling of composite beams and plates using higher-order theories and an accurate composite beam element. *Compos Struct* 41(2): 159-165.
- [4] Sankar BV (2001) An elasticity solution for functionally graded beams. *Compos Sci Tech* 61(5): 689-696.
- [5] Sankar BV, Tzeng JT (2002) Thermal Stresses in Functionally Graded Beams. *AIAA J* 40(6): 1228-1232.

ناهمگنی، مشخص شد در توزیع با توان بیشتر، جابجایی‌ها و تنش‌ها مقدار کمتری خواهند داشت. برای صحت‌گذاری تحلیل یکی از توزیع‌های ناهمگنی به روش المان محدود تحلیل و با نتایج روش ارائه‌شده در این مطالعه مقایسه گردید. مشخص شد، تطابق خوبی در نتایج بین دو روش وجود دارد.

۹- فهرست علائم

ثابت ناهمگنی ماده هدفمند تابعی	n
دما در هر نقطه تیر (°K)	T(x)
فشار (MPa)	P(x)
طول تیر (mm)	L
مقدار خاصیت در نقطه x تیر	M(x)
مقدار خاصیت در ریشه تیر	M _{root}
فاصله ریشه تیر تا محور دوران (mm)	r _o
مدول الاستیسیته ریشه تیر (GPa)	E _r
مدول برشی ریشه تیر (GPa)	G _r
ضریب انبساط حرارتی ریشه تیر (K ⁻¹)	α _r
چگالی ریشه تیر (kgm ⁻³)	ρ _r
سرعت دورانی چرخش تیر (rpm)	ω

۱۰- پیوست

$$A_i(x) (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$A_1(x) = \int_{-0.5h(x)}^{0.5h(x)} E(x) dz$$

$$A_2(x) = \int_{-0.5h(x)}^{0.5h(x)} z E(x) dz$$

$$A_3(x) = \int_{-0.5h(x)}^{0.5h(x)} G(x) dx$$

- [17] Zenkour AM (2009) The effect of transverse shear and normal deformations on the thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates. *International J Appl Mech* 1(04): 667-707.
- [18] Arefi M, Zenkour AM (2017) Size-dependent electro-elastic analysis of a sandwich microbeam based on higher-order sinusoidal shear deformation theory and strain gradient theory. *J Intel Mater Syst Struct* 0(0): 1045389X17733333.
- [19] Kordkheili SAH, Naghdabadi R (2007) Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk. *Compos Struct* 79(4): 508-516.
- [20] Loghman A, Ghorbanpour Arani A, Shajari A R, Amir S (2011) Time-dependent thermoelastic creep analysis of rotating disk made of Al-SiC composite. *Arch Appl Mech* 81(12): 1853-1864.
- [21] Loghman A, Hammami M, Loghman E (2017) Effect of the silicon-carbide micro- and nanoparticle size on the thermo-elastic and time-dependent creep response of a rotating Al-SiC composite cylinder. *J Appl Mech Tech Phys* 58(3): 443-453.
- [۲۲] لقمان ع، اعظمی م، تورنگ ح (۲۰۱۶) تحلیل الکترومگنتوترومکانیک دیسک دوار پلیمری هوشمند تقویت شده با نانولوله‌های کربنی چندجداره با رفتار غیرخطی. *مجله مکانیک سازه‌ها و سازه‌ها* ۱۰۸-۹۷ (۲): ۶.
- [۲۳] محمدی هویه ه، صفری م، لقمان ع (۲۰۱۸) تحلیل خزش وابسته به زمان و پیش بینی عمر خزشی استوانه های چرخان توخالی ساخته شده از فولاد آلیاژی به کمک معادله ساختاری گستره تتا و پارامترشکست لارسن میلر. *مجله مهندسی مکانیک امیرکبیر* ۶۷۳-۶۸۴ (۴): ۴۹.
- [24] Poursaeidi E, Aieneravaie M, Mohammadi MR (2008) Failure analysis of a second stage blade in a gas turbine engine. *Eng Fail Anal* 15(8): 1111-1129.
- [25] ABAQUS Documentation User's Manual.
- [6] Chakraborty A, Gopalakrishnan S, Reddy J N (2003) A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *Int J Mech Sci* 45(3): 519-539.
- [7] Kadoli R, Akhtar K, Ganesan N (2008) Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Appl Math Modelling* 32(12): 2509-2525.
- [8] Li XFA (2008) Unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams. *J Sound Vib* 318(4): 1210-1229.
- [9] Kiani Y, Eslami MR (2010) Thermal buckling analysis of functionally graded material beams. *Int J Mech Materi Design* 6(3): 229-238.
- [10] Xu Y, Zhou D (2012) Two-dimensional thermoelastic analysis of beams with variable thickness subjected to thermo-mechanical loads. *Appl Math Modelling* 36(12): 5818-5829.
- [11] Nguyen TK, Vo TP, Thai HT (2013) Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Compos B: Eng* 55 147-157.
- [12] Niknam H, Fallah A, Aghdam MM (2014) Nonlinear bending of functionally graded tapered beams subjected to thermal and mechanical loading. *Int J Nonlinear Mech* 65: 141-147.
- [13] Arefi M, Faegh RK, Loghman A (2016) The effect of axially variable thermal and mechanical loads on the 2D thermoelastic response of FG cylindrical shell. *J Therm Stresses* 39(12): 1539-1559.
- [14] Heshmati M, Daneshmand F (2018) Vibration analysis of non-uniform porous beams with functionally graded porosity distribution. *Proc Inst Mech Eng, Part L: J Mater: Design Appl* 1464420718780902.
- [15] Zappino E, Viglietti A, Carrera E (2018) Analysis of tapered composite structures using a refined beam theory. *Compos Struct* 183 42-52.
- [16] Poursaeidi E, Bakhtiari H (2014) Fatigue crack growth simulation in a first stage of compressor blade. *Eng Fail Anal* 45(Supplement C): 314-325.